VI. Die Riemannsche Vermutung.

In seinem Artikel von 1859, dem einzigen zu einem zahlentheoretischen Thema, beschreibt Riemann ohne Beweise eine Reihe von Eigenschaften der Zeta-Funktion wie die Partialbruchzerlegung und die Nullstellen-Formel 5.6.(2). Bewiesen sind seine Aussagen, sieht man einmal von der genauen Gestalt des Fehlergliedes in 5.6(2) ab, bislang alle außer der Annahme, daß alle nichttrivialen Nullstellen auf der Vertikalen $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

6.1. Riemannsche Vermutung ("RV"; Riemann, 1859).

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}.$$

Riemann schreibt: "Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen. Ich habe indes die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien". Aus seinem Artikel und aus den nachgelassenen Schriften kann man nichts weiter über Nullstellen-freie Gebiete entnehmen.

Die Riemannsche Vermutung gehört ohne Zweifel zu den bedeutendsten bis heute unentschiedenen mathematischen Problemen. Vieles spricht dafür, daß Riemann richtig vermutet hat.

1. Die ersten 400 000 000 Nullstellen mit positivem Imaginärteil liegen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

2. Für jedes $\delta > 0$ liegen die "meisten" Nullstellen ρ im Streifen $\frac{1}{2} - \delta \leq \operatorname{Re} \rho \leq \frac{1}{2} + \delta$ ("Dichte-Sätze", s. VII.)

3. Für jedes $T > 0$ liegt mindestens ein Drittel aller ρ mit $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$ (Norman Levinson, 1974).

4. Für Verallgemeinerungen der Zeta-Funktion auf Funktionenkörper über endlichen Körpern ist die RV gültig (André Weil, 1948).

Trotz zahlloser Versuche einiger der bedeutendsten Mathematiker seit Riemann bleibt die RV ein offenes Problem. Es gibt eine Fülle von äquivalenten Formulierungen, teils funktionentheoretisch, teils zahlentheoretisch. Im nächsten Satz sind einige der gängigsten zusammengefaßt.

6.2. Satz. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) RV,

(2) $\pi(x) = \mathrm{Li}\,x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x)$ $\quad \left(\mathrm{Li}\,x := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)$,

(3) $\pi(x) = \mathrm{Li}\,x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ für jedes $\epsilon > 0$,

(4) $\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x)$,

(5) $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}$ konvergent und $= \frac{1}{\zeta(s)}$ für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$,

(6) $M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ für jedes $\epsilon > 0$.

Wir zeigen die Implikationen RV $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ RV $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ RV. Bis auf "RV $\Rightarrow$ (6)", wofür noch einige funktionentheoretische Hilfsmittel nötig sind, bereitet kein Teil besondere Schwierigkeiten.

1. RV $\Rightarrow$ (4). Wir benutzen 5.7.(2) mit $T = x^{1/2}$ $(x \ge 4)$.

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \sum_{|\rho| \le x^{1/2}} \frac{1}{|\rho|}) + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x).$$

Die ρ-Summe ist wegen 5.5(1)

$$\le 2 \sum_{n \le x^{\frac{1}{2}}} \frac{N(n+1)-N(n)}{n} + O(1)$$

$$= O(\sum_{n \le x^{\frac{1}{2}}} \frac{\ln n}{n}) + O(1) = O(\ln^2 x),$$

was (4) ergibt.

2. (4) $\Rightarrow$ (2).

(2.1) $\pi(x) = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} - \sum_{p^k \le x, k \ge 2} \frac{1}{k}$.

Die zweite Summe ist

$$\le \sum_{2 \le k \le \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \le x^{1/k}} 1 \le \sum_{2 \le k \le \frac{\ln x}{\ln 2}} x^{\frac{1}{k}} = O(x^{\frac{1}{2}} \ln x).$$

Auf die erste Summe in (2.1) kann man partielle Summation anwenden

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{d\psi(t)}{\ln t} = \frac{\psi(t)}{\ln t} \Big|_{\frac{3}{2}}^{x} - \int_{\frac{3}{2}}^{x} \psi(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$$

$$= (t + O(t^{\frac{1}{2}} \ln^2 t)) \frac{1}{\ln t} \Big|_{\frac{3}{2}}^{x} - \int_{\frac{3}{2}}^{x} (t + O(t^{\frac{1}{2}} \ln^2 t)) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{dt}{\ln t} + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x) + O(\int_{\frac{3}{2}}^{x} t^{\frac{1}{2}} \ln^2 t \frac{dt}{t \ln^2 t}) = \mathrm{Li}\, x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x).$$

Zusammenfassung ergibt (2).

3. (2) $\Rightarrow$ (3) ist unmittelbar klar.

4. (3) $\Rightarrow$ RV. Zuerst leitet man aus (3) mittels partieller Summation ähnlich wie in 2. Aussage (4) her. Also gilt für $x \ge 1$ und $\epsilon > 0$

(4.1) $R(x) := \psi(x) - x = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$.

Für $\sigma > 1$ ist

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \int_1^\infty \frac{d\Psi(x)}{x^s}$$

$$= \frac{\Psi(x)}{x^s}\Big|_1^\infty + s\int_1^\infty \frac{\Psi(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

$$= s\int_1^\infty \frac{dx}{xs} + s\int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{s-1} - 1 + s\int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Wegen (4.1) konvergiert das letzte Integral kompakt für $\sigma > \frac{1}{2}$, d. h. $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1}$ ist holomorph für $\sigma > \frac{1}{2}$.

Dies ist gleichbedeutend mit RV.

5. (6) $\Rightarrow$ (5). Mit partieller Summation ersieht man aus (6) die Konvergenz der Reihe $\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$. $\frac{1}{\zeta(s)}$ kann also bis $\sigma > \frac{1}{2}$ analytisch fortgesetzt werden und ist dort gleich der Reihe.

6. (5) $\Rightarrow$ RV. (5) besagt die Holomorphie von $\frac{1}{\zeta(s)}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, Also RV.

Für den noch fehlenden Teil RV $\Rightarrow$ (6) benötigen wir

6.3. <u>Satz</u> (Littlewood, 1912, John Edensor L., 1885-1977). Unter Annahme der RV gilt für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in jedem Bereich

$$|t| \geq 1,\ \sigma \geq \sigma_0 > \tfrac{1}{2}:\ \zeta(s),\ \zeta^{-1}(s) = O((|t|+1)^{\varepsilon}).$$

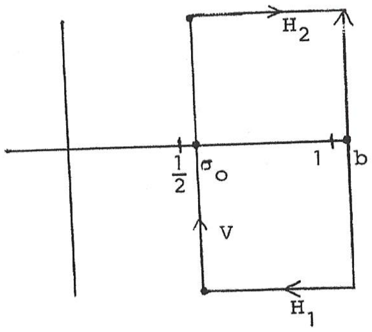
Wir setzen vorläufig die Richtigkeit von 6.3. voraus. Zur Berechnung der Summe $M(x)$ benutzen wir die Perronsche Formel 3.2.(3) mit

$$f(s) = \sum \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad (\sigma > 1),$$

$$\Phi(n) = 1,\ \alpha = 1,\ T = x^{\frac{1}{2}},\ b = 1 + \frac{1}{\ln x}.$$

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)}\,ds + O(x^{\frac{1}{2}}\ln x).$$

Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ verschieben wir den Integrationsweg nach $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen der Holomorphie von $\frac{1}{\zeta}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ (unter Annahme der RV!) gibt es keine Residuen-Beiträge.



Auf H_1, V und H_2 kann $\frac{1}{\zeta}$ nach 6.3. durch $O(x^{\frac{\varepsilon}{3}})$ abgeschätzt werden.

So erhält man

$$M(x) = O(x^{\frac{1+\varepsilon}{2}} x^{\frac{\varepsilon}{3}} \int_V \left|\frac{ds}{|s|}\right|) + O(\frac{x}{T} x^{\frac{\varepsilon}{3}}) + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Zum Beweis von Satz 6.3. wiederum sind zwei funktionentheoretische Sätze erforderlich.

6.4. Hadamard'scher <u>Drei</u>-<u>Kreise</u>-<u>Satz</u>.

$0 < r_1 < r_2 < r_3$. f holomorph in $\overline{R_{r_1,r_3}} := \{s \mid r_1 \le |s| \le r_3\}$.

$M_\nu := \max_{|s|=r_\nu} |f(s)| \qquad (\nu = 1,2,3).$

Beh. $M_2^{\ln(r_3/r_1)} \le M_1^{\ln(r_3/r_2)} \, M_3^{\ln(r_2/r_1)}$.