Über die Darstellung von positiven, ganzen Zahlen durch die primitiven, binären quadratischen Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen Philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Paul Bernays

aus Berlin.

Göttingen 1912.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei

(W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Mai 1912.

Referent: Herr Prof. Dr. Landau.

Inhalt.

Vorwort.

Der Satz, daß jede primitive, binäre quadratische Form, deren Diskriminante D keine Quadratzahl ist (und die für negatives D positiv ist) unendlich viele Primzahlen darstellt, ist zuerst von Dirichlet aufgestellt worden, der auch bereits die Grundgedanken für den Beweis gegeben hat und im Besitze aller erforderlichen Hülfsmittel war[1]). Vollständig ausgeführt wurde der Beweis zuerst von E. Schering[2]), der den Satz über die quadratischen Formen auf den bereits von Dirichlet bewiesenen entsprechenden Satz über die arithmetische Reihe zurückführte. Dabei gebrauchte er als wesentliches Hülfsmittel den Satz, daß jede Klasse des Hauptgeschlechts durch Duplikation einer Klasse gebildet werden kann. Dieser war von Gauß bewiesen worden als ein Ergebnis seiner Theorie der ternären quadratischen Formen[3]).

Schering veröffentlichte seinen Beweis nicht[4]).

Ein andrer Beweis wurde (natürlich unabhängig von dem Scheringschen) von Heinrich Weber erbracht[5]), der eine Transformations-Formel aus der Theorie der Theta-Funktionen zu Hülfe nahm. Ferner wurde von Weber[6]) der Satz über die quadra-

---

1) Vgl. Akad. Bericht „Über eine Eigenschaft d. quadr. Formen“, Ges. Werke, Bd. I, S. 497 u. folg., 1840 und „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres“, Crelles Journal, Bd. 19 u. 21, Ges. Werke, Bd. I, S. 411 u. folg., 1839—40.

2) „Beweis des Dirichletschen Satzes ...“, Ges. Werke, Bd. II, 1856.

3) Disq. arithm. Art. 286—87, 1801.

4) Seine Abhandlung wurde erst bei der Herausgabe seiner Werke im Nachlaß gefunden.

5) „Beweis des Satzes, dass. ...“, Math. Annalen, Bd. 20, 1882.

6) „Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern“, Math. Annalen, Bd. 48 und 49, 1897.

tischen Formen in Beziehung gebracht zu einem allgemeineren Satz über Idealgruppen [1]).

Die Weberschen Resultate haben eine wesentliche Verschärfung erfahren in einer Abhandlung von Herrn Landau, der folgenden Satz bewiesen hat [2]):

Es sei $\bar{O}$ eine Idealgruppe in einem algebraischen Körper, welche entweder alle ganzen Ideale des Körpers enthält oder alle diejenigen ganzen Ideale, die zu endlich vielen Primidealen teilerfremd sind. O' sei eine Zahlgruppe des Körpers derart, daß $\bar{E}O'$ eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen ist, wobei $\bar{E}$ die Gruppe der (funktionalen) Einheiten bedeutet. Die Anzahl der Klassen, in die $\bar{O}$ nach dem Modul $\bar{E}O'$ zerfällt, sei endlich (gleich h). Für jedes Ideal $\mathfrak{m}$ aus $\bar{O}$ sei die Anzahl der in $\bar{E}O'$ enthaltenen, durch $\mathfrak{m}$ teilbaren ganzen Hauptideale, deren Norm $\leqq x$ ist, gleich

$$\frac{g}{N(\mathfrak{m})}\cdot x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

wobei $N(\mathfrak{m})$ die Norm von $\mathfrak{m}$, k den Grad des algebraischen Körpers bedeutet und g nur von $\bar{O}$ und O' abhängt [3]). Ferner sei die über alle Primideale in $\bar{E}O'$ erstreckte Summe $\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})}$ divergent. Dann ist die Anzahl der in einer Klasse enthaltenen Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist, gleich

$$\frac{1}{h}\int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x\,.\,e^{-\sqrt[c]{\log x}}\right),$$

wo c eine positive Konstante bedeutet [4]).

Aus diesem Satz folgt gemäß den Weberschen Überlegungen, insbesondere unter Berücksichtigung des Zusammenhanges zwischen den Klassen primitiver quadratischer Formen der Diskriminante

---

1) Unter einer Idealgruppe versteht Weber ein System von (ganzen oder gebrochenen) Idealen eines algebraischen Körpers von der Art, daß das Produkt und der Quotient zweier Ideale des Systems wieder dem System angehört.

2) „Über die Verteilung d. Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers", Math. Annalen, Bd. 63, 1907. — Die Formulierung des Satzes ist im Anschluß an Webers Bezeichnungsweise gewählt.

3) Nach der von Herrn Landau angewandten Bezeichnung bedeutet die Gleichung $f(x) = O(g(x))$, daß zwei positive Konstanten A, B existieren von der Art, daß für $x > B$

$$|f(x)| < A\,.\,g(x) \text{ ist.}$$

4) Weber beweist unter den gleichen Voraussetzungen, daß jede Klasse unendlich viele Primideale enthält.

D und den Idealklassen des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$ — (Ω bedeutet den natürlichen Zahlkörper) —, daß für die Anzahl der durch eine quadratische Form der Diskriminante D darstellbaren Primzahlen $\leqq x$ ein Ausdruck von gleicher Art wie der eben angegebene besteht.

Auf dem Wege von dem Dirichletschen Satz zu der von Herrn Landau gefundenen Abschätzung liegen die Resultate von F. Mertens und Ch. J. de la Vallée Poussin.

Zuerst[1]) bewies Mertens (bereits vor dem Erscheinen der erstgenannten Abhandlung von Weber) für den speciellen Fall einer negativen regulären[2]) Diskriminante, daß die über alle in einer bestimmten Formen-Klasse darstellbaren Primzahlen erstreckte Summe

$$\sum_{p \leqq x}' \frac{1}{p} = \frac{1}{h_0} \cdot \log\log x + C + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

ist, wobei h_0 gleich dem Zweifachen der Klassenzahl h oder gleich h selbst ist, je nachdem die betreffende Klasse zweiseitig ist oder nicht, und C eine von der Klasse abhängige Größe bedeutet.

(Die Divergenz von $\sum_p' \frac{1}{p}$ ergibt sich auch aus den Dirichletschen und Weberschen Methoden; von dieser wird erst auf die Unendlichkeit der Anzahl der in einer Klasse darstellbaren Primzahlen geschlossen.)

In zwei späteren Abhandlungen[3]) gelangt er zu dem Ergebnis, daß für beliebige (natürlich nicht-quadratische) Diskriminanten die Summe $\sum_{p \leqq x}' \frac{\log p}{p}$, erstreckt über alle in einer Klasse darstellbaren Primzahlen, gleich

$$\frac{1}{h_0} \cdot \log x + O(1)$$

ist. (In dieser Abschätzung ist das frühere Resultat enthalten.)

De la Vallée Poussin beweist[4]) durch Anwendung höherer

---

1) „Über einige asymptotische Gesetze d. Zahlentheorie", Absch. III, Crelles Journal, Bd. 77, S. 294—312, 1874.

2) „Regulär" heißen nach Gauß die Diskriminanten, für welche die Gruppe der Klassen im Hauptgeschlecht cyklisch ist.

3) Sitzungsberichte der math. nat. Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissensch. zu Wien, Abt. IIa: „Über Dirichletsche Reihen", Bd. 104, 1895 und „Über einen Satz von Dirichlet", Bd. 109, 1900.

4) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", troisième

funktionentheoretischer Hülfsmittel, daß die Anzahl der durch eine primitive Form der Diskriminante D darstellbaren Primzahlen $\leqq x$ gleich

$$\frac{1}{h_0}\int_2^x \frac{du}{\log u}\cdot\{1+R(x)\}$$

ist, wobei $\lim\limits_{x=\infty} R(x) = 0$ ist[1]).

Dieses Resultat reicht weiter als das von Mertens; dafür wird der Mertenssche Beweis elementarer (ohne Anwendung der komplexen Funktionentheorie) geführt. Es wird darin wesentlich die Tatsache benutzt, daß die reellen Klassen-Charaktere sämtlich Geschlechtscharaktere sind, die wiederum mit gewissen Zahlcharakteren (modulo D) übereinstimmen. Diese Tatsache beruht auf dem bereits erwähnten Gaußschen Satz (dessen Anwendung übrigens bei de la Vallée Poussin vermieden wird). Dieser Satz ist nämlich auf Grund einer (ebenfalls von Gauß bewiesenen[2])) oberen Abschätzung für die Anzahl der zweiseitigen Klassen äquivalent mit dem Satz, daß zu jedem Gesamtcharakter mindestens eine Formen-Klasse gehört. Daß Gauß diesen nicht direkt beweisen konnte, lag daran, daß er nicht im Besitze des (Dirichletschen) Satzes von der arithmetischen Reihe war, welcher ein ganz einfaches Beweisverfahren liefert. Auch ohne explicite den Satz von der arithmetischen Reihe zu benutzen, kann man durch Anwendung der von Dirichlet begründeten analytischen Methoden den Beweis führen. Einen Beweis dieser Art hat Dirichlet selbst gegeben[3]), und in ähnlicher Richtung liegt eine Beweismethode von L. Kronecker[4]). Daß sich auch ohne Verwendung analytischer Hülfsmittel der Gaußsche Beweis vereinfachen läßt, hat zuerst

---

et quatrième partie, Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20 u. 21, 1896—97.

1) Daß de la Vallée Poussin bei den quadratischen Formen zu einer viel weniger scharfen Restabschätzung gelangt als in der Theorie der arithmetischen Reihen (vgl. Herrn Landaus „Handbuch d. Lehre von d. Vert. d. Primz.“ Bd. II, S. 899), liegt daran, daß es bisher noch nicht gelungen ist, das Nichtverschwinden der zu den Klassencharakteren k gehörigen Funktionen $L(s, k)$ (nach de la Vallée Poussins Bezeichnung) links von der imaginären Achse zu beweisen. (In der Encyclopédie des sciences Math. pures et appl., Tome I, vol. 3, Fasc. 4, S. 333 wird irrtümlich de la Vallée Poussin ein Beweis hierfür zugeschrieben.)

2) Disq. arithm. Art. 257—59, vgl. auch 261.

3) „Recherches sur diverses applications. . . .“, Ges. Werke, Bd. I, S. 456—60.

4) „Üb. d. Gebrauch d. Dirichletschen Methoden . . .“, Monatsber. d. kgl. Preuß. Ak. d. Wissensch. zu Berlin, 1864.

F. Arndt gezeigt[1]), der aus der Theorie der ternären Formen nur einen von Lagrange[2]) und Legendre[3]) bewiesenen Satz über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ (in ganzen x, y, z) zu Hülfe nahm. Sein Beweis bezieht sich jedoch nur auf den Fall, daß D eine Fundamental-Diskriminante ist. Den allgemeinen Fall haben nach der Arndtschen Methode Dedekind[4]) und Mertens[5]) behandelt. Schließlich haben de la Vallée Poussin[6]) und Mertens[7]) auch den genannten Lagrangeschen Hülfssatz entbehrlich gemacht durch ein elementares Induktionsverfahren. (Der Beweis ist bei Mertens etwas einfacher, setzt aber die Gaußsche Abschätzung für die Anzahl der zweiseitigen Klassen voraus, welche von de la Vallée Poussin nicht benutzt wird.) Diese arithmetischen Beweise liefern jedoch nur dann eine wesentliche Vereinfachung, wenn entweder der Satz von der arithmetischen Progression nicht vorausgesetzt werden darf oder wenn es darauf ankommt, die Einführung der Geschlechts-Charaktere zu vermeiden. (Dies ist nämlich bei den arithmetischen Beweisen dadurch möglich, daß man die im Hauptgeschlecht darstellbaren, zu D teilerfremden (positiven) Zahlen n durch die Eigenschaften definiert, daß $(n, D) = 1$, D quadratischer Rest modulo $4n$ und $4n$ quadratischer Rest modulo D ist.) —

Im Folgenden soll nun zuerst der Beweis der von Herrn Landau gefundenen Abschätzung für die Anzahl der durch eine primitive quadratische Form darstellbaren Primzahlen $\leqq x$, wie er sich gemäß der allgemeinen Theorie auf möglichst elementarem Wege ergibt, im Zusammenhange dargestellt werden. Danach soll von den Primzahlen zu beliebigen positiven, ganzen Zahlen übergegangen und der (bisher noch nicht bekannte) Satz bewiesen werden, daß durch jede Formen-Klasse asymptotisch gleich viele

---

1) „Über die Anzahl der Genera der quadr. Formen", Crelles Journal, Bd. 56, 1859.

2) „Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré", Abhandlungen der Berliner Akad., 1767.

3) „Théorie des nombres", Bd. I, erster Hauptteil, § 3—4 (dritte Aufl.) (in d. Übers. von Maser (1886) Seite 32—49).

4) Dirichlet-Dedekind „Vorlesungen üb. Zahlentheorie", § 155—58 (vierte Aufl. 1894).

5) „Über die Komposition der binären quadr. Formen", Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, Abt. IIa, Bd. 104, 1895.

6) „Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadr.", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Acad. royale de Belgique, Bd. 53, 1896.

7) „Ein Beweis des Satzes, . . .", Crelles Journal, Bd. 129, 1905.

Zahlen darstellbar sind, und zwar sowohl dann, wenn man sich auf eigentliche Darstellungen beschränkt, wie auch, wenn man uneigentliche Darstellungen zuläßt.

Als bekannt vorausgesetzt werden[1]) sollen dabei

1) Einige elementare Sätze über quadratische Formen und die Sätze über die Lösung der Pellschen Gleichung[2]).
2) Die Fundamentalsätze über Abelsche Gruppen[3]).
3) Einige Sätze aus der analytischen Zahlentheorie[4]).

---

1) Das heißt, die betreffenden Sätze werden nur formuliert, aber nicht bewiesen.

2) Siehe z. B. J. de Séguier „Formes quadratiques et multiplication complexe" (Berlin 1894), wo im Anschluß an Kronecker die Bezeichnung des mittleren Koefficienten durch b statt durch $2b$ (wie bei Gauß) angewandt wird, die auch in der folgenden Darstellung benutzt werden soll. In den meisten übrigen Darstellungen, z. B. Bachmann „Die Elemente der Zahlentheorie" (Leipzig 1892), Mathews „Theory of numbers", Part I (1892), findet sich die alte Bezeichnungsweise.

3) Diese finden sich z. B. dargestellt in H. Webers „Lehrbuch d. Algebra", Bd. II, § 11—15 (Braunschweig 1899, zweite Auflage).

4) Diese kommen in Herrn Landaus „Handbuch der Lehre von d. Verteilung d. Primzahlen" vor, und die betreffenden Stellen werden nachher genau citiert.

I. Teil.

Von den durch eine quadratische Form darstellbaren Primzahlen.

Einleitung.

Unter einer primitiven, binären quadratischen Form der Diskriminante D versteht man eine Form:

$$f(x,y) = (a,b,c) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

in der a, b, c ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Teiler besitzen und durch die Beziehung

$$b^2 - 4ac = D$$

verbunden sind. Damit D eine Diskriminante sein kann, muß D quadratischer Rest modulo 4 sein; das heißt, es ist entweder:

$$D \equiv 0 \pmod 4$$
$$\text{oder: } D \equiv 1 \pmod 4.$$

Genügt umgekehrt eine Zahl D einer dieser beiden Kongruenzen, so gibt es zwei Zahlen b, c, für welche $b^2 - D = 4c$ ist. D ist dann also die Diskriminante einer Form $(1, b, c)$.

Es soll bei den betrachteten Formen (a, b, c) stets vorausgesetzt werden, daß ihre Diskriminante D keine Quadratzahl ist. (Diese Forderung ist gleichbedeutend mit der, daß die quadratische Form nicht in zwei Linearfaktoren mit ganzzahligen Koefficienten zerlegbar sein soll.)

Eine ganze Zahl n heißt durch eine quadratische Form $f(x, y)$ darstellbar, wenn es ein ganzzahliges Wertepaar α, β gibt, für das

$$f(\alpha, \beta) = n$$

ist.

Eine Darstellung $n = f(\alpha, \beta)$ heißt eine eigentliche, wenn α zu β teilerfremd ist (wofür wir kurz $(\alpha, \beta) = 1$ schreiben, indem wir allgemein mit (α, β) den größten gemeinsamen Teiler zweier

Zahlen α, β bezeichnen). Es ist ersichtlich, daß die Darstellung einer quadratfreien Zahl stets eigentlich ist.

Die Formen der Diskriminante D zerfallen in endlich viele[1]) Klassen, die dadurch bestimmt sind, daß je zwei Formen derselben Klasse äquivalent sind (das heißt: durch eine lineare Substitution der Determinante 1 in einander übergeführt werden können), während je zwei Formen aus verschiedenen Klassen nicht äquivalent sind.

Zwei Formen, die sich nur durch das Vorzeichen des mittleren Koefficienten unterscheiden, heißen entgegengesetzt. Die zu den Formen einer Klasse entgegengesetzten Formen bilden wiederum eine Formen-Klasse, welche zu der ersten entgegengesetzt heißt. Eine Klasse, die mit ihrer entgegengesetzten Klasse übereinstimmt, heißt zweiseitig (ambige Klasse).

Die primitiven Formen negativer Diskriminante unterscheiden sich von denen positiver Diskriminante dadurch, daß jede von ihnen entweder nur positive oder nur negative Zahlen[2]) darstellt, während jede Form positiver Diskriminante Zahlen von beiderlei Vorzeichen darstellt. Demnach ergibt sich bei negativer Diskriminante eine Einteilung der Formen nach dem Vorzeichen der durch sie darstellbaren Zahlen in „positive“ und „negative“ Formen. Da der erste und dritte Koefficient einer quadratischen Form zu den durch sie darstellbaren Zahlen gehört, so ist eine Form negativer Diskriminante als positiv oder negativ durch das Vorzeichen ihrer äußeren Koefficienten gekennzeichnet. Da ferner äquivalente Formen dieselben Zahlen darstellen, so folgt, daß (für eine negative Diskriminante) die Formen einer Klasse entweder alle positiv oder alle negativ sind. Für unsere Untersuchung, die sich nur auf die Darstellung positiver Zahlen durch quadratische Formen bezieht, können wir die Klassen negativer Formen ausschalten.

Zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen der einschränkenden Bedingungen, die wir den zu betrachtenden Formen auferlegen, soll im folgenden kurz „Form“ oder „quadratische Form“ gesagt werden, wo primitive, binäre quadratische Formen einer nicht-quadratischen Diskriminante D, und zwar bei negativem D positive Formen gemeint sind.

Auf Grund der gegebenen Erklärungen läßt sich der Satz, dessen Beweis den Inhalt dieses ersten Teils bilden soll, folgendermaßen formulieren:

---

1) Dies soll hier als bekannt vorausgesetzt werden.

2) Abgesehen von der Zahl 0.

Die Anzahl der Primzahlen, welche eine positive obere Grenze x nicht überschreiten und durch eine Form (a, b, c) darstellbar sind, ist gleich:

$$\frac{1}{h_0} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x \, . \, e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right),$$

worin h_0 entweder gleich dem doppelten der Klassen-Anzahl h oder gleich dieser selbst zu setzen ist, je nachdem (a, b, c) einer zweiseitigen Klasse angehört oder nicht[1]).

Beim Beweise genügt es offenbar, für die Anzahl der zu D teilerfremden darstellbaren Primzahlen die angegebene Abschätzung als gültig nachzuweisen, da die Anzahl der in D aufgehenden Primzahlen endlich, also gewiß gleich $O\left(x \, . \, e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right)$ ist.

§ 1. Die Komposition der binären quadratischen Formen.

Über die Darstellung von Zahlen durch Formen der Diskriminante D gilt folgender elementare Satz:

Eine positive Zahl k kann nur dann durch eine Form der Diskriminante D eigentlich dargestellt werden, wenn D quadratischer Rest modulo $4k$ ist. Ist $(k, D) = 1$, so ist diese Bedingung auch hinreichend.

Für die Darstellbarkeit einer Zahl k durch eine bestimmte Form gibt es keine einfache Bedingung; man kann aber die Tatsache der Darstellbarkeit von k unter einen andern Gesichtspunkt bringen. Es besteht nämlich der Satz:

k ist dann und nur dann durch (a, b, c) eigentlich darstellbar, wenn (a, b, c) einer Form mit dem ersten Koefficienten k äquivalent ist. Erfüllt (a, b, c) diese Bedingung, so wird sie offenbar auch von jeder zu (a, b, c) äquivalenten Form erfüllt.

Wird daher k durch eine Form einer Klasse K eigentlich dargestellt, so wird sie durch alle Formen dieser Klasse eigentlich dargestellt; man sagt dann: k ist durch die Klasse K (oder: in der Klasse K) eigentlich darstellbar.

(Im folgenden soll unter „Darstellbarkeit" stets eigentliche Darstellbarkeit verstanden werden.)

Es entsteht nun die Frage, wie sich die Zahlen, die überhaupt durch Formen der Diskriminante D darstellbar sind, hinsichtlich ihrer Darstellbarkeit auf die Formen-Klassen verteilen. Für die

1) Über die Bedeutung des Zeichens $O(f(x))$ vergleiche man die Anmerkung im Vorwort.

Untersuchung dieser Frage ist vor allem die von Gauß begründete Lehre von der Komposition der Klassen wesentlich.

Unter der Komposition der Klassen versteht man ein bestimmtes Verfahren, nach welchem je zwei Formen-Klassen eine dritte zugeordnet wird.

Zur Erklärung dieses Verfahrens soll zunächst die „Komposition der Formen“ [1]) definiert werden. Es seien zwei Formen $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $f_2 = (a_2, b_2, c_2)$ der Diskriminante D so beschaffen, daß $a_1, a_2, \frac{b_1+b_2}{2}$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen [2]). (Zwei Formen, welche in dieser Beziehung stehen, sollen „einhellig“ genannt werden.) Dann läßt sich eine Form (A, B, C) derselben Diskriminante so wählen, daß

$$A = a_1 a_2 \text{ und } B \equiv b_1 \pmod{2a_1}$$
$$\equiv b_2 \pmod{2a_2}$$

ist, und man nennt jede solche Form „aus f_1 und f_2 zusammengesetzt“ (komponiert).

Zum Beweise der aufgestellten Behauptung genügt es offenbar zu zeigen, daß man eine Zahl B so bestimmen kann, daß

$$B \equiv b_1 \pmod{2a_1}$$
$$B \equiv b_2 \pmod{2a_2}$$
$$B^2 \equiv D \pmod{4a_1 a_2}$$

ist, und daß die Zahlen $a_1 a_2$ $(= A)$, B und $\frac{B^2 - D}{4a_1 a_2}$ $(= C)$ keinen gemeinsamen Teiler haben.

---

1) Die Komposition der quadratischen Formen ist von Gauß in den Art. 234—44 seiner Disq. arithm. behandelt worden. Gauß hat dort die allgemeinere algebraische Bedeutung dieser Komposition aufgezeigt. Die Ergebnisse seiner Untersuchung sind von Mertens in der (im Vorwort genannten) Abhandlung „Über die Komposition d. binären qu. Formen“, von Dedekind („Über binäre trilineare Formen ....“, Crelles Journal, Bd. 129, 1905) und H. Weber („Üb. d. Komposition d. quadr. Formen“, Göttinger Nachrichten, 1907) auf einfachere Weise abgeleitet worden. Eine ganz elementare Darstellung der Komposition hat zuerst Dirichlet gegeben („de formarum ... compositione“, Ges. Werke, Bd. II, S. 105—114, 1851). — Die folgende Darstellung schließt sich teils an das Lehrbuch von J. de Séguier (siehe im Vorwort), teils an die Vorlesungen üb. Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind (4. Aufl. 1894, § 145 u. folg.) an. — Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen der Komposition der quadratischen Formen und der Komposition der Idealklassen im quadratischen Zahlkörper vgl. Webers Lehrbuch d. Algebra, Bd. III, zweites Buch (zweite Aufl. 1908). —

2) Daß $\frac{b_1 + b_2}{2}$ ganzzahlig ist, folgt aus der Kongruenz:

$$b_1^2 \equiv b_2^2 \equiv D \pmod 4.$$

Von den drei Kongruenzen ist zunächst ersichtlich, daß sie mit folgenden äquivalent sind:

$$a_2 B \equiv a_2 b_1 \pmod{2a_1 a_2}$$
$$a_1 B \equiv a_1 b_2 \pmod{2a_1 a_2}$$
$$B^2 - (B - b_1)(B - b_2) \equiv D \pmod{4a_1 a_2}.$$

Die letzte dieser Kongruenzen ergibt ausgerechnet (nach Division mit 2):

$$\frac{b_1 + b_2}{2} B \equiv \frac{D + b_1 b_2}{2} \pmod{2a_1 a_2}.$$

$\left(\frac{D + b_1 b_2}{2}\right.$ ist eine ganze Zahl, da modulo 2:

$$\left. b_1 \equiv D,\ b_2 \equiv D, \text{ also } b_1 b_2 \equiv D^2 \equiv -D \text{ ist.}\right)$$

Setzen wir der Übersichtlichkeit halber

$$a_1, a_2, \frac{b_1 + b_2}{2} \text{ bezüglich gleich } p_1, p_2, p_3$$

und

$$a_1 b_2, a_2 b_1, \frac{D + b_1 b_2}{2} \text{ bezüglich gleich } q_1, q_2, q_3,$$

so sind p_1, p_2, p_3 teilerfremd; es lassen sich also ganze Zahlen c_1, c_2, c_3 so wählen, daß

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 = 1$$

ist.

Ferner läßt sich leicht verificieren, daß

$$p_\alpha q_\beta \equiv q_\alpha p_\beta \pmod{2a_1 a_2}$$

ist (für $\alpha, \beta = 1, 2, 3$).

Die Kongruenzen für B lauten jetzt:

$$p_\alpha . B \equiv q_\alpha \pmod{2a_1 a_2};\ \alpha = 1, 2, 3.$$

Aus diesen ergibt sich unmittelbar:

$$B \equiv q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3 \pmod{2a_1 a_2}$$

als notwendige Bedingung. Andrerseits ist

$$p_\alpha (q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3) \equiv q_\alpha (p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3) \equiv q_\alpha \pmod{2a_1 a_2}$$
$$(\text{für } \alpha = 1, 2, 3).$$

Es gibt also modulo $2a_1 a_2$ ein und nur ein B, welches den gestellten Bedingungen genügt. Jedem zulässigen Wert von B entspricht eine Form (A, B, C) (die auch für $D < 0$ positiv ist, weil $a_1 . a_2 > 0$ ist). Daß diese Form stets primitiv ist, ergibt sich so: auf Grund der Kongruenzen für B sind f_1 und f_2 bezüglich zu den Formen

$$g_1 = (a_1, B, a_2 C), \; g_2 = (a_2, B, a_1 C)$$

parallel[1]), also gewiß mit ihnen äquivalent. g_1 und g_2 sind daher wie f_1 und f_2 primitiv (nach einem elementaren Satz). Hätten nun A, B, C einen gemeinsamen Primteiler, so müßte dieser entweder in a_1, B, C oder in a_2, B, C aufgehen. In jedem Fall müßte eine der beiden Formen g_1, g_2 imprimitiv sein; wir kämen also auf einen Widerspruch.

Demnach folgt, daß (A, B, C) eine aus f_1 und f_2 zusammengesetzte Form ist; zugleich ist ersichtlich, daß man dieselbe Form auch durch Zusammensetzung von g_1 mit g_2 erhalten kann. (Daß g_1 mit g_2 einhellig ist, daß also $a_1, a_2, \frac{B+B}{2}$ $(= B)$ keinen gemeinsamen Teiler haben, folgt unmittelbar daraus, daß g_1 primitiv ist.)

Sind B_1 und B_2 zwei verschiedene Lösungen der Bedingungs-Kongruenzen für B und sind (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) die zugehörigen (aus f_1 und f_2 zusammengesetzten) Formen, so ist

$$A_1 = A_2$$
$$B_1 \equiv B_2 \pmod{2A_1};$$

die beiden Formen sind also parallel, mithin gehören sie zur selben Klasse.

Umgekehrt ist klar, daß jede Form, die zu einer aus f_1 und f_2 zusammengesetzten Form parallel ist, ebenfalls aus f_1 und f_2 zusammengesetzt ist.

Somit ist bewiesen, daß sich aus zwei einhelligen Formen stets unendlich viele Formen zusammensetzen lassen, und zwar bilden diese eine Schar paralleler Formen und sind daher alle in einer Formen-Klasse enthalten.

Auf Grund dieser Tatsache führt die Komposition der Formen zu einer Komposition der Klassen. Sind nämlich zwei Klassen K_1 und K_2 gegeben, so wähle man eine Form f_1 aus K_1; dann läßt sich in K_2 eine mit f_1 einhellige Form f_2 wählen. (Denn da nach einem bekannten Satze durch jede Form Zahlen dargestellt werden können, die zu einer beliebig gegebenen Zahl teilerfremd sind, so gibt es in K_2 jedenfalls eine Form, deren erster Koefficient zu a_1 teilerfremd ist. Diese ist dann gewiß mit f_1 einhellig.)[2]) Nun sei K_3 die Klasse, welcher die aus f_1 und f_2 zusammengesetzten Formen

1) Zwei Formen (a, b, c), (a', b', c') der Diskriminante D, bei denen $a' = a$, $b' \equiv b \pmod{2a}$ ist, heißen „parallel" und sind stets äquivalent.

2) Jedoch ist nicht vorgeschrieben, daß die Wahl einer mit f_1 einhelligen Form f_2 aus K_2 auf diese specielle Art geschehe.

angehören; dann nennen wir K_3 aus K_1 und K_2 zusammengesetzt (komponiert).

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß die so erklärte Komposition der Klassen eindeutig ist, daß also die durch f_1 und f_2 bestimmte Klasse K_3 von der speciellen Wahl dieser Formen unabhängig ist.

Dies geschieht durch den Beweis des folgenden Satzes: Ist aus den Formen $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$ und $f_2 = (a_2, b_2, c_2)$ die Form $F = (A, B, C)$, ebenso aus den Formen $\varphi_1 = (p_1, q_1, r_1)$ und $\varphi_2 = (p_2, q_2, r_2)$ die Form $\Phi = (P, Q, R)$ zusammengesetzt, ist ferner f_1 mit φ_1 und f_2 mit φ_2 äquivalent, so ist auch F mit Φ äquivalent.

Dem Beweis muß eine Bemerkung vorausgeschickt werden.

Besteht eine Darstellung

$$k = f(\alpha, \gamma) = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$

so gibt es eine und nur eine Schar (zueinander) paralleler Formen mit erstem Koefficienten k, in die f durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante 1 übergeführt werden kann[1]). Der modulo $2k$ bestimmte zweite Koefficient einer Form aus der Schar ist eine Wurzel der Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{4k},$$

und man bezeichnet ihn als die Kongruenzwurzel, zu der die Darstellung von k durch die Form f und durch das Wertepaar α, γ gehört. Diese Kongruenzwurzel (l) erfüllt zugleich die beiden anderen Kongruenzen:

$$\begin{aligned} 2a\alpha + (b + l)\gamma &\equiv 0 \pmod{2k} \\ (b - l)\alpha + 2c\gamma &\equiv 0 \pmod{2k}. \end{aligned}$$

Genügt umgekehrt irgend eine Zahl l diesen beiden Kongruenzen und ist

$$f(\alpha, \gamma) = k,$$

so liefern die Zahlen β, δ, die man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2a\alpha + (b + l)\gamma &= 2\delta k \\ (b - l)\alpha + 2c\gamma &= -2\beta k \end{aligned}$$

---

1) Das Symbol $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ bezeichnet die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y'. \end{aligned}$$

erhält, eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante 1, welche f in eine Form (k, l, m) überführt. Es gehört also dann die Darstellung

$$f(\alpha, \gamma) = k$$

zur Kongruenzwurzel l.

Hieraus erhellt, daß unser Beweis erbracht ist, wenn wir zwei Zahlen A, Γ derart angeben können, daß

$$\begin{gathered} F(A, \Gamma) = P \\ 2AA + (B+Q)\Gamma \equiv 0 \pmod{2P} \\ (B-Q)A + 2C\Gamma \equiv 0 \pmod{2P} \end{gathered}$$

ist.

Es handelt sich also um die Bestimmung zweier solcher Zahlen A, Γ.

Dazu berücksichtigen wir zunächst, daß wir die Formen f_1, f_2 durch die äquivalenten Formen g_1, g_2 und ebenso φ_1, φ_2 durch ψ_1, ψ_2 ersetzen können.

$$(g_1 = (a_1, B, a_2 C),\ g_2 = (a_2, B, a_1 C),\ \psi_1 = (p_1, Q, p_2 R),$$
$$\psi_2 = (p_2, Q, p_1 R).)$$

Denn F läßt sich (gemäß einer vorhin gemachten Bemerkung) auch durch Zusammensetzung von g_1 und g_2, entsprechend Φ durch Zusammensetzung von ψ_1 und ψ_2 bilden.

Da g_1 mit ψ_1, g_2 mit ψ_2 äquivalent ist, so gibt es zwei Zahlenpaare

$$\alpha_1, \gamma_1 \text{ und } \alpha_2, \gamma_2$$

von der Art, daß

$$g_1(\alpha_1, \gamma_1) = p_1,\ g_2(\alpha_2, \gamma_2) = p_2$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2a_1\alpha_1 + (B+Q)\gamma_1 &\equiv 0 \pmod{2p_1} \\ (B-Q)\alpha_1 + 2a_2 C\gamma_1 &\equiv 0 \pmod{2p_1} \\ 2a_2\alpha_2 + (B+Q)\gamma_2 &\equiv 0 \pmod{2p_2} \\ (B-Q)\alpha_2 + 2a_1 C\gamma_2 &\equiv 0 \pmod{2p_2} \end{aligned} \right.$$

ist.

Wir setzen nun

$$A = \alpha_1\alpha_2 - C\gamma_1\gamma_2$$
$$\Gamma = a_1\alpha_1\gamma_2 + a_2\alpha_2\gamma_1 + B\gamma_1\gamma_2 = \tfrac{1}{2}\left\{(2a_1\alpha_1 + B\gamma_1)\gamma_2 + (2a_2\alpha_2 + B\gamma_2)\gamma_1\right\}$$

und wollen nachweisen, daß diese Zahlen A, Γ die verlangten Eigenschaften besitzen.

Zunächst ergibt sich:

$$(2a_1\alpha_1+(B+\sqrt{D})\gamma_1)(2a_2\alpha_2+(B+\sqrt{D})\gamma_2) = 4a_1a_2(\alpha_1\alpha_2-C\gamma_1\gamma_2)$$
$$+(2B^2+2B\sqrt{D})\gamma_1\gamma_2+2(B+\sqrt{D})(a_1\alpha_1\gamma_2+a_2\alpha_2\gamma_1),$$

also:

$$(2)\quad (2a_1\alpha_1+(B+\sqrt{D})\gamma_1)(2a_2\alpha_2+(B+\sqrt{D})\gamma_2)=4A.\mathit{\Lambda}+2(B+\sqrt{D}).\Gamma.$$

Da $\sqrt{D}$ nicht rational ist, so dürfen wir in dieser Gleichung $\sqrt{D}$ durch $(-\sqrt{D})$ ersetzen und erhalten:

$$(2a_1\alpha_1+(B-\sqrt{D})\gamma_1)(2a_2\alpha_2+(B-\sqrt{D})\gamma_2) = 4A\mathit{\Lambda}+2(B-\sqrt{D})\Gamma.$$

Durch Multiplikation der beiden Gleichungen folgt:

$$4a_1g_1(\alpha_1,\gamma_1).4a_2.g_2(\alpha_2,\gamma_2) = 4.4A(A\mathit{\Lambda}^2+B\mathit{\Lambda}\Gamma+C\Gamma^2)$$
$$(3)\qquad F(\mathit{\Lambda},\Gamma) = p_1.p_2 = P.$$

Durch Ausmultiplicieren der Faktoren auf der linken Seite der Gleichung (2) erhalten wir eine Gleichung von dem Typus:

$$u_0+u_1.\sqrt{D}+u_2.D = v_0+v_1.\sqrt{D}$$

(wo die u und v ganze Zahlen sind). Da D keine Quadratzahl ist, so muß

$$u_0+u_2.D = v_0,$$
$$u_1 = v_1$$

und in Folge davon

$$u_0+u_1Q+u_2D = v_0+v_1Q$$

sein.

Da $Q^2 \equiv D \pmod{4P}$ ist, so ergibt sich hieraus:

$$u_0+u_1Q+u_2Q^2 \equiv v_0+v_1Q \pmod{4P};$$

das heißt, man erhält aus der Gleichung (2) eine richtige Kongruenz modulo $4P$, indem man an Stelle von $\sqrt{D}$ die Zahl Q setzt. Es ist demnach:

$$(2a_1\alpha_1+(B+Q)\gamma_1)(2a_2\alpha_2+(B+Q)\gamma_2)\equiv 4A\mathit{\Lambda}+2(B+Q)\Gamma \pmod{4P}.$$

Gemäß den Kongruenzen (1) ist die linke Seite dieser Kongruenz durch $4P$ teilbar; also folgt:

$$(4)\qquad 2A\mathit{\Lambda}+(B+Q)\Gamma\equiv 0 \pmod{2P}.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir auf vier Gleichungen an, die sich unmittelbar aus (2) ergeben. Man erhält aus (2) durch Multiplikation mit C

$$C(2a_1\alpha_1+(B+\sqrt{D})\gamma_1)(2a_2\alpha_2+(B+\sqrt{D})\gamma_2) = 4AC\mathit{\Lambda}+2C(B+\sqrt{D})\Gamma$$
$$= (B+\sqrt{D})\{(B-\sqrt{D})\mathit{\Lambda}+2C\Gamma\}.$$

Durch Multiplikation von (2) mit $(B-\sqrt{D})$ und Division mit $2a_1$ folgt:

$$((B-\sqrt{D})\,\alpha_1+2a_2C\gamma_1)\,(2a_2\alpha_2+(B+\sqrt{D})\,\gamma_2) \\ = 2a_2\{(B-\sqrt{D})A+2C\Gamma\},$$

hieraus durch Vertauschung der Indices 1, 2 (aus Symmetrie-Gründen):

$$(2a_1\alpha_1+(B+\sqrt{D})\gamma_1)\,((B-\sqrt{D})\alpha_2+2a_1C\gamma_2)=2a_1\{(B-\sqrt{D})A+2C\Gamma\}$$

und aus dieser Gleichung durch nochmalige Multiplikation mit $(B-\sqrt{D})$ und Division mit $2a_1$

$$((B-\sqrt{D})\alpha_1+2a_2C\gamma_1)\,((B-\sqrt{D})\,\alpha_2+2a_1\,C\gamma_2) \\ = (B-\sqrt{D})\{(B-\sqrt{D})A+2C\Gamma\}.$$

Geht man von diesen Gleichungen zu den entsprechenden Kongruenzen modulo $4P$ über, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Kongruenzen (1) und nach Division mit 2

$$\begin{aligned} \frac{B+Q}{2}\{(B-Q)A+2C\Gamma\} &\equiv 0 \pmod{2P} \\ a_2\{(B-Q)A+2C\Gamma\} &\equiv 0 \;(\quad ,, \quad) \\ a_1\{(B-Q)A+2C\Gamma\} &\equiv 0 \;(\quad ,, \quad) \\ \frac{B-Q}{2}\{(B-Q)A+2C\Gamma\} &\equiv 0 \;(\quad ,, \quad). \end{aligned}$$

Da der größte gemeinsame Teiler von $a_1, a_2, \frac{B+Q}{2}, \frac{B-Q}{2}$ in a_1, a_2, B aufgeht, mithin gleich 1 ist, so folgt:

$$(5) \qquad (B-Q)\,.\,A+2C\Gamma \equiv 0 \pmod{2P}.$$

Gemäß den Relationen (3), (4), (5) erfüllen A und Γ alle gestellten Bedingungen; unsere Behauptung ist also bewiesen, und damit ist gezeigt, daß durch das angegebene Verfahren der Komposition je zwei Klassen eindeutig eine dritte zugeordnet wird.

Nachdem so die Komposition als eine eindeutige Operation eingeführt ist, entsteht die Frage nach ihren formalen Eigenschaften. Diese wird beantwortet durch den Satz, daß in Bezug auf die Komposition die Formen-Klassen eine Abelsche Gruppe bilden. Diesen gilt es also jetzt zu beweisen.

Zunächst ist offenbar, daß die Komposition kommutativ ist.

Die Geltung des associativen Gesetzes ergibt sich folgendermaßen: es sei

$$(A', B', C') \text{ aus } (a_1, b_1, c_1) \text{ und } (a_2, b_2, c_2),$$
$$(A, B, C) \text{ aus } (A', B', C') \text{ und } (a_3, b_3, c_3)$$

zusammengesetzt. (Natürlich muß (a_1, b_1, c_1) mit (a_2, b_2, c_2) und ebenso (a_3, b_3, c_3) mit (A', B', C') einhellig sein.) Dann ist

$$A = A' . a_3, \quad A' = a_1 . a_2, \quad \text{also } A = a_1 . a_2 . a_3.$$

$$C = \frac{B^2 - D}{4A}.$$

$$(1) \qquad \begin{cases} B \equiv B' \pmod{2A'} \\ B \equiv b_3 \pmod{2a_3} \\ B^2 \equiv D \pmod{4A}. \end{cases}$$

Durch diese Kongruenzen ist B modulo $2A$ eindeutig bestimmt. B' ist modulo $2A'$ eindeutig bestimmt durch die Kongruenzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} B' \equiv b_1 \pmod{2a_1} \\ B' \equiv b_2 \pmod{2a_2} \\ B'^2 \equiv D \pmod{4A'}. \end{cases}$$

Aus den ersten beiden dieser Kongruenzen in Verbindung mit der ersten der Kongruenzen (1) folgt:

$$\begin{aligned} B &\equiv b_1 \pmod{2a_1} \\ &\equiv b_2 \pmod{2a_2}. \end{aligned}$$

B genügt also den vier Kongruenzen:

$$(3) \qquad \begin{cases} B \equiv b_1 \pmod{2a_1} \\ B \equiv b_2 \pmod{2a_2} \\ B \equiv b_3 \pmod{2a_3} \\ B^2 \equiv D \pmod{4A}. \end{cases}$$

Erfüllt umgekehrt eine Zahl B diese Kongruenzen, so sind, falls $B' = B$ gesetzt wird, die Kongruenzen (2), und da

$$B \equiv B \pmod{2A'}$$

ist, auch die Kongruenzen (1) erfüllt. Die Bestimmungs-Kongruenzen für B sind demnach gleichwertig mit den Kongruenzen (3). Es läßt sich also in der Bestimmung von A, B, C die Absonderung der beiden Formen (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) von (a_3, b_3, c_3) gänzlich aufheben, wodurch das Bestehen des associativen Gesetzes evident wird.

Man kann auch leicht eine Klasse angeben, welche für die Komposition das Einheitselement bildet. Da nämlich D quadratischer Rest modulo 4 ist, so ist die Zahl 1 durch mindestens eine Formen-Klasse (der Diskriminante D) darstellbar, aber auch nur durch e i n e Formen-Klasse. Denn jede Klasse, welche 1 darstellt, muß eine Form mit dem ersten Koefficienten 1 enthalten, und alle Formen mit dem ersten Koefficienten 1 sind parallel, also äquivalent. Nehmen wir nun eine solche Form $(1, b, c)$. Diese ist mit jeder Form (a', b', c') einhellig, und die Zusammensetzung mit dieser Form ergibt eine Form (A, B, C), worin

$$\begin{aligned} A &= 1 . a' = a' \\ B &\equiv b \pmod 2 \\ B &\equiv b' \pmod{2a'} \\ B^2 &\equiv D \pmod{4a'} \end{aligned}$$

ist und C durch den Wert von D bestimmt ist. Man sieht, daß für B die Zahl b' gesetzt werden kann, sodaß die zusammengesetzte Form wieder (a', b', c') wird.

Die Klasse, in der 1 darstellbar ist, hat demnach die Eigenschaft, daß durch Komposition mit ihr jede Klasse ungeändert bleibt, sie bildet also das Einheitselement (es kann nur ein solches geben) für die Komposition und heißt Hauptklasse.

Weiter besteht der Satz: die Zusammensetzung zweier entgegengesetzter Klassen ergibt die Hauptklasse.

Es ist nämlich allgemein $(a, -b, c)$ äquivalent mit (c, b, a). Gehört daher (a, b, c) zur Klasse K, so kann (c, b, a) als Repräsentant der zu K entgegengesetzten Klasse gewählt werden. Ferner ist (a, b, c) mit (c, b, a) einhellig, weil $a, c, \frac{b+b}{2}$ keinen gemeinsamen Teiler haben, und durch Zusammensetzung der beiden Formen läßt sich, wie man leicht sieht, die Form $(ac, b, 1)$ bilden, die zur Hauptklasse gehört, da die Zahl 1 durch sie darstellbar ist.

Aus dem letzten Satz folgt unmittelbar, daß die Komposition der Klassen eindeutig umkehrbar ist.

Somit ist der Beweis geführt, daß die Formen-Klassen in Bezug auf ihre Komposition eine Abelsche Gruppe bilden. Es handelt sich jetzt darum, die Komposition der Klassen in Verbindung zu bringen mit der Frage nach der Darstellbarkeit von Zahlen durch bestimmte quadratische Formen.

In dieser Hinsicht sind folgende Sätze wichtig:

1) Ist p eine zu D teilerfremde Primzahl, die durch die Klasse K darstellbar ist, so ist p^ν durch die Klasse K^ν darstellbar[1]) (für $\nu \geqq 1$).

---

1) Gemäß der in der Gruppentheorie üblichen Schreibweise soll die aus K_1 und K_2 zusammengesetzte Klasse (das „Produkt" von K_1 und K_2) mit $K_1 K_2$ bezeichnet werden. Ferner wird für eine beliebige Klasse K

Wenn nämlich p in K darstellbar ist, so muß es in K eine Form (p, q, r) geben, und da $(p, D) = 1$ ist, so muß $(p, q) = 1$ sein. Unsere Behauptung ist daher in der folgenden enthalten: existiert in K eine Form (p, q, r), bei der $(p, q) = 1$ ist, so existiert in K^ν eine Form (p^ν, Q, r). Die Gültigkeit dieser Behauptung ergibt sich durch Anwendung der vollständigen Induktion aus folgendem Satz: sind (p, q, r) und (p^α, q', r') zwei Formen der Diskriminante D (α bedeutet eine ganze Zahl $\geqq 1$) und ist

$$(p, q) = 1, \quad q' \equiv q \pmod{2p},$$

so sind die beiden Formen einhellig, und jede aus ihnen zusammengesetzte Form hat die Gestalt

$$(p^{\alpha+1}, q'', r''),$$

wobei $q'' \equiv q \pmod{2p}$ ist.

Daß (p, q, r) mit (p^α, q', r') einhellig ist, folgt daraus, daß

$$q + q' \equiv 2q \pmod{2p}, \qquad \frac{q+q'}{2} \equiv q \pmod{p},$$

also

$$\left(\frac{q+q'}{2}, p\right) = (p, q) = 1$$

ist, und die Kongruenz $q'' \equiv q \pmod{2p}$ ist eine der Bestimmungs-Kongruenzen für q''.

Satz 1) ist also bewiesen.

2) Ist eine Zahl m in K darstellbar, so ist sie auch in K^{-1} darstellbar.

Denn zugleich mit (m, n, r) ist $(m, -n, r)$ eine Form der Diskriminante D.

3) Sind m_1, m_2 irgend zwei teilerfremde Zahlen, die bezüglich in K_1 und K_2 darstellbar sind, so ist $m_1 . m_2$ in $K_1 K_2$ darstellbar.

Denn die Zusammensetzung zweier Formen (m_1, n_1, r_1), (m_2, n_2, r_2) (die gemäß der Voraussetzung sicher einhellig sind) ergibt eine Form mit dem ersten Koefficienten $m_1 . m_2$, und dieser ist eine durch $K_1 K_2$ darstellbare Zahl. — Zwei Darstellungen einer Zahl m mögen nur dann verschieden heißen, wenn sie zu verschiedenen (das heißt: modulo $2m$ verschiedenen) Kongruenzwurzeln gehören; andernfalls heißen sie associiert. Gemäß dieser Definition ist

---

$$K^1 = K, \; K^\nu K = K^{\nu+1} \; (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt. K^0 bedeutet die Hauptklasse, K^{-1} die zu K entgegengesetzte Klasse. Ist K zweiseitig, so ist $K^1 = K^{-1}$, $K^2 = K^0$; umgekehrt folgt aus dem Bestehen dieser Gleichung, daß K zweiseitig ist.

die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen einer Zahl m durch Formen der Diskriminante D gleich der Anzahl der verschiedenen Formen (m, n, r), wenn parallele Formen als gleich angesehen werden. Für eine zu D teilerfremde, positive Zahl m ist diese Anzahl gleich der Anzahl der (modulo $2m$) verschiedenen Lösungen der Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{4m},$$

also gleich 2^μ (μ bedeutet die Anzahl der verschiedenen Primteiler von m) oder 0, je nachdem D quadratischer Rest modulo $4m$ ist oder nicht.

Die Werte 2^μ, 0 für die fraglichen Anzahlen lassen sich gemeinsam ausdrücken durch das Produkt

$$\prod_{\alpha=1}^{\mu} \left\{1 + \left(\frac{D}{p_\alpha}\right)\right\},$$

worin p_α die verschiedenen Primteiler von m durchläuft, $\left(\frac{D}{p_\alpha}\right)$ für ungerades p_α das Legendresche Symbol bedeutet und für $p_\alpha = 2$ den Wert

$$(-1)^{\frac{D^2-1}{8}}$$

besitzen soll. —

Auf Grund der Sätze 1), 2), 3) wird sich nun eine Korrespondenz ergeben zwischen der Zusammensetzung einer zu D teilerfremden, darstellbaren Zahl $m > 1$ aus Primzahlpotenzen und der Zusammensetzung der Klassen, die m darstellen, aus Potenzen derjenigen Klassen, welche die Primfaktoren von m darstellen.

Es sei nämlich $m = p_1^{\nu_1} \ldots p_\mu^{\nu_\mu}$ eine zu D teilerfremde Zahl, für welche die Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{4m}$$

lösbar ist. Dann ist jedenfalls auch die Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{4p_\alpha}$$

lösbar (für $\alpha = 1, \ldots, \mu$).

p_α ist also durch eine Klasse K_α darstellbar, folglich $p_\alpha^{\nu_\alpha}$ durch die Klasse $K_\alpha^{\nu_\alpha}$ (nach Satz 1)) und auch durch $K_\alpha^{-\nu_\alpha}$ (nach Satz 2)). Es gibt demnach in $K_\alpha^{\nu_\alpha}$ eine Form $(p_\alpha^{\nu_\alpha}, q_\alpha, r_\alpha) = f_\alpha$ und in $K_\alpha^{-\nu_\alpha}$ eine Form $(p_\alpha^{\nu_\alpha}, -q_\alpha, r_\alpha) = g_\alpha$.

Wählen wir nun für jedes α eine der beiden Formen f_α, g_α, so erhalten wir 2^μ Kombinationen von je μ Formen. Die Formen einer Kombination lassen sich zu einer Form (P, Q, R) zusammensetzen, in der

$$P = p_1^{\nu_1} \dots p_\mu^{\nu_\mu} = m$$

ist und Q modulo $2m$ durch die Kongruenzen

$$\begin{aligned} Q &\equiv \pm q_\alpha \pmod{2p_\alpha^{\nu_\alpha}}; \quad \alpha = 1, \dots, \mu \\ Q^2 &\equiv \quad D \pmod{4m} \end{aligned}$$

bestimmt ist.

(Wie man leicht sieht, folgt das Bestehen der letzten Kongruenz von selbst aus den μ vorhergehenden Kongruenzen.)

Wir erhalten so 2^μ Formen mit dem ersten Koefficienten m. Diese sind alle von einander verschieden; das heißt: von je zwei Formen sind die zweiten Koefficienten inkongruent modulo $2m$. Denn sind Q' und Q'' aus zwei verschiedenen Formen-Kombinationen hervorgegangen, so gibt es mindestens ein α, für welches

$$Q' \equiv -Q'' \pmod{2p_\alpha^{\nu_\alpha}}$$

ist. Wäre nun Q' und Q'' kongruent modulo $2m$, so müßte auch

$$Q' \equiv +Q'' \pmod{2p_\alpha^{\nu_\alpha}}$$

sein; daraus würde aber folgen, daß $p_\alpha^{\nu_\alpha}$ in Q' aufginge, was mit der Annahme $(m, D) = 1$ unverträglich ist.

Somit ergibt sich, daß die Zahlen Q, die man aus den 2^μ verschiedenen Kombinationen der f_α, g_α erhält, sämtliche 2^μ Kongruenzwurzeln repräsentieren, zu denen gehörig die Zahl m dargestellt werden kann.

Zu jeder Kombination von Formen f_α, g_α gehört eine Kombination von Exponenten $\pm \nu_\alpha$; daher gehört zu jeder Kongruenzwurzel eindeutig eine Klasse

$$K_1^{c_1} \dots K_\mu^{c_\mu},$$

wobei $c_\alpha = \pm \nu_\alpha$ ist (für $\alpha = 1, \dots, \mu$).

Insbesondere folgt, daß die Zahl m nur durch eine Klasse von dieser Gestalt darstellbar ist. Natürlich brauchen die 2^μ formal verschiedenen Klassen nicht tatsächlich alle von einander verschieden zu sein.

Wir können das Ergebnis dieser Betrachtung so aussprechen: die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer zu D teilerfremden Zahl $m = p_1^{\nu_1} \dots p_\mu^{\nu_\mu}$ durch eine Klasse K ist gleich der Anzahl derjenigen Summanden in der formalen Entwicklung des Produktes

$$\prod_{\alpha=1}^{\mu}(K_\alpha^{\nu_\alpha}+K_\alpha^{-\nu_\alpha}),$$

welche gleich K sind, wobei bezüglich K_α eine der beiden (nicht notwendig verschiedenen) Klassen bedeutet, durch die p_α darstellbar ist. (Wie leicht ersichtlich, ist p_α nur durch die Klassen K_α, K_α^{-1} darstellbar.)

Hierin liegt insbesondere: das Produkt zweier Klassen, welche dieselbe zu D teilerfremde Zahl m (>0) darzustellen fähig sind, ist gleich dem Quadrat einer Klasse. (Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial.)

Es folgt auch der Satz: ist $(m, D) = (m', D) = 1$, $m, m' > 0$ und sind m, m' beide darstellbar, so gibt es zwei (nicht notwendig verschiedene) Klassen K, K' derart, daß m in K, m' in K' und $m \cdot m'$ in KK' darstellbar ist. Denn es seien $p_1, \ldots, p_n$ die in $m \cdot m'$ als Faktoren auftretenden Primzahlen,

$$\left.\begin{aligned} m &= p_1^{\lambda_1}\ldots p_n^{\lambda_n}, \quad \lambda_\nu \geqq 0 \\ m' &= p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}, \quad \mu_\nu \geqq 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu = 1, \ldots, n;$$

dann ist m darstellbar durch eine Klasse $K_1^{\lambda_1}\ldots K_n^{\lambda_n} = K$, m' durch $K_1^{\mu_1}\ldots K_n^{\mu_n} = K'$, und zwar gilt dies auch, falls eine der Zahlen m, m' gleich 1 ist. (Die überflüssig hinzugefügten 0-ten Potenzen stören offenbar nicht.)

$m \cdot m'$ ist gleich $p_1^{\lambda_1+\mu_1}\ldots p_n^{\lambda_n+\mu_n}$, also darstellbar durch die Klasse $K_1^{\lambda_1+\mu_1}\ldots K_n^{\lambda_n+\mu_n} = KK'$, sodaß die Behauptung zutrifft.

§ 2. Die Klassen-Charaktere.

Um die Gruppen-Eigenschaft der Komposition der Klassen auszunutzen, ist es zweckmäßig, die sogenannten „Charaktere“ der Abelschen Gruppe einzuführen.

Dabei stützen wir uns auf einen allgemeinen Satz der Gruppentheorie, welcher besagt: zu jeder (endlichen) Abelschen Gruppe der Ordnung h gibt es ein System von h Funktionen, durch die jedem Element (C) der Gruppe ein (reeller oder komplexer) Zahlwert $\chi(C)$ zugeordnet wird, und die folgende Eigenschaften besitzen:

1) Sie nehmen für das Einheitselement den Wert 1 an.

2) $\chi(C) \cdot \chi(C') = \chi(CC')$.

Diese Funktionen nennt man Charaktere der Abelschen Gruppe. (Es läßt sich zeigen, daß es nicht mehr als h Charaktere für eine Abelsche Gruppe der Ordnung h geben kann.)

Die Charaktere bilden in Bezug auf die Operation der gewöhnlichen Multiplikation ihrerseits eine Abelsche Gruppe, welche der gegebenen isomorph ist. Das Einheitselement dieser Gruppe (der „Hauptcharakter“ oder „Einheits-Charakter“) hat für jedes Element C der ersten Gruppe den Wert 1. Allgemeiner läßt sich aussagen: jeder Wert $\chi(C)$ eines Charakters ist eine h-te Einheitswurzel.

Aus den Eigenschaften der Charaktere ergeben sich folgende beiden, für das Rechnen mit Charakteren grundlegenden Sätze:

Die über alle Elemente C der Abelschen Gruppe erstreckte Summe $\sum\limits_{C} \chi(C)$ ist gleich h oder 0, je nachdem χ der Hauptcharakter oder ein anderer Charakter ist.

Die über alle Charaktere erstreckte Summe $\sum\limits_{\chi} \chi(C)$ ist gleich h oder 0, je nachdem C das Einheitselement oder ein anderes Element der Abelschen Gruppe ist.

Es gilt ferner über die Charaktere der allgemeine Satz: ist G eine Untergruppe der Ordnung h' von einer Abelschen Gruppe der Ordnung h, so gibt es unter den h Charakteren dieser Gruppe genau $\frac{h}{h'}$, die für jedes Element aus G den Wert 1 annehmen, während für jedes nicht in G enthaltene Element der Abelschen Gruppe mindestens einer dieser Charaktere von 1 verschieden ist.

Die genannten Sätze über Abelsche Gruppen wenden wir nun an auf die specielle Gruppe der Formen-Klassen einer Diskriminante D. Zu dieser gehört eine isomorphe Gruppe von „Klassen-Charakteren“ (die wir im folgenden auch kurz als „Charaktere“ bezeichnen werden).

χ_1 sei der Hauptcharakter, K_1 die Hauptklasse.

Die Gruppe der Klassen hat zur Untergruppe das System der ambigen Klassen, das heißt derjenigen Klassen K, für die

$$K^2 = K_1$$

ist. Dieser Untergruppe muß eine isomorphe Untergruppe der Gruppe der Charaktere entsprechen, welche diejenigen Charaktere χ enthält, für die

$$\chi^2 = \chi_1$$

ist. Da χ_1 stets den Wert 1 hat, so ist die Bedingung

$$\chi^2 = \chi_1$$

dann und nur dann erfüllt, wenn für jede Klasse K

$$\chi(K) = \pm 1$$

ist.

Da andrerseits jeder Wert eines beliebigen Charakters χ eine Einheitswurzel sein muß, so folgt, daß die Charaktere aus der betrachteten Untergruppe die Gesamtheit aller stets reellen Charaktere ausmachen. Man bezeichnet sie kurz als die „reellen Charaktere".

Wegen des Isomorphismus zwischen der Gruppe der Klassen und der der Charaktere muß die Anzahl a der reellen Charaktere mit der Anzahl der zweiseitigen Klassen übereinstimmen.

Die reellen Charaktere sind dadurch gekennzeichnet, daß sie für jede Klasse K^2 (das heißt für jede Klasse, die sich als Quadrat einer Klasse darstellen läßt) den Wert 1 haben. Die Klassen K^2 bilden offenbar eine Untergruppe G der Gruppe aller Klassen. Da die Quadrate zweier Klassen K, K' dann und nur dann übereinstimmen, wenn KK'^{-1} eine zweiseitige Klasse ist, so ergibt sich, daß die Ordnung h' der Gruppe G gleich $\frac{h}{a}$ ist. (a ist die Anzahl der zweiseitigen Klassen wie auch der reellen Charaktere.)

Durch Anwendung des vorhin erwähnten Satzes über die Untergruppen Abelscher Gruppen auf die Untergruppe G der Gruppe der Formen-Klassen finden wir, daß die h' Klassen aus G die einzigen sind, für die alle reellen Charaktere den Wert 1 besitzen.

Wir teilen nun sämtliche Formen-Klassen in „Geschlechter" ein, indem wir zwei Klassen K, K' dann und nur dann zu demselben Geschlecht rechnen, wenn für jeden reellen Charakter χ

$$\chi(K) = \chi(K'), \text{ also } \chi(KK'^{-1}) = \chi(KK') = 1 \text{ ist.}$$

Dasjenige Geschlecht, welches die Klassen enthält, für welche alle reellen Charaktere gleich 1 sind, heißt das Hauptgeschlecht. Dieses Geschlecht ist identisch mit der Gruppe G, und die übrigen Geschlechter sind (gemäß der Weberschen Bezeichnungsweise) die Nebengruppen von G. Wir können diesen Sachverhalt auch so ausdrücken, daß wir sagen: die Einteilung der Klassen in Geschlechter ist eine Zerlegung der Abelschen Gruppe der Klassen modulo G [1]).

Aus der Tatsache, daß die Klassen des Hauptgeschlechts und ebenso die reellen Charaktere eine Gruppe bilden, ergeben sich folgende beiden Sätze:

---

1) Die hier gegebene Definition des Geschlechts stimmt zwar nicht begrifflich, wohl aber (wie nachher gezeigt wird) sachlich mit der Gaußischen Definition überein.

1) Die Summe $\sum\limits_{K}' \chi(K)$, erstreckt über alle Klassen des Hauptgeschlechts, ist gleich h' oder 0, je nachdem der Charakter χ reell ist oder nicht.

2) Die Summe $\sum\limits_{\chi}' \chi(K)$, erstreckt über alle reellen Charaktere, ist gleich a oder 0, je nachdem die Klasse K dem Hauptgeschlecht angehört oder nicht.

Das eine von den Endergebnissen des vorigen Paragraphen können wir jetzt so formulieren: die Klassen, in denen eine bestimmte, zu D teilerfremde, positive Zahl m darstellbar ist, gehören alle demselben Geschlecht an. Es hat also jeder reelle Charakter für alle diese Klassen denselben Wert; dieser Wert ist demnach durch die Zahl m eindeutig bestimmt.

Hieraus wird ersichtlich, daß man jedem reellen Klassen-Charakter χ eine zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ zuordnen kann, welche für jede positive, zu D teilerfremde und durch Formen der Diskriminante D darstellbare Zahl n — (von jetzt ab sind in diesem, wie auch in den drei nächsten Paragraphen stets nur solche Zahlen gemeint, wenn von „darstellbaren" Zahlen die Rede ist) — definiert ist und zwar so, daß für jede Klasse K, durch welche n darstellbar ist, $\chi(n)$ gleich dem Werte $\chi(K)$ des Klassen-Charakters ist.

Von dieser Funktion $\chi(n)$ läßt sich folgendes aussagen: sind m, m' zwei darstellbare Zahlen, so ist

$$\chi(m) \cdot \chi(m') = \chi(m \cdot m').$$

Denn gemäß dem am Schluß des ersten Paragraphen bewiesenen Satze lassen sich die Klassen K, K' so wählen, daß m durch K, m' durch K', $m \cdot m'$ durch KK' darstellbar ist, und daraus folgt:

$$\chi(m) \cdot \chi(m') = \chi(K) \cdot \chi(K') = \chi(KK') = \chi(m \cdot m').$$

Außerdem ist $\chi(1) = \chi(K_1) = 1$.

Diese Tatsachen legen die Vermutung nahe, daß sich die Funktionen $\chi(n)$, die zu den reellen Klassen-Charakteren gehören, durch geeignete Festsetzungen zu reellen Zahlcharakteren modulo D erweitern lassen[1]). Diese Vermutung wird sich in der Tat als richtig herausstellen, und indem wir den Nachweis ihrer Richtig-

---

1) Unter einem Zahlcharakter modulo k ist eine für positives n definierte Funktion zu verstehen, die folgenden Bedingungen genügt:

$$f(n) = 0 \text{ für } (n, k) > 1,\ f(1) = 1,\ f(n_1) \cdot f(n_2) = f(n_1 \cdot n_2) \text{ und}$$
$$f(n_1) = f(n_2) \text{ für } n_1 \equiv n_2 \pmod{k}.$$

keit führen, werden wir zugleich eine vollständige Übersicht über die Gesamtheit der reellen Klassen-Charaktere gewinnen[1]).

Wir stellen zunächst folgende Überlegung an: es sei $f(n)$ für alle zu D teilerfremden, positiven Zahlen n erklärt; für zwei solche Zahlen n, n' sei

$$f(n) \,.\, f(n') = f(n \,.\, n');$$

sind ferner n und n' durch dieselbe Klasse darstellbar, so sei $f(n) = f(n')$; schließlich sei

$$f(1) = 1.$$

Dann können wir eine Klassen-Funktion $F(K)$ bilden, die so beschaffen ist, daß für eine durch die Klasse K darstellbare[2]) Zahl n stets

$$F(K) = f(n)$$

ist. (Der Wert von $F(K)$ ist auf diese Weise durch K eindeutig bestimmt.)

Hierbei ist

$$F(K_1) = f(1) = 1.$$

Sind ferner K, K' irgend zwei (nicht notwendig verschiedene) Klassen, so lassen sich zwei zu einander teilerfremde, darstellbare Zahlen n, n' so wählen, daß n in K, n' in K' dargestellt werden kann. Es ist dann $n \,.\, n'$ durch KK' darstellbar (weil $(n, n') = 1$ ist), und daraus folgt:

$$F(K) \,.\, F(K') = f(n) \,.\, f(n') = f(n \,.\, n') = F(KK').$$

$F(K)$ ist also ein Klassen-Charakter. Nehmen wir insbesondere f als reelle Funktion an, so folgt, daß $F(K)$ gleich einem reellen Charakter $\chi(K)$ und $f(n) = \chi(n)$ für alle darstellbaren Zahlen n ist. (Wir wollen in diesem Falle sagen, daß $f(n)$ den Charakter $\chi(K)$ „bestimmt".)

Um hiervon Anwendung machen zu können, müssen wir zahlentheoretische Funktionen finden, welche den für $f(n)$ aufgestellten Bedingungen genügen. Zu solchen Funktionen führt uns folgende Erwägung: es seien n_1, n_2 zwei Zahlen, die durch dieselbe Form (a, b, c) der Diskriminante D darstellbar sind, es sei also

$$n_1 = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad n_2 = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2;$$

1) Das Verfahren, welches wir anwenden, läuft darauf hinaus, zu zeigen, daß die obige Definition von „Geschlecht" mit der Gaußischen gleichbedeutend ist.

2) Es sei darauf hingewiesen, daß auch überall da, wo (bis inkl. § 5) von Darstellbarkeit durch eine bestimmte Klasse gesprochen wird, das Wort „darstellbar" in dem vorhin angegebenen engeren Sinne zu verstehen ist.

dann geht durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, deren Determinante gleich d gesetzt werden möge, die Form (a, b, c) der Diskriminante D in eine Form (n_1, n, n_2) von der Diskriminante $d^2 D$ über (wie sich elementar beweisen läßt). Daher ist

$$n^2 - 4n_1 n_2 = d^2 D, \; 4n_1 n_2 = n^2 - d^2 D.$$

Hieraus folgt zunächst: ist p eine in D aufgehende ungerade Primzahl, so ist

$$\left(\frac{4n_1 . n_2}{p}\right) = 1, \text{ also } \left(\frac{n_1}{p}\right) = \left(\frac{n_2}{p}\right).$$

($\left(\frac{n}{p}\right)$ bedeutet das Legendresche Symbol. Es ist zu beachten, daß

$$(n_1, D) = (n_2, D) = 1, \; (2, p) = 1, \text{ also } (4n_1 n_2, p) = 1 \text{ ist.})$$

Es hat demnach $\left(\frac{n}{p}\right)$, als Funktion von n betrachtet, für je zwei durch dieselbe Klasse darstellbare Zahlen denselben Wert.

Nehmen wir hinzu, daß

$$\left(\frac{1}{p}\right) = 1$$

ist und daß für zwei zu D teilerfremde, positive Zahlen m_1, m_2

$$\left(\frac{m_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{m_2}{p}\right) = \left(\frac{m_1 . m_2}{p}\right)$$

ist, so folgt nach dem vorhin bewiesenen, daß die Funktion $\left(\frac{n}{p}\right)$ von n einen reellen Charakter $\chi(K)$ bestimmt.

Für g e r a d e s D ist in der Gleichung

$$4n_1 n_2 = n^2 - d^2 D$$

die Zahl n gerade ($n = 2\bar{n}$), während n_1, n_2 ungerade sind, da

$$(n_1, D) = (n_2, D) = 1$$

vorausgesetzt ist.

Die Gleichung läßt sich also auf die Form bringen

$$n_1 . n_2 = \bar{n}^2 - d^2 . \frac{D}{4},$$

und wir erhalten

für $\frac{D}{4} \equiv -1 \pmod 4$

$$n_1 . n_2 \equiv \bar{n}^2 + d^2 \equiv 1 \pmod 4$$
$$\left(\frac{-1}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_2}\right),$$

für $\frac{D}{4} \equiv +2 \pmod 8$

$$n_1 . n_2 \equiv \bar{n}^2 - 2d^2 \equiv \pm 1 \pmod 8$$
$$\left(\frac{2}{n_1}\right) = \left(\frac{2}{n_2}\right),$$

für $\frac{D}{4} \equiv -2 \pmod 8$

$$n_1 . n_2 \equiv \bar{n}^2 + 2d^2 \equiv 2 \pm 1 \pmod 8$$
$$\left(\frac{-2}{n_1}\right) = \left(\frac{-2}{n_2}\right),$$

für $\frac{D}{4} \equiv 4 \pmod 8$

$$n_1 . n_2 \equiv \bar{n}^2 \equiv 1 \pmod 4$$
$$\left(\frac{-1}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_2}\right),$$

für $\frac{D}{4} \equiv 0 \pmod 8$

$$n_1 . n_2 \equiv \bar{n}^2 \equiv 1 \pmod 8$$
$$\left(\frac{-1}{n_1}\right) = \left(\frac{-1}{n_2}\right), \quad \left(\frac{2}{n_1}\right) = \left(\frac{2}{n_2}\right).$$

$\left(\left(\frac{-1}{n}\right), \left(\frac{2}{n}\right), \left(\frac{-2}{n}\right)\right.$ sind die Jacobischen Symbole.$\Big)$

Es folgt nun ebenso wie vorhin, daß in jedem der betrachteten Unterfälle das Jacobische Symbol, das für alle in derselben Klasse darstellbaren (ungeraden) Zahlen denselben Wert annimmt, einen reellen Klassen-Charakter bestimmt. $\Big($Im Falle $\frac{D}{4} \equiv 0 \pmod 8$ gilt dies sowohl für $\left(\frac{-1}{n}\right)$ wie für $\left(\frac{2}{n}\right)$.$\Big)$

Sind also $p_1, \ldots, p_\lambda$ die ungeraden Primfaktoren von D[1]), so liefern die Funktionen $\left(\frac{n}{p_1}\right), \cdots, \left(\frac{n}{p_\lambda}\right)$ (für $\lambda > 0$), ferner

$$\left(\frac{-1}{n}\right) \text{ für } D \equiv -4 \pmod{16} \text{ und } D \equiv 0 \pmod{16}$$

1) Besitzt D keinen ungeraden Primteiler, so werde $\lambda = 0$ gesetzt.

$$\left(\frac{2}{n}\right) \text{ für } D \equiv \quad 8 \pmod{32} \text{ und } D \equiv 0 \pmod{32}$$

$$\left(\frac{-2}{n}\right) \text{ für } D \equiv -8 \pmod{32}$$

reelle Klassen-Charaktere.

Das Produkt zweier oder mehrerer reeller Charaktere ergibt wieder einen reellen Charakter.

Setzen wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{p_\alpha}\right) &= l_\alpha(n) \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \lambda \\
\left(\frac{-1}{n}\right) &= l_{\lambda+1}(n) \text{ für } D \equiv -4 \text{ oder } \equiv 0 \pmod{16} \\
\left(\frac{2}{n}\right) &= l_{\lambda+1}(n) \text{ für } D \equiv \quad 8 \pmod{32} \\
\left(\frac{-2}{n}\right) &= l_{\lambda+1}(n) \text{ für } D \equiv -8 \pmod{32} \\
\left(\frac{2}{n}\right) &= l_{\lambda+2}(n) \text{ für } D \equiv \quad 0 \pmod{32}
\end{aligned}$$

und definieren $\nu = \lambda$ für ungerades D und für $D \equiv 4 \pmod{16}$, $\nu = \lambda + 2$ für $D \equiv 0 \pmod{32}$ und in den übrigen Fällen $\nu = \lambda + 1$, bezeichnen wir ferner den durch $l_\alpha(n)$ ($\alpha = 1, \ldots, \nu$) bestimmten Klassen-Charakter mit χ_α, so können wir die Gesamtheit aller durch Multiplikation aus den χ_α ableitbaren Charaktere darstellen durch die Gesamtheit der Summanden in der formalen Entwicklung des Produktes

$$(1 + \chi_1) \ldots (1 + \chi_\nu).$$

(Dies folgt unmittelbar daraus, daß für jedes α und für jede Klasse K

$$\chi_\alpha^2(K) = 1 \text{ ist.})$$

Wir erhalten also 2^ν formal verschiedene Charaktere; es fragt sich, wie viele von diesen wirklich verschieden sind. (Der Fall, daß zwei dieser Charaktere, χ und χ', nicht wirklich verschieden sind, liegt dann (und nur dann) vor, wenn für jede Klasse K

$$\chi(K) = \chi'(K)$$

oder, was dasselbe besagt, wenn für jedes darstellbare n

$$\chi(n) = \chi'(n) \text{ ist.})$$

Zur Beantwortung der Frage ist zuerst zu bemerken: wenn unter den 2^ν Summanden der Entwicklung von $(1 + \chi_1) \ldots (1 + \chi_\nu)$

ein Charakter genau $m$mal vorkommt, so kommt jeder überhaupt auftretende Charakter, insbesondere der Hauptcharakter, genau $m$mal vor.

Denn bestehen zwei Gleichungen

$$\chi_1^{a_1} \cdots \chi_\nu^{a_\nu} = \chi_1^{a'_1} \cdots \chi_\nu^{a'_\nu}$$
$$\chi_1^{a_1} \cdots \chi_\nu^{a_\nu} = \chi_1^{a''_1} \cdots \chi_\nu^{a''_\nu},$$

wo $0 \leqq a_\mu, a'_\mu, a''_\mu \leqq 1$ (für $\mu = 1, \ldots, \nu$) ist, und sind bezüglich b'_μ, b''_μ die kleinsten nicht negativen Reste von $a_\mu + a'_\mu$, $a_\mu + a''_\mu$ modulo 2, so ist

$$\chi_1^{b'_1} \cdots \chi_\nu^{b'_\nu} = \chi_1^{b''_1} \cdots \chi_\nu^{b''_\nu} = 1;$$

umgekehrt gelangt man von zwei solchen Darstellungen des Hauptcharakters eindeutig zu zwei Darstellungen $\chi_1^{a'_1} \ldots \chi_\nu^{a'_\nu}$, $\chi_1^{a''_1} \ldots \chi_\nu^{a''_\nu}$ des Charakters $\chi_1^{a_1} \ldots \chi_\nu^{a_\nu}$, und die Produkte $\chi_1^{b'_1} \ldots \chi_\nu^{b'_\nu}$, $\chi_1^{b''_1} \ldots \chi_\nu^{b''_\nu}$ sind dann und nur dann formal verschieden, wenn $\chi_1^{a'_1} \ldots \chi_\nu^{a'_\nu}$ von $\chi_1^{a''_1} \ldots \chi_\nu^{a''_\nu}$ formal verschieden ist.

(Es ist zu beachten, daß der formalen Identität

$$\chi_1^{a_1} \cdots \chi_\nu^{a_\nu} = \chi_1^{a_1} \cdots \chi_\nu^{a_\nu}$$

nach dem angegebenen Verfahren die Identität $\chi_1^0 \ldots \chi_\nu^0 = 1$ entspricht.)

Es kommt also darauf an, zu entscheiden, wie oft sich der Hauptcharakter in der Form $\prod_{\alpha=1}^{\nu} \chi_\alpha^{n_\alpha}$ darstellen läßt, wo jeder der Exponenten n_α einen der Werte 0, 1 hat.

Dies ist nun auf genau zwei Weisen möglich. Die eine mögliche Darstellung erhält man für $n_1 = \cdots = n_\nu = 0$, die andere gewinnt man aus folgender Überlegung: es sei

$$D = \varepsilon . 2^c . P . Q^2,$$

worin P positiv, ungerade und quadratfrei, Q ungerade und $\varepsilon = \pm 1$ sein soll.

$p_1, \ldots, p_\varrho$ seien die in P enthaltenen Primteiler. Ferner sei n eine zu D teilerfremde, positive Zahl. $\left(\frac{D}{n}\right)$ bedeute bei ungeradem n das Jacobische Symbol; bei einer geraden Zahl n, für welche $2^b . n'$ die Zerlegung in eine Potenz von 2 und eine ungerade Zahl sei, werde (für ungerades D)

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{2}\right)^b \cdot \left(\frac{D}{n'}\right)$$

definiert. Dann ist

für ungerades n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^c\cdot\left(\frac{P}{n}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)\cdot\left(\frac{(-1)^{\frac{P-1}{2}}}{n}\right)\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^c\cdot\left(\frac{n}{P}\right),$$

für gerades n, also für $n = 2^b . n'$, wo n' ungerade und $b > 0$ ist,

$$D \equiv 1 \pmod 4, \quad c = 0, \quad \varepsilon = (-1)^{\frac{P-1}{2}}$$

und, weil $Q^2 \equiv 1 \pmod 8$ ist,

$$D \equiv \pm P \pmod 8,$$

also [1])

$$\left(\frac{D}{2}\right) = \left(\frac{2}{P}\right)$$

und daher

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{2}\right)^b\cdot\left(\frac{D}{n'}\right) = \left(\frac{D}{2}\right)^b\cdot\left(\frac{\varepsilon}{n'}\right)\cdot\left(\frac{P}{n'}\right) = \left(\frac{2}{P}\right)^b\cdot\left(\frac{n'}{P}\right) = \left(\frac{n}{P}\right).$$

Mit Hülfe dieser Formeln können wir nun zeigen, daß sich unter allen Umständen eine Kombination $m_1, \ldots, m_\nu$ der Zahlen 0, 1 so wählen läßt, daß für jedes zu D teilerfremde $n\,(> 0)$

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} l_\alpha^{m_\alpha}(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$$

ist. Es ist nämlich für ungerades D oder für $D \equiv 4 \pmod{16}$

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right) = l_1(n)\ldots l_\varrho(n).$$

Für $D \equiv -4 \pmod{16}$ oder $D \equiv 16 \pmod{32}$ ist

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{\varepsilon\cdot(-1)^{\frac{P-1}{2}}}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{P}\right);$$

je nachdem also $\varepsilon\cdot(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ gleich $+1$ oder -1 ist, ist

$$\left(\frac{D}{n}\right) = l_1\ldots l_\varrho \quad \text{oder} \quad \left(\frac{D}{n}\right) = l_1\ldots l_\varrho . l_{\lambda+1}.$$

---

1) Da ja für ungerades D

$$\left(\frac{D}{2}\right) = (-1)^{\frac{D^2-1}{8}}$$

definiert ist.

Für $D \equiv 8 \pmod{32}$ ist
$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{P}\right) = l_1 \ldots l_\varrho \,.\, l_{\lambda+1}.$$
Für $D \equiv -8 \pmod{32}$ ist
$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{P}\right) = l_1 \ldots l_\varrho \,.\, l_{\lambda+1}.$$
Für $D \equiv 0 \pmod{32}$ ist
$$\left(\frac{D}{n}\right) = l_1 \ldots l_\varrho \,.\, l_{\lambda+1}^{m_{\lambda+1}} \,.\, l_{\lambda+2}^{m_{\lambda+2}},$$
wenn $m_{\lambda+1}$ gleich 0 oder 1 gesetzt wird, je nachdem $\varepsilon\cdot(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ gleich $+1$ oder -1 ist, und $m_{\lambda+2}$ gleich 0 oder 1 gesetzt wird, je nachdem c gerade oder ungerade ist.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich unmittelbar eine Bestimmung der Zahlen $m_1, \ldots, m_\nu$ entsprechend der gestellten Bedingung; und zwar ist dabei

für $P > 1$
$$m_1 = \cdots = m_\varrho = 1, \quad \varrho \geqq 1,$$
für $P = 1$ und ungerades $c \geqq 3$
$$m_\nu = 1,$$
für $P = 1$, gerades c und $\varepsilon = -1$
$$m_{\lambda+1} = 1.$$
(Andere Fälle sind nicht möglich, weil D kein Quadrat sein darf.)

Es ist also stets mindestens einer der Exponenten m_α von 0 verschieden.

Somit gibt es ein Produkt $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^{m_\alpha}$, das von $\prod\limits_{\alpha=1}^{\nu} \chi_\alpha^0$ formal verschieden ist und das für jedes darstellbare n seinem Werte nach mit $\left(\frac{D}{n}\right)$ übereinstimmt. Andrerseits ist für jede darstellbare Zahl n die Diskriminante D quadratischer Rest modulo $4n$ und deshalb
$$\left(\frac{D}{n}\right) = 1.$$
$\Big($Dies folgt auch bei geradem n, weil dann $\left(\frac{D}{2}\right) = 1$ sein muß.$\Big)$

Demnach stellt das Produkt $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^{m_\alpha}$ den Hauptcharakter dar. Es gibt also mindestens zwei formal verschiedene Produkte $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^{n_\alpha}$, durch welche der Hauptcharakter sich ausdrücken läßt. Andrerseits gibt es nicht mehr als zwei solche Produkte, wie jetzt bewiesen werden soll.

Wir gehen aus von folgendem elementaren Satz: wird jedem α ($\alpha = 1, \ldots, \nu$) einer der Werte ± 1 ($= \varepsilon_\alpha$) willkürlich zugeordnet[1]), so gibt es eine zu D teilerfremde Zahl r von der Art, daß für jedes α

$$l_\alpha(r) = \varepsilon_\alpha \text{ ist.}$$

Dies ergibt sich so: für ein einzelnes α ($\leqq \lambda$) kann man der Forderung $l_\alpha(r) = \varepsilon_\alpha$ (bei gegebenem ε_α) durch Erfüllung einer Kongruenz

$$r \equiv n_\alpha \pmod{p_\alpha}$$

genügen, in der für n_α entweder ein beliebiger, durch p_α nicht teilbarer quadratischer Rest oder ein beliebiger Nichtrest modulo p_α zu setzen ist. Die außerdem eventuell vorhandenen Bedingungen $(r, 2) = 1$ (bei geradem D) und $l_\alpha(r) = \varepsilon_\alpha$ (für $\alpha > \lambda$) lassen sich erfüllen, indem man r auf eine bestimmte, zu 2 teilerfremde Restklasse modulo 8 beschränkt. Die verschiedenen Bedingungs-Kongruenzen für r, auf die wir so geführt werden, haben eine gemeinsame Lösung, da die auftretenden Moduln zu je zweien teilerfremd sind, und diese Lösung r ist offenbar zu D teilerfremd.

Es läßt sich also stets eine Zahl r von der verlangten Beschaffenheit bestimmen. Zugleich ist ersichtlich, daß die Funktion $l_\alpha(n)$ für jede (positive) Zahl aus der arithmetischen Reihe $Dx + r$ (worin x alle ganzen Zahlen durchläuft) den Wert ε_α hat.

Nehmen wir jetzt an, es gäbe ein Produkt $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^{n'_\alpha}$, das weder mit $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^0$ noch mit $\prod\limits_\alpha \chi_\alpha^{m_\alpha}$ formal übereinstimmt und durch das der Hauptcharakter ausgedrückt wird; dann enthielte jedes der Produkte $\prod \chi_\alpha^{n'_\alpha}$ und $\prod \chi_\alpha^{n'_\alpha + m_\alpha}$ mindestens einen ungeraden Exponenten; man könnte daher jedenfalls eine Kombination $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$ von reellen Einheiten derart wählen, daß $\prod\limits_{\alpha=1}^{\nu} \varepsilon_\alpha^{n'_\alpha}$ und $\prod\limits_{\alpha=1}^{\nu} \varepsilon_\alpha^{n'_\alpha + m_\alpha}$ beide den Wert -1 hätten, sodaß

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} \varepsilon_\alpha^{m_\alpha} = +1, \quad \prod_{\alpha=1}^{\nu} \varepsilon_\alpha^{n'_\alpha} = -1$$

wäre. Nun werde eine zu D teilerfremde Zahl r so bestimmt, daß für die (positiven) Zahlen der arithmetischen Reihe $(Dx + r)$ jede

---

1) ε_α bezeichnet den Wert, welcher α zugeordnet ist.

der ν Funktionen l_α den entsprechenden Wert ε_α annimmt (was ja, wie eben bewiesen, möglich ist). In der arithmetischen Reihe kommen jedenfalls Primzahlen vor[1]. p sei eine dieser Primzahlen. Dann ist

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} l_\alpha^{m_\alpha}(p) = \prod_{\alpha} \varepsilon_\alpha^{m_\alpha} = +1,$$

also

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \prod_{\alpha=1}^{\nu} l_\alpha^{m_\alpha}(p) = +1. \qquad ((p, D) = 1.)$$

D ist also quadratischer Rest modulo p, für $p = 2$ ist D quadratischer Rest modulo 8, allgemein ist D quadratischer Rest modulo 4; also ergibt sich auf jeden Fall, daß D modulo $4p$ quadratischer Rest, mithin p durch Formen der Diskriminante D darstellbar ist (da ja p zu D teilerfremd ist).

Gemäß unserer Annahme würde hieraus folgen, daß

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} \chi_\alpha^{n'_\alpha}(p) = \prod_{\alpha=1}^{\nu} l_\alpha^{n'_\alpha}(p) = \prod_{\alpha=1}^{\nu} \varepsilon_\alpha^{n'_\alpha} = -1$$

wäre. $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{n'_\alpha}$ könnte also nicht gleich dem Hauptcharakter sein.

Unsere Annahme stellt sich somit als falsch heraus, und es ergibt sich, daß der Hauptcharakter auf genau zwei Weisen durch ein Produkt $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{n_\alpha}$ ausdrückbar ist. Dasselbe gilt für jeden durch ein Produkt $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{n_\alpha}$ darstellbaren reellen Charakter (wie vorhin bewiesen). Es stellen folglich die 2^ν Produkte $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{n_\alpha}$ genau $2^{\nu-1}$ verschiedene reelle Charaktere dar.

Wir gehen nun darauf aus, zu zeigen, daß dies **alle** reellen Klassen-Charaktere sind. Hierzu ist es ausreichend, zu beweisen, daß es nicht mehr als $2^{\nu-1}$ zweiseitige Klassen gibt. (Denn die Anzahl a der zweiseitigen Klassen ist ja gleich der der reellen Charaktere.) Dieser Behauptung läßt sich wiederum eine andere Form geben.

Nach einem elementaren Satz[2] enthält jede ambige Klasse (mindestens) eine zweiseitige Form, d. h. eine solche Form (a, b, c), in der

$$b \equiv 0 \pmod{a}$$

---

1) Daß **Gauß** diese Schlußweise noch nicht anwenden konnte, war der Grund, weshalb er nötig hatte, die Theorie der ternären Formen heranzuziehen. (Vgl. im Vorwort.)

2) Siehe z. B. in dem (bereits erwähnten) Lehrbuch von **Séguier** („formes quadr. . . .“), S. 42—44.

ist. Da wir (a, b, c) durch jede parallele Form ersetzen können (unbeschadet der Zugehörigkeit zu der betreffenden zweiseitigen Klasse), so folgt, daß jede zweiseitige Klasse entweder eine Form $(a, 0, c)$ oder eine Form (a, a, c) enthalten muß. Eine Form von einem dieser beiden Typen möge als „zweiseitige Normalform“ oder auch kurz als „Normalform“ bezeichnet werden. Die Anzahl aller zu einer Diskriminante D gehörigen zweiseitigen Normalformen läßt sich in einfacher Weise bestimmen.

Zu dieser Bestimmung gelangt man auf Grund der Tatsache, daß jeder Normalform $(a, 0, c)$ vermöge der Gleichung

$$D = -4ac$$

eine Zerlegung von $\frac{D}{4}$ in zwei zu einander teilerfremde Faktoren d_1, d_2 und jeder Normalform (a, a, c) auf Grund der Gleichung

$$D = a(a-4c)$$

eine Zerlegung von D in zwei Faktoren d_1, d_2 entspricht, bei welcher $d_1 - d_2$ durch 4 teilbar und

$$\left(d_1, \frac{d_1-d_2}{4}\right) = 1$$

ist. (Die Beziehung zwischen der Normalform und der Zerlegung soll so hergestellt werden, daß im ersten Fall

$$a = d_1, \quad -c = d_2,$$

im zweiten Fall

$$a = d_1, \quad a-4c = d_2$$

gesetzt wird.)

Umgekehrt erhält man aus jeder Zerlegung von D auf eine der angegebenen Arten eine zweiseitige Normalform, nämlich aus

$$D = 4d_1 d_2 \text{ die Normalform } (d_1, 0, -d_2)$$

und aus

$$D = d_1 d_2 \text{ die Normalform } \left(d_1, d_1, \frac{d_1-d_2}{4}\right)$$

der Diskriminante D.

Bei negativen Diskriminanten (für die ja nur positive Formen zugelassen werden) findet die Einschränkung statt, daß

$$d_1 > 0$$

sein muß, während für positives D aus jeder der in Betracht kommenden Zerlegungen wieder eine solche gewonnen wird, wenn man d_1, d_2 durch $-d_1, -d_2$ ersetzt. Bezeichnen wir daher mit N_1 die

Anzahl der Zerlegungen $D = 4d_1 d_2$, bei denen $(d_1, d_2) = 1$, $d_1 > 0$ ist, mit N_2 die Anzahl der Zerlegungen $D = d_1 d_2$, bei denen

$$d_1 \equiv d_2 \pmod 4, \quad \left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$$

und $d_1 > 0$ ist, so ist die Anzahl aller zulässigen Zerlegungen

$$\begin{aligned} &\text{gleich} \quad N_1 + N_2 \quad \text{für } D < 0, \\ &\text{gleich } 2(N_1 + N_2) \text{ für } D > 0. \end{aligned}$$

Da die Zuordnung der Zerlegungen zu den Normalformen umkehrbar eindeutig ist, so ist auch die Anzahl der zweiseitigen Normalformen der Diskriminante D gleich $N_1 + N_2$ oder gleich $2(N_1 + N_2)$, je nachdem D negativ oder positiv ist.

Nun hat in allen Fällen $N_1 + N_2$ den Wert 2^ν.

Denn 1) für $D \equiv 1 \pmod 4$ ist $N_1 = 0$. Bei einer Zerlegung $D = d_1 d_2$ ist die Bedingung $d_1 \equiv d_2 \pmod 4$ von selbst erfüllt, und es ist $\left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$ dann und nur dann, wenn $(d_1, d_2) = 1$ ist. Folglich ist N_2 gleich der Anzahl der Zerlegungen von D in zwei teilerfremde Faktoren, von denen der erste positiv ist, also gleich 2^λ. $N_1 + N_2 = 2^\lambda = 2^\nu$;

2) für $D \equiv -4 \pmod{16}$ ist offenbar $N_1 = 2^\lambda$. Für die Zerlegungen $D = d_1 d_2$ bedeutet die Forderung $d_1 \equiv d_2 \pmod 4$, daß $d_1 \equiv d_2 \equiv 2 \pmod 4$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist von selbst $\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \equiv -1 \pmod 4$, $\frac{d_1 - d_2}{2} \equiv -d_2 \equiv 2 \pmod 4$, $\frac{d_1 - d_2}{4}$ ist also ungerade; daher ist $\left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$ dann und nur dann, wenn $\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right) = 1$ ist. Daraus folgt, daß $N_2 = 2^\lambda$ ist. Wir erhalten also $N_1 + N_2 = 2 . 2^\lambda = 2^{\lambda+1} = 2^\nu$;

3) für $D \equiv +4 \pmod{16}$ sind die Bedingungen $d_1 \equiv d_2 \pmod 4$, $\left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$ für eine Zerlegung $D = d_1 . d_2$ unvereinbar, mithin ist $N_2 = 0$. N_1 ist wieder gleich 2^λ.
$N_1 + N_2 = 2^\lambda = 2^\nu$;

4) für $D \equiv 8 \pmod{16}$ läßt sich die Forderung $d_1 \equiv d_2 \pmod 4$ nicht erfüllen;

für $D \equiv 16 \pmod{32}$ ist sie unverträglich mit $\left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$.

In beiden Fällen ist also $N_2 = 0$. Ferner ist $N_1 = 2^{\lambda+1}$, da bei der Zerlegung $D = 4d_1 d_2$ nur entweder d_1 oder d_2 gerade sein darf. Somit ist $N_1 + N_2 = 2^{\lambda+1} = 2^\nu$;

5) für $D \equiv 0 \pmod{32}$ ist $N_1 = 2^{\lambda+1}$. Für die Zerlegung $D = d_1 d_2$ besagen die Bedingungen $d_1 \equiv d_2 \pmod 4$, $\left(d_1, \frac{d_1 - d_2}{4}\right) = 1$, daß eine der beiden Zahlen d_1, d_2 kongruent 4, die andre kongruent 0 modulo 8 ist und daß $(d_1, d_2) = 4$ ist. Es ergibt sich daher $N_2 = 2^{\lambda+1}$. $N_1 + N_2 = 2^{\lambda+2} = 2^{\nu}$.

Somit ergibt sich allgemein als Anzahl der zweiseitigen Normalformen 2^{ν} für eine negative, $2^{\nu+1}$ für eine positive Diskriminante.

Zum Beweis der Behauptung, daß höchstens $2^{\nu-1}$ ambige Klassen existieren, genügt es also, nachzuweisen, daß in jeder zweiseitigen Klasse für $D < 0$ mindestens zwei, für $D > 0$ mindestens vier Normalformen enthalten sind.

Daß nun jede zweiseitige Klasse mindestens zwei Normalformen enthält, ergibt sich einfach folgendermaßen: wie bereits erwähnt, enthält jede zweiseitige Klasse mindestens eine Normalform, also entweder eine Form $(a, 0, c)$ oder eine Form (a, a, c).

Mit einer Form $(a, 0, c)$ ist aber die Normalform $(c, 0, a)$, mit (a, a, c) die Normalform $(4c - a, 4c - a, c)$ äquivalent. (Der Übergang von der ersten Normalform zu der zweiten findet das eine Mal durch die Substitution $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, das andre Mal durch die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ statt.) Falls also nicht etwa $(a, 0, c)$ mit $(c, 0, a)$ oder (a, a, c) mit $(4c - a, 4c - a, c)$ identisch ist, so sind wir sicher, daß die betreffende zweiseitige Klasse zwei Normalformen enthält.

Jener Ausnahmefall kann aber, wie man unmittelbar sieht, nur bei negativer Diskriminante eintreten. Da für eine solche nur positive Formen in Betracht kommen und da außerdem die Formen primitiv sein müssen, so gibt es nur zwei Formen, bei denen die Ausnahme stattfindet, nämlich $(1, 0, 1)$ und $(2, 2, 1)$. Diese Formen haben aber beide die Diskriminante (-4) und gehören zur Hauptklasse (da sie die Zahl 1 darstellen), sodaß die Klasse, der diese Formen angehören, auch zwei Normalformen enthält.

Hiernach bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß für $D > 0$ in jeder ambigen Klasse vier Normalformen vorhanden sind.

Dazu machen wir Gebrauch von einigen elementaren Sätzen über die reducierten Formen.

Eine Form positiver Diskriminante (a, b, c) heißt reduciert, wenn

$$\sqrt{D} > b, \quad b > \sqrt{D} - 2\,|\,a\,|, \quad b > \sqrt{D} - 2\,|\,c\,|$$

ist, und es gilt der Satz, daß zu jeder reducierten Form f eine

Folge von $2n$ reducierten Formen $f_1, \ldots, f_{2n}$ existiert[1]), deren erste mit f übereinstimmt und die alle von einander verschieden sind, wo ferner für $1 \leqq \nu < 2n$ die Form $f_{\nu+1}$ zu f_ν und außerdem f_1 zu f_{2n} benachbart[2]) ist. Man bezeichnet diese Formenfolge als die Periode[3]) von f.

Ist speciell f eine zweiseitige (reducierte) Form, so folgt aus der Tatsache, daß f_1 zu f_{2n} benachbart ist, (da zugleich mit (a, b, c) auch (c, b, a) eine reducierte Form ist) daß die Formen f_1 und f_{2n} „Gefährten"[4]) sind. Hieraus läßt sich weiter leicht schließen, daß (für $\lambda = 1, \ldots, n$) f_λ und $f_{2n-\lambda+1}$ Gefährten sind, insbesondere gilt dies also auch für f_n und f_{n+1}. Da andrerseits f_{n+1} zu f_n benachbart ist, so ergibt sich, daß f_{n+1} eine zweiseitige Form ist. Auch ist sicher f_{n+1} von f_1 verschieden, da $1 < n + 1 \leqq 2n$ ist.

Die Periode einer zweiseitigen reducierten Form enthält also mindestens zwei zweiseitige Formen, und da alle Formen einer Periode zu derselben Formen-Klasse gehören, so erhalten wir den Satz: eine Klasse, in der eine zweiseitige reducierte Form enthalten ist, enthält jedenfalls zwei zweiseitige reducierte Formen.

Es soll nun eine Beziehung hergestellt werden zwischen den zweiseitigen Normalformen und den zweiseitigen reducierten Formen. Dazu ist zunächst folgendes zu bemerken: die zweiseitigen Formen lassen sich danach in zwei Arten scheiden, ob

$$b \equiv 0 \pmod{2a}$$

oder

$$b \equiv a \pmod{2a}$$

ist. Diese Unterscheidung gilt insbesondere auch für die zweiseitigen reducierten Formen.

Betrachten wir zunächst die zweiseitigen reducierten Formen der ersten Art. Zu einer solchen Form gibt es eine (eindeutig bestimmte) parallele Normalform $(a, 0, \bar{c})$. Dieser ist wiederum die

1) n ist eine durch f bestimmte positive Zahl.

2) Eine Form (a', b', c') heißt zu (a, b, c) benachbart, wenn $a' = c$ und $b' \equiv -b \pmod{2a'}$ ist. Genauer nennt man (a', b', c') zu (a, b, c) „nach rechts benachbart", (a, b, c) zu (a', b', c') „nach links benachbart", und es gilt der Satz, daß zu jeder reducierten Form stets eine und nur eine nach rechts benachbarte, und ebenso eine und nur eine nach links benachbarte reducierte Form existiert. — Zwei benachbarte Formen sind stets äquivalent.

3) Der Name „Periode" hat darin seinen Grund, daß bei fortgesetztem Übergang von einer reducierten Form zu ihrer benachbarten die Formen $f_1, \ldots, f_{2n}$ periodisch wiederkehren.

4) „Gefährten" nennt man zwei Formen, die aus einander durch Vertauschung der beiden äußeren Koefficienten entstehen.

Normalform $(\bar{c}, 0, a)$ äquivalent. Ist umgekehrt ein Paar von Normalformen $(a', 0, c')$, $(c', 0, a')$ gegeben, so ist zufolge der Gleichung

$$D = 4\,|a'|\,.\,|c'|$$

(und da D kein Quadrat ist) unter den Zahlen a', c' eine und nur eine absolut kleiner als $\frac{\sqrt{D}}{2}$. Diese werde mit a und diejenige von den beiden Formen, deren erster Koefficient a ist, mit $(a, 0, \bar{c})$ bezeichnet. Man kann nun eine zu $(a, 0, \bar{c})$ parallele Form (a, b, c) stets, und zwar nur auf eine Weise, so wählen, daß

$$\sqrt{D} > b > \sqrt{D} - 2\,|a|$$

ist. Dies ist dann eine zweiseitige Form der ersten Art, weil

$$b \equiv 0 \pmod{2a}$$

sein muß. Ferner ist sie reduciert; denn da $2\,|a| < \sqrt{D}$ ist, so folgt aus den Ungleichungen für b

$$b > 0, \quad \sqrt{D} - b > 0$$

$$2\,|a| < \sqrt{D} + b, \quad 0 < (\sqrt{D} - b)\,.\,2\,|a| < D - b^2$$

$$(\sqrt{D} - b)\,.\,2\,|a| < 4\,|a|\,.\,|c|.$$

$$\sqrt{D} - b < 2\,|c|, \quad b > \sqrt{D} - 2\,|c|,$$

und diese Ungleichung in Verbindung mit den für b vorgeschriebenen Ungleichungen besagt, daß (a, b, c) eine reducierte Form ist. Andrerseits sieht man leicht, daß keine zu $(\bar{c}, 0, a)$ parallele (zweiseitige) reducierte Form existiert. Somit ergibt sich eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den zweiseitigen reducierten Formen der ersten Art (bei denen b durch $2a$ teilbar ist) und den Normalformen-Paaren $(a', 0, c')$, $(c', 0, a')$.

Nehmen wir nun eine zweiseitige reducierte Form der zweiten Art, bei der also $b \equiv a \pmod{2a}$ ist. Diese ist äquivalent mit den beiden Normalformen

$$(a, a, \bar{c}), \quad (4\bar{c} - a, 4\bar{c} - a, \bar{c}).$$

Andrerseits ist bei einem gegebenem Paar von Normalformen

$$(a', a', c'), \quad (4c' - a', 4c' - a', c')$$

zufolge der Gleichung

$$D = |a'|\,.\,|4c' - a'|$$

eine und nur eine der beiden Zahlen a', $4c' - a'$ absolut kleiner als $\sqrt{D}$. Diese werde mit a bezeichnet.

Ist nun $2|a| < \sqrt{D}$, dann bedeute (a, b, c) die eindeutig bestimmte, zu (a, a, c') parallele Form, bei der

$$\sqrt{D} > b > \sqrt{D} - 2|a|$$

ist. In dieser ist dann $b > 0$.

Ist $2|a| > \sqrt{D}$, dann soll (a, b, c) diejenige zu (a, a, c') parallele Form bedeuten, bei der $b = |a|$ ist.

Für diese ist dann

$$\sqrt{D} > b > 0 > \sqrt{D} - 2|a|; \quad 2|a| = 2b < \sqrt{D} + b.$$

In beiden Fällen ist also

$$\sqrt{D} > b > \sqrt{D} - 2|a|, \quad 2|a| < \sqrt{D} + b,$$

und daraus folgt ebenso wie vorhin, daß (a, b, c) reduciert ist. Außerdem ist offenbar (a, b, c) eine zweiseitige Form der zweiten Art.

Eine andre zu (a, a, c') parallele reducierte Form gibt es offenbar nicht, und zu $(4c' - a, 4c' - a, c')$ gibt es (wie leicht ersichtlich) überhaupt keine parallele reducierte Form.

Es lassen sich demnach die zweiseitigen reducierten Formen der zweiten Art umkehrbar eindeutig den Normalformen-Paaren (a', a', c'), $(4c' - a', 4c' - a', c')$ zuordnen.

Im ganzen ergibt sich also, daß jeder zweiseitigen reducierten Form umkehrbar eindeutig ein Paar von zweiseitigen Normalformen entspricht, wobei zu beachten ist, daß jede der zweiseitigen reducierten Formen bezüglich den beiden Formen des zugeordneten Paares äquivalent ist, sodaß die reducierte Form zusammen mit dem entsprechenden Normalformen-Paar einer Klasse angehört.

Nun existiert, wie bereits bewiesen, in jeder ambigen Klasse ein Paar von Normalformen, daher muß es darin auch eine zweiseitige reducierte Form, mithin auch (nach dem vorhin erhaltenen Satz) mindestens zwei zweiseitige reducierte Formen geben, und daraus folgt wiederum, daß jede zweiseitige Klasse mindestens zwei Paare von Normalformen, d. h. mindestens vier Normalformen enthält. Das sollte aber gerade gezeigt werden.

Somit ist vollständig bewiesen [1]), daß die Anzahl a der ambigen Klassen wie der Charaktere höchstens gleich $2^{\nu-1}$ ist; daraus folgt aber auf Grund der früheren Überlegungen, daß diese Anzahl genau gleich $2^{\nu-1}$ ist und daß sich jeder reelle Charakter darstellen läßt durch zwei Produkte $\prod_{\alpha=1}^{\nu} \chi_\alpha^{n_\alpha}$.

1) Die angewandte Beweismethode rührt von Gauß (Disq. arithm. Art. 257—59) her. (Siehe im Vorwort.)

Aus dieser Tatsache können wir zwei wichtige Folgerungen ziehen.

Es sei p eine zu D teilerfremde Primzahl und quadratischer Rest modulo D; dann ist

$$l_\alpha(p) = 1 \text{ für } \alpha = 1, \ldots, \nu,$$

folglich

$$\prod_{\alpha=1}^{\nu} l_\alpha^{m_\alpha}(p) = \left(\frac{D}{p}\right) = 1,$$

und daraus folgt (wie früher), daß p darstellbar ist. Da ferner $\chi_\alpha(p) = l_\alpha(p) = 1$ ist (für $\alpha = 1, \ldots, \nu$), so haben für die Klassen, in denen p dargestellt wird, alle Charaktere χ_α ($\alpha = 1, \ldots, \nu$), mithin auch sämtliche reellen Charaktere, die ja multiplikativ aus den χ_α zusammengesetzt sind, den Wert 1. Also wird p im Hauptgeschlecht dargestellt.

Es sind demnach alle Primzahlen, die den arithmetischen Reihen $Dx + n^2$ angehören, für welche $(n, D) = 1$ ist, darstellbar im Hauptgeschlecht.

Die andere Folgerung, die wir aus dem gefundenen Satze ziehen, betrifft die Aufgabe, von der unsere Betrachtung ausging, die reellen Klassen-Charaktere durch eine geeignete Definition zu reellen Zahlcharakteren zu erweitern. Diese Aufgabe läßt sich in folgender Weise lösen: für jedes α ($\alpha = 1, \ldots, \nu$) definieren wir eine Funktion $\bar{\chi}_\alpha(n)$, welche gleich 0 ist für $(D, n) > 1$ und sonst dieselben Werte hat wie $l_\alpha(n)$. (Die Definition bezieht sich nur auf positive n.) Dann ist stets

$$\bar{\chi}_\alpha(n_1) \cdot \bar{\chi}_\alpha(n_2) = \bar{\chi}_\alpha(n_1 \cdot n_2);$$

ferner ist für $n_1 \equiv n_2 \pmod{D}$

$$\bar{\chi}_\alpha(n_1) = \bar{\chi}_\alpha(n_2).$$

Drittens ist $\bar{\chi}_\alpha(1) = 1$. Also ist $\bar{\chi}_\alpha$ ein (reeller) Zahlcharakter modulo D, der für jedes darstellbare n denselben Wert hat wie $\chi_\alpha(n)$.

Da jedes Produkt von reellen Zahlcharakteren modulo D wieder einen solchen Zahlcharakter ergibt und andrerseits jeder reelle Klassen-Charakter sich durch zwei verschiedene Produkte der Form $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{n_\alpha}$ ausdrücken läßt, die aus einander durch Multiplikation mit $\prod\limits_{\alpha} \chi_\alpha^{m_\alpha}$ hervorgehen, so folgt der Satz: zu einem reellen Klassen-Charakter χ lassen sich stets zwei verschiedene reelle Zahlcharaktere modulo D angeben, die für jede darstellbare Zahl n denjenigen

Wert annehmen, den χ für die Klassen besitzt, in welchen n dargestellt wird, und zwar stehen diese zwei Zahlcharaktere in der Beziehung, daß ihr Produkt gleich $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist $\Big($falls für $(n, D) > 1$ dem Zeichen $\left(\frac{D}{n}\right)$ der Wert 0 beigelegt wird, sodaß für jedes positive n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \bar{\chi}_1^{m_1}(n) \ldots \bar{\chi}_\nu^{m_\nu}(n) \text{ ist}\Big).$$

§ 3. Die Dirichletsche Identität.

Nachdem wir jetzt die nötigen Vorbereitungen getroffen haben, können wir daran gehen, die grundlegende, von Dirichlet gefundene Identität zu beweisen, die den Ausgangspunkt bildet für alle bisherigen Beweise des Satzes, daß jede primitive Form der Diskriminante D unendlich viele Primzahlen darstellt.

Es sei χ irgend ein (reeller oder komplexer) Klassen-Charakter. Für jede darstellbare Primzahl p gibt es zwei verschiedene Darstellungen. Findet die eine Darstellung in der Klasse K_p statt, dann findet die andere in K_p^{-1} statt (wobei K_p^{-1} nicht von K_p verschieden zu sein braucht). Es läßt sich also zu jeder darstellbaren Primzahl eine Klasse K_p so wählen, daß die Darstellungen von p bezüglich in den Klassen K_p, K_p^{-1} stattfinden.

Wir bilden nun die Summen

$$\sum_p \frac{\chi(K_p)}{p^s}, \quad \sum_p \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s},$$

erstreckt über alle darstellbaren Primzahlen.

Diese Summen konvergieren absolut für jedes komplexe

$$s = \sigma + ti,$$

dessen reeller Teil

$$\sigma > 1$$

ist, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für diese Werte von s absolut konvergiert.

$\sum\limits_p \frac{1}{p^{2s}}$ konvergiert absolut für $\sigma > \frac{1}{2}$; also konvergiert das Produkt

$$\prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{2s}}}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$

für $\sigma > 1$ absolut.

Wird daher für $x \geqq 1$

$$\prod_{\substack{p \\ (p \leqq x)}} \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)} = P(x)$$

gesetzt (wobei unter $P(x)$ der Wert 1 zu verstehen ist, falls alle darstellbaren Primzahlen $> x$ sind), so existiert für $\sigma > 1$

$$\lim_{x=\infty} P(x).$$

Nun ist

$$\frac{1}{1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n(K_p)}{p^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(K_p^n)}{p^{ns}},$$

$$\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$

$$= \frac{-\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)+\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)+\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}{\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$

$$= -1+\frac{1}{1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}}+\frac{1}{1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}}$$

$$= -1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(K_p^n)}{p^{ns}}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(K_p^{-n})}{p^{ns}}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(K_p^n)+\chi(K_p^{-n})}{p^{ns}},$$

wo die unendliche Summe für $\sigma > 0$ absolut konvergiert. Setzen wir in dem Produkt $P(x)$ für die einzelnen Faktoren die Summen-Ausdrücke ein, so folgt, da die endlich vielen absolut konvergenten Reihen gliedweise ausmultipliciert werden dürfen,

$$P(x) = 1+\sum_{m=2}^{\infty}{}' \frac{1}{m^s} \cdot \prod_{p/m} \{\chi(K_p^n)+\chi(K_p^{-n})\},$$

wobei die unendliche Summe nur über diejenigen Zahlen m zu erstrecken ist, deren Primfaktoren sämtlich unter den p vorkommen und alle $\leqq x$ sind. Das Zeichen p/m bedeutet, daß das Produkt $\prod\limits_{p/m}$

über die in m aufgehenden Primzahlen zu erstrecken ist; ferner ist der auftretende Exponent n gleich dem Exponenten der höchsten in m aufgehenden Potenz von p zu wählen.

Nun tritt, wie im ersten Paragraphen bewiesen wurde, in der formalen Entwicklung des Produktes

$$\prod_{p/m}(K_p^n + K_p^{-n})$$

jede Klasse K gerade so oft als Summand auf, wie es verschiedene Darstellungen von m in K gibt.

Werden andrerseits die Summanden dieser Entwicklung mit $K^{(1)}, \ldots, K^{(r)}$ bezeichnet, so ist nach der Grundeigenschaft der Klassen-Charaktere

$$\prod_{p/m}\{\chi(K_p^n) + \chi(K_p^{-n})\} = \chi(K^{(1)}) + \cdots + \chi(K^{(r)}) = \sum_K n(m, K)\chi(K),$$

wobei K in der Summe alle verschiedenen Formen-Klassen durchläuft und $n(m, K)$ für jedes zu D teilerfremde m die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von m durch die Klasse K bedeutet.

Dabei ist für jede darstellbare Zahl m

$$\sum_K n(m, K) = r = 2^{\tau_m},$$

wo τ_m die Anzahl der verschiedenen Primteiler von m bezeichnet. Bedeutet T_m die Anzahl der Divisoren von m, so ist offenbar

$$2^{\tau_m} \leqq T_m.$$

Also ist

$$\left|\prod_{p/m}\{\chi(K_p^n) + \chi(K_p^{-n})\}\right| \leqq \sum_K n(m, K) \leqq T_m.$$

Somit ergibt sich

$$P(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty}{}' \frac{1}{m^s}\sum_K n(m, K)\chi(K) = \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m^s}\sum_K n(m, K)\chi(K),$$

wobei die unendliche Summe über alle darstellbaren Zahlen zu erstrecken ist, deren Primfaktoren alle $\leqq x$ sind.

(Es ist zu beachten, daß $\sum_K n(1, K)\chi(K) = 1$ ist.)

$$P(x) = \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m^s}\sum_K n(m, K)\chi(K) + \sum_{m=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{m^s}\sum_K n(m, K)\chi(K).$$

(Allgemein soll für positive u, v und $u \leqq v$ das Zeichen $\sum_{n=u}^{v} f(n)$ dasselbe bedeuten wie $\sum_{n=[u]}^{[v]} f(n)$; ebenso soll $\sum_{n=u}^{\infty} f(n)$ gleichbedeutend sein mit $\sum_{n=[u]}^{\infty} f(n).)$

Nun ist

$$\left|\sum_{m=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{m^s} \cdot \sum_K n(m, K)\chi(K)\right| \leqq \sum_{m=x+1}^{\infty}{}' \left|\frac{1}{m^s}\right| \sum_K n(m, K)$$

$$\leqq \sum_{m=x+1}^{\infty} \frac{T_m}{m^\sigma}.$$

Da für $\sigma > 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m}{m^\sigma} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma}\right)^2$$

konvergiert, so ist

$$\lim_{x=\infty} \sum_{m=x+1}^{\infty} \frac{T_m}{m^\sigma} = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x=\infty} P(x) = \lim_{x=\infty} \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m^s} \sum_K n(m, K)\chi(K),$$

wobei die Summe rechts über alle darstellbaren m ($\leqq x$) zu erstrecken ist; denn die Bedingung, daß alle Primfaktoren $\leqq x$ sein sollen, ist für diese m von selbst erfüllt.

Berücksichtigen wir, daß die Summe $\sum_{m=1}^{x}{}'$ über alle zu D teilerfremden Zahlen m ($\leqq x$) erstreckt werden kann, da für die nicht darstellbaren m die Zahlen $n(m, K)$ (gemäß ihrer Definition) von selbst gleich 0 sind, beachten wir ferner, daß für jedes K

$$\sum_{\substack{m=1 \\ ((m, D)=1)}}^{\infty} \frac{n(m, K)}{m^s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergiert, so finden wir

$$\lim_{x=\infty} P(x) = \lim_{x=\infty} \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m^s} \sum_K n(m, K)\chi(K)$$

$$= \lim_{x=\infty} \sum_K \chi(K) \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{n(m, K)}{m^s} = \sum_K \chi(K) \sum_{\substack{m=1 \\ ((m, D)=1)}}^{\infty} \frac{n(m, K)}{m^s},$$

und indem wir für $\lim_{x=\infty} P(x)$ den Produkt-Ausdruck einsetzen, erhalten wir

$$\prod_p \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)} = \sum_K \chi(K) \sum_{\substack{m=1 \\ ((m,D)=1)}}^{\infty} \frac{n(m,K)}{m^s}.$$

Diese Gleichung besteht für $\sigma > 1$, und in dieser Halbebene sind die Summen rechts absolut konvergent.

Es kommt nun darauf an, dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung eine andere Gestalt zu geben.

Dazu stellen wir folgende Überlegung an: es sei $\psi = (a, b, c)$ eine Form der Klasse K. Dann ist $n(m, K)$ die Anzahl der verschiedenen Formen (m, l, k), in die ψ durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Determinante 1 übergeführt werden kann, wobei zwei solche Formen nur dann als verschieden angesehen werden, wenn ihre zweiten Koefficienten modulo $2m$ verschieden sind. Hieraus folgt, daß bei festem α, γ die verschiedene Wahl von β und δ keine Verschiedenheit der Darstellung hervorruft, anders ausgedrückt: bezeichnen wir parallele Formen als gleich, so gehört zu einem Wertepaar α, γ, für welches $\psi(\alpha, \gamma) = m$ ist, stets die gleiche Form (m, l, k). Es gilt aber nicht auch umgekehrt der Satz, daß durch die Form (m, l, k) das Wertepaar α, γ eindeutig bestimmt ist. Vielmehr verhält es sich damit so, daß zu einer Form (m, l, k) so viele Wertepaare α, γ gehören, wie es Substitutionen der Determinante 1 gibt, welche die Form ψ in sich überführen. Diese Anzahl von Substitutionen ist gleich der Anzahl der Lösungen der Pellschen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4,$$

und wenn α, γ eines der zu (m, l, k) gehörigen Wertepaare ist, so erhält man die Gesamtheit dieser Wertepaare dargestellt durch die Gleichungen

$$\alpha' = \frac{t-bu}{2}\alpha - cu\gamma$$

$$\gamma' = au\alpha + \frac{t+bu}{2}\gamma,$$

worin t, u irgend eine Lösung der Pellschen Gleichung bedeutet[1]).

Was nun die Anzahl von Lösungen der Pellschen Gleichung betrifft, so gibt es

1) Diese Sätze aus der Zahlentheorie sollen als bekannt vorausgesetzt werden.

1) für $D < -4$ nur die beiden Lösungen $t = \pm 2$, $u = 0$.
Zu diesen Lösungen kommen
2) für $D = -4$ die zwei Lösungen $t = 0$, $u = \pm 1$,
3) für $D = -3$ die vier Lösungen $t = \pm 1$, $u = \pm 1$ hinzu;
4) für $D > 0$ gibt es unendlich viele Lösungen. Bezeichnen wir, wenn t, u eine solche Lösung ist, $\frac{t+u\sqrt{D}}{2}$ als eine „Pellsche Einheit", so lassen sich sämtliche (zur Diskriminante D gehörigen) Pellschen Einheiten durch die kleinste oberhalb 1 gelegene Pellsche Einheit $\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$, die sogenannte Fundamentaleinheit, ausdrücken in der Form

$$\pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n,$$

wobei n eine ganze Zahl ist, die positiv, null oder negativ sein kann.

(Aus der Definition der Fundamentaleinheit folgt unmittelbar, daß $T > U\sqrt{D} > 0$ sein muß.) —

Zunächst ergibt sich hieraus, daß für negatives D jeder der $n(m, K)$ Darstellungen einer (zu D teilerfremden) Zahl m eine endliche, nur von D abhängige Anzahl (η) von Wertepaaren α, γ und somit von associierten [1]) Darstellungen entspricht, und zwar ist

$$\begin{aligned} \eta &= 2 \text{ für } D < -4 \\ \eta &= 4 \text{ für } D = -4 \\ \eta &= 6 \text{ für } D = -3. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\eta \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ ((m, D)=1)}}^{\infty} \frac{n(m, K)}{m^s} = \sum_{\alpha, \gamma}{}' \frac{1}{\psi(\alpha, \gamma)^s},$$

wo α, γ alle Paare ganzer Zahlen durchlaufen, für die $(\alpha, \gamma) = 1$ und $(\psi(\alpha, \gamma), D) = 1$ ist. (Die Forderung $\psi(\alpha, \gamma) > 0$ ist bei negativem D für die zulässigen Formen ψ von selbst erfüllt. — Man beachte, daß die Umordnung der Glieder in der unendlichen Reihe $\eta \cdot \sum_{(m, D)=1} \frac{n(m, K)}{m^s}$ wegen ihrer absoluten Konvergenz zulässig ist.)

Es kommt nun darauf an, für positives D eine entsprechende Gleichung zu finden. Die Form $\psi = (a, b, c)$ werde in K so ge-

---

1) Gemäß der früher gegebenen Definition heißen zwei Darstellungen associiert, wenn sie zu derselben Kongruenzwurzel gehören.

wählt, daß $a > 0$, $b < 0$ ist. Da wir die dargestellte Zahl m stets positiv annehmen, so ist für jede Darstellung $\psi(\alpha, \gamma) = m$, zufolge der Gleichung

$$4am = (2a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$
$$|\gamma . \sqrt{D}| < |2a\alpha + b\gamma|.$$

Nun ist für eine zu $\psi(\alpha, \gamma)$ associierte Darstellung $\psi(\alpha', \gamma')$ von m

$$\gamma' = au\alpha + \frac{t+bu}{2}\gamma = (2a\alpha + b\gamma)\frac{u}{2} + \gamma\frac{t}{2},$$
$$t = \frac{t+u\sqrt{D}}{2} + \frac{t-u\sqrt{D}}{2},$$
$$u = \frac{t+u\sqrt{D}}{2\sqrt{D}} - \frac{t-u\sqrt{D}}{2\sqrt{D}},$$
$$\frac{t+u\sqrt{D}}{2} = \pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

Setzen wir dies alles ein, so erhalten wir

$$\gamma' = \frac{(2a\alpha + b\gamma) + \gamma\sqrt{D}}{2\sqrt{D}}\left\{\pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n\right\}$$
$$- \frac{(2a\alpha + b\gamma) - \gamma\sqrt{D}}{2\sqrt{D}}\left\{\pm\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n\right\}.$$

Gemäß der eben abgeleiteten Ungleichung stimmt das Vorzeichen der Ausdrücke

$$(2a\alpha + b\gamma) + \gamma\sqrt{D}, \quad (2a\alpha + b\gamma) - \gamma\sqrt{D}$$

mit dem Vorzeichen von $2a\alpha + b\gamma$ überein, und daraus folgt, daß je nach der Wahl des Vorzeichens der Pellschen Einheit

$$\pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

der Ausdruck für γ' entweder die Form

$$P_1\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n - Q_1\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

oder die Form

$$Q_1\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n - P_1\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

annimmt, worin P_1, Q_1 positive Größen bedeuten.

Wir wollen die Abhängigkeit der Zahl γ' von dem Exopnenten n dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir

$$P_1\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n - Q_1\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n = \gamma_n,$$

$$Q_1\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n - P_1\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n = \overline{\gamma}_n$$

setzen.

Wenn n von $(-\infty)$ bis $(+\infty)$ ganzzahlig zunimmt, so nimmt γ_n beständig zu, während $\overline{\gamma}_n$ beständig abnimmt, und zwar ist

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \infty, \quad \lim_{n=-\infty} \overline{\gamma}_n = \infty, \quad \lim_{n=-\infty} \gamma_n = -\infty, \quad \lim_{n=\infty} \overline{\gamma}_n = -\infty.$$

(Dies liegt daran, daß

$$\frac{T+U\sqrt{D}}{2} > 1 \text{ und } \frac{T-U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^{-1} < 1 \text{ ist.})$$

Es muß daher ein eindeutig bestimmtes n $(= n_1)$ derart geben, daß

$$\gamma_{n_1} \geqq 0, \quad \gamma_{n_1 - 1} < 0$$

ist; andrerseits gibt es kein n, für welches die Ungleichungen

$$\overline{\gamma}_{n_1} \geqq 0, \quad \overline{\gamma}_{n_1 - 1} < 0$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Zu jedem Wert γ_n von γ' gehört ein Wert von α' $(= \alpha_n)$, ebenso auch zu jedem $\overline{\gamma}_n$ ein $\overline{\alpha}_n$. Der Übergang von dem Wertepaar α_n, γ_n zu $\alpha_{n-1}, \gamma_{n-1}$ geschieht vermittels der Gleichungen

$$\alpha_{n-1} = \frac{T+bU}{2}\alpha_n + cU\gamma_n$$

$$\gamma_{n-1} = -aU\alpha_n + \frac{T-bU}{2}\gamma_n.$$

Denn von α_0, γ_0 zu α_n, γ_n findet der Übergang durch Anwendung der Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{t_n - bu_n}{2} & -cu_n \\ au_n & \frac{t_n + bu_n}{2} \end{pmatrix}$$

statt, wobei

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

gesetzt ist[1]); entsprechend findet der Übergang von α_0, γ_0 zu $\alpha_{n-1}, \gamma_{n-1}$ vermittels der Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{t_{n-1}-bu_{n-1}}{2} & -cu_{n-1} \\ au_{n-1} & \frac{t_{n-1}+bu_{n-1}}{2} \end{pmatrix}$$

statt, und andrerseits ist

$$\begin{pmatrix} \frac{t_{n-1}-bu_{n-1}}{2} & -cu_{n-1} \\ au_{n-1} & \frac{t_{n-1}+bu_{n-1}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{T-bU}{2} & -cU \\ aU & \frac{T+bU}{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t_n-bu_n}{2} & -cu_n \\ au_n & \frac{t_n+bu_n}{2} \end{pmatrix},$$

sodaß man von α_n, γ_n zu $\alpha_{n-1}, \gamma_{n-1}$ vermittels der Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{T-bU}{2} & -cU \\ aU & \frac{T+bU}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{T+bU}{2} & cU \\ -aU & \frac{T-bU}{2} \end{pmatrix}$$

übergeht.

Setzen wir $n = n_1$, so folgt gemäß der Bestimmung von n_1

$$-aU\alpha_{n_1} + \frac{T-bU}{2}\gamma_{n_1} < 0, \quad \gamma_{n_1} \geqq 0,$$

also

$$\alpha_{n_1} > \frac{T-bU}{2aU}\gamma_{n_1} \geqq 0$$

(zufolge der Vorzeichen von a und b).

Das Wertepaar $\alpha' = \alpha_{n_1}$, $\gamma' = \gamma_{n_1}$ genügt also den Ungleichungen

$$\alpha' > \frac{T-bU}{2aU}\gamma' \geqq 0.$$

Diese lassen sich offenbar für $n \neq n_1$ durch kein Wertepaar α_n, γ_n befriedigen, aber auch durch kein Wertepaar $\bar{\alpha}_n, \bar{\gamma}_n$, da sonst für dieses $\bar{\gamma}_{n-1} < 0 \leqq \bar{\gamma}_n$ wäre. (Es ist zu beachten, daß der

---

1) Das Wertepaar α_0, γ_0 stimmt entweder mit α, γ oder mit $-\alpha, -\gamma$ überein.

Übergang von $\bar{\alpha}_n, \bar{\gamma}_n$ zu $\bar{\alpha}_{n-1}, \bar{\gamma}_{n-1}$ durch Anwendung der Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{T+bU}{2} & cU \\ -aU & \frac{T-bU}{2} \end{pmatrix}$$

geschieht.)

Folglich wird das Wertepaar $\alpha_{n_1}, \gamma_{n_1}$ durch die Ungleichungen eindeutig gekennzeichnet.

Somit ergibt sich folgendes: bezeichnen wir ein Wertepaar α, γ als „bevorzugt“, wenn

$$\alpha > \frac{T-bU}{2aU}\gamma \geqq 0$$

ist, so gibt es zu jeder der $n(m, K)$ Darstellungen einer (darstellbaren) Zahl m genau ein bevorzugtes Wertepaar [1].

Setzen wir also $\eta = 1$ für $D > 0$, so gilt wiederum die Gleichung

$$\eta \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ ((m,D)=1)}}^{\infty} \frac{n(m,K)}{m^s} = \sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{\psi(\alpha,\gamma)^s},$$

worin rechts über alle bevorzugten Wertepaare α, γ summiert wird, für welche

$$(\alpha, \gamma) = 1, \quad \psi(\alpha, \gamma) > 0 \text{ und } (\psi(\alpha, \gamma), D) = 1 \text{ ist.}$$

Die Bedingung $\psi(\alpha, \gamma) > 0$ braucht übrigens nicht besonders hinzugefügt zu werden. Denn für ein bevorzugtes Wertepaar α, γ ist von selbst

$$4a \cdot \psi(\alpha, \gamma) = (2a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2 > \left(\frac{T}{U}\gamma\right)^2 - D\gamma^2 = \left(\frac{2\gamma}{U}\right)^2 \geqq 0,$$

also

$$\psi(\alpha, \gamma) > 0.$$

(a ist ja positiv.)

---

1) Das hier angewandte Verfahren der Aussonderung eines Wertepaares stammt von Dirichlet („Recherches . . .“, Ges. Werke, Bd. I, S. 432—36). Nur insofern weicht die Auswahl der „bevorzugten“ Wertepaare von der bei Dirichlet ab, als bei dieser ψ als eine Form gewählt wird, deren erste beiden Koefficienten > 0 sind, und als die Ungleichungen bei Dirichlet lauten

$$\alpha \geqq \frac{T-bU}{2aU}\gamma > 0.$$

Für das folgende ist die im Anschluß an Weber (Math. Ann., Bd. 20, S. 313) gewählte Normierung etwas bequemer.

Bilden nun die Formen $\psi_1, \ldots, \psi_h$ ein Repräsentanten-System für die verschiedenen Klassen $K_1, \ldots, K_h$ (das heißt: gehört für jedes α $(\alpha = 1, \ldots, h)$ ψ_α zur Klasse K_α, wobei für positives D in jedem ψ_α der erste Koefficient positiv, der zweite negativ sein muß), so ist für positives wie für negatives D

$$\sum_K \chi(K) \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ (m,D)=1}}^{\infty} \frac{n(m,K)}{m^s} = \frac{1}{\eta} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist für $\sigma > 1$ gleich dem Produkt

$$\prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^{2s}}}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)};$$

dasselbe gilt also von der rechten Seite.

Es soll nun bei der Summation über die Wertepaare α, γ die Bedingung $(\alpha, \gamma) = 1$ aufgehoben werden. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Summen-Ausdruck mit der für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergenten Reihe $\sum_{n'} \frac{1}{n'^{2s}}$ multipliciert wird, in der n' alle positiven, zu D teilerfremden Zahlen durchläuft. Denn da man die Reihen

$$\sum_{n'} \frac{1}{n'^{2s}} \text{ und } \sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s} \quad (\text{für } \nu = 1, \ldots, h;\ \sigma > 1)$$

gliedweise ausmultiplicieren und die Summanden der so entstehenden Reihe beliebig ordnen darf, so ist

$$\sum_{n'} \frac{1}{n'^{2s}} \cdot \sum_{\alpha,\gamma}' \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s} = \sum_{n',\alpha,\gamma} \frac{1}{\psi_\nu(n'.\alpha,\ n'.\gamma)^s} = \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s},$$

wobei jetzt α und γ nicht mehr teilerfremd zu sein brauchen. (Die Ungleichheits-Bedingungen bei positivem D bleiben bestehen; denn durch Multiplikation der Zahlen α, γ mit einem gemeinsamen positiven Faktor (n') gehen bevorzugte Wertepaare, und auch nur solche, in bevorzugte Wertepaare über. Desgleichen bleibt offenbar die Bedingung

$$(\psi_\nu(\alpha,\gamma), D) = 1$$

erhalten.)

Nun besteht für $\sigma > \frac{1}{2}$ die Identität

$$\sum_{n'} \frac{1}{n'^{2s}} = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}} \cdot \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{2s}}},$$

wobei p wie bisher die darstellbaren, q die nicht darstellbaren, zu D teilerfremden Primzahlen durchläuft und die Produkte absolut konvergieren. (Die Gleichung wird ebenso bewiesen wie die entsprechende Produktformel für $\zeta(s)$)[1]).

Fassen wir alles zusammen, so finden wir für $\sigma > 1$

$$\prod_q \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} \cdot \prod_p \frac{1}{\left(1-\frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$
$$= \frac{1}{\eta} \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \cdot \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s},$$

worin α, γ für $D < 0$ alle, für $D > 0$ die bevorzugten Wertepaare durchlaufen, für welche bezüglich $\psi_\nu(\alpha, \gamma)$ einen zu D teilerfremden Wert annimmt.

Damit sind wir zu der Dirichletschen Identität gelangt. Auf der linken Seite dieser Identität steht ein unendliches Produkt, das für $\sigma > 1$ absolut konvergiert. Durch dieses Produkt wird für $\sigma > 1$ eine Funktion $L_\chi(s)$ definiert, die innerhalb des Definitionsbereiches von 0 verschieden ist. Diese Funktion ist andrerseits, wie die bewiesene Gleichung lehrt, durch eine für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe darstellbar.

Fürs Nächste soll nun s auf reelle Werte beschränkt, also $L_\chi(s)$ als Funktion der reellen Variablen s betrachtet werden. Von dieser können wir auf Grund der Reihen-Entwicklung aussagen, daß sie in ihrem Definitionsbereich (für $s > 1$) differentiierbar ist. Die Reihen-Entwicklung liefert uns aber noch mehr; sie verschafft uns Aufschluß über das Verhalten von $L_\chi(s)$ bei der Annäherung an den Punkt 1. Zur Bestimmung dieses Verhaltens gelangt man durch Betrachtung der Teilsummen $\sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s}$. Jede solche Teilsumme läßt sich als Dirichletsche Reihe in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(K_\nu)}{n^s}$ schreiben (wobei übrigens für jedes n

$$a_n(K_\nu) \geqq 0$$

ist), und es handelt sich vor allem darum, zu zeigen, daß für die Koefficientensumme $s_\nu(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n(K_\nu)$ die Abschätzung gilt

---

1) Vgl. im „Handbuch d. Lehre von d. Vert. d. Primz.“, Bd. I, § 33 u. 41.

$$s_\nu(x) = A \,.\, x + O(\sqrt{x}),$$

wobei A eine positive, nur von D abhängige Konstante bedeutet. ($\nu = 1, \ldots, h$); (x wird wie bisher $\geqq 1$ angenommen).

Hierzu ist das erste, daß wir uns die Bedeutung von $s_\nu(x)$ klar machen. $s_\nu(x)$ ist die Anzahl der Zahlen $\leqq x$, die als Werte einer Form $\psi_\nu(\alpha, \gamma)$ in der Reihe $\sum\limits_{\alpha,\gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha,\gamma)^s}$ auftreten, und zwar jede so oft gerechnet, wie sie in der Reihe vorkommt. Dafür können wir einfacher sagen: $s_\nu(x)$ ist die Anzahl der ganzzahligen Wertepaare α, γ (und zwar für $D > 0$ nur der bevorzugten Wertepaare), für die ψ_ν einen zu D teilerfremden Wert $\leqq x$ annimmt. Diese Anzahl müssen wir also bis auf einen Fehler von der Größenordnung $\sqrt{x}$ abzuschätzen suchen.

Zur Erleichterung dieser Abschätzung soll zunächst die einschränkende Bedingung eliminiert werden, daß für die zulässigen Wertepaare der Wert von ψ_ν zu D teilerfremd sein muß. Für diesen Zweck empfiehlt es sich, den Repräsentanten ψ_ν in specieller Weise zu wählen.

Für positives D haben wir bereits $\psi_\nu = (a, b, c)$ den Bedingungen unterworfen, daß $a > 0$, $b < 0$ sein soll. Jetzt soll für $D \gtrless 0$ die Forderung hinzugefügt werden, daß in der Form ψ_ν

$$(a, D) = 1,$$

ferner für ungerades D

$$b \equiv 0 \pmod{D},$$

für gerades D

$$b \equiv \frac{D}{2} \pmod{D} \text{ ist.}$$

Diese Forderungen lassen sich (auch im Einklang mit den im Falle $D > 0$ vorgeschriebenen Bedingungen $a > 0$, $b < 0$) erfüllen. Denn zunächst kann man offenbar in der Klasse K_ν eine Form (a, b', c') wählen, bei der

$$a > 0 \text{ und } (a, D) = 1 \text{ ist.}$$

Ferner lassen sich bei ungeradem D, wo also $(D, 2a) = 1$ ist, die Kongruenzen

$$b \equiv b' \pmod{2a}$$
$$b \equiv 0 \pmod{D}$$

gleichzeitig befriedigen, desgleichen bei geradem D, wo

$$b' \equiv 0 \equiv \frac{D}{2} \pmod{2} \text{ und } (2, a) = 1$$

ist, die Kongruenzen

$$b \equiv b' \pmod{2a}$$

$$b \equiv \frac{D}{2} \pmod{D},$$

und zwar kann offenbar in beiden Fällen als Lösung b eine negative Zahl gewählt werden.

Zu jedem b, das den betreffenden Kongruenzen genügt, gehört aber eine zu (a, b', c') parallele Form (a, b, c), sodaß in der Tat ein Repräsentant $\psi_\nu = (a, b, c)$ in der vorgeschriebenen Weise gewählt werden kann.

Eine solche Form ψ_ν hat nun die Eigenschaft, daß $\psi_\nu(\alpha, \gamma)$ dann und nur dann zu D teilerfremd ist, wenn $(\alpha, D) = 1$ ist.

Denn für ungerades D ist die Forderung $(\psi_\nu(\alpha, \gamma), D) = 1$ gleichbedeutend mit $(4a \,.\, \psi_\nu, D) = 1$ (da ja $(4a, D) = 1$ ist).

Andrerseits ist

$$4a\psi_\nu = (2a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$

also

$$4a\psi_\nu \equiv 4a^2\alpha^2 \pmod{D},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Für gerades D ist die Forderung $(\psi_\nu, D) = 1$ gleichbedeutend mit

$$\left(a \,.\, \psi_\nu, \frac{D}{4}\right) = 1, \qquad (a \,.\, \psi_\nu, 2) = 1.$$

Andrerseits ist

$$a \,.\, \psi_\nu = \left(\left(a\alpha + \frac{b}{2}\gamma\right) + \frac{D}{4}\gamma\right)^2 - \frac{D}{2}\gamma\left(a\alpha + \frac{b}{2}\gamma\right) - \frac{D}{4}\left(1 + \frac{D}{4}\right)\gamma^2,$$

also

$$a \,.\, \psi_\nu \equiv a^2\alpha^2 \left(\mathrm{mod}\ \frac{D}{4}\right)$$

und

$$a \,.\, \psi_\nu \equiv a^2\alpha^2 \pmod{2}.$$

$$\left(\text{Denn } \frac{b}{2} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{D}{4}\right), \ \frac{b}{2} \equiv \frac{D}{4} \pmod{2}.\right)$$

Daraus ergibt sich wiederum die Gültigkeit der Behauptung.

Die Bedingung $(\psi_\nu, D) = 1$ besagt also, daß nur die Wertepaare α, γ zugelassen sind, bei denen α einer der $\varphi(|D|)$ zu D teilerfremden Restklassen angehört. Auf Grund dieser Tatsache ist die Anzahl $s_\nu(x)$ aller zulässigen Wertepaare bekannt, wenn für zwei beliebige (nicht notwendig verschiedene) Restklassen modulo D die Anzahl aller derjenigen unter den zulässigen Wertepaaren bestimmt ist, bei denen α der ersten, γ der zweiten Restklasse angehört. Denn wird mit $N(r_1, r_2)$ die Anzahl der Paare α, γ bezeichnet, für die

$$\psi_\nu(\alpha, \gamma) \leqq x$$

$$\alpha \equiv r_1 \pmod{D}, \quad \gamma \equiv r_2 \pmod{D}$$

und bei positivem D außerdem $\alpha > \frac{T - bU}{2aU}\gamma \geqq 0$ ist, so ist offenbar

$$s_\nu(x) = \sum_{r_1, r_2}{}' N(r_1, r_2),$$

worin r_1 die Zahlen eines reducierten, r_2 die eines vollständigen Restsystems modulo D zu durchlaufen hat.

Es kommt also jetzt auf die Bestimmung der Anzahl $N(r_1, r_2)$ (für irgend ein Restepaar r_1, r_2) an. Diese Anzahl läßt sich anschaulich deuten.

Sind nämlich u, v rechtwinklige Parallel-Koordinaten in der Ebene, so stellt die Ungleichung

$$\psi_\nu(u, v) \leqq x$$

für $D < 0$ die Gesamtheit ($\mathfrak{G}$) der Punkte innerhalb und auf einer Ellipse ($\mathfrak{E}$), für $D > 0$ die Gesamtheit ($\mathfrak{G}_1$) der zwischen den Ästen einer Hyperbel ($\mathfrak{H}$) oder auf ihr gelegenen Punkte dar.

Die Ungleichungen

$$u > \frac{T - bU}{2aU} v \geqq 0$$

stellen die Gesamtheit ($\mathfrak{G}_2$) der Punkte eines von zwei Halbstrahlen ($\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$) begrenzten Winkelraumes dar, und zwar einschließlich der Punkte des einen, auf der u-Axe liegenden Strahles $\mathfrak{S}_1$, dagegen ausschließlich der Punkte des andern Strahles $\mathfrak{S}_2$.

(Der Schnittpunkt von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ wird von $\mathfrak{G}_2$ ausgeschlossen.)

Das System der Punkte, die sowohl zu $\mathfrak{G}_1$ wie zu $\mathfrak{G}_2$ gehören, werde (für $D > 0$) mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

Die Punkte (u, v), für welche $u - r_1$ und $v - r_2$ ganzzahlige Vielfache von D sind, bilden die Eckpunkte eines quadratischen Netzes ($\mathfrak{N}$), bei dem die Seiten die Länge D haben.

Aus diesen Tatsachen ergibt sich, daß $N(r_1, r_2)$ gleichbedeutend ist mit der Anzahl derjenigen Eckpunkte des Netzes $\mathfrak{N}$, die zu $\mathfrak{G}$ gehören. (Zur Abkürzung soll bei den nächsten Überlegungen N für $N(r_1, r_2)$ geschrieben werden.)

Die Punkte aus $\mathfrak{G}$ nehmen ein endliches Gebiet[1]) in der Ebene ein. Im Falle $D < 0$ ist dies ohne weiteres klar; für $D > 0$ ist die Behauptung gleichbedeutend mit der, daß die Halbstrahlen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in demselben Aste schneiden, und ihre Gültigkeit folgt daraus, daß für die Punkte $\{u, v\}$ von $\mathfrak{G}$

$$x \geqq \psi_\nu(u, v) = \frac{1}{4a}\left((2au + bv)^2 - Dv^2\right)$$

$$> \frac{1}{4a}\left\{\left(2au + \frac{2aU}{T - bU}\cdot bu\right)^2 - D\left(\frac{2aU}{T-bU}\right)^2 . u^2\right\}$$

ist — $\left(\text{es ist ja } b < 0, \ \frac{|b|\,U}{T - bU} < 1\right)$ —, daß also

$$x > au^2\,\frac{T^2 - DU^2}{(T-bU)^2} = \frac{4au^2}{(T-bU)^2}$$

und außerdem

$$0 \leqq v < \frac{2aU.u}{T - bU}$$

ist, sodaß u und v beschränkt sind durch die Ungleichungen

$$0 < u < \frac{T - bU}{2}\cdot\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$0 \leqq v < U . \sqrt{ax}.$$

Zufolge der einfachen Beschaffenheit der Linien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ hat das von den Punkten des Systems $\mathfrak{G}$ erfüllte Gebiet ($\overline{\mathfrak{G}}$) jedenfalls einen bestimmten Flächeninhalt. Dieser Flächeninhalt (F) soll nun in Zusammenhang gebracht werden mit der Anzahl N. Zur leichteren Formulierung dieses Zusammenhanges sei es gestattet, einige kurze Bezeichnungen einzuführen.

1) Bei einem Quadrat aus dem Netz $\mathfrak{N}$ heiße diejenige von den vier Ecken, für welche $(u + v)$ den (algebraisch) kleinsten Wert hat, (kurz gesagt: die linke untere Ecke) die „Hauptecke“.

2) Ein Quadrat heiße „zu $\mathfrak{G}$ gehörig“, wenn seine Fläche ganz dem Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}$ angehört.

3) Ein Quadrat heiße „zerschnitten“, wenn es entweder Randpunkte von $\overline{\mathfrak{G}}$ in seinem Innern enthält oder wenn seine Hauptecke ein Punkt von $\mathfrak{G}$ ist, während seine Fläche ganz außerhalb von $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt.

---

1) Mit „endlichem Gebiet“ ist ein solches gemeint, das, wie man sagt, „ganz im Endlichen gelegen“, d. h. durch einen Kreis umschließbar ist.

Die Beziehung zwischen N und F besteht nun darin, daß einerseits N gleich der Anzahl derjenigen Quadrate in dem Netz $\mathfrak{N}$ ist, deren Hauptecke zu $\mathfrak{G}$ gehört, (da jeder Eckpunkt für genau ein Quadrat die Hauptecke bildet) und daß andrerseits die von diesen Quadraten eingenommene Fläche ND^2 sich von F um nicht mehr als $N'.D^2$ unterscheidet, wenn N' die Anzahl der zerschnittenen Quadrate bedeutet. Der erste Teil dieser Behauptung ist trivial; der zweite Teil ergibt sich folgendermaßen: wird die Anzahl der Quadrate, die zwar einen Beitrag zu dem Inhalt F liefern (von denen also ein Stück zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehört), deren Hauptecke aber kein Punkt von $\mathfrak{G}$ ist, gleich N_1 gesetzt und die Anzahl derjenigen Quadrate, deren Hauptecke zu $\mathfrak{G}$ gehört, während sie selbst nicht zu $\mathfrak{G}$ gehören, gleich N_2 gesetzt, so ist einerseits

$$F \leqq D^2(N+N_1)$$

andrerseits

$$F \geqq D^2(N-N_2),$$

also

$$-D^2 N_2 \leqq F - D^2 N \leqq D^2 N_1;$$

dabei ist

$$N_1 + N_2 \leqq N';$$

denn gehört ein Stück eines Quadrats zu $\mathfrak{G}$, nicht aber seine Hauptecke, so liegt die Hauptecke für $D < 0$ außerhalb der Ellipse $\mathfrak{E}$, für $D > 0$ liegt sie entweder außerhalb der (auf $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ verlaufenden) Randlinie oder auf $\mathfrak{S}_2$, und in jedem Falle folgt, daß das Quadrat zerschnitten ist[1]; desgleichen sind (wie man leicht sieht) alle diejenigen Quadrate zerschnitten, die selbst nicht zu $\mathfrak{G}$ gehören, während ihre Hauptecke zu $\mathfrak{G}$ gehört.

Es ergibt sich demnach, daß

$$-D^2 N' \leqq F - D^2 N \leqq D^2 N',$$

das heißt

$$|F - D^2 N| \leqq D^2 N'$$

ist, wie behauptet wurde.

Die Zahl N' läßt sich nun wiederum vergleichen mit der Länge (S) des geschlossenen Linienzuges $(\mathfrak{R})$, der das Flächenstück F begrenzt[2]).

1) Es ist zu beachten, daß auf dem Strahle $\mathfrak{S}_2$ mit v zugleich u wächst, und ferner, daß in dem Falle, wo die Hauptecke eines Quadrats in den Schnittpunkt von $\mathfrak{S}_2$ mit $\mathfrak{H}$ fällt, dieses Quadrat keinen Punkt von $\mathfrak{G}$ enthalten kann.

2) Die folgende Überlegung ist einer Abhandlung von Gauß „de nexu inter multitudinem classium, ...“ (aus d. Nachlaß vom J. 1837, Ges. Werke, Bd. II, siehe S. 277) entnommen.

Man kann nämlich die zerschnittenen Quadrate in der Reihenfolge numerieren, in der sie bei der Durchlaufung der Grenzlinie $\mathfrak{R}$ im positiven Sinne (von irgend einem Punkt aus) getroffen werden, wobei mehrfach getroffene Quadrate nur je einmal gezählt werden sollen und beim Durchgang von $\mathfrak{R}$ durch einen Eckpunkt dasjenige Quadrat, dessen Hauptecke dieser Punkt ist, als getroffen zu rechnen ist, sodaß jedes zerschnittene Quadrat in der Abzählung genau einmal auftritt[1]).

Da es unter irgend fünf Quadraten (des Netzes $\mathfrak{N}$) mindestens zwei gibt, die ganz getrennt liegen, sodaß jeder Punkt des einen von jedem Punkt des andern Quadrats mindestens den Abstand D besitzt, so hat das Kurvenstück auf $\mathfrak{R}$, das vom Verlassen des n-ten Quadrates (in der Numerierung) bis zum Erreichen des $(n+4)$-ten durchlaufen wird, mindestens die Länge D. Daher ist

$$S \geqq D \cdot \left[\frac{N'-1}{4}\right] > D \cdot \left(\frac{N'-1}{4} - 1\right)$$

$$N' < \frac{4S}{D} + 5,$$

$$\left|\frac{F}{D^2} - N\right| \leqq N' < \frac{4S}{D} + 5.$$

Aus dieser Ungleichung können wir leicht entnehmen, daß die Anzahl N durch die Größe $\frac{F}{D^2}$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $\sqrt{x}$ abgeschätzt wird.

Dazu ist offenbar nur nötig, die Abschätzung

$$S = O(\sqrt{x})$$

zu beweisen. Diese ist in der Tat gültig. Denn durch die Substitution

$$u = u' \cdot \sqrt{x}$$
$$v = v' \cdot \sqrt{x}$$

geht die Ungleichung

1) Bei der Annahme der Möglichkeit einer solchen Abzählung (sowie der Existenz einer Bogenlänge S) wird von der Kurve $\mathfrak{R}$ (außer ihrer Geschlossenheit und Stetigkeit) nur benutzt, daß bei einer Parameter-Darstellung

$$u = f(w), \quad v = g(w)$$

der Kurve die Funktionen f und g nur endlich viele Maxima besitzen, wobei als Maximum nur eine solche Stelle w_0 gelten soll, in deren beliebiger Nähe kleinere Funktionswerte vorkommen als der Funktionswert in w_0.

$$\psi_\nu(u, v) \leqq x$$

über in

$$\psi_\nu(u', v') \leqq 1,$$

und die Beziehung

$$u > \frac{T - bU}{2aU} v \geqq 0,$$

durch welche für $D > 0$ der Winkelraum zwischen den Halbstrahlen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ bestimmt ist, geht in dieselbe Beziehung zwischen u' und v' über. Daher ist in jedem Falle die Kurve der (u', v')-Ebene, welche der Randkurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x)$ von der Länge $S = S(x)$ in der (u, v)-Ebene entspricht (— durch die Bezeichnung $\mathfrak{R}(x)$, $S(x)$ soll die Abhängigkeit der Kurve $\mathfrak{R}$ und der Länge S von dem Werte x zum Ausdruck gebracht werden —), kongruent der Kurve $\mathfrak{R}(1)$ von der Länge $S(1)$. Andrerseits wird vermöge jener Substitution die Maßzahl für jede Länge mit $\frac{1}{\sqrt{x}}$ multipliciert. Demnach ist

$$S(1) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot S(x),$$

also, da ja $S(1)$ nicht von x abhängt,

$$S(x) = O(\sqrt{x}).$$

Wir erhalten daher:

$$N = \frac{F}{D^2} + O(\sqrt{x}).$$

Jetzt handelt es sich noch darum, den Wert von F zu berechnen; dabei sollen die Fälle positiver und negativer Diskriminante D getrennt behandelt werden.

Für $D = -\Delta < 0$ ist F der Inhalt der Ellipse $\mathfrak{E}$, welche durch die Gleichung

$$\frac{\psi_\nu(u, v)}{x} = 1$$

dargestellt wird. Nach einem Satz der analytischen Geometrie hat eine Ellipse, deren Gleichung auf die Form

$$a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + a_{22} v^2 = 1$$

gebracht ist, den Flächeninhalt

$$\frac{\pi}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}.$$

Durch Anwendung dieser Formel auf den vorliegenden Fall, in welchem

$$a_{11} = \frac{a}{x}, \quad a_{12} = \frac{b}{2x}, \quad a_{22} = \frac{c}{x}$$

und daher

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{\varDelta}{4x^2}$$

ist, ergibt sich für den gesuchten Ellipsen-Inhalt der Wert

$$F = \frac{2\pi}{\sqrt{\varDelta}} \cdot x.$$

Für $D > 0$ wird der Flächeninhalt F ausgedrückt durch das Integral

$$\iint\limits_{\substack{\psi_v \leqq x \\ \left(u \geqq \frac{T - bU}{2aU} v \geqq 0\right)}} du\,dv.$$

Wenden wir die Substitution an

$$u' = u + \frac{b}{2a} v$$
$$v' = \qquad v,$$

(deren Determinante 1 ist), so bestimmt sich die Fläche in den neuen Koordinaten durch die Ungleichungen

$$u' \geqq \frac{T}{2aU} v' \geqq 0, \quad u'^2 - \frac{D}{4a^2} v'^2 \leqq \frac{x}{a}.$$

Diese Ungleichungen sind dann und nur dann verträglich, wenn

$$\frac{x}{a} \geqq \left(\frac{T^2}{4a^2U^2} - \frac{D}{4a^2}\right) v'^2 = \frac{v'^2}{a^2U^2}$$

ist, wenn also die bereits bewiesene Ungleichung

$$v' \leqq U\sqrt{ax}$$

besteht.

Wir erhalten demnach

$$F = \int_0^{U\cdot\sqrt{ax}} \left\{ \int_{\frac{T}{2aU}\cdot v'}^{\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{D}{4a^2} v'^2}} du' \right\} dv'$$

$$= \int_0^{U\cdot\sqrt{ax}} \left\{ \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{D}{4a^2} v'^2} - \frac{T}{2aU} \cdot v' \right\} dv'$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{D}} \int_0^{\frac{U\cdot\sqrt{D}}{2}} \sqrt{1 + z^2}\, dz - \frac{TU}{4} \cdot x,$$

und durch Ausrechnung des Integrales ergibt sich

$$F = \frac{x}{\sqrt{D}} \cdot \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2}.$$

Somit ist für positives und negatives D bewiesen, daß F sich ausdrücken läßt in der Form $C.x$, wo C eine nur von D abhängige, positive Größe ist. Durch Einsetzen dieses Ausdrucks von F in die vorhin für N gefundene Formel folgt:

$$N(r_1, r_2) = N = \frac{C}{D^2} \cdot x + O(\sqrt{x}),$$

und hieraus ergibt sich zufolge der Gleichung

$$s_\nu(x) = \sum_{r_1, r_2}{}' N(r_1, r_2)$$

unmittelbar die Abschätzung

$$s_\nu(x) = |D| \,.\, \varphi(|D|) \cdot \frac{C}{D^2} \cdot x + O(\sqrt{x}).$$

Es gilt also in der Tat eine Gleichung

$$s_\nu(x) = A \,.\, x + O(\sqrt{x}),$$

worin A positiv ist und nur von D abhängt.

Aus dieser Darstellung der Koefficientensumme für die Reihen $\sum\limits_{\alpha, \gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha, \gamma)^s}$ $(\nu = 1, \ldots, h)$ erhalten wir sofort eine Abschätzung der Koefficientensumme $S_\chi(x)$ der Reihe $\frac{1}{\eta} \sum\limits_\nu \chi(K_\nu) \sum\limits_{\alpha, \gamma} \frac{1}{\psi_\nu(\alpha, \gamma)^s}$. Schreiben wir diese nämlich (als Dirichletsche Reihe) in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_\chi(n)}{n^s},$$

so ist

$$c_\chi(n) = \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) \,.\, a_n(K_\nu)$$

und

$$S_\chi(x) = \sum_{n=1}^{x} c_\chi(n) = \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu)\, s_\nu(x)$$

$$= \frac{A \,.\, x}{\eta} \cdot \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu) + O(\sqrt{x}).$$

Da $\sum\limits_\nu \chi(K_\nu)$ den Wert h oder 0 hat, je nachdem χ der Hauptcharakter χ_1 ist oder nicht, so ist

$$S_\chi(x) = O(\sqrt{x}) \quad \text{für } \chi \neq \chi_1$$

$$S_{\chi_1}(x) = \frac{A\,.\,h}{\eta}\,x + O(\sqrt{x}) = B\,.\,x + O(\sqrt{x}),$$

wo B eine positive Größe bedeutet.

Die Größen $c_\chi(n)$ sind für jedes χ reell. Denn, wie man unmittelbar aus der Produkt-Darstellung von $L_\chi(s)$ ersieht, ist für $s > 1$

$$L_\chi = |L_\chi| = \sqrt{L_\chi\,.\,L_{\chi^{-1}}}.$$

$L_\chi(s)$ ist also für $s > 1$ reell; daraus folgt aber nach dem Eindeutigkeits-Satz für Dirichletsche Reihen, daß die Koefficienten $c_\chi(n)$ der Dirichletschen Reihe, welche $L_\chi(s)$ (für $s > 1$) darstellt, sämtlich reell sind.

Nun gilt folgender allgemeine Satz über Dirichletsche Reihen [1]: sind $c_1, c_2 \ldots$ reelle Zahlen, welche der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = O(x^\varepsilon)$$

für ein reelles ε genügen, so konvergiert die Dirichletsche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ für $s > \varepsilon$.

Die Voraussetzung dieses Satzes ist erfüllt, wenn

$$c_n = c_\chi(n) \; (\chi \neq \chi_1) \text{ und } \varepsilon = \tfrac{1}{2}$$

gesetzt wird. Sonach folgt, daß für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ die Dirichletsche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_\chi(n)}{n^s}$, die für $s > 1$ die Funktion $L_\chi(s)$ darstellt, noch für $s > \frac{1}{2}$ konvergiert. Wir können daher $L_\chi(s)$ für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ durch die Summe dieser Reihe definieren. Dann besitzt für $s > \frac{1}{2}$ die reelle Funktion $L_\chi(s)$ sämtliche Ableitungen. Hierin ist insbesondere enthalten, daß

$$\lim_{s=1} L_\chi(s) \; (= L_\chi(1)) \text{ und } \lim_{s=1} \frac{L_\chi(s) - L_\chi(1)}{s-1} = \lim_{s=1} L'_\chi(s) \; (= L'_\chi(1))$$

existiert.

$$\left(L'_\chi(s) = \frac{dL_\chi(s)}{ds}\right)$$

1) Siehe im „Handbuch d. Lehre . . .“, Bd. I, § 32.

Ziehen wir jetzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{\chi_1}(n)}{n^s}$ in Betracht, welche für $s > 1$ die Funktion $L_{\chi_1}(s)$ darstellt.

Die Gleichung

$$S_{\chi_1}(x) = B \,.\, x + O(\sqrt{x})$$

nimmt, wenn $c_{\chi_1}(n) - B = \bar{c}_n$ gesetzt wird, die Gestalt an

$$\sum_{n=1}^{x} \bar{c}_n = Bx + O(\sqrt{x}) - B \,.\, [x] = O(\sqrt{x}).$$

Hieraus läßt sich wieder schließen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_n}{n^s}$ für $s > \frac{1}{2}$ konvergiert und für diese s eine beliebig oft differentiierbare Funktion $\bar{L}_{\chi_1}$ darstellt. Diese stimmt für $s > 1$ offenbar überein mit der Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{\chi_1}(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B}{n^s} = L_{\chi_1}(s) - B \,.\, \zeta(s),$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion bedeutet.

Nun hat die Funktion $\zeta(s) \,.\, (s-1)$ für $s = 1$ den Limes 1, und ihre Ableitungen nähern sich gleichfalls für $s = 1$ einer bestimmten Grenze [1]); andrerseits ist

$$\lim_{s=1} \left\{ \bar{L}_{\chi_1}(s) \,.\, (s-1) \right\} = 0;$$

also muß, zufolge der für $s > 1$ gültigen Gleichung

---

1) Dies ergibt sich folgendermaßen: für $s > 1$ gilt die Gleichung

$$\zeta(s) \,.\, (1 - 2^{1-s}) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

in welcher rechts eine für $s > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe steht, die für $s = 1$ den Wert $\log 2$ hat. Andrerseits besteht für alle s die Potenz-Entwicklung

$$1 - 2^{1-s} = 1 - e^{-(s-1)\,.\,\log 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \cdot (\log 2)^n \cdot (s-1)^n,$$

welche lehrt, daß beim Heranrücken an den Punkt 1 von rechts her die Funktion $\frac{1-2^{1-s}}{s-1}$ sich der Grenze $\log 2$ nähert und daß auch jede ihrer Ableitungen für $s = 1$ einen Grenzwert besitzt. Berücksichtigt man noch, daß für $s > 1$

$$\zeta(s) \,.\, (s-1) = \zeta(s) \,.\, (1 - 2^{1-s}) \, \frac{s-1}{1-2^{1-s}}$$

ist, so gelangt man zu der aufgestellten Behauptung.

$$\overline{L}_{\chi_1}(s) = L_{\chi_1}(s) - B\zeta(s),$$
$$\lim_{s=1}\left\{L_{\chi_1}(s)\,.\,(s-1)\right\} = B$$

sein; das heißt die Funktion $L_{\chi_1}(s)$ wird bei der Annäherung an den Punkt 1 ebenso stark unendlich wie $\dfrac{1}{s-1}$, und außerdem haben die Ableitungen von $L_{\chi_1}(s)\,.\,(s-1)$ für $s=1$ einen (endlichen) Grenzwert.

Es sei noch bemerkt, daß allgemein

$$L_{\chi^{-1}}(s) = L_{\chi}(s)$$

ist. Für ein reelles χ ist diese Gleichung selbstverständlich; für einen komplexen Charakter folgt ihr Bestehen für $s > 1$ aus der vorhin erwähnten Gleichung

$$L_{\chi} = \sqrt{L_{\chi}\,.\,L_{\chi^{-1}}}$$

und damit auch das Bestehen der Gleichung

$$c_{\chi^{-1}}(n) = c_{\chi}(n),$$

aus der die Gültigkeit der Behauptung ersichtlich wird.

§ 4. Die Dirichletsche Behauptung.

Auf Grund der zuletzt erhaltenen Ergebnisse sind wir jetzt im Stande, den Satz zu beweisen, daß jede primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellt.

Wir gehen aus von der Definitions-Gleichung

$$L_{\chi}(s) = \prod_{q}\frac{1}{1-\dfrac{1}{q^{2s}}}\cdot\prod_{p}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1-\dfrac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}.$$

Hierin durchlaufen p und q zusammen alle zu D teilerfremden Primzahlen, und zwar durchläuft p die darstellbaren, q die nicht darstellbaren Primzahlen.

In dem zweiten Produkt ist das allgemeine Glied

$$\frac{1}{1-\dfrac{\chi(K_p)}{p^s}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}} = e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\chi^m(K_p)}{m\,.\,p^{ms}}}\,.\,e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\chi^m(K_p^{-1})}{m\,.\,p^{ms}}}$$
$$= e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(K_p^m)+\chi(K_p^{-m})}{m\,.\,p^{ms}}}.$$

Für $s > 1$ folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die absolute Konvergenz von

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(K_p^m) + \chi(K_p^{-m})}{m \cdot p^{ms}}$$

(da in der Form p^m jede positive Zahl (n) höchstens einmal im Nenner auftritt und der Faktor $\frac{\chi(K_p^m) + \chi(K_p^{-m})}{m}$ absolut genommen höchstens gleich 2 ist).

Es ergibt sich daraus, daß für $s > 1$

$$\prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)} = e^{\sum\limits_p \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(K_p^m) + \chi(K_p^{-m})}{mp^{ms}}}$$

ist, und aus dieser Gleichung ersieht man, daß das links stehende Produkt eine logarithmische Ableitung besitzt, welche dargestellt wird durch die Reihe

$$-\sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} (\chi(K_p^m) + \chi(K_p^{-m}));$$

diese Reihe konvergiert (für $s > 1$) wiederum absolut, weil $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$ für $s > 1$ konvergiert.

Auf dieselbe Weise zeigt man von der für $s > \frac{1}{2}$ von 0 verschiedenen und bei zunehmendem s monoton abnehmenden Funktion $G(s)$, welche durch das Produkt $\prod\limits_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}}$ dargestellt wird, daß ihre logarithmische Ableitung

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = -\sum_{q,m} \frac{2 \log q}{q^{2ms}}$$

ist (für $s > \frac{1}{2}$).

Da

$$L_\chi(s) = G(s) \cdot \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$

ist, so folgt (für $s > 1$)

$$\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = \frac{G'(s)}{G(s)} - \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} (\chi(K_p^m) + \chi(K_p^{-m})).$$

Nun sei K_α irgend eine Formen-Klasse; dann ergibt sich

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha)\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = \frac{G'(s)}{G(s)}\cdot\sum_\chi \chi(K_\alpha)$$
$$-\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{ms}}\left\{\sum_\chi \chi(K_\alpha K_p^m)+\sum_\chi \chi(K_\alpha K_p^{-m})\right\},$$

wobei χ in den Summen $\sum\limits_\chi$ alle Charaktere durchlaufen soll.

Berücksichtigt man, daß $\sum\limits_\chi \chi(K)$ gleich h oder gleich 0 ist, je nachdem K die Hauptklasse ist oder nicht, so findet man aus der letzten Gleichung, wenn man darin der Reihe nach für K_α erst die Hauptklasse (K_1), dann eine von K_1 verschiedene zweiseitige Klasse und schließlich eine der übrigen Klassen setzt:

$$\sum_\chi \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = h\cdot\frac{G'(s)}{G(s)} - 2h\cdot\left\{\sum_p{}'\frac{\log p}{p^s}+\sum_p{}''\frac{\log p}{p^{2s}}+\cdots\right\},$$

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha)\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$$
$$= -2h\cdot\left\{\sum_p{}'\frac{\log p}{p^s}+\sum_p{}''\frac{\log p}{p^{2s}}+\cdots+\sum_p{}^{(m)}\frac{\log p}{p^{ms}}+\cdots\right\}$$

für eine von der Hauptklasse verschiedene zweiseitige Klasse K_α,

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha)\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$$
$$= -h\cdot\left\{\sum_p{}'\frac{\log p}{p^s}+\sum_p{}''\frac{\log p}{p^{2s}}+\cdots+\sum_p{}^{(m)}\frac{\log p}{p^{ms}}+\cdots\right\}$$

für jede nicht ambige Klasse K_α,

wobei jedesmal die Summe

$$\sum_p{}^{(m)}\frac{\log p}{p^{ms}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

über diejenigen Primzahlen p zu erstrecken ist, deren m-te Potenz in K_α darstellbar ist. Für diese Primzahlen und nur für diese ist nämlich mindestens eine der Klassen K_p^m, K_p^{-m} gleich K_α, und der Fall, daß beide gleich K_α sind, tritt dann und nur dann ein, wenn K_α zweiseitig ist.

(Man beachte, daß in der Reihe

$$\sum_{p,m}\frac{\log p}{p^{ms}}\cdot\left\{\sum_\chi \chi(K_\alpha K_p^m)+\sum_\chi \chi(K_\alpha K_p^{-m})\right\}$$

wegen ihrer absoluten Konvergenz die Glieder beliebig geordnet werden dürfen.)

Es sollen nun die drei gefundenen Gleichungen in eine Formel zusammengefaßt werden. Gleichzeitig soll eine Umformung vorgenommen werden, die für spätere Zwecke nützlich ist.

Dazu gelangen wir durch folgende Erwägung: die Reihe

$$\sum_p{}'' \frac{\log p}{p^{2s}} + \sum_p{}''' \frac{\log p}{p^{3s}} + \cdots$$

konvergiert für $s > \frac{1}{2}$. Denn sie ist eine Teilreihe der unendlichen Summe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{ms}},$$

welche für $s > \frac{1}{2}$ konvergiert.

Ferner gilt auch die Entwicklung

$$-\sum_{q,m} \frac{2 \log q}{q^{2ms}}$$

der Funktion $\dfrac{G'(s)}{G(s)}$ für $s > \frac{1}{2}$.

Demnach besteht für jede Klasse K_α eine Gleichung

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha) \cdot \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = -h_0 \cdot \sum_p{}' \frac{\log p}{p^s} - R(s), \tag{1}$$

wo p in der Summe $\sum\limits_p{}'$ alle in K_α darstellbaren Primzahlen durchläuft, wo ferner h_0 gleich $2h$ oder gleich h zu setzen ist, je nachdem K_α zweiseitig ist oder nicht, und wo $R(s)$ eine Funktion bedeutet, die sich für $s > \frac{1}{2}$ in eine Dirichletsche Reihe (mit lauter positiven Koefficienten) entwickeln läßt, die daher jedenfalls im Punkte $s = 1$ stetig ist.

Wir müssen nun das Verhalten der Funktionen $\dfrac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$ im Punkte $s = 1$ betrachten.

Aus dem Endresultat des vorigen Paragraphen läßt sich unmittelbar entnehmen, daß

$$\lim_{s=1} \left\{ \frac{\frac{d}{ds}(L_{\chi_1}(s) . (s-1))}{L_{\chi_1}(s) . (s-1)} \right\}$$

vorhanden ist, daß also für $s > 1$ eine Gleichung

$$\frac{L'_{\chi_1}(s)}{L_{\chi_1}(s)} = -\frac{1}{s-1} + r(s)$$

besteht, worin $r(s)$ eine Funktion bedeutet, die bei der Annäherung von s an den Punkt 1 einem bestimmten Grenzwert zustrebt.

Für $\chi \neq \chi_1$ verhalten sich $L_\chi(s)$ und $L'_\chi(s)$ im Punkt 1 stetig; demnach kann die Existenz eines Grenzwertes von $\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$ für $s = 1$ nur dann ausbleiben, wenn

$$L_\chi(1) = 0$$

ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

Zunächst ergibt sich, daß nicht für zwei verschiedene Charaktere χ_α, χ_β

$$L_{\chi_\alpha}(1) = L_{\chi_\beta}(1) = 0$$

sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so müßte

$$\lim_{s=1} \frac{L_{\chi_\alpha}(s)}{s-1} = L'_{\chi_\alpha}(1), \quad \lim_{s=1} \frac{L_{\chi_\beta}(s)}{s-1} = L'_{\chi_\beta}(1)$$

sein, und daraus würde folgen, daß

$$L_{\chi_1} \cdot L_{\chi_\alpha} \cdot L_{\chi_\beta} = (s-1)^2 \cdot L_{\chi_1} \cdot \frac{L_{\chi_\alpha}}{s-1} \cdot \frac{L_{\chi_\beta}}{s-1}$$

für $s = 1$ den Limes 0 hätte; dasselbe müßte daher von dem (über die h Charaktere erstreckten) Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{h} L_{\chi_\nu}(s)$$

gelten.

Andrerseits besteht aber für $s > 1$ die Identität

$$\prod_{\nu=1}^{h} L_{\chi_\nu}(s) = (G(s))^h \cdot e^{\sum\limits_{p,m} \frac{1}{m \cdot p^{ms}} \sum\limits_{\nu=1}^{h} \left\{\chi_\nu(K_p^m) + \chi_\nu(K_p^{-m})\right\}}$$

$$= (G(s))^h \cdot e^{\sum'\limits_{p,m} \frac{2h}{m \cdot p^{ms}}},$$

aus welcher folgt, daß für $s > 1$

$$\prod_{\nu=1}^{h} L_{\chi_\nu}(s) \geqq (G(s))^h > 1$$

ist. Wir kämen also auf einen Widerspruch.

Auf den gleichen Widerspruch würden wir offenbar geführt, wenn wir annähmen, daß für irgend ein χ zugleich $L_\chi(1)$ und $L'_\chi(1)$ gleich 0 wäre.

Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten: entweder ist $L_\chi(1)$ für jedes χ von 0 verschieden, oder es gibt ein χ ($= \chi_2$) von der Art, daß

$$L_{\chi_2}(1) = 0, \quad L'_{\chi_2}(1) \neq 0$$

ist und daß für $\chi \neq \chi_1, \chi_2$ (falls ein solches χ existiert) die Funktion $L_\chi(s)$ im Punkte 1 einen von 0 verschiedenen Wert hat.

Nehmen wir an, der zweite Fall träfe zu; dann könnte zunächst χ_2 kein komplexer Charakter sein; denn sonst wäre χ_2^{-1} von χ_2 (und χ_1) verschieden und doch

$$L_{\chi_2^{-1}}(1) = L_{\chi_2}(1) = 0$$

entgegen unsrer Annahme. χ_2 müßte also reell sein. Da ferner L_{χ_2} zweimal stetig differentiierbar ist, so hätte die Gleichung

$$L_{\chi_2}(1) = 0$$

zur Folge, daß für $s > 1$

$$\frac{L'_{\chi_2}(s)}{L_{\chi_2}(s)} = \frac{L'_{\chi_2}(s)}{(s-1)\,L'_{\chi_2}(1) + \frac{1}{2}(s-1)^2\,L''_{\chi_2}(s_1)}$$

wäre (s_1 bedeutet einen Wert zwischen s und 1), daß also

$$\frac{L'_{\chi_2}(s)}{L_{\chi_2}(s)} = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{L'_{\chi_2}(s) - L'_{\chi_2}(1)}{s-1} - \frac{1}{2}\,L''_{\chi_2}(s_1)\right) \cdot \frac{1}{L'_{\chi_2}(1) + \frac{s-1}{2}\,L''_{\chi_2}(s_1)}$$

$$= \frac{1}{s-1} + \bar{r}(s)$$

wäre, wo mit $\bar{r}(s)$ eine Funktion bezeichnet ist, die für $s = 1$ einen Grenzwert besitzt.

Andrerseits haben wir gefunden, daß

$$\frac{L'_{\chi_1}(s)}{L_{\chi_1}(s)} = -\frac{1}{s-1} + r(s)$$

ist, wobei $\lim\limits_{s=1} r(s)$ existiert.

Es müßte also

$$\frac{L'_{\chi_1}}{L_{\chi_1}} + \frac{L'_{\chi_2}}{L_{\chi_2}}$$

für $s = 1$ gegen einen Grenzwert konvergieren, und da für jeden (eventuell vorhandenen) von χ_1 und χ_2 verschiedenen Charakter χ

$$L_\chi(1) \neq 0$$

ist, so würde folgen, daß für jede Klasse K_α aus dem Hauptgeschlecht (für die ja $\chi_2(K_\alpha) = 1$ ist) auch

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha) \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$$

für $s = 1$ einen Limes besäße. Die Gleichung (1) lehrt aber, daß dieser Limes nur dann vorhanden sein kann, wenn die über alle in K_α darstellbaren Primzahlen erstreckte Summe $\sum' \frac{\log p}{p}$ konvergiert.

$\left(\text{Andernfalls kann nämlich } \lim\limits_{\overleftarrow{s=1}} \sum' \frac{\log p}{p^s} \text{ nicht existieren.}\right)$

Demnach müßte, wenn unsere Annahme richtig wäre, die Summe $\sum_1 \frac{\log p}{p}$, erstreckt über alle im Hauptgeschlecht darstellbaren Primzahlen, konvergieren.

Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn, wie im zweiten Paragraphen bewiesen wurde, sind sämtliche Primzahlen aus den arithmetischen Reihen $Dx + r^2$, in denen $(r, D) = 1$ ist, im Hauptgeschlecht darstellbar, treten also in $\sum_1$ auf. Andrerseits ist die Reihe $\sum \frac{\log p}{p}$, in der p die Primzahlen einer arithmetischen Reihe durchläuft (für welche die Differenz zu den Zahlen der Reihe teilerfremd ist), divergent (wie in der Theorie der arithmetischen Reihen gelehrt wird)[1]). Also divergiert erst recht $\sum_1 \frac{\log p}{p}$.

Es kann somit für keinen Charakter χ die Gleichung

$$L_\chi(1) = 0$$

bestehen. Infolgedessen ist für $\chi \neq \chi_1$ die Funktion $\frac{L'_\chi}{L_\chi}$ im Punkte $s = 1$ stetig, und da $\frac{L'_{\chi_1}}{L_{\chi_1}}$ für $s = 1$ unendlich wird $\left(\text{wie } \frac{-1}{s-1}\right)$, so wächst für jedes K_α der absolute Wert der Summe

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha) \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$$

1) Siehe in Herrn Landaus „Handbuch", Bd. I, § 103—106.

bei der Annäherung an den Punkt 1 über alle Grenzen. Aus dieser Tatsache können wir unter Anwendung der Gleichung (1) schließen, daß für jedes K_α die Reihe $\sum' \frac{\log p}{p}$ (in welcher p die in K_α darstellbaren Primzahlen durchläuft) divergent ist. Hierin ist aber enthalten, daß in der Reihe $\sum' \frac{\log p}{p}$ unendlich viele Glieder auftreten; und dies bedeutet, daß jede Klasse K_α, und daher auch jede primitive Form unendlich viele Primzahlen darstellt.

Dies ist (abgesehen von unwesentlichen Änderungen) der Dirichlet-Scheringsche Beweis für den zu Anfang dieses Paragraphen genannten Satz. Bei diesem Beweise wird wesentlich ein Satz aus der Theorie der arithmetischen Reihen benutzt. Daß ein solches Verfahren nicht künstlich ist, sondern in der Natur der Sache begründet liegt, ersieht man am besten aus dem Umstande, daß sich für ein reelles χ die Funktion $L_\chi(s)$ als Produkt zweier von den Funktionen darstellen läßt, welche für die reellen Zahlcharaktere eine entsprechende Bedeutung haben wie die Funktionen L_χ für die Klassen-Charaktere. Dies ergibt sich nämlich folgendermaßen:

Wie früher bewiesen, gibt es zu jedem reellen Klassen-Charakter χ zwei reelle Zahlcharaktere modulo D ($\bar{\chi}$ und $\bar{\bar{\chi}}$), deren Wert für jede in einer (beliebigen) Klasse K darstellbare Zahl m mit dem Wert von χ für die Klasse K übereinstimmt. (Dabei ist für jede positive Zahl n

$$\bar{\chi}(n) . \bar{\bar{\chi}}(n) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

$$\bar{\bar{\chi}}(n) = \bar{\chi}(n) \cdot \left(\frac{D}{n}\right),$$

wo $\left(\frac{D}{n}\right)$ für $(n, D) > 1$ gleich 0 definiert ist.)

Auf Grund dieser Tatsache läßt sich die für $s > 1$ gültige Definitions-Gleichung

$$L_\chi(s) = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}} \cdot \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)},$$

in welcher die p von den q dadurch unterschieden sind, daß

$$\left(\frac{D}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{D}{q}\right) = -1$$

ist, bei reellem χ folgendermaßen transformieren:

$$L_\chi(s) = \prod_q \frac{1}{\left(1 - \frac{\overline{\chi}(q)}{q^s}\right)\left(1 + \frac{\overline{\chi}(q)}{q^s}\right)} \cdot \left(\prod_p \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^s}}\right)^2$$

$$= \left(\prod_p \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^s}} \cdot \prod_q \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(q)}{q^s}}\right) \cdot \left(\prod_p \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(p)}{p^s}} \cdot \prod_q \frac{1}{1 + \frac{\overline{\chi}(q)}{q^s}}\right)$$

$$= \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(P)}{P^s}} \cdot \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(P)\cdot\left(\frac{D}{P}\right)}{P^s}},$$

wobei P sämtliche Primzahlen durchläuft. (Für die in D aufgehenden Primzahlen P haben die Faktoren

$$\frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(P)}{P^s}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 - \frac{\overline{\chi}(P)\cdot\left(\frac{D}{P}\right)}{P^s}}$$

den Wert 1.)

Die beiden als Faktoren auftretenden Produkte stimmen für $s > 1$ bezüglich überein mit den Dirichletschen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^s} = L_{\overline{\chi}}(s), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\overline{\chi}}(n)}{n^s} = L_{\overline{\overline{\chi}}}(s);$$

von diesen wird in der Theorie der arithmetischen Reihen bewiesen, daß sie bei der Annäherung an den Punkt 1 jedenfalls nicht dem Wert 0 zustreben[1]).

---

1) Siehe hierüber im „Handbuch", Bd. I an der bereits citierten Stelle § 103 und 106. — Die Gleichung

$$L_\chi = L_{\overline{\chi}} . L_{\overline{\overline{\chi}}}$$

findet sich bereits bei Dirichlet (in den „Recherches .....", Ges. Werke, Bd. I, S. 446). Zum Beweis des Nichtverschwindens von $L_\chi(s)$ für ein reelles χ ist die Identität wohl zuerst von Weber (Math. Annalen, Bd. 20, S. 319—320) benutzt worden. — Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Scheringsche Beweis, wenngleich er in der hier gegebenen Darstellung umständlicher erscheint als der Beweis mit Hülfe der Faktoren-Zerlegung von $L_\chi(s)$, doch diesem zweiten Beweis gegenüber insofern einen gewissen Vorteil bietet, als für ihn die Einführung der Geschlechts-Charaktere nicht erforderlich ist und man daher durch Anwendung eines der elementaren Beweise für den Gaußschen Satz über die Klassen im Hauptgeschlecht eine Abkürzung gewinnen kann. (Vgl. darüber im Vorwort.)

Durch die gefundene Zerlegung von $L_\chi(s)$, die sich kurz in der Form

$$L_\chi = L_{\overline{\chi}} . L_{\overline{\overline{\chi}}}$$

schreiben läßt, wird daher in Evidenz gesetzt, daß

$$L_\chi(1) \neq 0 \qquad \text{ist.}$$

Es soll nun noch ein Beweis des Nichtverschwindens von $L_\chi(s)$ bei komplexem Charakter χ gegeben werden, bei dem wir uns einer von Herrn Landau herrührenden Schlußweise[1]) bedienen.

Bei einem beliebigen Charakter χ besteht für $s > 1$ die Gleichung

$$L_\chi(s) = G(s) . e^{\sum\limits_p \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m(K_p) + \chi^{-m}(K_p)}{m . p^{ms}}}$$

$$= G(s) . e^{2 \sum\limits_{p, m} \frac{\cos(m\omega(K_p))}{m . p^{ms}}},$$

wenn allgemein $\chi(K) = e^{i\omega(K)}$ gesetzt wird, sodaß (für beliebiges χ) ω eine reelle Funktion der Klasse K ist. (Allerdings wird ω durch K nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt.)

Wird χ durch χ^n ersetzt ($n = 0, 1, 2, \ldots$), so geht $\cos(\omega(K))$ in $\cos(n . \omega(K))$ über.

Nun ist für jedes reelle φ

$$0 \leqq 2(1 + \cos\varphi)^2 = 3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi.$$

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf

$$\varphi = m . \omega(K_p) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

finden wir:

$$L_{\chi_1}^3 . L_\chi^4 . L_{\chi^2} = (G(s))^8 . e^{2 \sum\limits_{p, m} \frac{1}{m . p^{ms}} \left\{3 + 4\cos(m\omega(K_p)) + \cos(2m\omega(K_p))\right\}}$$

$$\geqq \left(\prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}}\right)^8 > 1.$$

(Man beachte, daß $\chi_1 = \chi^0$ ist.)

Nehmen wir nun an, es sei χ komplex, so ist χ^2 jedenfalls vom Hauptcharakter verschieden. Wäre dann

$$L_\chi(1) = 0,$$

1) „Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen" (Math. Annalen, Bd. 70, 1910, S. 69—78).

so hätte

$$L_\chi . L_{\chi_1} = \frac{L_\chi}{s-1} \cdot (s-1) . L_{\chi_1},$$

also auch

$$L_{\chi^2} . \left(L_\chi . L_{\chi_1}\right)^3$$

für $s = 1$ einen endlichen Grenzwert; daher müßte

$$\lim_{s=1} \left(L_{\chi^2} . L_\chi^4 . L_{\chi_1}^3\right) = 0$$

sein, was der eben erhaltenen Ungleichung widerspricht. Demnach muß $L_\chi(1)$ von 0 verschieden sein.

Auf dieselbe Weise folgt natürlich auch, daß für einen reellen Charakter χ nicht zugleich $L_\chi(s)$ und $L'_\chi(s)$ im Punkte 1 verschwinden können.

§ 5. Die Landausche Abschätzung.

Wir gehen jetzt daran, die zu Anfang angegebene Abschätzung für die Anzahl der durch eine (primitive) Form (der Diskriminante D) darstellbaren Primzahlen $\leqq x$ als gültig nachzuweisen.

Dazu wenden wir die Hülfsmittel der komplexen Funktionentheorie auf die Funktionen $L_\chi(s)$ an, wobei wir jetzt unter s eine komplexe Variable ($s = \sigma + ti$) verstehen.

Die Funktionen $L_\chi(s)$ sind zuerst für $\sigma > 1$ durch die absolut konvergenten Produkte

$$\prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}} \cdot \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{\chi(K_p)}{p^s}\right)\left(1 - \frac{\chi(K_p^{-1})}{p^s}\right)}$$

definiert worden und sind in dieser Halbebene darstellbar durch die Dirichletschen Reihen

$$\sum \frac{c_\chi(n)}{n^s},$$

bei denen

$$c_\chi(n) = \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{\nu=1}^{h} \chi(K_\nu)\, a_n(K_\nu)$$

zu setzen ist. Aus dieser Reihen-Darstellung (oder auch aus der leicht beweisbaren gleichmäßigen Konvergenz des unendlichen Produktes für $\sigma \geqq 1 + \delta$, $\delta > 0$) folgt, daß die $L_\chi(s)$ in ihrem Definitions-Bereich reguläre Funktionen sind.

Des weiteren wissen wir, daß für ein vom Hauptcharakter verschiedenes χ die Reihe $\sum \frac{c_\chi(n)}{n^s}$ für $t = 0$, $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert, und daraus folgt, daß die Reihe in der gesamten Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert[1]) und dort eine reguläre Funktion definiert. Somit läßt sich für $\chi \neq \chi_1$ die Funktion $L_\chi(s)$ bis zu der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ (exklusive) analytisch fortsetzen.

Was ferner die Funktion L_{χ_1} betrifft, so haben wir gefunden, daß sie sich für $\sigma > 1$, $t = 0$ ausdrücken läßt in der Form

$$\overline{L}_{\chi_1}(s) + B \,.\, \zeta(s).$$

Hierin ist $\overline{L}_{\chi_1}$ für reelle $s > \frac{1}{2}$ definiert durch die konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum \frac{\overline{c}_n}{n^s} \qquad (\overline{c}_n = c_{\chi_1}(n) - B)$$

und gestattet demnach eine analytische Fortsetzung über die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$; ferner ist die ζ-Funktion bei analytischer Fortsetzung regulär in der Halbebene $\sigma > 0$ mit Ausnahme des Punktes 1, in welchem sie einen Pol erster Ordnung besitzt[2]). B ist eine positive Größe.

Aus diesen Tatsachen ergibt sich, daß L_{χ_1} bei analytischer Fortsetzung für $\sigma > \frac{1}{2}$ eine meromorphe Funktion ist, die nur für $s = 1$ einen Pol hat, und zwar von erster Ordnung[3]).

Weiteren Aufschluß über die Beschaffenheit der Funktionen $L_\chi(s)$ erhalten wir durch Betrachtung der Koefficienten $c_\chi(n)$, $\overline{c}_n$.

Zunächst folgt aus dem Umstande, daß diese Koefficienten alle reell sind, daß in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ die Funktionen $L_\chi(s)$, für die $\chi \neq \chi_1$ ist, sowie $\overline{L}_{\chi_1}(s)$ in je zwei zur reellen Axe sym-

---

1) Siehe „Handbuch", Bd. I, § 42 (S. 157—159).

2) Siehe „Handbuch", Bd. I, § 43.

3) Für die reellen Charaktere χ folgt aus der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formel

$$L_\chi = L_{\overline{\chi}} \,.\, L_{\overline{\overline{\chi}}}$$

die Fortsetzbarkeit von $L_\chi(s)$ bis zu der Geraden $\sigma = 0$ (exklusive). — De la Vallée Poussin hat den viel weitergehenden Satz bewiesen, daß alle h Funktionen $L_\chi(s)$ sich über die ganze Ebene als reguläre Funktionen (abgesehen von dem Pol der Funktion $L_{\chi_1}(s)$ für $s = 1$) fortsetzen lassen. („Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", troisième et quatrième partie, Annales de la société scientif. de Bruxelles, Bd. 20 und 21, 1896—97.)

metrisch gelegenen Punkten (d. h. also für je zwei konjugiert komplexe Werte der Variablen s) konjugiert komplexe Werte annehmen; dasselbe gilt offenbar von den Ableitungen der genannten Funktionen. Da ferner auch die ζ-Funktion sowie ihre Ableitung $\zeta'(s)$ diese Eigenschaft besitzt (wie man aus der für $\sigma > 0$ gültigen Darstellung[1]) von $\zeta(s)$ entnehmen kann) und B reell ist, so gilt dasselbe von $L_{\chi_1}(s)$ und der Ableitung $L'_{\chi_1}(s)$.

Ferner ist von den Koefficienten bekannt, daß

$$\sum_{n=1}^{x} c_\chi(n) = S_\chi(x) = O(\sqrt{x}) \qquad (\text{für } \chi \neq \chi_1)$$

und

$$\sum_{n=1}^{x} \bar{c}_n = \bar{S}_{\chi_1}(x) = O(\sqrt{x})$$

ist, und da

$$\sum_{n=1}^{x} a_n(K_\nu) = A.x + O(\sqrt{x}) = O(x)$$

ist (für $\nu = 1, \ldots, h$), so erhält man aus den Definitions-Gleichungen für $c_\chi(n)$ und $\bar{c}_n$ unmittelbar die Abschätzungen

$$\sum_{n=1}^{x} |c_\chi(n)| = O(x), \qquad \sum_{n=1}^{x} |\bar{c}_n| = O(x).$$

Nun gilt folgender Satz (der einen Specialfall eines allgemeineren, von Herrn Landau bewiesenen[2]) Satzes bildet):

Es sei ein Koefficienten-System $f_1, f_2, \ldots$ gegeben von der Art, daß

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} f_n = O(\sqrt{x})$$

und

$$\sum_{n=1}^{x} |f_n| = O(x)$$

ist. Wird dann $F(s)$ gleich der für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergenten Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^s}$$

gesetzt, so ist für $t \geqq e^4$, $1 - \dfrac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$

---

1) Siehe „Handbuch", Bd. I, § 43 (S. 162).

2) „Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers", Math. Annalen, Bd. 63, 1907.

$$|F(s)| < C_1 \log t,$$
$$|F'(s)| < C_2 \log^2 t,$$

wo C_1 und C_2 von s unabhängig sind. ($F'(s)$ bedeutet die Ableitung von $F(s)$.)

Zum Beweise sollen zunächst einige Ungleichungen abgeleitet werden, die gemeinsam für $t \geqq e^4$, $2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{\log t}$ gelten.

$$1) \qquad \sum_{n=1}^{t^2} \frac{|f_n|}{n^\sigma} \leqq \sum_{n=1}^{t^2} n^{\frac{1}{\log t}} \cdot \frac{|f_n|}{n} \leqq e^2 \sum_1^{t^2} \frac{|f_n|}{n}$$

$$= e^2 \sum_{n=1}^{t^2} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{n} |f_m| \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} + \frac{e^2 \sum\limits_{m=1}^{t^2} |f_m|}{[t^2+1]}$$

$$< e^2 \left(A_1 \cdot \sum_{n=1}^{t^2} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + A_1 \right)$$

(denn zufolge der Voraussetzung

$$\sum_{n=1}^{x} |f_n| = O(x)$$

läßt sich A_1 so bestimmen, daß für $x \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{x} |f_n| < A_1 . x \quad \text{ist}).$$

Demnach folgt

$$\sum_{n=1}^{t^2} \frac{|f_n|}{n^\sigma} < a_1 \log t$$

für eine geeignet gewählte Konstante a_1.

$$2) \quad \frac{|S(t^2)|}{t^{2\sigma}} = \frac{\left| \sum\limits_{n=1}^{t^2} f_n \right|}{t^{2\sigma}} < \frac{A_2 . t}{t^{2\left(1 - \frac{1}{\log t}\right)}} = \frac{A_2 . e^2}{t} < a_2 . \log t.$$

(A_2 kann so gewählt werden, daß für $x \geqq 1$

$$|S(x)| < A_2 \sqrt{x}$$

ist; a_2 kann etwa gleich $\frac{A_2}{e^2}$ gesetzt werden.)

3) Für ein ganzzahliges $m > t^2 + 1$ ist

$$|s| . \sum_{n=t^2+1}^{m} \left\{ |S(n)| . \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{\sigma+1}} du \right\}$$

$$< (2+t) . A_2 . \sum_{n=t^2+1}^{m} \sqrt{n} . \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{2-\frac{1}{\log t}}} du$$

$$< 2 A_2 t \int_{t^2}^{m+1} \frac{\log u}{u^{\frac{3}{2}-\frac{1}{\log t}}} du < 2 A_2 t \int_{t^2}^{\infty} \frac{\log u}{u^{\frac{3}{2}-\frac{1}{\log t}}} du$$

$$= 2 A_2 t \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\log t}} \cdot \frac{\log u}{u^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\log t}\right)^2} \cdot \frac{1}{u^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\log t}}} \right)_{\infty}^{t^2}$$

$$\leqq 8 A_2 . e^2 (2 \log t + 4).$$

$$\left(\text{Denn } \frac{1}{2} - \frac{1}{\log t} \geqq \frac{1}{4}.\right)$$

Hieraus folgt, daß

$$|s| . \sum_{n=t^2+1}^{\infty} |S(n)| . \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{\sigma+1}} du$$

konvergiert und

$$< a_3 \log t \text{ ist.}$$

Es ist nun für $\sigma > \frac{1}{2}$ und ein ganzzahliges $M \geqq 1$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{M} \frac{f_n}{n^s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} (S(n) - S(n-1)) \cdot \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{M} \frac{f_n}{n^s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{S(M)}{(M+1)^s},$$

weil nämlich

$$\lim_{m=\infty} \frac{S(m)}{(m+1)^s} = 0$$

ist. Ferner ist

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \quad (\text{für } n = 1, 2, \ldots),$$

folglich

$$F(s) = \sum_{n=1}^{M} \frac{f_n}{n^s} + s . \sum_{n=M+1}^{\infty} S(n) . \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \frac{S(M)}{(M+1)^s}.$$

Da

$$\left| S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| < A_2 . \sqrt{n} \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} < A_2 \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma + \frac{1}{2}}}$$

ist und

$$\int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma + \frac{1}{2}}} \quad \text{für } \sigma \geqq \tfrac{1}{2} + \delta,\ \delta > 0$$

gleichmäßig in Bezug auf σ konvergiert, so muß

$$\sum_{n = M+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}}$$

in jeder Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$ gleichmäßig konvergieren, und da die Summanden dieser Reihe ganze Funktionen von s sind, so folgt (nach dem Weierstraßschen Doppelreihen-Satz), daß für $\sigma > \frac{1}{2}$ die Reihe gliedweise differentiiert werden darf. Daher ergibt sich

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{M} \frac{f_n \log n}{n^s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}}$$

$$-s . \sum_{n=M+1}^{\infty} S(n) \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{s+1}} du + \frac{S(M) . \log (M+1)}{(M+1)^s}.$$

Setzt man in den erhaltenen Entwicklungen von $F(s)$ und $F'(s)$ für M die Zahl $[t^2]$, so ergeben sich auf Grund der drei Hülfsformeln folgende für $t \geqq e^4$, $1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$ gültige Abschätzungen:

$$|F(s)| \leqq \sum_{n=1}^{t^2} \frac{|f_n|}{n^\sigma} + |s| . \sum_{n=t^2+1}^{\infty} |S(n)| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} + \frac{|S(t^2)|}{t^{2\sigma}}$$

$$< (a_1 + a_2 + a_3) \log t = C_1 \log t.$$

(Man beachte, daß für $u \geqq n > t^2 > e$

$$\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{\sigma+1}} < \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{\sigma+1}} du \quad \text{ist.})$$

$$|F'(s)| \leqq \log (t^2) . \sum_{n=1}^{t^2} \frac{|f_n|}{n^\sigma} + 2|s| . \sum_{n=t^2+1}^{\infty} |S(n)| \int_n^{n+1} \frac{\log u}{u^{\sigma+1}} du$$

$$+ \log (2t^2) \frac{|S(t^2)|}{t^{2\sigma}}$$

(denn $|s| \geqq t > 1$),

$$|F'(s)| < 2a_1 \log^2 t + 2a_3 \log t + 3a_2 \log^2 t < C_2 \log^2 t.$$

Somit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Die Voraussetzungen des Satzes sind für $F(s) = L_\chi(s)$, $\chi \neq \chi_1$ und für $F(s) = \bar{L}_{\chi_1}(s)$ erfüllt. Außerdem gelten für die ζ-Funktion in dem betrachteten Gebiet ebenfalls zwei Abschätzungen[1])

$$|\zeta(s)| < \bar{C}_1 \log t, \quad |\zeta'(s)| < \bar{C}_2 \log^2 t,$$

und

$$L_{\chi_1}(s) = \bar{L}_{\chi_1}(s) + B \, . \, \zeta(s).$$

Aus diesen Tatsachen läßt sich folgender Satz entnehmen: Es gibt zwei Konstanten[2]) c_1, c_2 (> 1) derart, daß für

$$t \geqq e^4, \quad 1 - \frac{1}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

und für jeden Charakter χ

$$|L_\chi(s)| < c_1 \log t, \quad |L'_\chi(s)| < c_2 \log^2 t$$

ist.

Aus diesen Ungleichungen soll nun eine entsprechende Abschätzung von $\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$ abgeleitet werden.

Dazu gehen wir aus von der für $\sigma > 1$ gültigen Gleichung

$$L_\chi(s) = G(s) \, . \, e^{\sum\limits_{p,m} \frac{\chi^m(K_p) + \chi^{-m}(K_p)}{m \, . \, p^{ms}}}.$$

(Die Gleichung ist zwar nur für reelles s abgeleitet, gilt aber natürlich auch im Komplexen.)

Hierin ist (nach der im vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnung) der reelle Teil von

$$\frac{\chi^m(K_p) + \chi^{-m}(K_p)}{m \, . \, p^{ms}}$$

gleich

$$\frac{2 \cos(m\omega(K_p)) \, . \, \cos(mt \log p)}{m \, . \, p^{m\sigma}}$$

$$= \frac{1}{m \, . \, p^{m\sigma}} \left\{ \cos(m(\omega(K_p) + t \log p)) + \cos(m(\omega(K_p) - t \log p)) \right\},$$

und da allgemein

$$\chi^n(K) = e^{in\omega(K)}$$

1) Siehe „Handbuch“, Bd. I, § 46.

2) Die im folgenden mit c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bezeichneten Konstanten sollen alle > 1 gewählt werden.

ist, so ergibt sich (für $n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$|L_{\chi^n}(\sigma + nti)|$$
$$= |G(\sigma + nti)| \cdot e^{\sum\limits_{p,m} \frac{1}{m \cdot p^{m\sigma}} \left\{\cos(mn(\omega(K_p) + t \log p)) + \cos(mn(\omega(K_p) - t\log p))\right\}}.$$

An Stelle der früher benutzten Ungleichung

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geqq 0$$

soll jetzt eine schärfere Kosinus-Ungleichung angewendet werden, die zu einer genaueren Abschätzung führt.

Herr J. Schur hat durch ein Beispiel gezeigt[1]), daß sich sechs positive Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$$

so wählen lassen, daß für jedes reelle φ

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \cos 2\varphi + \alpha_3 \cos 3\varphi + \alpha_4 \cos 6\varphi + \alpha_5 \cos 7\varphi \geqq 0,$$
$$\alpha_1 > \alpha_0$$

und

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_5 < 6(\alpha_1 - \alpha_0)$$

ist. Diese Bedingungen sind nämlich erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 56 + 40\sqrt{2} \\ \alpha_1 &= 93 + 64\sqrt{2} \\ \alpha_2 &= 50 + 32\sqrt{2} \\ \alpha_3 &= 14 + 8\sqrt{2} \\ \alpha_4 &= 2 \\ \alpha_5 &= 1 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Denn

$$\begin{aligned} 0 &\leqq 2(1+\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)^2 \cdot (1+\sqrt{2}\cos\varphi)^2 \cdot (2\sqrt{2}-1+(1+\sqrt{2}-2\cos\varphi)^2) \\ &= 2(1+\cos\varphi)(3+4\cos\varphi+2\cos 2\varphi)(2+2\sqrt{2}\cos\varphi+\cos 2\varphi)(4(1+\sqrt{2}) \\ &\qquad\qquad -4(1+\sqrt{2})\cos\varphi + 2\cos 2\varphi) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\cos\varphi + \alpha_2\cos 2\varphi + \alpha_3\cos 3\varphi + \alpha_4 \cos 6\varphi + \alpha_5 \cos 7\varphi, \end{aligned}$$

wie man durch Ausrechnung findet,

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 37 + 24\sqrt{2} > 0,$$

und

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_5 = 216 + 144\sqrt{2} = 6(36 + 24\sqrt{2}) < 6(\alpha_1 - \alpha_0).$$

---

1) Vgl. im „Handbuch", Bd. II, Seite 891.

Es werde nun die Ungleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos\varphi + \alpha_2 \cos 2\varphi + \alpha_3 \cos 3\varphi + 2\cos 6\varphi + \cos 7\varphi \geqq 0$$

auf

$$\varphi = m(\omega(K_p) + t\log p) \quad \text{und} \quad \varphi = m(\omega(K_p) - t\log p)$$

angewandt; dann ergibt sich aus der für $L_{\chi^n}(\sigma + nti)$ erhaltenen Darstellung:

$$|L_{\chi_1}(\sigma)|^{\alpha_0}.|L_\chi(\sigma+ti)|^{\alpha_1}.|L_{\chi^2}(\sigma+2ti)|^{\alpha_2}.|L_{\chi^3}(\sigma+3ti)|^{\alpha_3}.|L_{\chi^6}(\sigma+6ti)|^2.|L_{\chi^7}(\sigma+7ti)|$$
$$\geqq |G(\sigma)|^{\alpha_0}.|G(\sigma+ti)|^{\alpha_1}.|G(\sigma+2ti)|^{\alpha_2}.|G(\sigma+3ti)|^{\alpha_3}.|G(\sigma+6ti)|^2.|G(\sigma+7ti)|;$$

da für $\sigma > 1$

$$|G(s)| \geqq \prod_q \frac{1}{1+\frac{1}{q^{2\sigma}}} > \prod_q \frac{1}{1+\frac{1}{q^2}} > \prod_P \frac{1}{1+\frac{1}{P^2}}$$

ist, wo P sämtliche Primzahlen durchläuft, so folgt, wenn zur Abkürzung

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_5 = \varkappa$$

und

$$\left(\prod_P \frac{1}{1+\frac{1}{P^2}}\right)^{\varkappa} = g$$

gesetzt wird, für $\sigma > 1$

(1) $$|L_{\chi_1}(\sigma)|^{\alpha_0}.|L_\chi(\sigma+ti)|^{\alpha_1}.|L_{\chi^2}(\sigma+2ti)|^{\alpha_2}.|L_{\chi^3}(\sigma+3ti)|^{\alpha_3}.|L_{\chi^6}(\sigma+6ti)|^2.|L_{\chi^7}(\sigma+7ti)| > g > 0$$

Führt man in diese Ungleichung die bewiesene Abschätzung von L_χ ein und berücksichtigt, daß wegen der Regularität der Funktion $(s-1)L_{\chi_1}(s)$ im Punkte 1 eine positive Größe g_1 so gewählt werden kann, daß für $1 < \sigma \leqq 2$

$$|L_{\chi_1}(\sigma)| < \frac{g_1}{\sigma - 1}$$

ist, so erhält man für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq e^4$

$$|L_\chi(\sigma+ti)|^{\alpha_1} > \frac{g.(\sigma-1)^{\alpha_0}}{g_1^{\alpha_0}.c_1^{\varkappa-\alpha_0-\alpha_1}\log^{\alpha_2}(2t).\log^{\alpha_3}(3t).\log^2(6t).\log(7t)}$$
$$> \frac{(\sigma-1)^{\alpha_0}}{c_3(\log t)^{\varkappa-\alpha_0-\alpha_1}}.$$

Aus der Ungleichung

$$|L'_\chi(s)| < c_2 \log^2 t$$

folgt für $2 \geqq \sigma > 1$, $t \geqq e^4$

$$|L_\chi(\sigma + ti) - L_\chi(1 + ti)| = \left| \int_{1+ti}^{\sigma+ti} L'_\chi(s)\, ds \right| < (\sigma - 1)\, c_2 \log^2 t.$$

(Das Integral soll über die geradlinige Verbindung von $1 + ti$ und $\sigma + ti$ erstreckt werden.)

Daraus folgt weiter

$$|L_\chi(1 + ti)| > |L_\chi(\sigma + ti)| - (\sigma - 1)\, c_2 . \log^2 t$$

$$> \frac{(\sigma-1)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}}{c_3^{\frac{1}{\alpha_1}} . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}}} - (\sigma - 1)\, c_2 \log^2 t$$

$$= \frac{(\sigma-1)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}}{c_4 . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}}} \cdot \left(1 - (\sigma - 1)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1}} c_2\, c_4 . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1}}\right)$$

$$\left(c_4 = c_3^{\frac{1}{\alpha_1}} > 1\right).$$

σ werde nun so gewählt, daß

$$(\sigma - 1)^{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1}} c_2\, c_4 . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1}} = \tfrac{1}{2}$$

wird. Dies ist der Fall für

$$\sigma = 1 + \frac{1}{(2c_2\, c_4)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}} . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}}.$$

Für dieses σ ist

$$(\sigma - 1)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}} = \frac{1}{(2c_2\, c_4)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}} . (\log t)^{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \frac{\varkappa - \alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}\right)}}, \quad 1 < \sigma < 2;$$

daher ergibt sich

$$|L_\chi(1 + ti)|$$

$$> \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_4 . (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}}} \cdot \frac{1}{(2c_2\, c_4)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}} . (\log t)^{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \cdot \frac{\varkappa - \alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}\right)}}$$

$$= \frac{1}{c_5 . (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}}.$$

Diese Abschätzung gilt also für $t \geqq e^4$. Da

$$1 - \frac{1}{2c_2 c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}}} > 1 - \frac{1}{\log t}$$

ist, so erhält man für

$$t \geqq e^4,\ 1 - \frac{1}{2c_2 c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}}} \leqq \sigma \leqq 1 + \frac{1}{2c_2 c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}}}$$

$$|L_\chi(\sigma + ti)| \geqq |L_\chi(1 + ti)| - \left| \int_{1+ti}^{\sigma + ti} L'_\chi(s)\, ds \right|$$

$$> \frac{1}{c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}} - |\sigma - 1| \,.\, c_2 \log^2 t$$

$$\geqq \frac{1}{c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}} - \frac{1}{2c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}}$$

$$= \frac{1}{2c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}}.$$

(Das Integral $\int_{1+ti}^{\sigma + ti}$ ist wieder geradlinig erstreckt zu denken.)

Ferner ist für $t \geqq e^4$,

$$1 + \frac{1}{2c_2 c_5 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}}} < \sigma \leqq 2,$$

gemäß der vorhin abgeleiteten Ungleichung:

$$|L_\chi(\sigma + ti)| > \frac{(\sigma - 1)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}}{c_4 (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}}}$$

$$> \frac{1}{(2c_2 c_5)^{\frac{\alpha_0}{\alpha_1}} \,.\, (\log t)^{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \cdot \frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}\right)} \,.\, c_4 \,.\, (\log t)^{\frac{\varkappa - \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1}}}$$

$$> \frac{1}{2c_2 c_4 c_5 \,.\, (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}}.$$

$$\left(\text{Denn } \frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 1.\right)$$

Wird also $2c_2 c_5 = c_6$, $c_4 c_6 = c_7\ (> 2c_5)$ und

$$\frac{\varkappa + \alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = \frac{\varkappa}{\alpha_1 - \alpha_0} + 1 = \varkappa'$$

gesetzt, wo (gemäß der Eigenschaft der α_n)

$$\varkappa' = \frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_5}{\alpha_1 - \alpha_0} + 1 < 7$$

ist, so ergibt sich für $t \geqq e^4$, $1 - \frac{1}{c_6 \log^{\varkappa'} t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$|L_\chi(s)| > \frac{1}{c_7 (\log t)^{\frac{\varkappa + \alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}} = \frac{1}{c_7 (\log t)^{\varkappa' - 2}}, \quad |L'_\chi(s)| < c_2 \log^2 t,$$

also

$$\left|\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\right| < c_2 c_7 (\log t)^{\varkappa'} = c_8 . \log^{\varkappa'} t.$$

Die für L_χ, L'_χ und $\frac{L'_\chi}{L_\chi}$ bewiesenen Abschätzungen beziehen sich alle nur auf die obere Halbebene. Wir erhalten aber daraus auch unmittelbar die entsprechenden Abschätzungen für die untere Halbebene. Denn zu konjugiert komplexen Werten von s gehören konjugierte Werte von L_χ, L'_χ und in Folge dessen auch von $\frac{L'_\chi}{L_\chi}$; demnach folgt, da konjugiert komplexe Zahlen gleiche absolute Beträge haben, daß auch für

$$t \leqq -e^4, \quad 1 - \frac{1}{\log |t|} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L_\chi(s)| < c_1 \log |t|, \quad |L'_\chi(s)| < c_2 \log^2 |t|$$

und für

$$t \leqq -e^4, \quad 1 - \frac{1}{c_6 \log^{\varkappa'} |t|} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|L_\chi(s)| > \frac{1}{c_7 (\log |t|)^{\varkappa' - 2}}, \quad \left|\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\right| < c_8 \log^{\varkappa'} |t|$$

ist.

Aus den erhaltenen Abschätzungen wird ersichtlich, daß $L_\chi(s)$

für

$$|t| \geqq e^4, \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_6 \log^{\varkappa'} |t|}$$

und daher gewiß für $\sigma = 1$, $|t| \geqq e^4$ von 0 verschieden ist. Andrerseits kann man aus der Ungleichung (1) unmittelbar schließen, daß für $\sigma = 1$, $t \neq 0$

$$L_\chi(s) \neq 0$$

ist. Denn wäre für $s = 1 + t_0 i$, $t_0 \gtrless 0$

$$L_\chi(s) = 0,$$

so würde in dem Produkte

$$L_\chi(s + t_0 i) \, . \, L_{\chi_1}(s)$$

für $s = 1$ die Nullstelle von $L_\chi(s + t_0 i)$ den Pol von $L_{\chi_1}(s)$ aufheben; es müßte daher

$$L_\chi^{\alpha_1}(\sigma + t_0 i) \, . \, L_{\chi_1}^{\alpha_0}(\sigma) = L_\chi^{\alpha_1 - \alpha_0}(\sigma + t_0 i) \, . \, (L_\chi(\sigma + t_0 i) \, . \, L_{\chi_1}(\sigma))^{\alpha_0}$$

gegen 0 konvergieren, wenn σ zu 1 abnimmt; das gleiche müßte für die ganze linke Seite der Ungleichung (1) gelten, da ja die Funktionen $L_\chi(s)$ für $s = 1$, $t \neq 0$ sämtlich regulär sind. Somit würden wir auf einen Widerspruch geführt [1]).

Nehmen wir das gefundene Ergebnis mit der früher bewiesenen Tatsache zusammen, daß für jedes χ

$$L_\chi(1) \neq 0$$

ist, so erhalten wir den Satz, daß die L_χ auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ sämtlich von 0 verschieden sind.

Hieraus ergibt sich speciell, daß man eine positive Größe d_1 so bestimmen kann, daß für

---

1) Natürlich kann für diese Überlegung die komplicierte Kosinus-Ungleichung durch die früher benutzte einfachere ersetzt werden. — Die hier angewandte Beweismethode rührt von Herrn Landau her („Über die Primzahlen in einer arithm. Progression u. d. Primideale in einer Idealklasse", Sitzungsber. d. Wiener Akad., Abt. IIa, Bd. 117, S. 1096—98, 1908), der einen zuerst von Herrn Mertens (auf die ζ-Funktion) angewandten Kunstgriff benutzt. (Siehe „Über eine Eigenschaft der Riemannschen ζ-Funktion, Sitzungsber. d. Wiener Akad., Abt. IIa, Bd. 107, 1898.) Eine ähnliche Schlußweise findet sich bereits bei de la Vallée Poussin („Recherches analytiques . . .", deuxième partie, Chap. V, § 1 und troisième partie, Chap. III, § 1, Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, 1896).

$$|t| \leqq e^4, \quad \sigma \geqq 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} (e^4)} = 1 - \frac{1}{4^{\varkappa'} d_1} = \vartheta$$

alle L_χ von 0 verschieden sind, und zwar kann dabei $d_1 \geqq c_6$ gewählt werden.

Ist dann $\mathfrak{C}$ die Kurve, welche durch die Gleichungen

$$\sigma = 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} |t|} \quad \text{für } |t| \geqq e^4$$

$$\sigma = \vartheta \qquad\qquad \text{für } |t| \leqq e^4$$

bestimmt wird, so sind für $\chi \neq \chi_1$ die Funktionen $\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$ in dem Gebiete rechts von der Kurve $\mathfrak{C}$ und darauf analytisch, und $\frac{L'_{\chi_1}}{L_{\chi_1}}$ ist dort eine meromorphe Funktion, die nur im Punkte 1 einen Pol besitzt, und zwar von erster Ordnung mit dem Residuum (-1).

Wir machen jetzt Gebrauch von der für reelles $s > 1$ bewiesenen Formel

$$\sum_\chi \chi(K_\alpha) \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} = -h_0 \sum_p{}' \frac{\log p}{p^s} - R(s),$$

in der $R(s)$ eine Funktion bedeutet, die für $s > \frac{1}{2}$ eine Entwicklung in eine Dirichletsche Reihe mit lauter positiven Koefficienten gestattet.

Diese Gleichung bleibt offenbar in der gesamten Halbebene $\sigma > 1$ gültig; dabei ist $R(s)$ als komplexe Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär und für $\sigma \geqq \frac{3}{4}$ beschränkt. (Denn für $\sigma > \frac{1}{2}$ ist $|R(s)| \leqq R(\sigma)$.) Wird daher die für $\sigma > 1$ durch die Reihe $\sum\limits_p{}' \frac{\log p}{p^s}$ definierte Funktion mit $f(s)$ bezeichnet, so ergibt sich aus den Eigenschaften der Funktionen $\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}$, daß $f(s)$ sich bis zu der Kurve $\mathfrak{C}$ analytisch fortsetzen läßt, und zwar ist $f(s)$ auf $\mathfrak{C}$ und rechts davon regulär, abgesehen von dem Punkte $s = 1$, in welchem $f(s)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{h_0}$ besitzt.

Ferner gilt für

$$|t| \geqq e^4, \quad 2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} |t|}$$

eine Abschätzung

$$|f(s)| < c_9 \log^{\varrho} t,$$

worin $\varrho > 0$ ist.
(Für einen späteren Zweck ist es nützlich zu zeigen, daß der specielle Wert der positiven Zahl ϱ auf den folgenden Beweis keinen Einfluß hat.)

Die Summe $\sum_p' \frac{\log p}{p^s}$ erstreckt sich über alle in der Klasse K ($= K_\alpha$)[1] darstellbaren Primzahlen. Ist n eine solche Primzahl, so werde $\log n = b_n$ gesetzt, für alle übrigen (positiven) n sei $b_n = 0$. Hiernach ist für $\sigma > 1$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

und diese Dirichletsche Reihe konvergiert für $\sigma > 1$ absolut.

Nun gilt allgemein folgender Satz, der mit Hülfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen wird[2]): sind y und T zwei positive Größen, so ist das geradlinig erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{y^s}{s^2}\,ds = \Theta \cdot \frac{y^2}{T} \text{ für } y \leqq 1$$

$$= \log y + \Theta \cdot \frac{y^2}{T} \text{ für } y \geqq 1,$$

wobei jedesmal $|\Theta| < 1$ ist.

Aus diesem Satz läßt sich folgende Konsequenz ziehen: es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine für $\sigma > \sigma_0$ ($\sigma_0 < 2$) konvergente, und zwar für $s = 2$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe, die also in ihrem Konvergenzbereich eine reguläre Funktion $F(s)$ definiert, x sei eine reelle Zahl > 1; dann ist das geradlinig erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} F(s)\cdot\frac{x^s}{s^2}\,ds = \sum_{n=1}^{x} a_n . \log\frac{x}{n} + O(1).$$

Denn da für $\sigma = 2$ die Dirichletsche Reihe, mithin auch

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^s}\cdot\frac{x^s}{s^2}\right)$$

1) Von jetzt ab soll die betrachtete Klasse statt mit K_α kurz mit K bezeichnet werden.

2) Siehe „Handbuch“, Bd. I, § 49.

gleichmäßig konvergiert $\left(\text{weil ja } \left|\frac{a_n}{n^{2+ti}}\right| \leqq \frac{|a_n|}{n^2} \text{ ist}\right)$, so darf man gliedweise integrieren und erhält:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{F(s) \, . \, x^s}{s^2} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds,$$

und für diese Summe ergibt sich nach dem eben genannten Hülfssatz der Ausdruck:

$$\sum_{n=1}^{x} a_n \left(\log\frac{x}{n} + \Theta(n, x) \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{x^2}\right) + \sum_{n=x+1}^{\infty} \left(a_n \, \Theta(n, x) \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{x^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} a_n \log\frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Theta(n, x)}{n^2}.$$

Hierin ist $|\Theta(n, x)| < 1$ für $n = 1, 2, \ldots, (x > 1)$; also ist

$$\left|\frac{a_n \Theta(n, x)}{n^2}\right| \leqq \frac{|a_n|}{n^2}.$$

Daher ergibt sich $\left(\text{wegen der Konvergenz von } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2}\right)$ in der Tat die behauptete Gleichung.

Nun sind offenbar für $a_n = b_n$ die Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes erfüllt; daher folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds = \sum_{n=1}^{x} b_n \, . \log\frac{x}{n} + O(1).$$

Wir nehmen jetzt $x > e^2$ an und formen das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds$$

mit Hülfe des Cauchyschen Satzes um, indem wir den geraden Integrationsweg von $\mathfrak{q}_1 = 2 - x^2 i$ nach $\mathfrak{p}_1 = 2 + x^2 i$ durch den Weg $\mathfrak{W}$ ersetzen, der von $\mathfrak{q}_1$ geradlinig nach

$$\mathfrak{q}_2 = 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}(x^2)} - x^2 i,$$

von $\mathfrak{q}_2$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ nach

$$\mathfrak{p}_2 = 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}(x^2)} + x^2 i$$

und von $\mathfrak{p}_2$ wieder geradlinig nach $\mathfrak{p}_1$ führt.

Da die Funktion $\frac{x^s}{s^2}\cdot f(s)$ im Innern und auf dem Rande des von $\mathfrak{W}$ und der geradlinigen Verbindung der Punkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}_1$ eingeschlossenen Gebietes regulär ist bis auf den Punkt $s = 1$, in welchem sie einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{x}{h_0}$ besitzt, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds = \frac{x}{h_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds,$$

und nach der vorhin gefundenen Formel folgt hieraus:

$$\sum_{n=1}^{x} b_n \log\frac{x}{n} = \frac{x}{h_0} + O(1) + \int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds.$$

Um nun für $\int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds$ eine Abschätzung zu gewinnen, führen wir noch die Punkte $\mathfrak{q}_3 = \vartheta - e^4 i$, $\mathfrak{p}_3 = \vartheta + e^4 i$ ein, zwischen denen die Kurve $\mathfrak{C}$ (also auch der Weg $\mathfrak{W}$) geradlinig verläuft.

Nach der Definition von $\mathfrak{W}$ ist

$$\int_{(\mathfrak{W})} = \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} + \int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{q}_3} + \int_{\mathfrak{q}_3}^{\mathfrak{p}_3} + \int_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_2} + \int_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_1}.$$

Auf dem geradlinigen Wege von $\mathfrak{q}_3$ nach $\mathfrak{p}_3$ liegt $|f(s)|$ unterhalb einer von x unabhängigen Grenze G, σ hat dort den konstanten Wert ϑ, und die Länge des Weges ist $2 . e^4$; also ist

$$\left|\int_{\mathfrak{q}_3}^{\mathfrak{p}_3} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds\right| < \frac{2e^4 G . x^{\vartheta}}{\vartheta^2} = O(x^{\vartheta}).$$

Auf dem geraden Wege von $\mathfrak{p}_2$ nach $\mathfrak{p}_1$ hat t den konstanten Wert x^2, $x^2 > e^4$, ferner ist

$$1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}(x^2)} = 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}|t|} \leqq \sigma \leqq 2;$$

also ist dort

$$|f(s)| < c_9 \log^{\varrho}|t| = d_2 . \log^{\varrho} x.$$
$$(d_2 = 2^{\varrho} c_9)$$

Außerdem ist

$$\left|\frac{x^s}{s^2}\right| \leqq \frac{x^{\sigma}}{t^2} \leqq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2};$$

und die Länge des Weges ist <2; also folgt

$$\left|\int_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_1} \frac{x^s}{s^2} f(s)\,ds\right| < \frac{2d_2 \log^{\varrho} x}{x^2} = O(1).$$

Dieselbe Abschätzung gilt offenbar für $\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \frac{x^s}{s^2} f(s)ds$.

Auf dem Wege von $\mathfrak{p}_3$ nach $\mathfrak{p}_2$ ist

$$\sigma = 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} t}, \quad t \geqq e^4, \quad s = \sigma + ti = s(t),$$

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{\varkappa'}{d_1 \log^{\varkappa'+1} t \,.\, t} + i\right| < d_3.$$

Daraus folgt:

$$\left|\int_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_2} \frac{x^s}{s^2} f(s)\,ds\right| = \left|\int_{e^4}^{x^2} \frac{x^s}{s^2} f(s) \frac{ds}{dt}\,dt\right|$$

$$< d_3 c_9 \int_{e^4}^{x^2} \frac{x^\sigma}{t^2} \log^{\varrho} t\,dt < d_3 c_9 \,.\, x \log^{\varrho}(x^2) \cdot \int_{e^4}^{x^2} \frac{x^{-\frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} t}}}{t^2}\,dt.$$

Für hinreichend großes x ist

$$e^4 < e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}} < x^2.$$

Wählen wir also x genügend groß, so können wir das Intervall von e^4 bis x^2 zerlegen in die beiden Teil-Intervalle von e^4 bis $e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}$ und von $e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}$ bis x^2.

Nun ist

$$\int_{e^4}^{e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}} \frac{x^{-\frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} t}}}{t^2}\,dt < x^{-\frac{1}{d_1 (\log x)^{\frac{\varkappa'}{\varkappa'+1}}}} \cdot \int_{e^4}^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$= O\left(e^{-\frac{1}{d_1}(\log x)^{\frac{1}{\varkappa'+1}}}\right),$$

$$\int_{e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}}^{x^2} \frac{x^{-\frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} t}}}{t^2}\, dt < \int_{e^{\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = e^{-\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}$$

$$= O\left(e^{-\frac{1}{d_1}\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}\right).$$

(Denn $d_1 \geqq c_6 > 1$.)

Demnach ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_2} = O\left(x \,.\, \log^{\varrho} x \,.\, e^{-\frac{1}{d_1}\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}}\right),$$

und dieselbe Abschätzung gilt natürlich auch für $\int_{\mathfrak{q}_2}^{\mathfrak{q}_3}$.

Wir benutzen jetzt die Tatsache, daß $\varkappa' < 7$ ist, und schalten zwischen $\varkappa' + 1$ und 8 die Zahlen v_1, v_2, w ein, sodaß

$$\varkappa' + 1 < v_1 < v_2 < w < 8$$

ist.

Dann ist zunächst

$$\log^{\varrho} x \,.\, e^{-\frac{1}{d_1}\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}} = e^{-\left(\frac{1}{d_1}\sqrt[\varkappa'+1]{\log x} - \varrho \log\log x\right)} = O\left(e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right),$$

$$x \,.\, \log^{\varrho} x \,.\, e^{-\frac{1}{d_1}\sqrt[\varkappa'+1]{\log x}} = O\left(x \,.\, e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right),$$

$$x^{\vartheta} = x \,.\, e^{-(1-\vartheta)\log x} = O\left(x \,.\, e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right),$$

$$1 = x \,.\, e^{-\log x} = O\left(x \,.\, e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right).$$

Hiernach ist ersichtlich, daß für jedes der fünf Integrale, aus denen $\int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} f(s)\, ds$ sich additiv zusammensetzt, die Abschätzung

$$O\left(x \,.\, e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right)$$

gültig ist. Somit erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{x} b_n \log \frac{x}{n} = \frac{x}{h_0} + O\left(x \,.\, e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right).$$

Wird für $x > 1$

$$\delta(x) = e^{-\sqrt[v_2]{\log x}}$$

definiert, sodaß $0 < \delta(x) < 1$ ist, und wird in der gefundenen Gleichung x durch $x + \delta(x) . x$ ersetzt, so ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{x+\delta . x} b_n \log\left(\frac{x+\delta . x}{n}\right) = \frac{x+\delta . x}{h_0} + O\left(x . e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right).$$

(Man beachte, daß $x < x + \delta . x < 2x$ ist.)

Wird ferner von dieser Gleichung die vorige subtrahiert, so folgt:

$$\log(1+\delta(x)) . \sum_{n=1}^{x} b_n + \sum_{n=x+1}^{x+\delta . x} b_n \log\left(\frac{x+\delta . x}{n}\right)$$
$$= \frac{\delta . x}{h_0} + O\left(x . e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right).$$

Nun ist

$$\sum_{n=x+1}^{x+\delta . x} b_n \log\left(\frac{x+\delta . x}{n}\right) \leqq \log 2x . \log(1+\delta(x)) . \sum_{n=x+1}^{x+\delta . x} 1$$
$$= O(\delta . x . \log x . \log(1+\delta)) = O(\delta^2 . x . \log x)$$
$$= O\left(x . \log x . e^{-2\sqrt[v_2]{\log x}}\right).$$

(Denn für $[x] + 1 \leqq n \leqq x + \delta x$ ist

$$b_n \leqq \log n < \log 2x \text{ und } \frac{x+\delta . x}{n} < 1 + \delta;$$

ferner ist $\log(1+\delta(x)) = O(\delta(x))$, weil $\lim\limits_{x=\infty} \delta(x) = 0$ ist.)

Demnach folgt

$$\log(1+\delta) . \sum_{n=1}^{x} b_n = \frac{\delta . x}{h_0} + O\left(x . e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right) + O\left(x . \log x . e^{-2\sqrt[v_2]{\log x}}\right)$$
$$= \frac{\delta . x}{h_0} + O\left(x . \log x . e^{-2\sqrt[v_2]{\log x}}\right),$$

und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$$\frac{\delta(x)}{\log(1+\delta(x))} = 1 + O(\delta(x))$$

ist, ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{x} b_n = \frac{x}{h_0} + O(\delta . x) + O\left(\frac{1}{\delta} \cdot x \log x . e^{-2\sqrt[v_2]{\log x}}\right)$$

$$= \frac{x}{h_0} + O\left(x . \log x\, e^{-\sqrt[v_2]{\log x}}\right) = \frac{x}{h_0} + O\left(x e^{-\sqrt[w]{\log x}}\right).$$

Nun werde mit $\pi_K(x)$ die Anzahl der in K darstellbaren[1]) Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet. Dann ergibt sich aus der Definition von b_n

$$\pi_K(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{b_n}{\log n}.$$

Setzen wir

$$\sum_{n=1}^{x} b_n = s(x),$$

so ist, wie eben bewiesen:

$$s(x) = \frac{x}{h_0} + O\left(x . e^{-\sqrt[w]{\log x}}\right).$$

Andrerseits ist

$$\pi_K(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{s(n) - s(n-1)}{\log n} = \frac{1}{h_0} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + \sum_{n=2}^{x} \frac{\left(s(n) - \frac{n}{h_0}\right) - \left(s(n-1) - \frac{n-1}{h_0}\right)}{\log n}$$

$$= \frac{1}{h_0} \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + \sum_{n=2}^{x} \left(s(n) - \frac{n}{h_0}\right)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{1}{h_0 \log 2} + \frac{s(x) - \frac{[x]}{h_0}}{\log([x]+1)}$$

$$= \frac{1}{h_0} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(1) + O\left(\frac{x}{\log x} \cdot e^{-\sqrt[w]{\log x}}\right) + \sum_{n=2}^{x} \left(s(n) - \frac{n}{h_0}\right)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right).$$

Da für $x \geqq 2$ und eine geeignet gewählte Konstante C

$$\left| s(x) - \frac{x}{h_0} \right| < C . x e^{-\sqrt[w]{\log x}}$$

ist, so ist (für $x \geqq 2$)

1) scilicet: zu D teilerfremden.

$$\left|\sum_{n=2}^{x}\left(s(n)-\frac{n}{h_0}\right)\cdot\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)\right| < \sum_{n=2}^{x}\frac{C\,.\,n\,.\,e^{-\sqrt[w]{\log n}}\,.\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n\,.\log(n+1)}$$

$$< \frac{C}{\log 2\,.\log 3}\sum_{n=2}^{x} e^{-\sqrt[w]{\log n}} < C_1\int_1^x e^{-\sqrt[w]{\log u}}\,du$$

$$< C_1\int_1^{\sqrt{x}} e^{-\sqrt[w]{\log u}}\,du + C_1\int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[w]{\log u}}\,du < C_1\left(\sqrt{x}+x\,.\,e^{-\sqrt[w]{\frac{1}{2}\log x}}\right)$$

$$= O\left(x\,.\,e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right)$$

(denn $w < 8$);

und da auch

$$\frac{x}{\log x}\cdot e^{-\sqrt[w]{\log x}} = O\left(x\,.\,e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right)$$

ist, so ergibt sich im ganzen

$$\pi_K(x) = \frac{1}{h_0}\int_2^x\frac{du}{\log u} + O\left(x\,.\,e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right),$$

wobei h_0 gleich $2h$ oder h ist, je nachdem die Klasse K zweiseitig ist oder nicht.

Und dies ist der zu Anfang aufgestellte Satz.

II. Teil.

Von den durch eine quadratische Form darstellbaren positiven, ganzen Zahlen.

Einleitung.

Durch Anwendung der bisher entwickelten analytischen Hülfsmittel läßt sich auch für die Anzahl aller durch eine bestimmte Form[1]) der Diskriminante D darstellbaren Zahlen unterhalb einer Grenze x eine Abschätzung beweisen.

Es bezeichne $A_K(x)$ die Anzahl aller durch die Klasse K eigentlich darstellbaren (positiven) Zahlen $\leqq x$, $B_K(x)$ die Anzahl aller durch K schlechthin darstellbaren Zahlen $\leqq x$ (wobei unter einer „schlechthin" darstellbaren Zahl eine solche zu verstehen ist, die eigentlich oder uneigentlich darstellbar ist), dann ist:

$$A_K(x) = \frac{C.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right)$$

$$B_K(x) = \frac{C'.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right),$$

falls alle Klassen der Diskriminante D zweiseitig sind; andernfalls ist

$$A_K(x) = \frac{Cx}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}\,.\,(\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right),$$

$$B_K(x) = \frac{C'.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}\,.\,(\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right),$$

1) Unter „Formen" sollen weiter wie bisher nur primitive (und für $D < 0$ auch nur positive) Formen verstanden werden.

wobei h wie bisher die Klassenzahl bedeutet und für ϑ' jede positive Größe gesetzt werden kann, welche < 1 und $\leqq \frac{h}{4}$ ist.

(Die Bedingung $\vartheta' \leqq \frac{h}{4}$, welche zur Folge hat, daß

$$\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x} = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}\,.\,(\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right)$$

ist, kann nur für $h = 3$ zur Geltung kommen, weil für $h < 3$ alle Klassen zweiseitig sind und für $h \geqq 4$ die Forderung $\vartheta' \leqq \frac{h}{4}$ für $\vartheta' < 1$ von selbst erfüllt ist.)

Dabei bedeuten C und C' zwei von 0 verschiedene, nur von D abhängige Konstanten.

Der wesentliche Inhalt der aufgestellten Behauptung liegt in folgenden zwei Sätzen:

1) Bei jeder Klasse K hat $\frac{A_K(x)\,.\,\sqrt{\log x}}{x}$ und $\frac{B_K(x)\,.\,\sqrt{\log x}}{x}$ für $x = \infty$ einen von 0 verschiedenen Grenzwert.

2) Sind K und K' zwei verschiedene Formen-Klassen, die zu derselben Diskriminante D gehören, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{A_K(x)}{A_{K'}(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{B_K(x)}{B_{K'}(x)} = 1;$$

es werden also in jeder Formen-Klasse der Diskriminante D asymptotisch gleich viele Zahlen (sowohl eigentlich wie schlechthin) dargestellt.

(Man beachte, daß der entsprechende Satz für arithmetische Reihen trivial ist.)

§ 1. Über die Darstellung von Zahlen durch Klassen eines Geschlechts.

Wir haben im ersten Teil nur die Darstellung von solchen Zahlen betrachtet, die zu D teilerfremd sind. Jetzt müssen zur Ergänzung einige elementare Sätze über die Darstellung beliebiger Zahlen zusammengestellt werden, wobei zunächst nur *eigentliche* Darstellungen in Betracht gezogen werden sollen.

1) Sind m_1 und m_2 teilerfremd, so ist $m_1 . m_2$ dann und nur dann durch irgend eine Form der Diskriminante D darstellbar, wenn m_1 und m_2 darstellbar sind.

Denn was die Bedingungs-Kongruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{4m_1 m_2}$$

betrifft, so ist sie hinsichtlich ihrer Lösbarkeit gleichwertig mit dem System der beiden Kongruenzen

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv D \pmod{4m_1} \\ x^2 &\equiv D \pmod{4m_2}, \end{aligned}$$

welche, falls sie einzeln lösbar sind, auch eine gemeinsame Lösung besitzen.

Lassen sich ferner in den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4m_1 n_1 &= D \\ x_2^2 - 4m_2 n_2 &= D \end{aligned}$$

die Zahlen x_1, x_2 so wählen, daß m_1, x_1, n_1 keinen gemeinsamen Teiler haben und ebensowenig m_2, x_2, n_2, dann läßt sich auch die Kongruenzwurzel x so wählen, daß in der Gleichung

$$x^2 - 4m_1 m_2 n = D$$

die Zahlen $m_1 m_2, x, n$ teilerfremd sind. Denn wir erhalten eine Lösung x aus den Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{2m_1} \\ x &\equiv x_2 \pmod{2m_2} \end{aligned}$$

(welche jedenfalls eine gemeinsame Lösung besitzen, weil

$$(m_1, m_2) = 1 \text{ und } x_1 \equiv x_2 \pmod 2$$

ist). Hätten nun für ein solches x die Zahlen $m_1 . m_2, x, n$ einen gemeinsamen Primteiler p, so müßte dieser entweder in m_1, x, n oder in m_2, x, n aufgehen. Nehmen wir etwa das erste an, so ergäbe sich, da

$$x = x_1 + 2\lambda m_1$$

ist, daß p auch in x_1 aufginge, und aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - 4m_1 m_2 n = x_1^2 + 4\lambda x_1 m_1 + 4\lambda^2 m_1^2 - 4m_1 m_2 n &= x_1^2 - 4m_1 n_1 \\ n_1 &= m_2 n - \lambda x_1 - \lambda^2 m_1 \end{aligned}$$

würde folgen, daß p in n_1, also gemeinsam in m_1, x_1, n_1 aufginge, was der Voraussetzung widerspricht.

Umgekehrt erhält man aus einer Gleichung

$$x^2 - 4m_1 m_2 n = D,$$

in der $m_1 m_2, x, n$ teilerfremd sind, sofort zwei Gleichungen

$$x^2 - 4m_1 n_1 = D$$
$$x^2 - 4m_2 n_2 = D,$$

bei denen bezüglich m_1, x, n_1 und m_2, x, n_2 teilerfremd sind. Man braucht dazu nur

$$m_2 n = n_1, \quad m_1 n = n_2$$

zu setzen. Denn hätten etwa $m_1, x, m_2 n$ einen gemeinsamen Teiler, so müßte dieser, da $(m_1, m_2) = 1$ ist, in n, also gemeinsam in $m_1 m_2, x, n$ aufgehen, entgegen der Annahme.

Gibt es also zwei primitive Formen (der Diskriminante D)

$$(m_1, x_1, n_1), \quad (m_2, x_2, n_2),$$

so gibt es auch eine primitive Form $(m_1 m_2, x, n)$ und umgekehrt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der aufgestellten Behauptung.

2) Sind m_1 und m_2 zwei zueinander teilerfremde, darstellbare Zahlen, so ist jede Klasse, durch die $m_1 m_2$ darstellbar ist, gleich dem Produkt zweier Klassen, von denen die eine m_1, die andre m_2 darstellt, und umgekehrt läßt sich durch jede Klasse, die gleich einem solchen Produkt ist, die Zahl $m_1 m_2$ darstellen.

Dies ergibt sich daraus, daß einerseits jede Form $(m_1 m_2, x, n)$ sich zusammensetzen läßt aus den Formen

$$(m_1, x, m_2 n), \quad (m_2, x, m_1 n)$$

und daß man aus zwei Formen

$$(m_1, x_1, n_1), \quad (m_2, x_2, n_2),$$

die ja (zufolge der Bedingung $(m_1, m_2) = 1$) sicher einhellig sind, durch Komposition eine Form $(m_1 m_2, x, n)$ gewinnt.

Für die Zulassung der uneigentlichen Darstellungen ist folgendes zu bemerken:

Eine Zahl

$$m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

ist dann und nur dann schlechthin darstellbar, wenn jeder zu D teilerfremde Primfaktor p_ν, zu dem ein ungerader Exponent α_ν gehört, darstellbar ist und wenn für die in D aufgehenden Primteiler p_ν mit ungeradem Exponenten α_ν eine eigentlich darstellbare ungerade Potenz von p_ν in $p_\nu^{\alpha_\nu}$ aufgeht.

Denn m ist dann und nur dann schlechthin darstellbar, wenn es zwei Zahlen m', m'' von der Art gibt, daß m' eigentlich darstellbar und

$$m = m' m''^2$$

ist. Bei dieser Zerlegung von m muß offenbar von jedem Primfaktor p_ν, für den α_ν ungerade ist, die höchste in m' aufgehende Potenz ungerade (und daher gewiß $\geqq p_\nu$) sein, und nach Satz 1) folgt, daß diese in $p_\nu^{\alpha_\nu}$ aufgehende Primzahlpotenz eigentlich darstellbar ist; im Falle $(p_\nu, D) = 1$ können wir weiter schließen, daß p_ν selbst darstellbar sein muß. Gibt es umgekehrt zu jedem ungeraden α_ν ein ungerades $\beta_\nu \leqq \alpha_\nu$ derart, daß $p_\nu^{\beta_\nu}$ eigentlich darstellbar ist, dann braucht man nur

$$\prod_{\substack{\nu \\ (\alpha_\nu \text{ ungerade})}}' p_\nu^{\beta_\nu} = m'$$

zu setzen, um eine Zerlegung

$$m = m' m''^2$$

zu erhalten, bei der m' eigentlich darstellbar ist.

Für die Darstellung schlechthin von Zahlen, die zu D teilerfremd sind, gilt ebenso wie für die eigentliche Darstellung der Satz, daß zwei Darstellungen derselben Zahl stets in demselben Geschlecht stattfinden. Denn ist $(m, D) = 1$ und ist m in K und in K' darstellbar, so gibt es für m zwei Zerlegungen

$$m = m_1 . m_2^2, \quad m = m_1' m_2'^2$$

derart, daß m_1 in K, m_1' in K' eigentlich darstellbar ist. Setzen wir

$$(m_1, m_1') = d, \quad m_1 = dn_1, \quad m_1' = dn_1',$$

so ist

$$n_1 m_2^2 = n_1' m_2'^2$$
$$(n_1, n_1') = 1,$$

und daraus geht hervor, daß n_1 und n_1' Quadratzahlen sind. Da außerdem

$$(n_1, D) = (n_1', D) = 1$$

ist, so können n_1 und n_1' nur durch Klassen des Hauptgeschlechts eigentlich dargestellt werden. Ferner entspricht den beiden Zerlegungen

$$m_1 = dn_1, \quad m_1' = dn_1'$$

(mindestens) ein Paar von Zerlegungen der Klassen K, K'

$$K = \bar{K}\bar{\bar{K}}, \quad K' = \bar{K}' . \bar{\bar{K}}'$$

von der Art, daß d sowohl in $\bar{K}$ wie in $\bar{K}'$, n_1 in $\bar{\bar{K}}$ und n_1' in $\bar{\bar{K}}'$ eigentlich darstellbar ist.

Dem eben gesagten zufolge müssen $\overline{\overline{K}}$ und $\overline{\overline{K'}}$ zum Hauptgeschlecht gehören, $\overline{K}$ gehört demselben Geschlecht an wie $\overline{K'}$, also gehört auch K zu demselben Geschlecht wie K'.

Aus diesem Satz ergibt sich insbesondere: ist $(m, D) = 1$ und $m = q^2 m'$, wo q^2 das größte in m aufgehende Quadrat bedeutet, so ist in einem bestimmten Geschlecht die Zahl m dann und nur dann schlechthin darstellbar, wenn m' darin darstellbar ist.

Sofern nämlich m überhaupt darstellbar ist, muß auch m' darstellbar sein, und in dem Geschlecht, in welchem m' darstellbar ist, gibt es dann jedenfalls eine Darstellung von m; mithin müssen alle Darstellungen von m in diesem Geschlecht stattfinden.

Es läßt sich ferner aus dem Satz 2) über eigentliche Darstellungen folgende Tatsache entnehmen: ist m in der Klasse K schlechthin darstellbar und sind m_1, m_2 zwei teilerfremde Zahlen, deren Produkt m ergibt, so sind m_1 und m_2 (bezüglich) schlechthin darstellbar in zwei Klassen $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, deren Zusammensetzung K ergibt; sind umgekehrt zwei teilerfremde Zahlen m_1 und m_2 bezüglich durch $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ schlechthin darstellbar, so ist $m_1 m_2$ durch $K^{(1)} K^{(2)}$ schlechthin darstellbar. —

Wir brauchen nun für die folgenden Schlüsse einen fundamentalen Satz aus der Gruppentheorie, den wir implicite bereits angewendet haben, da sich auf ihn der Beweis für die Existenz der Charaktere einer Abelschen Gruppe stützt. Dieser Satz lautet: in jeder Abelschen Gruppe gibt es ein System von n verschiedenen Elementen $C_1, \ldots, C_n$ und von zugehörigen (positiven) ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ von der Art, daß sich jedes Element der Gruppe durch ein Potenzprodukt

$$C_1^{\alpha_1} \ldots C_n^{\alpha_n}$$

darstellen läßt, wobei jedes der α_ν bezüglich modulo a_ν eindeutig (durch das Element) bestimmt ist.

(a_ν ist der „Grad" von C_ν, d. h. die kleinste unter denjenigen positiven Zahlen n, für welche C_ν^n gleich dem Einheitselement ist. Das Produkt $a_1, \ldots, a_n$ ist gleich der Ordnung der Abelschen Gruppe.)

Die Anwendung dieses Satzes auf die Abelsche Gruppe der Formen-Klassen lehrt uns, daß man n verschiedene Klassen

$$H_1, \ldots, H_n$$

(ein System von „Fundamentalklassen") auswählen kann, durch die sich alle Klassen als Potenzprodukte auf eindeutige Weise (in dem angegebenen Sinne) darstellen lassen. (Das Produkt $a_1 \ldots a_n$ der

Grade von $H_1, \ldots, H_n$ ist gleich h. — Eine Fundamentalklasse H_ν ist offenbar dann und nur dann zweiseitig, wenn ihr Grad $a_\nu \leqq 2$ ist.)

Aus der Tatsache der Eindeutigkeit der Darstellung einer Klasse K durch $H_1, \ldots, H_n$ ergibt sich insbesondere folgendes: ist a_ν eine gerade Zahl, so muß in der Darstellung einer zum Hauptgeschlecht gehörigen Klasse K durch die Fundamentalklassen der Exponent α_ν gerade sein. Denn K muß sich in der Form $\overline{K}^2$ darstellen lassen, und wenn

$$\overline{K} = H_1^{\overline{\alpha}_1} \ldots H_n^{\overline{\alpha}_n}$$

ist, so ist

$$\overline{K}^2 = H_1^{2\overline{\alpha}_1} \ldots H_n^{2\overline{\alpha}_n},$$

und hierin muß

$$2\overline{\alpha}_\nu \equiv \alpha_\nu \pmod{a_\nu}$$

sein. Da a_ν gerade sein soll, muß also α_ν gerade sein. Ist umgekehrt in der Darstellung

$$K = H_1^{\alpha_1} \ldots H_n^{\alpha_n}$$

für jedes H_ν, zu dem ein gerades a_ν gehört, der Exponent α_ν gerade, so ist K eine Klasse des Hauptgeschlechts. Denn da für ein ungerades a_μ jedenfalls eine zu α_μ modulo a_μ kongruente gerade Zahl existiert, so können in der Darstellung von K durch die Fundamentalklassen alle Exponenten geradzahlig gewählt werden, sodaß in Evidenz tritt, daß K gleich dem Quadrat einer Klasse ist.

Hieraus folgt: zwei Klassen

$$K = H_1^{\alpha_1} \ldots H_n^{\alpha_n} \quad \text{und} \quad K' = H_1^{\alpha_1'} \ldots H_n^{\alpha_n'}$$

gehören dann und nur dann demselben Geschlecht an, wenn für jede Fundamentalklasse H_ν von geradem Grade die Exponenten α_ν, α_ν' modulo 2 kongruent sind.

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir mit dem Beweise folgendes elementaren Satzes:

Es sei a eine ganze Zahl > 2. $n_1, \ldots, n_\mu$ seien gewisse Zahlen, die nicht alle von einander verschieden zu sein brauchen und über die nur vorausgesetzt wird, daß jede von ihnen zu a teilerfremd ist.

Man setze in dem Ausdruck

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\mu n_\mu$$

für $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\mu$ nacheinander alle 2^μ Kombinationen von reellen Einheiten. Dann kommt unter den 2^μ so entstehenden Zahlen

bei ungeradem a für $\mu \geqq a-1$ aus jeder Restklasse modulo a mindestens eine Zahl vor, und bei geradem a kommt für $\mu \geqq \frac{a}{2} - 1$ aus jeder Restklasse modulo a, deren Zahlen $\equiv \mu \pmod 2$ sind, mindestens eine Zahl vor, während aus den übrigen Restklassen keine Zahl vorkommt. (Diese letzte Bemerkung ist trivial; denn da für gerades a die Zahlen $n_1, \ldots, n_\mu$ sämtlich ungerade sind, so ist

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\mu n_\mu \equiv \mu \pmod 2.$$

Im folgenden möge für einen geraden Modul eine Restklasse als gerade oder ungerade bezeichnet werden, je nachdem die in ihr enthaltenen Zahlen gerade oder ungerade sind.)

Zum Beweise nehmen wir zunächst eine unbegrenzte Folge von positiven (nicht notwendig verschiedenen) Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ an, deren jede zu a teilerfremd ist, und eine positive Zahl $\varkappa$ von der Beschaffenheit, daß unter den $2^\varkappa$ Zahlen

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\varkappa n_\varkappa$$

bei geradem a höchstens von $\left(\frac{a}{2} - 1\right)$ Restklassen, bei ungeradem a höchstens von $(a-1)$ Restklassen (modulo a) Repräsentanten auftreten, und wollen zeigen, daß durch die $2^{\varkappa+1}$ Zahlen

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_{\varkappa+1} n_{\varkappa+1}$$

mehr Restklassen repräsentiert werden als durch die Zahlen $\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\varkappa n_\varkappa$.

Es seien $r_1, \ldots, r_k$ die verschiedenen kleinsten positiven Reste modulo a der in der Form

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\varkappa n_\varkappa$$

auftretenden Zahlen. Dann werden durch die Zahlen

$$\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_{\varkappa+1} n_{\varkappa+1}$$

gerade so viele Restklassen repräsentiert wie durch die $2k$ Zahlen

$$r_1 + n_{\varkappa+1}, \ldots, r_k + n_{\varkappa+1}, \; r_1 - n_{\varkappa+1}, \ldots, r_k - n_{\varkappa+1}.$$

Dabei kann offenbar für $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta = 1, \ldots, k)$ weder

$$r_\alpha + n_{\varkappa+1} \equiv r_\beta + n_{\varkappa+1} \pmod a$$

noch

$$r_\alpha - n_{\varkappa+1} \equiv r_\beta - n_{\varkappa+1} \pmod a$$

sein. Wären daher unter den $2k$ Zahlen $(r_\alpha \pm n_{\varkappa+1})$ nicht mehr als k zu einander inkongruent modulo a, so müßten die Zahlen $r_\alpha + n_{\varkappa+1}$, abgesehen von der Reihenfolge, denselben Restklassen angehören wie die Zahlen $r_\alpha - n_{\varkappa+1}$. Daraus würde aber folgen, daß

$$\sum_{\alpha=1}^{k} (r_\alpha + n_{\varkappa+1}) \equiv \sum_{\alpha=1}^{k} (r_\alpha - n_{\varkappa+1}) \pmod{a},$$

also

$$2kn_{\varkappa+1} \equiv 0 \pmod{a}$$

wäre, und da $(n_{\varkappa+1}, a) = 1$ ist, so müßte
für ungerades a

$$k \equiv 0 \pmod{a}, \quad k \geqq a,$$

für gerades a

$$k \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{a}{2}\right), \quad k \geqq \frac{a}{2}$$

sein, während nach unserer Annahme
für ungerades a

$$k \leqq a - 1,$$

für gerades a

$$k \leqq \frac{a}{2} - 1$$

ist. Es folgt also, daß durch die Zahlen $(r_\alpha \pm n_{\varkappa+1})$, mithin auch durch die Zahlen $\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_{\varkappa+1} n_{\varkappa+1}$ mehr als k Restklassen repräsentiert werden.

Solange also durch die Zahlen $\varepsilon_1 n_1 + \cdots + \varepsilon_\varkappa n_\varkappa$ noch nicht die verlangte Anzahl $\left(a \text{ oder } \frac{a}{2}\right)$ von Restklassen repräsentiert wird, tritt durch Hinzufügung eines Gliedes $\varepsilon_{\varkappa+1} n_{\varkappa+1}$ eine Vermehrung der Anzahl der auftretenden Restklassen ein. Andrerseits ist ersichtlich, daß durch Hinzufügung eines solchen Gliedes (bei beliebigem $\varkappa$) in keinem Falle eine Verminderung der Anzahl der vorkommenden Restklassen bewirkt werden kann. Beachtet man noch, daß durch $\varepsilon_1 n_1$ stets zwei Restklassen repräsentiert werden (weil $a > 2$ ist), so ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung.

Von dem bewiesenen Satze machen wir nun Gebrauch, um daraus für den Fall, daß nicht alle Formen-Klassen der Diskriminante D zweiseitig sind (daß also die Anzahl der Klassen in einem Geschlecht > 1 ist)[1]), folgende Konsequenz abzuleiten: es werde die Zahl m durch eine Klasse K dargestellt; ferner sei m so beschaffen, daß zu jeder nicht ambigen Fundamentalklasse H_ν (für

1) In dem Falle, wo alle Formen-Klassen zweiseitig sind, ist die folgende Behauptung nichtssagend.

die also $a_\nu \geqq 3$ ist) mindestens k_ν verschiedene zu D teilerfremde und in H_ν darstellbare Primzahlen existieren, für welche der Exponent ihrer höchsten in m aufgehenden Potenz zu a_ν teilerfremd ist (wobei k_ν gleich $(a_\nu - 1)$ oder gleich $\left(\frac{a_\nu}{2} - 1\right)$ zu setzen ist, je nachdem a_ν ungerade oder gerade ist); dann ist m durch jede Klasse desjenigen Geschlechts darstellbar, dem K angehört.

(Der Satz gilt sowohl, wenn man unter Darstellbarkeit jedesmal eigentliche Darstellbarkeit, wie auch, wenn man darunter Darstellbarkeit schlechthin versteht. Der folgende Beweis ist für beide Bedeutungen von „Darstellung" gültig.)

Nach Voraussetzung können wir zu jeder Fundamentalklasse H_ν, welche nicht zweiseitig ist, k_ν verschiedene[1]) Primzahlen $p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu k_\nu}$ wählen, die nicht in D aufgehen und in H_ν darstellbar sind, wobei noch die Bedingung erfüllt ist, daß der Exponent $\alpha_{\nu\varrho}$ der höchsten in m aufgehenden Potenz von $p_{\nu\varrho}$ zu a_ν teilerfremd ist (für $\varrho = 1, \ldots, k_\nu$).

Setzen wir

$$m_1 = \prod_\nu{}' \left\{ p_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} \cdots p_{\nu k_\nu}^{\alpha_{\nu k_\nu}} \right\},$$

wo das Produkt über alle diejenigen ν zu erstrecken ist, zu denen ein nicht ambiges H_ν gehört; dann ist

$$m = m_1 m_2 \quad \text{und} \quad (m_1, m_2) = 1, \quad (m_1, D) = 1.$$

Da $p_{\nu\varrho}$ durch H_ν darstellbar und zu D teilerfremd ist, so ist $p_{\nu\varrho}^{\alpha_{\nu\varrho}}$ durch $H_\nu^{\varepsilon_\varrho \alpha_{\nu\varrho}}$ darstellbar, wobei für ε_ϱ sowohl $(+1)$ wie (-1) gesetzt werden kann. Folglich ist

$$p_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} \cdots p_{\nu k_\nu}^{\alpha_{\nu k_\nu}}$$

darstellbar durch die Klassen

$$H_\nu^{\varepsilon_1 \alpha_{\nu 1} + \cdots + \varepsilon_{k_\nu} \alpha_{\nu k_\nu}}.$$

Nach dem vorigen Satz treten unter den Zahlen

$$\varepsilon_1 \alpha_{\nu 1} + \cdots + \varepsilon_{k_\nu} \alpha_{\nu k_\nu}, \quad (\varepsilon_\varrho = \pm 1 \text{ für } \varrho = 1, \ldots, k_\nu)$$

für ungerades a_ν Repräsentanten von allen Restklassen, für gerades a_ν Repräsentanten entweder aller geraden oder aller ungeraden Restklassen modulo a_ν auf (wie aus der Bestimmung von k_ν folgt).

1) Für ein nicht zweiseitiges H_ν ist $k_\nu \geqq \frac{a_\nu}{2} - 1 > 0$.

Ferner sind je zwei Zahlen $p_{\nu 1}^{\alpha_{\nu 1}} \ldots p_{\nu k_\nu}^{\alpha_{\nu k_\nu}}$, welche zu verschiedenen Werten von ν gehören, zu einander teilerfremd, weil zwei verschiedene Fundamentalklassen nicht zu einander entgegengesetzt sein und daher auch nicht gemeinsam eine zu D teilerfremde Primzahl darstellen können.

Hieraus folgt, daß m_1 durch jede der Klassen

$$\prod_{\nu}' H_\nu^{\varepsilon_1 \alpha_{\nu 1} + \cdots + \varepsilon_{k_\nu} \alpha_{\nu k_\nu}}$$

darstellbar ist.

Berücksichtigt man noch, daß bei der Darstellung der Klassen durch die Fundamentalklassen, der Exponent von H_ν nur modulo a_ν bestimmt ist, so gelangt man auf Grund der genannten Tatsachen zu folgendem Ergebnis: es gibt eine Gesamtheit von Klassen, deren jede die Zahl m_1 darstellt, und die man aus einer gewissen Klasse

$$H_1^{\alpha_1} \ldots H_n^{\alpha_n}$$

(in welcher für jede ambige Fundamentalklasse H_λ der Exponent α_λ gleich 0 ist) dadurch erhält, daß man für jedes ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ der Reihe nach entweder alle Zahlen oder alle zu α_ν modulo 2 kongruenten Zahlen eines vollständigen Restsystems von a_ν setzt, je nachdem a_ν ungerade oder gerade ist. Dies besagt aber, wie vorhin bewiesen, daß m_1 durch sämtliche Klassen eines gewissen Geschlechts darstellbar ist. Da andrerseits m_1 zu D teilerfremd ist, so ist m_1 nur in e i n e m Geschlecht darstellbar.

Ist also $K^{(1)}$ irgend eine Klasse, durch die m_1 dargestellt wird, so wird m_1 durch jede Klasse desjenigen Geschlechts dargestellt, dem $K^{(1)}$ angehört. Da ferner m durch die Klasse K dargestellt wird und $(m_1, m_2) = 1$ ist, so gibt es zwei Klassen $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, durch die bezüglich m_1, m_2 dargestellt werden und die der Bedingung

$$K^{(1)} K^{(2)} = K$$

genügen. Stellt andrerseits $\overline{K}^{(1)}$ die Zahl m_1 dar und ist

$$\overline{K}^{(1)} K^{(2)} = \overline{K},$$

so stellt $\overline{K}$ die Zahl m dar. Nun wird m_1 durch alle Klassen $\overline{K}^{(1)}$ dargestellt, die zu demselben Geschlecht gehören wie $K^{(1)}$, und wenn $\overline{K}^{(1)}$ die Klassen dieses Geschlechts durchläuft, so durchläuft $\overline{K}$ $(= \overline{K}^{(1)} K^{(2)})$ alle Klassen des Geschlechts, zu welchem K gehört. Durch alle diese Klassen ist also m darstellbar, wie behauptet wurde.

Wir wollen eine (durch Formen der Diskriminante D) schlechthin darstellbare positive Zahl m, die für ein bestimmtes ν ($\nu = 1, \ldots, n$) weniger als k_ν zu D teilerfremde, in H_ν darstellbare Primzahlen (genau) in einer zu a_ν teilerfremden Potenz enthält, eine „Ausnahmezahl" für die Klasse H_ν nennen.

(Danach ist eine Zahl als Ausnahmezahl nur in Bezug auf eine bestimmte Wahl der Fundamentalklassen erklärt. Ferner ist klar, daß für eine zweiseitige Fundamentalklasse keine Ausnahmezahlen existieren können, weil k_ν sowohl für $a_\nu = 2$ wie für $a_\nu = 1$ den Wert 0 hat. Hieraus folgt, daß es bei einer Diskriminante D, deren sämtliche Klassen zweiseitig sind, überhaupt keine Ausnahmezahlen gibt.)

Mit Hülfe der eingeführten Definition läßt sich das gefundene Ergebnis folgendermaßen aussprechen: ist eine positive Zahl m in einem Geschlecht G_α darstellbar, dagegen nicht durch alle Klassen von G_α, so ist m für mindestens eine der Fundamentalklassen H_ν eine Ausnahmezahl. (In dieser Formulierung sind zwei Sätze zusammengefaßt, die man erhält, indem man einmal „darstellbar" im Sinne von „eigentlich darstellbar", das andre Mal im Sinne von „schlechthin darstellbar" versteht.)

Nehmen wir die letzten Resultate zusammen, so finden wir: um die als gültig behaupteten Abschätzungen für die Anzahl der in K eigentlich darstellbaren und für die der in K schlechthin darstellbaren positiven Zahlen[1] $\leqq x$ zu beweisen, genügt es, für folgende Sätze den Beweis zu führen:

Die Anzahl ($A_\nu(x)$) der in einem Geschlecht G_ν eigentlich darstellbaren Zahlen $\leqq x$ ist gleich

$$\frac{C \cdot x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right);$$

die Anzahl ($B_\nu(x)$) der in G_ν schlechthin darstellbaren Zahlen $\leqq x$ ist gleich

$$\frac{C' \cdot x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right);$$

die Anzahl der Ausnahmezahlen $\leqq x$ für eine (nicht ambige) Fundamentalklasse H_ν ist gleich

$$O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x} \cdot (\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right),$$

1) Von jetzt ab sind stets, wenn von darstellbaren Zahlen die Rede ist, **positive** darstellbare Zahlen gemeint.

worin man für ϑ' jede positive Größe setzen kann, die nur der Bedingung

$$\vartheta' < 1$$

genügt. $\left(\text{Die Bedingung } \vartheta' \leqq \frac{h}{4} \text{ ist jetzt ausgeschaltet.}\right)$

§ 2. Über die Anzahl der in einem bestimmten Geschlecht darstellbaren Zahlen unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze.

Wir wenden uns zunächst der Aufgabe zu, die Anzahl der in einem Geschlecht eigentlich darstellbaren Zahlen $\leqq x$ abzuschätzen.

Es seien $G_1, \ldots, G_a$ die verschiedenen Geschlechter für die Diskriminante D.

Man sieht leicht, daß sich eine Komposition der Geschlechter von der Art einführen läßt, daß das Produkt KK' zweier Klassen K, K', von denen K dem Geschlecht G_α, K' dem Geschlecht G_β angehört, eine Klasse des Geschlechts $G_\alpha G_\beta$ ist.

Bei dieser Komposition bilden die Geschlechter eine Abelsche Gruppe (die sogenannte „Faktorgruppe" der Gruppe G der Klassen im Hauptgeschlecht (G_1) in Bezug auf die Abelsche Gruppe aller Klassen, oder die zu G „komplementäre" Gruppe). Es ist auch leicht zu zeigen, daß die reellen Klassen-Charaktere unmittelbar die Charaktere für die Gruppe der Geschlechter liefern. Denn ein reeller Charakter χ hat für jede Klasse des Geschlechtes G_α denselben Wert. Bezeichnet man diesen Wert mit $\chi(G_\alpha)$, so ist

$$\chi(G_1) = 1$$

und

$$\chi(G_\alpha)\,\chi(G_\beta) = \chi(G_\alpha G_\beta).$$

Ferner stimmt die Anzahl a der reellen Charaktere mit der Anzahl der Geschlechter überein, sodaß jedem reellen Klassen-Charakter umkehrbar eindeutig ein „Geschlechts-Charakter" entspricht[1]). Da das Quadrat jeder Klasse zum Hauptgeschlecht gehört, so ist in der Gruppe der Geschlechter das Quadrat jedes Elementes gleich dem Einheitselement. Somit ist ein Produkt $G_\alpha G_\beta$ dann und nur dann gleich G_1, wenn

$$G_\alpha = G_\beta$$

ist. —

1) Wie aus den Ergebnissen des § 2 im ersten Teil hervorgeht, stimmen die so eingeführten Geschlechts-Charaktere mit den Gaußischen Geschlechts-Charakteren überein.

Wie früher soll $\chi(n)$ für jedes zu D teilerfremde, eigentlich darstellbare n den Wert des reellen[1]) Charakters χ für das Geschlecht bezeichnen, in welchem n darstellbar ist. Hierbei ist für zwei zu D teilerfremde, eigentlich darstellbare Zahlen n_1, n_2

$$\chi(n_1) \cdot \chi(n_2) = \chi(n_1 n_2).$$

(Aus der Darstellbarkeit von n_1 und n_2 folgt die von $n_1 n_2$, da

$$(n_1, D) = (n_2, D) = 1 \text{ ist.})$$

Es kommt nun darauf an, die für $\sigma > 1$ reguläre Funktion $F_\nu(s)$, die man erhält, indem man in der Reihe

$$\sum_m^{(\nu)} \frac{1}{m^s}$$

für m der Reihe nach alle in G_ν eigentlich darstellbaren Zahlen setzt, durch die Funktionen $L_\chi(s)$ auszudrücken.

Dazu gehen wir aus von der für $\sigma > 1$ und für jeden reellen Charakter χ gültigen Gleichung

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = \sum_n{}' \frac{\chi(n)}{n^s},$$

worin mit $p_1, p_2, \ldots$ die zu D teilerfremden, darstellbaren Primzahlen (etwa der Größe nach geordnet) bezeichnet sind und der Summations-Index n diejenigen (positiven) Zahlen durchläuft, welche nur durch solche Primzahlen teilbar sind, die unter den $p_\varkappa$ vorkommen, sodaß also in der Summe $\sum\limits_n{}'$ gerade die zu D teilerfremden, eigentlich darstellbaren Zahlen im Nenner auftreten. Dabei konvergiert das unendliche Produkt und die unendliche Summe für $\sigma \geqq 1 + \delta$, $\delta > 0$ absolut und gleichmäßig, sodaß die durch das Produkt und die Summe für $\sigma > 1$ dargestellte Funktion in dieser Halbebene regulär und von 0 verschieden ist.

(Die Gleichung wird genau so bewiesen wie die entsprechende Produktformel für die ζ-Funktion. Sie bleibt auch richtig, wenn in der Folge $p_1, p_2, \ldots$ nur die durch eine bestimmte Klasse darstellbaren, zu D teilerfremden Primzahlen auftreten und demgemäß n nur diejenigen Zahlen durchläuft, welche durch keine Primzahl teilbar sind, die nicht in der Reihe der $p_\varkappa$ enthalten ist.)

1) χ bedeutet in diesem Paragraphen stets einen reellen Charakter.

Wir müssen jetzt auch diejenigen darstellbaren Zahlen berücksichtigen, die mit D einen gemeinsamen Teiler > 1 haben. In dieser Hinsicht ist folgendes zu bedenken: jede positive Zahl läßt sich, und zwar nur auf eine Weise, so in zwei (positive) Faktoren zerlegen, daß der eine zu D teilerfremd ist und der andre durch keine Primzahl teilbar ist, die nicht in D aufgeht. (Eine Zahl der zweiten Art möge im folgenden zur Abkürzung ein „Potenzteiler" von D genannt werden.)

Es gilt nun für $\sigma > 0$ die Identität

$$\prod_{p/D} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_d \frac{1}{d^s},$$

wo p die Primteiler von D und d die Potenzteiler von D durchläuft.

Die Summe $\sum\limits_d$ konvergiert für $\sigma > 0$ absolut und für $\sigma \geqq \delta > 0$ gleichmäßig. Dasselbe gilt daher von der Summe

$$\sum_d^{(\nu)} \frac{1}{d^s},$$

welche sich nur über diejenigen Potenzteiler von D erstreckt, die in dem Geschlecht G_ν eigentlich darstellbar sind. Ebenso konvergiert auch die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \cdot \sum_d^{(1)} \frac{1}{d^s}$$

absolut und gleichmäßig für $\sigma \geqq \delta > 0$.

Da zwei absolut konvergente Reihen gliedweise ausmultipliciert werden dürfen, so folgt für $\sigma > 1$

$$\sum_n{}' \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \cdot \sum_d^{(\nu)} \frac{1}{d^s} = \sum_{n,d}{}' \frac{\sum\limits_{\nu}{}_d \left\{\chi(n) \cdot \chi(G_\nu)\right\}}{(nd)^s},$$

wo $\sum\limits_{\nu}{}_d$ über diejenigen ν zu erstrecken ist, für welche d in G_ν eigentlich dargestellt werden kann. $\Big(\sum\limits_{n,d}{}'$ konvergiert wiederum für $\sigma > 1$ absolut.$\Big)$

Ist nun m eine eigentlich darstellbare Zahl und $m = n.d$ ihre Zerlegung in eine zu D teilerfremde Zahl und einen Potenzteiler von D, so ist $(n, d) = 1$; mithin sind n und d eigentlich darstellbar, und zwar n nur in einem Geschlecht, während dies für d nicht zuzutreffen braucht. Jedenfalls ist die Anzahl der verschiedenen Geschlechter, in denen m eigentlich darstellbar ist, gleich der Anzahl der Geschlechter, in denen d eigentlich darstellbar ist, und wenn n durch das Geschlecht G_α dargestellt wird, so entspricht einer eigentlichen Darstellung von d durch das Geschlecht G_ν eine eigentliche Darstellung von nd $(= m)$ durch $G_\alpha G_\nu$ und umgekehrt.

Daraus folgt aber, daß $\sum\limits_{\nu}{}_d \{\chi(n)\chi(G_\nu)\}$ gleich der Summe der Werte von χ für diejenigen Geschlechter ist, in denen m $(= nd)$ eigentlich darstellbar ist. Es ergibt sich also

$$\sum_{n,d}{}' \frac{\sum\limits_{\nu}{}_d \{\chi(n)\cdot\chi(G_\nu)\}}{(nd)^s} = \sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \sum_m{}^{(\nu)} \frac{1}{m^s},$$

wobei in $\sum\limits_m{}^{(\nu)}$ alle diejenigen Zahlen auftreten, die in G_ν eigentlich darstellbar sind, sodaß

$$\sum_m{}^{(\nu)} \frac{1}{m^s} = F_\nu(s)$$

ist. Setzen wir ferner

$$\sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \sum_d{}^{(\nu)} \frac{1}{d^s} = H_\chi(s),$$

wo $H_\chi(s)$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär und, wie leicht ersichtlich, beschränkt ist, so folgt für $\sigma > 1$

$$H_\chi(s)\cdot \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = \sum_{\alpha=1}^{a} \chi(G_\alpha) F_\alpha(s).$$

Multipliciert man auf beiden Seiten mit $\chi(G_\nu)$ und bildet die Summe über alle reellen Charaktere χ, so folgt, da $\sum\limits_{\chi \text{ reell}} \chi(G_\varrho)$ gleich a oder 0 ist, je nachdem G_ϱ das Hauptgeschlecht ist oder nicht, und da $G_\nu G_\alpha$ dann und nur dann gleich dem Hauptgeschlecht ist, wenn $G_\alpha = G_\nu$ ist:

$$\sum_{\chi \text{ reell}} \chi(G_\nu) H_\chi(s)\cdot \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = a\cdot F_\nu(s).$$

Andrerseits ist für $\sigma > 1$

$$\prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}}\cdot \left\{ \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} \right\}^2 = G(s)\cdot \left\{ \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} \right\}^2 = L_\chi(s).$$

(q durchläuft die zu D teilerfremden, nicht darstellbaren Primzahlen.) Die Funktionen $L_\chi(s)$ sind rechts von der Kurve $\mathfrak{C}$ (nach der früheren Bezeichnung) und darauf von 0 verschieden und regulär, abgesehen davon, daß $L_{\chi_1}(s)$ für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung besitzt. In dem links durch $\mathfrak{C}$ abgegrenzten Gebiet (und auch auf der Grenze) sind also für $\chi \neq \chi_1$ die Funktionen $\pm\sqrt{L_\chi(s)}$ regulär, und nimmt man aus dem Gebiet die geradlinige Strecke $\mathfrak{S}$ von ϑ bis 1 $\left(\vartheta = 1 - \frac{1}{4^{\varkappa'} d_1} > \frac{3}{4}\right)$ auf der reellen Axe heraus, so sind in dem erhaltenen Bereich und auf dessen Rand[1]) die beiden Funktionen $\pm\sqrt{L_{\chi_1}(s)}$, abgesehen vom Punkte 1, regulär.

$G(s)$ ist für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und von 0 verschieden, daher sind die Funktionen $\pm\sqrt{G(s)}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{G(s)}}$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ und rechts davon regulär.

Nun besagt (für $\sigma > 1$) die vorige Gleichung:

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = \frac{1}{\sqrt{G(s)}}\sqrt{L_\chi(s)},$$

wobei die Funktionen $\sqrt{G(s)}$ und $\sqrt{L_\chi(s)}$ so zu normieren sind, daß sie für positives $s > 1$ positive Werte haben.

Somit ergibt sich für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} F_\nu(s) &= \frac{1}{a\sqrt{G(s)}} \sum_{\chi \text{ reell}} \chi(G_\nu) H_\chi(s) \sqrt{L_\chi(s)} \\ &= \frac{1}{a\sqrt{G(s)}} \cdot H_{\chi_1}(s)\sqrt{L_{\chi_1}(s)} + \frac{1}{a\sqrt{G(s)}} \cdot \sum_{\chi \neq \chi_1}' \chi(G_\nu) H_\chi(s)\sqrt{L_\chi(s)} \\ &= F_\nu^{(1)}(s) + F_\nu^{(2)}(s). \end{aligned}$$

Hierbei ist zunächst ersichtlich, daß $F_\nu^{(1)}(s)$ gar nicht von ν abhängt. Ferner lehren uns die Ausdrücke für $F_\nu^{(1)}$ und $F_\nu^{(2)}$, daß $F_\nu^{(2)}$ sich bis an die Kurve $\mathfrak{C}$, $F_\nu^{(1)}$ bis an $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ analytisch fortsetzen läßt, wobei auf den Randlinien ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$) noch Regularität besteht, wenn man für $F_\nu^{(1)}$ den Punkt $s = 1$ ausnimmt.

Auf dem Teil des von der Kurve $\mathfrak{C}$ bis zu der Geraden $\sigma = 2$ reichenden Streifens, für welchen $|t| \geqq e^4$ ist, bestehen die Abschätzungen:

$$|L_\chi(s)| < c_1 \log|t|.$$

---

1) Die Strecke $\mathfrak{S}$ muß doppelt als Randlinie gerechnet werden.

Da $\frac{1}{G(s)}$ und $H_\chi(s)$ für $\sigma \geqq \vartheta$ beschränkt sind (was für $\frac{1}{G(s)}$ daraus folgt, daß für $\sigma \geqq \vartheta$

$$\left|\frac{1}{G(s)}\right| = \prod_q \left|1 - \frac{1}{q^{2s}}\right| \leqq \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^{2\vartheta}}\right)$$

und $2\vartheta > 1$ ist), so ergibt sich, daß für

$$|t| \geqq e^4, \quad 2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} |t|}$$

die Ungleichungen gelten:

$$|F_\nu^{(1)}(s)| < c' \log^{\frac{1}{2}} |t|, \quad |F_\nu^{(2)}(s)| < c'' \log^{\frac{1}{2}} |t|.$$

Es ist nun die Reihe $\sum\limits_m^{(\nu)} \frac{1}{m^s}$, welche $F_\nu(s)$ für $\sigma > 1$ darstellt, in dieser Halbebene absolut konvergent, und es ist

$$\sum_m^{(\nu)} \frac{1}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{m^s},$$

wobei e_m gleich 1 oder 0 ist, je nachdem m im Geschlecht G_ν eigentlich darstellbar ist oder nicht. Nach einem früher bewiesenen Satz folgt hieraus:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} F_\nu(s)\, ds = \sum_{n=1}^{x} e_n \log \frac{x}{n} + O(1),$$

wo das Integral über die geradlinige Verbindung von $(2 - x^2 i)$ und $(2 + x^2 i)$ zu erstrecken ist.

Für das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung wollen wir jetzt eine von den Koefficienten e_n unabhängige Abschätzung zu gewinnen suchen. Dazu möge zunächst $x > e^2$ angenommen werden.

Zufolge der erhaltenen Zerlegung von $F_\nu(s)$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} F_\nu(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(2)}(s)\, ds,$$

und auf Grund der analytischen Eigenschaften von $F_\nu^{(2)}(s)$ ergibt sich nach dem Cauchyschen Satz, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung in dem zweiten Integral der geradlinige Integrationsweg durch den früher mit $\mathfrak{W}$ bezeichneten Weg ersetzt werden kann. In dem ersten Integral ist dies nicht zulässig, weil die

Strecke $\mathfrak{S}$ (einfach gerechnet) nicht zu dem Regularitätsgebiet von $F_\nu^{(1)}$ gehört. Wir verfahren deshalb hier so, daß wir den Weg $\mathfrak{W}$ in zwei Stücke $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ teilen, von denen das erste von $(2 - x^2 i)$ nach dem Punkt $s = \vartheta$, das zweite von ϑ nach $(2 + x^2 i)$ führt, und zwischen diese beiden Stücke den Weg $\mathfrak{w}$ einschalten, der geradlinig von ϑ nach 1 und von 1 wieder nach ϑ zurück führt. Der so erhaltene Weg

$$\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{w} + \mathfrak{W}_2$$

kann in dem Integral $\int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds$ den geradlinigen Weg ersetzen, weil $F_\nu^{(1)}$ in dem Bereich, welcher durch die beiden Wege eingeschlossen wird, und auch in den Randpunkten mit Ausnahme des Punktes $s = 1$ regulär ist und für $s = 1$ die Funktion $\sqrt{L_{\chi_1}(s)}$, mithin auch $F_\nu^{(1)}(s)$ nicht stärker unendlich wird als $\frac{1}{\sqrt{s-1}}$, sodaß man in den Punkt 1 hinein integrieren darf. Dabei ist zu beachten, daß der Wert des Integranden auf dem Rückweg von 1 nach ϑ auf dem andern Ufer der reellen Axe zu nehmen ist als bei dem Hinweg von ϑ nach 1.

Da es auf die Reihenfolge der Integrationen über die Teile des Weges $\overline{\mathfrak{W}}$ nicht ankommt, so kann

$$\overline{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W} + \mathfrak{w}$$

gesetzt werden.

Aus den für $F_\nu^{(1)}$ und $F_\nu^{(2)}$ geltenden Abschätzungen ergibt sich wie früher:

$$\int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds = O\left(x . e^{-\sqrt[v_1]{\log x}}\right)$$

für jedes $v_1 > \varkappa' + 1$, also gewiß für $v_1 = 8$,

und ebenso

$$\int_{(\mathfrak{W})} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(2)}(s)\, ds = O\left(x . e^{-\sqrt[8]{\log x}}\right),$$

und da

$$x . e^{-\sqrt[8]{\log x}} = O\left(x . e^{-\frac{3}{2}\log\log x}\right) = O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right)$$

ist, so folgt

$$\sum_{n=1}^{x} e_n \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right).$$

Es handelt sich jetzt darum, das Integral $\int\limits_{\mathfrak{w}} \dots ds$ abzuschätzen. Der Integrand $\frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)$ ist gleich

$$\frac{x^s H_{\chi_1}(s)}{a \,.\, s^2 \,.\, \sqrt{G(s)}} \cdot \sqrt{L_{\chi_1}(s) \,.\, (s-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-1}}.$$

Hierin sind

$$H_{\chi_1}(s), \quad \frac{1}{\sqrt{G(s)}}, \quad \frac{1}{s^2}, \quad \sqrt{L_{\chi_1}(s) \,.\, (s-1)}$$

für $|t| \leqq e^4$, $\sigma \geqq \vartheta$, also erst recht für $|s-1| \leqq 1-\vartheta$ reguläre Funktionen, die für $s = 1$ alle von 0 verschieden sind. (Für H_{χ_1} ergibt sich dies unmittelbar aus der Definition, da die Zahl 1 zu den Potenzteilern von D gehört.) Also gilt im Innern und auf dem Rande des Kreises $|s-1| = 1-\vartheta$ (sogar in einem etwas größeren Kreise), mithin auch auf dem Wege $\mathfrak{w}$ eine Entwicklung

$$\frac{\sqrt{s-1} \,.\, F_\nu^{(1)}(s)}{s^2} = M \,.\, (1 + (s-1)\,\mathfrak{P}(s-1)),$$

wo $\mathfrak{P}(s-1)$ eine Reihe nach (positiven) Potenzen von $(s-1)$ und M eine von 0 verschiedene Konstante bedeutet. (Die Quadratwurzel $\sqrt{s-1}$ können wir so normiert annehmen, daß sie für reelles $s > 1$ positiv ist.)

Demnach ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß einem Werte $\sqrt{s-1}$ auf dem einen Ufer der reellen Axe der Wert $(-\sqrt{s-1})$ auf dem andern Ufer entspricht:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds &= \frac{2}{2\pi i} \int_{\vartheta}^{1} \frac{M \,.\, (1 + (s-1)\,\mathfrak{P}(s-1)) \,.\, x^s}{\sqrt{s-1}}\, ds \\ &= -\frac{M}{\pi} \int_{1}^{\vartheta} \frac{x^\sigma}{\sqrt{1-\sigma}} (1 + (\sigma-1)\,\mathfrak{P}(\sigma-1))\, d\sigma \\ &= M' \,.\, x \,.\, \int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} (1 + y \,.\, \overline{\mathfrak{P}}(y))\, dy\end{aligned}$$

(auf Grund der Substitution $\sigma = 1-y$; $\overline{\mathfrak{P}}(y) = -\mathfrak{P}(-y)$. Mit $\sqrt{y}$ ist natürlich die positive Quadratwurzel gemeint).

$M' \left(= \frac{M}{\pi}\right)$ ist dabei eine von 0 verschiedene Konstante, die von ν unabhängig ist, da ja $F_\nu^{(1)}$ nicht von ν abhängt.

Die Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(y)$ ist für $|y| \leqq 1-\vartheta$ beschränkt; deshalb kann eine Konstante c so gewählt werden, daß

$$\left|\int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} \cdot y \cdot \overline{\mathfrak{P}}(y)\, dy\right| \leqq c \int_0^{1-\vartheta} x^{-y} \sqrt{y}\, dy < c \int_0^{\infty} x^{-y} \sqrt{y}\, dy$$

ist. Nun ist

$$\int_0^{\infty} x^{-y} \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{\log^{\frac{3}{2}} x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y \log x} . \sqrt{y \log x} \log x\, dy$$
$$= \frac{1}{\log^{\frac{3}{2}} x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-z} \sqrt{z}\, dz = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\log^{\frac{3}{2}} x};$$

also ist

$$\int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} \cdot y \cdot \overline{\mathfrak{P}}(y)\, dy = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right).$$

Ferner ist

$$\int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{\infty} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} dy - \int_{1-\vartheta}^{\infty} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\log x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz - \frac{1}{\sqrt{\log x}} \int_{(1-\vartheta)\log x}^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}} \cdot e^{-(1-\vartheta)\log x}\right).$$

(Denn für genügend großes x ist $(1-\vartheta)\log x > 1$.)

$$\int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right).$$

Durch Zusammenfassung der beiden gefundenen Abschätzungen erhalten wir

$$M' x \int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} (1 + y . \overline{\mathfrak{P}}(y))\, dy = \frac{Cx}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right),$$

wobei C zur Abkürzung für $M'.\sqrt{\pi}$ gesetzt ist.

Andrerseits ist

$$M'.x \int_0^{1-\vartheta} \frac{x^{-y}}{\sqrt{y}} (1 + y . \overline{\mathfrak{P}}(y))\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2} F_\nu^{(1)}(s)\, ds$$
$$= \sum_{n=1}^{x} e_n \log \frac{x}{n} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right).$$

Wird

$$\sum_{n=1}^{x} e_n = A_\nu(x)$$

gesetzt, so ist $A_\nu(x)$ die Anzahl der in G_ν eigentlich darstellbaren Zahlen $\leqq x$; ferner ist (für $x > 1$)

$$\sum_{n=1}^{x} e_n \log \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{x} e_n \int_n^x \frac{du}{u} = \int_1^x \sum_{n=1}^{u} e_n \frac{du}{u} = \int_1^x \frac{A_\nu(u)}{u}\,du.$$

Demnach erhalten wir:

$$\int_1^x \frac{A_\nu(u)}{u}\,du = \frac{C.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right).$$

Nun sei $\delta(x)$ eine für $x > 1$ positive Funktion, die für $x = \infty$ den Limes 0 hat, während jedoch $x.\delta(x)$ für $x = \infty$ unendlich wird. Dann ist, wie sich unmittelbar aus der Bedeutung von $A_\nu(x)$ ergibt, für $1 < x \leqq u \leqq x + \delta.x$

$$A_\nu(x) \leqq A_\nu(u) \leqq A_\nu(x) + \delta.x + 1$$

und daher

$$A_\nu(x) \log(1 + \delta(x)) = \int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(x)}{u}\,du \leqq \int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(u)}{u}\,du$$

$$\leqq \int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(x) + \delta.x + 1}{u}\,du = (A_\nu(x) + \delta.x + 1)\log(1+\delta),$$

$$\int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(u)}{u}\,du = A_\nu(x)\log(1+\delta) + O(\delta.x.\log(1+\delta)).$$

Da ferner

$$\log(1 + \delta(x)) = \delta(x) + O(\delta^2(x)) = O(\delta(x))$$

und

$$A_\nu(x) = O(x)$$

ist, so ergibt sich

$$\int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(u)}{u}\,du = \delta(x).A_\nu(x) + O(\delta^2.x),$$

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\delta(x)} \int_x^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(u)}{u}\,du + O(\delta.x)$$

$$= \frac{1}{\delta(x)} \cdot \left(\int_1^{x+\delta.x} \frac{A_\nu(u)}{u}\,du - \int_1^x \frac{A_\nu(u)}{u}\,du\right) + O(\delta.x).$$

Durch Anwendung der gefundenen Abschätzung von

$$\int_1^x \frac{A_\nu(u)}{u}\,du$$

folgt hieraus:

$$A_\nu(x) = \frac{C}{\delta(x)}\left(\frac{x+\delta.x}{\sqrt{\log(x+\delta.x)}} - \frac{x}{\sqrt{\log x}}\right) + O\left(\frac{x}{\delta.\log^{\frac{3}{2}} x}\right) + O(\delta.x),$$

und da

$$\sqrt{\log(x+\delta.x)} = \sqrt{\log x + \log(1+\delta)} = \sqrt{\log x}.\sqrt{1+\frac{\log(1+\delta)}{\log x}}$$
$$= \sqrt{\log x}\left(1+O\left(\frac{\log(1+\delta)}{\log x}\right)\right) = \sqrt{\log x}\left(1+O\left(\frac{\delta}{\log x}\right)\right),$$

mithin

$$\frac{1}{\sqrt{\log(x+\delta.x)}} = \frac{1}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{\delta}{\log x}\right)\right)$$

ist, so erhalten wir

$$A_\nu(x) = \frac{C}{\delta(x)}\cdot\left\{\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1+O\left(\frac{\delta}{\log x}\right)\right) + \frac{\delta.x}{\sqrt{\log x}} + O(\delta^2.x) - \frac{x}{\sqrt{\log x}}\right\}$$
$$+ O\left(\frac{x}{\delta.\log^{\frac{3}{2}} x}\right) + O(\delta.x)$$
$$= \frac{C.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\delta.\log^{\frac{3}{2}} x}\right) + O(\delta.x)$$
$$\left(\text{denn } 1 = O\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

Nun werde für $\delta(x)$ die Funktion

$$\frac{1}{\log^{\frac{3}{4}} x}$$

gewählt, welche offenbar alle an δ gestellten Bedingungen erfüllt dann ergibt sich die behauptete Abschätzung

$$A_\nu(x) = \frac{C.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right),$$

worin C für alle ν ($\nu = 1, \ldots, a$) dieselbe Konstante bedeutet, die von 0 verschieden ist (und deshalb offenbar eine positive Größe sein muß).

Wollen wir für die Anzahl aller (durch irgend eine Form der Diskriminante D) eigentlich darstellbaren Zahlen eine Abschätzung erhalten, so müssen wir an Stelle der Funktion $F_\nu(s)$ diejenige Funktion $F(s)$ betrachten, die für $\sigma > 1$ durch die Summe

$$\sum_m \frac{1}{m^s}$$

dargestellt wird, in welcher m alle eigentlich darstellbaren Zahlen durchläuft.

Offenbar ist (für $\sigma > 1$)

$$\sum_m \frac{1}{m^s} = \sum_d{}' \frac{1}{d^s} \cdot \sum_n \frac{1}{n^s},$$

wobei $\sum\limits_d{}'$ über alle eigentlich darstellbaren Potenzteiler von D und $\sum\limits_n$ über alle eigentlich darstellbaren, zu D teilerfremden Zahlen zu erstrecken ist. Durch die Summe $\sum\limits_d{}'$ wird (für $\sigma > 0$) eine Funktion $H(s)$ dargestellt, die für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär und beschränkt ist und die im Punkte $s = 1$ einen von 0 verschiedenen Wert hat.

Somit ergibt sich für $\sigma > 1$ die Gleichung:

$$F(s) = H(s) \cdot \frac{1}{\sqrt{G(s)}} \cdot \sqrt{L_{\chi_1}(s)}.$$

Aus dieser lassen sich genau dieselben Schlüsse ziehen wie aus der entsprechenden Gleichung für $F_\nu(s)$, und man erhält, wenn die Anzahl aller eigentlich darstellbaren Zahlen $\leqq x$ mit $A(x)$ bezeichnet und

$$\frac{C.a.H(1)}{H_{\chi_1}(1)} = E$$

gesetzt wird (wo $E > 0$ ist):

$$A(x) = \frac{E.x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right).$$

(Eine Abschätzungs-Formel derselben Art erhält man offenbar für die Anzahl aller zu D teilerfremden darstellbaren Zahlen $\leqq x$. Diese ergibt sich übrigens auch als Specialfall eines von Herrn Landau bewiesenen Satzes[1].)

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, daß uneigentliche Darstellungen zugelassen werden. Wir suchen also jetzt eine Abschätzung für die Anzahl $B_\nu(x)$ derjenigen Zahlen $\leqq x$, die in dem Geschlecht G_ν schlechthin darstellbar sind.

Eine jede schlechthin darstellbare Zahl m läßt sich zerlegen in der Form

$$m = m'^2 dn,$$

1) Siehe die Abhandlung über die „Lösung des Lehmerschen Problems" (American Journal of Mathematics, Bd. 31, S. 86—102, 1909).

wo n eine zu D teilerfremde, eigentlich darstellbare Zahl, d einen schlechthin darstellbaren Potenzteiler von D und m' eine aus den (zu D teilerfremden, nicht darstellbaren) Primzahlen q zusammengesetzte Zahl bedeutet. Eine solche Zerlegung ist nur auf eine Weise möglich. Umgekehrt ist jede Zahl m, welche sich auf die angegebene Art zerlegen läßt, schlechthin darstellbar.

Es handelt sich nun wieder darum, die in der Halbebene $\sigma > 1$ reguläre Funktion $\Phi_\nu(s)$, welche durch die (über alle in G_ν schlechthin darstellbaren Zahlen erstreckte) Summe

$$\sum_m{}^{(\nu)} \frac{1}{m^s}$$

definiert ist[1]), mit den Funktionen $L_\chi(s)$ in Verbindung zu bringen.

Wir legen wieder die für $\sigma > 1$ gültige Identität

$$\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}}$$

zu Grunde, (in der alle Zeichen dieselbe Bedeutung haben wie vorhin). Ferner benutzen wir die Gleichung

$$\sum_{m'} \frac{1}{m'^{2s}} = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{2s}}} = G(s),$$

welche für $\sigma > \frac{1}{2}$ gilt.

Es werde jetzt

$$\sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \sum_d{}^{(\nu)} \frac{1}{d^s} = K_\chi(s)$$

gesetzt, wobei d in $\sum\limits_d{}^{(\nu)}$ alle durch G_ν schlechthin darstellbaren Potenzteiler von D durchlaufen soll. Die Summen $\sum\limits_d{}^{(\nu)}$ sind für $\sigma > 0$ absolut konvergent und für $\sigma \geqq \delta > 0$ gleichmäßig konvergent; $K_\chi(s)$ ist daher für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ regulär und beschränkt. Ferner ist

$$K_{\chi_1}(1) \neq 0.$$

Für $\sigma > 1$ ist nun

$$\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} \cdot \sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) \cdot \sum_d{}^{(\nu)} \frac{1}{d^s} \cdot \sum_{m'} \frac{1}{m'^{2s}} = \sum_{m', d, n} \frac{\sum\limits_\nu{}_d \{\chi(n)\chi(G_\nu)\}}{(m'^2 . d . n)^s},$$

---

1) $\sum\limits_m{}^{(\nu)} \frac{1}{m^s}$ hat jetzt eine andre Bedeutung als vorher; dasselbe gilt von den (gleich einzuführenden) Summen $\sum\limits_d{}^{(\nu)} \frac{1}{d^s}$ und $\sum\limits_\nu{}_d\, \chi(n)\, \chi(G_\nu)$.

wobei ν in $\sum_{\nu}{}_d$ diejenigen unter den Zahlen $1, \ldots, a$ durchläuft, für welche d in G_ν schlechthin darstellbar ist. (Das Bestehen der Gleichung folgt aus der absoluten Konvergenz der als Faktoren auftretenden Summen.) Die Summe auf der rechten Seite konvergiert wiederum absolut.

Da die Darstellungen (schlechthin) einer zu D teilerfremden Zahl alle in demselben Geschlecht stattfinden, so ist $m'^2 n$ dann und nur dann in einem Geschlecht darstellbar, wenn n darin darstellbar ist. Ist ferner $m'^2 n$ durch das Geschlecht G_α darstellbar, so ist $m'^2 . d . n$ dann und nur dann in G_ν darstellbar, wenn d durch das Geschlecht G_β dargestellt wird, für welches

$$G_\alpha G_\beta = G_\nu$$

ist. Es ist daher (für jedes m')

$$\sum_{\nu}{}_d \left\{\chi(n)\,\chi(G_\nu)\right\}$$

gleich der Summe der Werte von χ für die verschiedenen Geschlechter, durch welche $m'^2 . d . n$ dargestellt wird.

Daraus folgt aber (für $\sigma > 1$):

$$G(s) . K_\chi(s) . \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = \sum_{m'} \frac{1}{m'^{2s}} \cdot \sum_{\nu=1}^{a} \chi(G_\nu) . \sum_{d}{}^{(\nu)} \frac{1}{d^s} \cdot \sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{a} \chi(G_\alpha) . \sum_{m}{}^{(\alpha)} \frac{1}{m^s} = \sum_{\alpha=1}^{a} \chi(G_\alpha)\, \Phi_\alpha(s)$$

und hieraus durch Multiplikation mit $\chi(G_\nu)$ und Summation über die reellen Charaktere:

$$G(s) . \sum_{\chi}{}' \chi(G_\nu)\, K_\chi(s) . \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = a . \Phi_\nu(s).$$

Wie wir bereits gesehen haben, ist ferner für $\sigma > 1$

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{\chi(p_\varkappa)}{p_\varkappa^s}} = \frac{\sqrt{L_\chi(s)}}{\sqrt{G(s)}}$$

(bei geeigneter Normierung der Quadratwurzeln).

Also ergibt sich für $\sigma > 1$

$$\Phi_\nu(s) = \frac{\sqrt{G(s)}}{a} \cdot \sum_{\chi}{}' \chi(G_\nu)\, K_\chi(s) . \sqrt{L_\chi(s)}.$$

Diese Darstellung von Φ_ν entspricht vollkommen der früher gefundenen Darstellung von F_ν; denn hinsichtlich der in Betracht kommenden analytischen Eigenschaften ist $\sqrt{G(s)}$ mit $\frac{1}{\sqrt{G(s)}}$ und $K_\chi(s)$ mit $H_\chi(s)$ äquivalent. $B_\nu(x)$ steht zu $\Phi_\nu(s)$ in genau derselben Beziehung wie $A_\nu(x)$ zu $F_\nu(s)$. Wir erhalten daher wieder eine Abschätzung:

$$B_\nu(x) = \frac{C' x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right),$$

worin C' eine positive, von ν unabhängige (also nur von D abhängige) Konstante bedeutet.

Ferner läßt sich offenbar auch für die Anzahl $B(x)$ aller schlechthin darstellbaren Zahlen $\leqq x$ eine Abschätzung:

$$B(x) = \frac{E' . x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right)$$

beweisen.

Somit ist der erste Teil unsrer Behauptung als richtig erwiesen.

§ 3. Die Fehlerabschätzung.

Es kommt nun noch darauf an, zu zeigen, daß für die Anzahl $S_\nu(x)$ der Ausnahmezahlen $\leqq x$, die zu einer nicht zweiseitigen Fundamentalklasse H_ν gehören, die Abschätzung

$$S_\nu(x) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}\,(\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right)$$

(unter der Bedingung $0 \leqq \vartheta' < 1$) gültig ist[1]).

Wir verfahren wieder nach der bisher angewandten Methode, eine nicht negative, monotone Funktion von x, welche für x stets denselben Wert hat wie für $[x]$, als Koefficientensumme einer Dirichletschen Reihe zu deuten. Dabei haben wir jetzt, wo es sich nur um eine Abschätzung nach oben handelt, den Vorteil, daß es genügt, diese Abschätzung für irgend eine Funktion $\overline{S}_\nu(x)$ zu beweisen, die für $x \geqq 1$ stets $\geqq S_\nu(x)$ ist.

Um nun zu einer Dirichletschen Reihe zu gelangen, deren Koefficientensumme eine Funktion $\overline{S}_\nu(x)$ (der angegebenen Art) ist,

1) Wenn die Abschätzung für irgend ein ϑ' gilt, so gilt sie offenbar auch für jedes kleinere ϑ'.

gehen wir von folgender Überlegung aus: die Gesamtheit aller zu D teilerfremden, darstellbaren Primzahlen zerfällt in endlich viele Systeme, die bestimmt sind durch die Klassen, in denen die Primzahlen darstellbar sind (das heißt: zwei Primzahlen gehören dann und nur dann zu demselben System, wenn sie gemeinsam durch eine Klasse darstellbar sind). Wollen wir eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Systemen und Klassen herstellen, bei der jedem System eine und nur eine Klasse entspricht, so müssen wir von jedem Paar einander entgegengesetzter, nicht zweiseitiger Klassen eine Klasse ausscheiden. Wir nehmen an, dies sei geschehen, und bezeichnen die übrigbleibenden Klassen mit

$$K_1, \ldots, K_a, K_{a+1}, \ldots, K_b, K_{b+1}.$$

Hierbei ist K_1 die Hauptklasse, $K_1, \ldots, K_a$ sind die zweiseitigen Klassen, und K_{b+1} bedeutet diejenige Fundamentalklasse, für welche die Ausnahmezahlen betrachtet werden. (Aus dem Klassen-Paar H_ν, H_ν^{-1} soll die Klasse H_ν^{-1} ausgeschieden sein.) Es ist $1 < b+1 \leqq h-1$.

Jede zu D teilerfremde Primzahl ist genau durch eine der Klassen $K_1, \ldots, K_{b+1}$ darstellbar. Für $\alpha = 1, \ldots, b$ mögen die in K_α darstellbaren Primzahlen, der Größe nach geordnet, mit $p_{\alpha 1}, p_{\alpha 2}, \ldots$ bezeichnet werden; die in H_ν $(= K_{b+1})$ darstellbaren (zu D teilerfremden) Primzahlen seien $p_1, p_2, \ldots$.

Die aus Potenzprodukten der $p_{\alpha\varkappa}$ zusammengesetzten Zahlen (inklusive 1) mögen $n_{\alpha 1}, n_{\alpha 2}, \ldots$ und entsprechend die aus den $p_\varkappa$ zusammengesetzten Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ genannt werden.

$r_1, \ldots, r_u$ seien die verschiedenen in dem Grad a_ν der Fundamentalklasse H_ν aufgehenden Primzahlen. Jede nicht zu a_ν teilerfremde Zahl ist durch mindestens eine dieser Zahlen $r_1, \ldots, r_u$ teilbar. Daher ist jede Zahl n aus der Reihe der n_α, welche keine der Primzahlen $p_\varkappa$ genau in einer zu a_ν teilerfremden Potenz enthält, zerlegbar in der Form

$$n_{\nu_1}^{r_1} \ldots n_{\nu_u}^{r_u},$$

worin $\nu_1, \ldots, \nu_u$ irgend welche Indices bedeuten. (Diese Zerlegung ist übrigens im allgemeinen nicht eindeutig.)

Aus der Definition der Ausnahmezahlen ist nun ersichtlich, daß jede zu H_ν gehörige Ausnahmezahl m sich folgendermaßen zerlegen läßt:

$$m = m'^2 . d . n_{1\varkappa_1} \ldots n_{b\varkappa_b} . n_{\nu_1}^{r_1} \ldots n_{\nu_u}^{r_u} . p_{\lambda_1}^{v_1} \ldots p_{\lambda_j}^{v_j}.$$

Hierin ist d ein (schlechthin) darstellbarer Potenzteiler von D,

m' eine zu D teilerfremde Zahl, deren Primfaktoren nicht darstellbar sind, ferner sind die Exponenten $v_1, \ldots, v_j$ zu a_ν teilerfremd (sie brauchen nicht von einander verschieden zu sein), und

$$0 \leqq j \leqq k_\nu - 1 \leqq a_\nu - 2 \leqq h - 2.$$

Nun ist (gemäß einer am Anfang des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung) für $\sigma > 1$, $\alpha = 1, \ldots, b$

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{n_{\alpha\lambda}^s},$$

und zwar konvergiert die Summe wie das Produkt (für $\sigma > 1$) absolut.

Für $\sigma > \frac{1}{2}$ ist

$$G(s) = \prod_q \frac{1}{1 - \dfrac{1}{q^{2s}}} = \sum_{m'} \frac{1}{m'^{2s}}.$$

Ferner ist für $\alpha = 1, \ldots, u$

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_\varkappa^{r_\alpha s}}} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{n_\varkappa^{r_\alpha s}},$$

und zwar gilt diese Gleichung für $\sigma > \frac{1}{2}$, weil $r_\alpha \geqq 2$ ist. (Für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert die Summe und das Produkt absolut.)

Des weiteren ist

$$1 + \sum_{(v, a_\nu) = 1} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^{vs}} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^s} + \left\{ 1 + \sum_{\substack{(v, a_\nu) = 1 \\ v > 1}} \sum_\varkappa \frac{1}{p_\varkappa^{vs}} \right\},$$

worin $\displaystyle\sum_{\substack{(v, a_\nu) = 1 \\ v > 1}} \sum_\varkappa \frac{1}{p_\varkappa^{vs}}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergiert, da die Summe $\displaystyle\sum_{p, m} \frac{1}{p^{ms}}$ erstreckt über alle Primzahlen p und alle ganzen Zahlen $m > 1$ in dieser Halbebene absolut konvergiert. Zur Abkürzung möge jene Summe mit $(P(s) - 1)$ bezeichnet werden.

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^s}$$

ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent.

Außerdem ist die über alle Potenzteiler von D erstreckte Summe

$$\sum_d \frac{1}{d^s}$$

für $\sigma > 0$ absolut konvergent.

Somit ergibt sich, daß man in dem Ausdruck:

$$\sum_{m'} \frac{1}{m'^{2s}} \cdot \sum_d \frac{1}{d^s} \cdot \prod_{\alpha=1}^{b} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{n_{\alpha\lambda}^s} \right) \cdot \prod_{\alpha=1}^{u} \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{n_\varkappa^{r_\alpha s}} \right) \cdot \left\{ 1 + \sum_{(v,\, a_v)=1} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^{vs}} \right\}^{h-2}$$

die Summen gliedweise ausmultiplicieren darf.

Setzt man

$$G(s) \sum_d \frac{1}{d^s} \cdot \prod_{\alpha=1}^{u} \left(\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_\varkappa^{r_\alpha s}}} \right) = Q(s),$$

so ist $Q(s)$ für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und beschränkt — (ϑ hat dieselbe Bedeutung wie bisher) —, und es folgt für $\sigma > 1$

$$(1) \qquad Q(s) \cdot \prod_{\alpha=1}^{b} \left(\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s}} \right) \cdot \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^s} + P(s) \right\}^{h-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s},$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}$ für $\sigma > 1$ absolut konvergiert, wo ferner die g_n ganze Zahlen $\geqq 0$ sind und für jede zu H_v gehörige Ausnahmezahl m

$$g_m \geqq 1$$

ist, wie man aus der vorhin angegebenen Zerlegung der Ausnahmezahlen ersieht.

Setzen wir also

$$\sum_{n=1}^{x} g_n = \bar{S}_v(x),$$

so ist (für $x \geqq 0$)

$$\bar{S}_v(x) \geqq S_v(x).$$

Es werde jetzt die Summe $\sum_p' \frac{1}{p^s}$ betrachtet, in welcher p die in einer bestimmten Klasse K darstellbaren, zu D teilerfremden Primzahlen durchläuft. Die Summe ist eine für $\sigma > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe, welche in ihrem Konvergenzbereich eine reguläre Funktion $\varphi_K(s)$ definiert und die gliedweise differentiiert werden darf, sodaß die Gleichung besteht:

$$\frac{d\varphi_K(s)}{ds} = -\sum_p' \frac{\log p}{p^s}.$$

Andrerseits ist, wie früher bewiesen, für $\sigma > 1$

$$\sum_p{}' \frac{\log p}{p^s} = -\frac{1}{h_0}\left(\sum_\chi \chi(K)\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} + R(s)\right),$$

wobei $\sum\limits_\chi$ über sämtliche Charaktere zu erstrecken ist und h_0 gleich $2h$ oder h zu setzen ist, je nachdem die Klasse K zweiseitig ist oder nicht.

Die Funktion $R(s)$ wird für $\sigma > \frac{1}{2}$ durch eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varrho_n}{n^s}$$

mit reellen, nicht negativen Koefficienten (ϱ_n) dargestellt. (Daß der erste Koefficient der Reihe gleich 0 ist, folgt einerseits aus der früheren Darstellung von $R(s)$, andrerseits läßt es sich direkt aus der betrachteten Gleichung entnehmen, da $\sum\limits_p{}' \frac{\log p}{p^s}$ und die Funktionen $\frac{L'_\chi}{L_\chi}$ für $\sigma = \infty$ den Limes 0 haben.)

Daraus folgt für $\sigma > 1$

$$\varphi_\kappa(s) = \int_2^s \frac{d\varphi_\kappa(s)}{ds}\,ds + \varphi_\kappa(2) = \frac{1}{h_0}\sum_\chi \chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\,ds + \frac{1}{h_0}\int_2^s R(s)\,ds + \varphi_\kappa(2)$$

$$= \frac{1}{h_0}\sum_\chi \chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\,ds - \frac{1}{h_0}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varrho_n}{\log n\,.\,n^s} + c_0 = \frac{1}{h_0}\sum_\chi \chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\,ds + R_0(s)$$

(c_0 ist eine Konstante. Der Integrationsweg soll ganz in der Halbebene $\sigma > 1$ verlaufen.)

Da die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\varrho_n}{\log n\,.\,n^s}$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergiert und $\frac{\varrho_n}{\log n} \geqq 0$ ist (für $n = 2, 3 \ldots$), so folgt, daß die Funktion $R_0(s)$ jedenfalls für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und beschränkt ist.

Es ist also

$$\varphi_\kappa(s) = \frac{1}{h_0}\log L_{\chi_1}(s) + C_0 + \frac{1}{h_0}\sum_{\chi \neq \chi_1}\chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}\,ds + R_0(s).$$

(Dabei bedeutet C_0 eine Konstante. Mit $\log L_\chi(s)$ soll hier wie im folgenden derjenige Logarithmus bezeichnet werden, der für reelles $s > 1$ reell ist.)

Eine Umformung der letzten Gleichung liefert:

$$\varphi_K(s) = \frac{1}{h_0}\log\frac{1}{s-1} + \frac{1}{h_0}\log\{s-1)L_{\chi_1}(s)\} + C_0 + \frac{1}{h_0}\sum_{\chi \neq \chi_1}\chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}ds + R_0(s)$$

$$= \frac{1}{h_0}\log\frac{1}{s-1} + \bar{R}_0(s)$$

für $\sigma > 1$. (Mit $\log\frac{1}{s-1}$ ist derjenige Logarithmus gemeint, der für positives $s > 1$ reell ist.)

Aus den analytischen Eigenschaften der Funktionen L_χ folgt, daß $\bar{R}_0(s)$ rechts von der Kurve $\mathfrak{C}$ und auf ihr regulär ist.

Schneiden wir das Gebiet rechts von $\mathfrak{C}$ längs der (von ϑ nach 1 führenden) Strecke $\mathfrak{S}$ auf, so ist in dem aufgeschnittenen Bereich ($\mathfrak{B}$) $\log\frac{1}{s-1}$ regulär. Die Funktion $\varphi_K(s)$ läßt sich daher in dem ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ als reguläre Funktion erklären, und zwar bleibt die Regularität auch am Rande von $\mathfrak{B}$ bestehen, falls man bei der Strecke $\mathfrak{S}$ zwei Ufer unterscheidet und den Punkt $s = 1$ ausnimmt, in welchem φ_K eine logarithmische Singularität besitzt.

Da in $\mathfrak{B}$ auch $\frac{L'_{\chi_1}}{L_{\chi_1}}$ regulär ist, so gilt in diesem ganzen Bereich die Gleichung:

$$\varphi_K(s) = \frac{1}{h_0}\sum_\chi \chi(K)\int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}ds + R_0(s).$$

Hierbei kann der Integrationsweg von 2 nach s für jeden Punkt $s = \sigma + ti$ in $\mathfrak{B}$ so gewählt werden, daß er zuerst von 2 nach $2 + ti$ parallel zur Axe des Imaginären, dann von $2 + ti$ nach $\sigma + ti$ parallel zur Axe des Reellen verläuft. (Für $t = 0$ fällt das erste, für $\sigma = 2$ das zweite Stück des Weges fort.)

Nun ist (für jedes χ):

$$\left|\int_2^{2+ti}\frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)}ds\right| = |\log L_\chi(2+ti) - \log L_\chi(2)| \leq 2\log L_{\chi_1}(2).$$

(Denn

$$\log L_\chi(s) = \log G(s) + \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m(K_p) + \chi^{-m}(K_p)}{mp^{ms}},$$

$$\log G(s) = \sum_q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mq^{2ms}}$$

nach der früheren Bezeichnung.)

$R_0(s)$ ist in $\mathfrak{B}$ beschränkt. Da ferner für $|t| \geqq e^4$,

$$2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'} |t|}$$

$$\left| \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} \right| < c_8 \log^{\varkappa'} |t|,$$

also

$$\left| \int_{2+ti}^{\sigma+ti} \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} ds \right| < 2c_8 \log^{\varkappa'} |t|$$

ist, so folgt, daß für diese Werte von σ, t (die einen Teil von $\mathfrak{B}$ einschließlich zweier Stücke von $\mathfrak{C}$ bestimmen):

$$|\varphi_K(s)| < \bar{c} \log^{\varkappa'} |t|$$

ist, wo $\bar{c}$ eine geeignet zu wählende Konstante bedeutet.

(Es ist zu bedenken, daß die Gleichung

$$\varphi_K(s) = \frac{1}{h_0} \sum_\chi \chi(K) \int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} ds + R_0(s)$$

auch auf den beiden Stücken der Kurve $\mathfrak{C}$ gültig bleibt.)

Nun ist ferner

$$\sum_\chi \chi(K) \int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} ds = \sum_\chi \chi(K) \int_2^s \frac{L'_{\chi^{-1}}(s)}{L_{\chi^{-1}}(s)} ds$$

$$= \sum_\chi \chi^{-1}(K) \int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} ds$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_\chi \{\chi(K) + \chi^{-1}(K)\} \cdot \int_2^s \frac{L'_\chi(s)}{L_\chi(s)} ds$$

$$= \sum_\chi \cos(\omega(K)) . (\log L_\chi(s) - \log L_\chi(2)),$$

wobei wie früher $\chi(K) = e^{i\omega(K)}$ gesetzt ist.

Mithin ist in $\mathfrak{B}$ und auf $\mathfrak{C}$ der reelle Teil von φ_K

$$\Re(\varphi_K(s)) = \frac{1}{h_0} \sum_\chi \cos(\omega(K)) \cdot (\log|L_\chi(s)| - \log|L_\chi(2)|) + \Re(R_0(s)).$$

($\omega(K)$ ist reell und die Logarithmen sind reell zu nehmen.)

$$\Re(\varphi_K(s)) \leqq \frac{1}{h_0} \sum_\chi \{|\log|L_\chi(s)|| + |\log|L_\chi(2)||\} + \Re(R_0(s)).$$

Gemäß den früher bewiesenen Abschätzungen von L_χ ist für

$$|t| \geqq e^4,\ 2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{c_6 \log^{\varkappa'}|t|} > 1 - \frac{1}{\log|t|}$$

$$-\log\left(c_7 (\log|t|)^{\varkappa' - 2}\right) < \log|L_\chi(s)| < \log(c_1 \log|t|),$$

$$|\log|L_\chi(s)|| < \log(c_1 c_7 \log^{\varkappa'}|t|).$$

(Denn $c_1, c_7 > 1$ und $\varkappa' - 2 = \dfrac{\varkappa}{\alpha_1 - \alpha_0} - 1 > 0$, $\log|t| > 1$.)

Es ergibt sich daher für $|t| \geqq e^4$, $2 \geqq \sigma \geqq 1 - \dfrac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}|t|}$ (da ja $d_1 \geqq c_6$ ist):

$$\Re(\varphi_K(s)) < \frac{h}{h_0} \varkappa' \log\log|t| + C_1 < \bar{c}_1 \log\log|t|.$$

(Mit $\bar{c}_\nu$ und C_ν sollen von jetzt ab positive Konstanten bezeichnet werden.)

Setzen wir nun $K = K_\alpha$, wo α einen der Indices $1, \ldots, b$ bedeutet, und entsprechend $h_0 = h_\alpha$, sodaß

$$\begin{aligned} h_1 &= \cdots = h_a = 2h, \\ h_{a+1} &= \cdots = h_b = h \end{aligned}$$

ist, dann tritt an Stelle von $\sum_p' \dfrac{1}{p^s}$ die Summe $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s}$.

Für $\sigma > 1$ besteht ferner die Gleichung

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s}} = e^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p_{\alpha\varkappa}^{ms}}} = e^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s} + R_\alpha(s)}$$

$$= e^{\varphi_{K_\alpha}(s) + R_\alpha(s)},$$

worin $R_\alpha(s)$ für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und beschränkt ist.

Außerdem gilt für $\sigma > 1$ die Darstellung

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_{\alpha\varkappa}^s}} = e^{\frac{1}{h_\alpha} \log \frac{1}{s-1} + \bar{R}_\alpha(s)},$$

wo $\overline{R}_\alpha$ eine auf der Kurve $\mathfrak{C}$ und rechts davon reguläre Funktion bedeutet.

(Dies folgt aus der vorhin bewiesenen Gleichung

$$\varphi_\varkappa(s) = \frac{1}{h_0}\log\frac{1}{s-1} + \overline{R}_0(s).)$$

Ferner folgt auf Grund der eben bewiesenen Ungleichungen für

$$|t| \geqq e^4,\quad 2 \geqq \sigma \geqq 1 - \frac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}|t|}$$

$$\left|e^{\varphi_{K_\alpha}(s) + R_\alpha(s)}\right| = e^{\Re(\varphi_{K_\alpha}(s)) + \Re(R_\alpha(s))} < e^{\overline{c}_1 \log\log|t| + C_2}$$
$$< e^{\overline{c}_2 \log\log|t|} = \log^{\overline{c}_2}|t|.$$

Für $K = H_\nu$, $\sigma > 1$ ist

$$\sum_p{}' \frac{1}{p^s} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{1}{p_\varkappa^s},$$

und

$$\left(\sum_\varkappa \frac{1}{p_\varkappa^s} + P(s)\right)^{h-2} = (\varphi_{H_\nu}(s) + P(s))^{h-2}.$$

(h_0 ist für die nicht ambige Klasse H_ν gleich h zu setzen.)

Da $P(s)$ für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und beschränkt ist, so ergibt sich einerseits für $\sigma > 1$

$$(\varphi_{H_\nu}(s) + P(s))^{h-2} = \left(\frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + \overline{P}(s)\right)^{h-2},$$

worin $\overline{P}(s)$ eine auf $\mathfrak{C}$ und rechts von $\mathfrak{C}$ reguläre Funktion ist, andrerseits für $|t| \geqq e^4$, $2 \geqq \sigma \geqq 1 - \dfrac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}|t|}$

$$|\varphi_{H_\nu}(s) + P(s)|^{h-2} < \overline{c}_3 \log^{\varkappa'(h-2)}|t|.$$

Fassen wir alles zusammen, so finden wir zunächst (unter Benutzung der Gleichung (1)) folgende für $\sigma > 1$ bestehende Identität:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s} = Q(s)\cdot\left(\prod_{\alpha=1}^{b} e^{\frac{1}{h_\alpha}\log\frac{1}{s-1} + \overline{R}_\alpha(s)}\right)\cdot\left(\frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + \overline{P}(s)\right)^{h-2} \tag{2}$$
$$= T(s).$$

Dabei ist die Funktion

$$Q(s) \cdot \prod_{\alpha=1}^{b} e^{\overline{R}_\alpha(s)} = \overline{Q}(s)$$

rechts von $\mathfrak{C}$ und auf $\mathfrak{C}$ regulär. Ferner ist

$$\sum_{\alpha=1}^{b} \frac{1}{h_\alpha} = \frac{a}{2h} + \frac{b+1-a}{h} - \frac{1}{h} = \frac{a}{2h} + \frac{1}{h}\left(\frac{h-a}{2}\right) - \frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{h} = \gamma.$$

$\left(\frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + \overline{P}(s)\right)^{h-2}$ ist eine ganze rationale Funktion $(h-2)$ten Grades von $\log\frac{1}{s-1}$, deren erster Koefficient eine positive Zahl ist, während die übrigen Koefficienten Funktionen von s sind, welche sich auf $\mathfrak{C}$ und rechts von $\mathfrak{C}$ regulär verhalten. Diese ganze rationale Funktion werde mit $J\left(\log\frac{1}{s-1}\right)$ bezeichnet.

Setzt man alles ein, so erhält man

$$T(s) = \overline{Q}(s) \cdot e^{\gamma \log \frac{1}{s-1}} \cdot J\left(\log\frac{1}{s-1}\right). \tag{3}$$

(Der Logarithmus ist dabei so normiert, daß er für reelles $s > 1$ reelle Werte hat.)

Aus der Gleichung (3) ist ersichtlich, daß $T(s)$ sich in $\mathfrak{B}$ als reguläre Funktion erklären läßt und in den Randpunkten von $\mathfrak{B}$, mit Ausnahme des Punktes 1, eine analytische Fortsetzung gestattet.

Ferner folgt aus (2), auf Grund der bewiesenen Ungleichungen und weil die Gleichungen

$$\varphi_{K_\alpha}(s) + R_\alpha(s) = \frac{1}{h_\alpha}\log\frac{1}{s-1} + \overline{R}_\alpha(s)$$

$$\varphi_{H_\nu}(s) + P(s) = \frac{1}{h}\log\frac{1}{s-1} + \overline{P}(s)$$

im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ wie auch auf $\mathfrak{C}$ gültig bleiben, für $|t| \geqq e^4$, $2 \geqq \sigma \geqq 1 - \dfrac{1}{d_1 \log^{\varkappa'}|t|}$

$$|T(s)| < \bar{c}_4 \cdot \log^{b \cdot \bar{c}_3}|t| \cdot \log^{\varkappa'(h-2)}|t| = \bar{c}_4 \log^{\beta}|t|,$$

wobei β eine positive Konstante bedeutet.

($\bar{c}_2$ kann für alle α ($\alpha = 1, \ldots, b$) gleichmäßig gewählt werden. — Man beachte, daß $Q(s)$ für $\sigma \geqq \vartheta$ beschränkt ist.)

Da nun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}$ für $\sigma > 1$ absolut konvergiert und

$$\sum_{n=1}^{x} g_n = \bar{S}_\nu(x),$$

ist, so läßt sich entsprechend wie im vorigen Paragraphen beweisen, daß (für $x > 1$)

$$(4) \qquad \begin{aligned} \int_1^x \frac{\bar{S}_\nu(u)}{u}\, du &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\, T(s)\, ds + O(1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2}\, T(s)\, ds + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right) \end{aligned}$$

ist[1]; $\left(\int_1^x \frac{\bar{S}_\nu(u)}{u}\, du = \sum\limits_{n=1}^{x} g_n \log \frac{x}{n}\right)$

denn da $\gamma < 1$ ist, da ferner auf dem Wege $\mathfrak{w}$ die Funktionen $\frac{x^s}{s^2}$, $\bar{Q}(s)$ sowie die Koefficienten von J beschränkt sind und der Imaginärteil von $\log \frac{1}{s-1}$ absolut $\leqq \pi$ ist, so wird der Integrand $\frac{x^s}{s^2}\, T(s)$ im Punkte 1 schwächer unendlich als $\frac{1}{s-1}$. Man darf daher in den Punkt 1 hinein integrieren.

Berücksichtigt man, daß der imaginäre Teil von

$$\log \frac{1}{s-1} \, (= -\log(s-1))$$

auf dem oberen Ufer des Schnittes $\mathfrak{S}$ gleich $-\pi i$, auf dem unteren gleich $+\pi i$ ist, so ergibt sich durch Einsetzen des Ausdrucks von $T(s)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2}\, T(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\vartheta} \frac{x^\sigma}{\sigma^2}\, \bar{Q}(\sigma) \, . \, e^{\gamma \log \frac{1}{1-\sigma}} \left\{ e^{-\gamma\pi i} \, . \, J\left(\log \frac{1}{1-\sigma} - \pi i\right) - e^{\gamma \pi i} \, . \, J\left(\log \frac{1}{1-\sigma} + \pi i\right) \right\} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{\vartheta} \frac{x^\sigma}{\sigma^2}\, \bar{Q}(\sigma) \, . \, e^{\gamma \log \frac{1}{1-\sigma}} \, . \, \bar{J}\left(\log \frac{1}{1-\sigma}\right) d\sigma, \end{aligned}$$

---

1) $\mathfrak{w}$ hat dieselbe Bedeutung wie bisher.

wobei $\bar{J}$ wieder eine ganze rationale Funktion $(h-2)$ten Grades bedeutet, welche Funktionen von σ zu Koefficienten hat, die für $\vartheta \leqq \sigma \leqq 1$ beschränkt sind. $\left(\log \frac{1}{1-\sigma}\right.$ bezeichnet den reellen Logarithmus.$\left.\right)$

Wird daher $\sigma = 1-y$ gesetzt, so ist für $0 < y \leqq 1-\vartheta$

$$\left|\frac{\bar{Q}(\sigma)}{\sigma^2} e^{\gamma . \log \frac{1}{1-\sigma}} . \bar{J}\left(\log \frac{1}{1-\sigma}\right)\right| < N . e^{\gamma \log \frac{1}{y}} . \log^{h-2} \frac{1}{y}$$

$$< N' . e^{\gamma' \log \frac{1}{y}},$$

worin für γ' irgend eine Zahl $> \gamma$ gesetzt werden darf und N' bei gegebenem γ' eine feste Größe ist. (N bedeutet eine Konstante.)

Nehmen wir $\gamma' < 1$ an (was ja zulässig ist, da $\gamma < 1$ ist), so folgt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{w}}\right| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{1-\vartheta} x^{1-y} N' . e^{\gamma' \log \frac{1}{y}} dy$$

$$< \frac{N' . x}{2\pi}\int_0^{\infty} x^{-y} e^{-\gamma' \log y} dy$$

$$< \frac{N' . x}{2\pi (\log x)^{1-\gamma'}}\int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\gamma'} dz = \frac{N' . x}{2\pi (\log x)^{1-\gamma'}} \cdot \Gamma(1-\gamma').$$

(x ist > 1 angenommen.)

Demnach ist für $\gamma < \gamma' < 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{w}} \frac{x^s}{s^2} T(s)\, ds = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right),$$

also gemäß der Gleichung (4)

$$\int_1^x \frac{\bar{S}_\nu(u)}{u} du = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right) + O\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right)$$

(denn $\gamma' > \gamma > 0$),

und da $S_\nu(u) \leqq \bar{S}_\nu(u)$ ist, so ist auch

$$\int_1^x \frac{S_\nu(u)}{u} du = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right).$$

Ersetzen wir die Integrationsgrenze x durch $2x$, so erhalten wir:

$$\int_1^{2x} \frac{S_\nu(u)}{u}\, du = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right),$$

und hieraus folgt:

$$S_\nu(x) \,.\, \log 2 = \int_x^{2x} \frac{S_\nu(x)}{u}\, du \leqq \int_x^{2x} \frac{S_\nu(u)}{u}\, du = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right),$$

$$S_\nu(x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1-\gamma'}}\right).$$

Wird

$$\gamma' = \frac{1}{2} - \frac{\vartheta'}{h}$$

gesetzt, so ist zufolge der Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{h}$$

die Forderung

$$\gamma < \gamma' < 1$$

für $1 > \vartheta' \geqq 0$ jedenfalls erfüllt, und es ist

$$1 - \gamma' = \frac{1}{2} + \frac{\vartheta'}{h}.$$

Wir finden somit für $0 \leqq \vartheta' < 1$

$$S_\nu(x) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x} \,.\, (\log x)^{\frac{\vartheta'}{h}}}\right).$$

Dies ist aber gerade die Abschätzung, welche bewiesen werden sollte.

Lebenslauf.

Ich, Paul Bernays, Sohn des Kaufmanns Julius Bernays und seiner Gemahlin Sara, geb. Brecher, bin am 17. Oktober 1888 zu London geboren, bin jüdischer Konfession und Staatsangehöriger der Schweiz (Kanton Zürich).

Von 1895—1907 besuchte ich das Köllnische Gymnasium zu Berlin. Im Sommer 1907 studierte ich an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, von wo ich mich zur Berliner Universität wandte. Diese besuchte ich 4 Semester (1907—1909) und setzte dann das Studium in Göttingen fort.

Meine Studien-Fächer waren Mathematik, Philosophie und Physik.

An Vorlesungen und Übungen habe ich bei folgenden Herren teilgenommen:

Auf der Technischen Hochschule: Boost, Dziobek, Hessenberg, Weihe, Werner.

In Berlin: Frobenius, Hettner, Knoblauch, Krigar-Menzel, Landau, Planck, Rubens, Schottky, Schur, Schwarz, Cassirer, Dessoir, Riehl, Simmel, Stumpf, Fleischer, Friedländer.

In Göttingen: Bernstein, Born, Hilbert, Klein, Koebe, Landau, Toeplitz, Voigt, Weyl, Zermelo, Husserl, Nelson.

Allen meinen Lehrern, insbesondere den Herren Schur, Landau und Nelson spreche ich meinen Dank aus. Herrn Prof. Landau bin ich noch zu speciellem Dank verpflichtet für die vielfache Anregung, die er mir bei der vorliegenden Arbeit hat zu Teil werden lassen.