Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VII,** 17.

ÜBER DIE ALGEBRAISCH-FUNKTIONENTHEORETISCHEN UNTERSUCHUNGEN VON J. L. W. V. JENSEN

VON

G. PÓLYA

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1927

In seinem am 29. und 31. August 1911, anlässlich des skandinavischen Mathematikerkongresses in Kopenhagen gehaltenen Vortrag[1], der interessante Sätze aus dem Grenzgebiet von Funktionentheorie und Algebra entwickelt, kündigte J. L. W. V. Jensen eine Reihe von 5 weiteren Abhandlungen über dasselbe Gebiet an. Die ersten beiden sollten den Inhalt seines Vortrages ausführen und erweitern, die letzte sollte seine algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen auf die Riemannsche ξ-Funktion anwenden. Die angekündigten 5 Abhandlungen wurden jedoch nie publiziert.

Es hatte daher ein begreifliches Interesse zu erfahren, was hierüber in dem Nachlass von Jensen[2] sich befindet. Alle auffindbaren wissenschaftlichen Manuskripte Jensens wurden von Herrn Professor N. E. Nörlund in Verwahrung genommen, und auf seine Veranlassung von Herrn Mag. scient. G. Rasch während des Jahres 1925—26 einer ersten Durchsicht unterzogen. Ich hatte Gelegenheit die Manuskripte während des Monats September 1926 einzusehen.

Die in Verwahrung befindlichen Manuskripte Jensens sind sehr umfangreich, enthalten aber häufige Wieder-

[1] Undersøgelser over Ligningernes Theori, Beretning om den anden skandinaviske Matematikerkongres i Kjøbenhavn 1911, 51—65.

In französischer Übersetzung: Recherches sur la théorie des équations, Acta Mathematica, 36, 1913, 181—195. In den folgenden Fussnoten wird der Vortrag mit JV zitiert und es werden die Seitenzahlen des französischen Textes angegeben.

[2] In Fussnoten mit JN zitiert.

holungen und bestehen nur zu kleinerem Teil aus übersichtlichen Aufzeichnungen seiner Untersuchungen. Der grössere Teil besteht aus fragmentarischen Notizen, aus Rechenblättern mit Formeln ohnen verbindenden Text, aus isoliert auftretenden Formulierungen von Sätzen, bei denen es nur selten ersichtlich ist, ob es sich um Bewiesenes oder Vermutetes handelt, dann aus Auszügen fremder Arbeiten, Literaturverzeichnissen, u. s. w. Dies alles in einigen kleinen Heften und an einer grossen Anzahl von losen Blättern, so dass in den allermeisten Fällen unmöglich festzustellen ist, in welcher Reihenfolge und zu welchem Datum die Aufzeichnungen entstanden sind.

Wie aus dieser Schilderung hervorgeht, erlaubt der Zustand des Nachlasses nicht, dessen Inhalt mit Sicherheit festzustellen. Auch verfügte ich nur über einen kleinen Bruchteil der Zeit, die zu einer philologisch genauen Bearbeitung nötig gewesen wäre. Daher können meine nachfolgenden, die Manuskripte betreffenden Äusserungen nicht auf Sicherheit, sondern nur auf eine gewisse Wahrscheinlichkeit Anspruch erheben. Mir persönlich scheint allerdings der erzielte Wahrscheinlichkeitsgrad ein ziemlich hoher zu sein.

Der grösste Teil des Nachlasses bezieht sich auf das Grenzgebiet von Algebra und Funktionentheorie, ferner auf die ζ-Funktion, also auf den Inhalt der 5 geplanten, aber nicht zustandegekommenen Abhandlungen[3]. Manche all-

[3] Auch deren Titel sind gefunden worden:

I. Introduction. Le théorème de Rolle et ses conséquences.

II. Conditions pour qu'une fonction entière de genre fini ait un nombre fini de racines imaginaires. Théorèmes divers.

III. Variation des signes et nombre des racines.

IV. Transformations linéaires, invariants et convariants.

V. Sur une classe de fonctions de genre un et en particulier sur une fonction de Riemann.

gemein gehaltenen algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen sind vollständig verständlich und erreichen gut erkennbare Zielpunkte. Jedoch betreffend die Anwendung dieser allgemeinen Resultate auf die Riemannsche ξ-Funktion liess sich Nichts finden, was über eine blosse Formulierung der Aufgaben oder über die allerersten Anfänge hinausgeht.

Es sollen im folgenden einige Punkte der Jensenschen Untersuchungen aus dem Grenzgebiet der Algebra und der Funktionentheorie näher beleuchtet werden, sowohl auf Grund des Jensenschen Nachlasses wie auf Grund meiner eigenen Untersuchungen. Ich werde dabei häufig auf einige meiner früheren Publikationen[4] über das Gebiet zu verweisen haben, die sich mit Jensens Untersuchungen in zahlreichen Punkten kreuzen.

Ich will an dieser Stelle Herrn Mag. scient. G. Rasch für seine Hilfe bei Durchsicht der Manuskripte und für seine Mitarbeit bei Auswahl des Stoffes bestens danken.

[4] G. Pólya 1) Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 145 (1915) 224—249. — 2) Über die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen, Mathematische Zeitschrift, 2 (1918) 352—383. — 3) Bemerkung über die Integraldarstellung der Riemannschen ξ-Funktion, Acta Mathematica, 48 (1926) 305—317. — 4) On the zeros of certain trigonometric integrals, The Journal of the London Mathematical Society 1 (1926) 98—99. — 5) Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen; erscheint in dem Journal für die reine und angewandte Mathematik (eingesandt am 26. 6. 1926). — Diese Arbeiten sind im folgenden mit P_1, P_2, ... P_5 zitiert.

Vgl. ferner G. Pólya und I. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 144 (1914) 89—113 (wird mit PSch zitiert). — G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I—II, Berlin, 1925 (wird mit PSz zitiert).

Kapitel I.

Über die Realität der Nullstellen gewisser trigonometrischer Integrale.

Einleitung.

1. Wir betrachten im folgenden reelle ganze Funktionen, d. h. solche, die für reelle Werte der Variablen reelle Werte annehmen. Die Potenzreihe

$$a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n z^n}{n!} + \ldots = F(z)$$

stellt dann und nur dann eine reelle ganze Funktion dar, wenn sie stets konvergiert und die Zahlen a_0, a_1, a_2, ... sämtlich reell sind.

Wir werden insbesondere ganze Funktionen von erhöhtem Genus 1 betrachten. $F(z)$ heisst von erhöhtem Genus 1, wenn

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} H(z)$$

ist, wo $H(z)$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht (= Genus) 0 oder 1 oder ein Polynom ist, und γ eine nichtnegative reelle Konstante bedeutet. Die Klasse der ganzen Funktionen von erhöhtem Genus 1 umfasst also gewisse spezielle ganze Funktionen vom Geschlecht 2, alle Funktionen vom Geschlecht 1 und 0 und die Polynome; sie verdient eine besondere Benennung wegen einfacher algebraischer Eigenschaften, die wiederholt hervortreten werden. (Vgl. Hilfssatz II in Nr. 8).

Dieses Kapitel befasst sich mit Funktionen von der Form:

$$F(z) = 2\int_0^\infty \Psi(t) \cos zt \cdot dt. \tag{1}$$

Es wird an folgenden Voraussetzungen festgehalten:

1) $\Psi(t)$ ist definiert, verschwindet nicht identisch und nimmt reelle Werte an, wenn t reell und nicht negativ ist.

2) $\Psi(t)$ ist unbegrenzt oft differenzierbar.

3) $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-1} \log |\Psi^{(n)}(t)| = -\infty$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Aus 3) folgt (schon allein aus dem Fall $n = 0$), dass $F(z)$ eine ganze Funktion ist. Nach 1) ist $F(z)$ eine reelle ganze Funktion. $F(z)$ ist ersichtlicherweise eine gerade Funktion. Es folgt aus 1) und 3), dass $F(z)$ kein Polynom ist (vgl. den Schluss von Nr. 7). Es sei hinzugefügt die Voraussetzung:

4) $F(z)$ ist von erhöhtem Genus 1.

Die Integraldarstellung der Riemannschen ξ-Funktion besitzt, wie wir unter Nr. 3—4 sehen werden, alle hier geforderten Eigenschaften.

2. Jensen bewies in seinem öfters erwähnten Vortrag[5] den folgenden bemerkenswerten Satz:

Die ganze Funktion $F(z)$ hat dann und nur dann lauter reelle Nullstellen, wenn das Polynom

$$F(D)\,z^n = \int_0^\infty \Psi(t)\,(e^{itD} + e^{-itD})\,z^n\,dt = \tag{2}$$

$$= \int_0^\infty \Psi(t)\,\big((z+it)^n + (z-it)^n\big)\,dt$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nur reelle Nullstellen besitzt.

Jensen knüpft an diesen Satz folgende Bemerkungen: »Es gelang mir notwendige Bedingungen hierfür aufzustellen; diese führten durch Anwendung der Resultate meiner anderweitigen Untersuchungen zu hinreichenden, wenn auch nicht notwendigen Bedingungen, welche glücklicherweise den Fall der ξ-Funktion umfassen. Unterdessen erfordert selbst die Verifikation der Bedingungen wegen der komplizierten Form von $\Phi(t)$ eine sehr bedeutende Rechen-

[5] JV S. 189. — D bedeutet, wie üblich, das Symbol des Differenzierens, und zwar nach der Variablen z.

arbeit[6]. Mit dem Vorangehenden habe ich das Riemannsche Problem vom Transzendenten auf das Algebraische zurückgeführt«.

Nach Einsicht des Jensenschen Nachlasses und nach eingehender Überlegung der Sachlage ist hierzu, scheint es mir, folgendes zu sagen:

1) Es konnten in Jensen's Nachlass einige einfache notwendige Bedingungen für die Realität der Nullstellen des Integrals (1) aufgefunden werden, die im Falle der ξ-Funktion nachweisbar erfüllt sind. (Vgl. Nr. 6).

2) Es konnten im Nachlass mehrere notwendige und hinreichende Bedingungen aufgefunden werden (vgl. Nr. 7—9), aber ohne Nachweis dafür, dass sie durch die ξ-Funktion erfüllt sind, ja ohne die Andeutung irgendeines zum Nachweis führenden Weges. Insbesondere sind keine numerischen Rechnungen, die irgendwie diesem Zwecke dienen könnten, vorhanden. Die Bedingungen sind übrigens von so komplizierter Form, dass durch ihre Aufstellung die Aufgabe kaum zugänglicher gemacht worden zu sein scheint.

3) Nicht notwendige, nur hinreichende Kriterien, insbesondere solche, deren Anwendung auf die ξ-Funktion irgendwie fortgeschritten wäre, konnten im Nachlass nicht aufgefunden werden.

4) Nachzuweisen, dass die unendlich vielen algebraischen Gleichungen, die durch Nullsetzen der Polynome (2) entstehen, nur reelle Wurzeln haben, scheint mir keine algebraische Aufgabe zu sein, und ein solcher Nachweis scheint mir undurchführbar ohne die Auffindung gewisser Eigenschaften der Funktion $\Psi(t)$. Nun sind aus dem Nachlass

[6] Wird $\Psi(t)$ zu $\Phi(t)$, so wird die durch die Formel definierte Funktion $F(z)$ zu $\xi(z)$. Die Bezeichnung $\Phi(t)$ wird auch hier (in einer wenig verschiedenen Bedeutung) gebraucht. Vgl. (9), (10), (11).

nur wenige Eigenschaften derjenigen speziellen Funktion $\Psi(t)\,(=\Phi(t))$ ersichtlich, die in der Integraldarstellung der ξ-Funktion auftritt. Ich werde durch ein Beispiel zeigen, dass aus diesen wenigen Eigenschaften die Realität der Nullstellen noch nicht gefolgert werden kann. (Beispiel b) in Nr. 11.)

5) Überhaupt scheint mir (wie den meisten andern in der Frage Interessierten) das Vorhaben, ein derartiges Problem durch numerische Rechnung entscheiden zu wollen, aussichtslos zu sein. Ich werde zugunsten dieser Ansicht bei Besprechung des eben erwähnten Beispiels (in Nr. 11) ein Argument hervorbringen.

Das Folgende bringt ausser der Besprechung der erwähnten Jensenschen Kriterien eine Zusammenstellung derjenigen dem Verfasser bekannten wenigen Eigenschaften der Integraldarstellung der ξ-Funktion, deren Zusammenhang mit der Frage der Wurzelrealität schon heute einigermassen ersichtlich ist. Der Gegenstand berührt sich vermutlich mit dem der letzten der von Jensen geplanten 5 Abhandlungen[7].

[7] Der hier diskutierte Weg, den Jensen in seinem Vortrag[1] zur Lösung der Riemannschen Aufgabe andeutet, ist wesentlich verschieden von dem, den er 12 Jahre vorher in folgenden Worten angekündigt hat: (Acta Mathematica, Bd. 22, 1899, S. 364): »...en employant le critère donné plus haut, je suis parvenu à démontrer rigoureusement que $\xi(t)$ n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle $|t - ri| = r$«. Unter »critère« kann man dabei kaum was anderes verstehen, als das auf S. 362, Zeile 11 v. u. erwähnte »critère précieux«. Es handelt sich also um die folgende Situation (worauf auch verschiedene Zeichnungen in JN sich beziehen): Die Jensensche Formel wird auf $\zeta(s)$ angewandt in einem Kreis vom Radius r und Mittelpunkt $s = r + \frac{1}{2}$. Man kann hieraus einen Ausdruck konstruiren, der dann und nur dann genau $= 0$ ist, wenn $\zeta(s)$ keine Nullstellen im besagten Kreise hat, also für beliebig grosses r dann und nur dann verschwindet, wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist. Wir besitzen keine Mittel, um diesen Ausdruck, dessen wesentlicher Teil ein entlang der Kreisperipherie erstrecktes Integral ist, genau zu berechnen.

(Forsetzung auf S. 10.)

Die Integraldarstellung der ξ-Funktion.

3. Riemann setzt[8]

$$\frac{1}{2}\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\pi^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)\zeta\left(z+\frac{1}{2}\right)=\xi(iz)$$

$$e^{-\pi x}+e^{-4\pi x}+e^{-9\pi x}+\ldots=\psi(x)$$

und findet

$$\xi(z)=\frac{1}{2}-\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty\psi(x)\,x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}z\log x\right)dx. \tag{3}$$

Man vertausche z mit $\frac{1}{2}z$, führe eine neue Integrationsvariable mittels

$$x=e^{4t}$$

ein, und setze

$$\frac{1}{4}e^t\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-n^2\pi e^{4t}}=\frac{1}{4}e^t\left(1+2\,\psi\left(e^{4t}\right)\right)=\omega(t). \tag{4}$$

Man findet so

$$\xi\left(\frac{z}{2}\right)=-\int_0^\infty\left(2\,\omega(t)-\frac{1}{2}e^t\right)\cos zt\,dt+\frac{1}{2}-\int_0^\infty\left(2\,\omega(t)-\frac{1}{2}e^t\right)z^2\cos zt\,dt. \tag{5}$$

Die bekannte Gleichung (das Zeichen $\vartheta(x)$ wird in einer von der üblichen abweichenden Bedeutung gebraucht)

$$\vartheta(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-n^2\pi x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n^2\pi}{x}} \tag{6}$$

besagt, dass

$$\omega(-t)=\omega(t) \tag{7}$$

Da aber nur ein unendlich klein werdender Teil der Kreisperipherie in den kritischen Streifen fällt, ist leicht festzustellen, dass der fragliche Ausdruck für $r\to\infty$ gegen Null strebt. Aus dieser im ersten Moment verheissungsvollen Tatsache kann man aber nichts über die Riemannsche Vermutung schliessen. Denn lässt man den Kreis mit demselben Mittelpunkt anstelle die Gerade $\sigma=\frac{1}{2}$ die Gerade $\sigma=0$ berühren ($\sigma=\Re s$), so wird für $r\to\infty$ der im kritischen Streifen verlaufende Bogen dem ganzen Umfang gegenüber noch immer unendlich klein, obzwar dann der Kreis bei wachsendem r nacheinander alle Nullstellen aufnimmt.

[8] Riemann's Werke, (1876), S. 138.

ist. Hieraus folgt

$$\omega'(0) = 0. \tag{8}$$

Man forme das zweite Integral an der rechten Seite von (5) durch zweimalige partielle Integration um, indem man beide Male den zweiten trigonometrischen Faktor des Integranden integriert. Mit Beachtung der Formel (8) und des Verhaltens von $\omega(t)$ für $t \to \infty$ folgt[9]

$$\xi\left(\frac{z}{2}\right) = 2\int_0^\infty \bigl(\omega''(t) - \omega(t)\bigr) \cos zt\,dt = 2\int_0^\infty \Phi(t) \cos zt\,dt. \tag{9}$$

Wir haben zur Abkürzung

$$\omega''(t) - \omega(t) = \Phi(t) \tag{10}$$

gesetzt.

4. Wir wollen jetzt einige Eigenschaften der Funktion $\Phi(t)$ aufzählen[10]. Gemäss (10) und (4) ist

$$\Phi(t) = 4\sum_1^\infty (2n^4\pi^2 e^{9t} - 3n^2\pi e^{5t})\, e^{-n^2\pi e^{4t}}. \tag{11}$$

I. Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi^{(n)}(t)\, e^{(\pi - \varepsilon)e^{4t}} = 0.$$

Dies folgt unmittelbar aus (11) und zeigt, dass $\Phi(t)$ die Bedingung 3), die wir in Nr. 1 der Funktion $\Psi(t)$ auferlegt haben, reichlich erfüllt.

[9] Formel (9) ist im wesentlichen die Riemannsche Integraldarstellung der ξ-Funktion a. a. O. [8], verschieden ist nur der Aufbau der Funktion Φ. Dieser Aufbau wird übrigens auch in P_4 verwendet. In JN wird (9) gelegentlich als die »wichtigste Formel« (wohl unter den Integraldarstellungen der ξ-Funktion) bezeichnet.

[10] I ist in JV (S. 188), II und III sind in JN öfters hervorgehoben. Für II und IV vgl. P_3. — II und III waren (nebst der in Nr. 6 im Anschluss an Satz III hervorgehobenen Konsequenz) mehreren mit mir befreundeten Mathematikern bekannt; beide kommen in den Tagebüchern von A. Hurwitz (aufbewahrt in der Bibliothek der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich) unter dem Datum 1899 vor.

II. $\Phi(t)$ ist eine gerade Funktion.

Dies folgt aus (10) und (7).

III. Es ist $\Phi(t) > 0$ für alle reellen Werte von t.

Für $t \geqq 0$ sind alle Glieder der Summe (11) positiv, da $2\pi > 3$. Für $t < 0$ ist II zu beachten.

IV. Es ist für $t \to \pm\infty$

$$\Phi(t) \backsim 8\pi^2 (e^{9t} + e^{-9t})\, e^{-\pi(e^{4t}+e^{-4t})}. \tag{12}$$

Dies folgt für $t \to +\infty$ aus der Darstellung (11), für $t \to -\infty$ aus II. Diese Eigenschaft ist aus folgendem Grunde kurios: ersetzt man in dem Integral (9) $\Phi(t)$ durch die rechte Seite von (12), so entsteht eine ganze Funktion von z, die nachweisbar nur reelle Nullstellen besitzt[11].

5. Die im vorangehenden aufgezählten Eigenschaften von $\Phi(t)$ betreffen nur sein Verhalten im Reellen. Es sei nun $\Phi(t)$ als analytische Funktion von t betrachtet[12].

Die in (6) als $\vartheta(x)$ bezeichnete Funktion ist regulär für $\Re x > 0$, d. h. in der rechten Hälfte der x-Ebene, und hat die imaginäre Achse zur natürlichen Grenze, wie auf mehrere Arten, z. B. aus der Reihe (6) zu ersehen ist. Es ist gemäss (4)

$$\omega(t) = \frac{1}{4} e^t \vartheta(e^{4t}). \tag{13}$$

Folglich ist $\omega(t)$, wie $\Phi(t)$, vgl. (10), regulär im Streifen

$$-\frac{\pi}{8} < \Im t < \frac{\pi}{8} \tag{14}$$

und hat deren Begrenzung, die aus zwei zur reellen Achse der t-Ebene parallelen Geraden besteht, zur natürlichen Grenze.

Bewegt sich t entlang der imaginären Achse der t-Ebene

[11] Siehe P_3 und für einen einfacheren Beweis P_5.

[12] Vgl. P_4.

von $-\frac{i\pi}{8}$ zu $\frac{i\pi}{8}$, so beschreibt $x = e^{4t}$ einen Halbkreis in der x-Ebene, deren Endpunkte $x = -i$ und $x = i$ sind. Wir wollen das Verhalten von $\vartheta(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = i$ ermitteln. Es ist, gemäss (6),

$$(15)\quad \vartheta(i+x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi x} =$$

$$= 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-4m^2\pi x} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = 2\vartheta(4x) - \vartheta(x)$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{4x}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2\pi}{4x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2\pi}{x}}.$$

In den beiden Summen der letzten Zeile heben sich die Glieder für $m = 0$ genau auf, und hieraus ist leicht zu schliessen, dass $\vartheta(i+x)$ für $x \to 0$ sich so verhält, wie $\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{x}}$, d. h. $\vartheta(i+x)$ strebt samt allen Derivierten gegen 0, wenn sich x dem Nullpunkte in einem Winkelraume vom Scheitel 0 und Öffnung $< \pi$ nähert, dessen Winkelhalbierende die positive reelle Achse der x-Ebene ist. Hieraus folgt durch Vertauschung von $i+x$ mit x und durch die Abbildung $\frac{1}{4}\log x = t$ gemäss (13) und (10):

V. Die Funktion $\Phi(t)$ strebt samt allen ihren Derivierten gegen Null, wenn t der imaginären Achse entlang dem Punkte $t = \frac{i\pi}{8}$, dem dem Nullpunkt nächstgelegenen singulären Punkt von $\Phi(t)$, zustrebt.

Notwendige Bedingungen.

6. Es sind hier solche notwendigen Bedingungen für die Realität aller bzw. unendlich vieler Nullstellen zu-

sammengestellt, welche durch die Integraldarstellung (9) der ξ-Funktion nachweisbar erfüllt sind[13].

I. Ist $\Psi''(t) \geqq 0$ für $t \geqq 0$, so hat $F(z)$ überhaupt keine reellen Nullstellen.

Aus der Voraussetzung und aus $\Psi'(t) \to 0$, $\Psi(t) \to 0$ für $t \to +\infty$, vgl. 3) unter Nr. 1, schliesst man $\Psi'(t) \leqq 0$, $\Psi(t) \geqq 0$ für $t \geqq 0$. Aus der letzten Feststellung folgt, dass $F(0) > 0$ ist. Wenn x als reell und $\neq 0$ vorausgesetzt wird, erhalten wir aus (1) durch zweimalige partielle Integration, dass

$$\begin{aligned} x^2 F(x) &= -x\, 2\int_0^\infty \Psi'(t) \sin xt\, dt \\ &= -2\Psi'(0) - 2\int_0^\infty \Psi''(t) \cos xt\, dt \\ &> 2\left(-\Psi'(0) - \int_0^\infty \Psi''(t)\, dt\right) = 0 \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Soll also $F(z)$ reelle Nullstellen haben, so muss $\Psi''(t)$ notwendigerweise Zeichen wechseln. Dies ist immer der Fall, wenn $\Psi(t)$ gerade ist, denn dann ist

$$\int_0^\infty \Psi''(t)\, dt = -\Psi'(t) = 0.$$

So ist insbesondere, wegen II unter Nr. 4, die besprochene notwendige Bedingung durch die ξ-Funktion erfüllt[14].

II. Wenn $F(z)$ unendlich viele Nullstellen in einem Parallelstreifen von der Form

[13] I, II, III in JN. I auch in P_2 (Satz VII, S. 378) und ein mit II verwandter Satz in P_3 (Hilfssatz I, S. 315). Für III vgl. das in Fussnote [10] bezüglich der Eigenschaften II und III Gesagte.

[14] Eine andere in JN befindliche Anwendung des Satzes I betrifft die Funktion $\frac{1}{2} - \xi(z)$. Diese Funktion bleibt für reelles z positiv, wie Formel (3) in Verbindung mit Satz I zeigt. Das Resultat kann noch anders bewiesen werden: Aus Formel (9) folgt in Verbindung mit Eigenschaft III in Nr. 4, dass $|\xi(z)| < \xi(0)$ für reelles $z \neq 0$.

(16) $$-k \leqq \Im z \leqq k$$

besitzt (k ist eine positive Konstante), so ist notwendigerweise

$$\Psi'(0) = \Psi'''(0) = \Psi^{(5)}(0) = \ldots = 0.$$

Es wird also, kurz gesagt, behauptet, dass $\Psi(t)$ eine gerade Funktion ist. Falls diese Behauptung nicht zutrifft, ist für ein gewisses ganzes q

$$\Psi'(0) = \Psi'''(0) = \ldots = \Psi^{(2q-3)}(0) = 0, \quad \Psi^{(2q-1)}(0) \neq 0.$$

Man erhält aus (1), mit Rücksicht auf Bedingung 3) in Nr. 1, durch wiederholte partielle Integration

$$F(z) = \frac{2(-1)^q \Psi^{(2q-1)}(0)}{z^{2q}} + \frac{2(-1)^{q+1}}{z^{2q+1}} \int_0^\infty \Psi^{(2q+1)}(t) \sin zt \cdot dt.$$

Genügt z der Ungleichung (16), so ist $|\sin zt| \leqq e^{kt}$. Daher ist, wenn z im Streifen (16) bleibend gegen ∞ strebt,

$$\lim z^{2q} F(z) = 2(-1)^q \Psi^{(2q-1)}(0) \neq 0.$$

Also ist $F(z)$ im genügend entfernten Teil des Streifens $\neq 0$, was der Voraussetzung wiederspricht.

Bekanntlich erfüllt $\xi\left(\frac{z}{2}\right)$ die Voraussetzung des Satzes II mit $k = 1$. Somit folgt, dass $\Phi(t)$ eine gerade Funktion ist. Dies ist in Nr. 4 auf ganz anderem Wege nachgewiesen worden (Eigenschaft II).

III. Wenn $F(z)$ nur reelle Nullstellen besitzt, und seine Reihenentwicklung

$$F(z) = b_0 - \frac{b_1}{1!} z^2 + \frac{b_2}{2!} z^4 - \ldots$$

geschrieben wird, sind alle Koeffizienten b_0, b_1, $b_2, \ldots$ vom selben Vorzeichen.

$F(z)$ ist, gemäss dem Integralausdruck (1), eine reelle und gerade ganze Funktion, und zwar, nach Voraussetzung 4) in Nr. 1, von erhöhtem Genus 1. Somit besitzt $F(z)$ einen Produktausdruck von der Form

$$F(z) = c z^{2q} e^{-\gamma z^2} \prod_\nu \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_\nu^2}\right);$$

c ist reell, $\gamma \geqq 0$, und das Produkt $\prod_\nu$ umfasst unendlich oder endlich viele oder gar keine Faktoren (in diesem letzten Fall bedeutet es die Einheit). Wenn alle α_ν reell sind, haben die Entwicklungskoeffizienten von $F(iz)$ ersichtlicherweise sämtlich das Vorzeichen von c; hieraus folgt die Behauptung.

Die durch Satz III gelieferte notwendige Bedingung ist sicherlich erfüllt, wenn $\Psi(t) \geqq 0$ ist, da doch

$$b_n = \frac{n!\,2}{2n!} \int_0^\infty \Psi(t)\, t^{2n}\, dt$$

in diesem Falle ersichtlich > 0 ist. Somit ist die Bedingung insbesondere im Falle der ξ-Funktion, d. h. durch $\Phi(t)$ erfüllt, vgl. die Eigenschaft III in Nr. 4.

Wie wenig wir aber an diesem Wege fortgeschritten sind, zeigt es am deutlichsten, dass die nächsteinfachste notwendige Bedingung für die Realität aller Nullstellen[15]

$$b_n^2 - b_{n-1} b_{n+1} \geqq 0 \tag{17}$$

im Falle der ξ-Funktion noch nicht verifiziert ist.

Notwendige und hinreichende Bedingungen.

7. Mit Rücksicht auf Satz II der vorangehenden Nr. 6 sei nun angenommen, dass die reellwertige Funktion $\Psi(t)$

[15] Vgl. PSch Satz II, S. 110. Die aus (17) für die Funktion $\Phi(t)$ sich ergebende Ungleichung wird in JN wiederholt ohne Beweis erwähnt.

für alle reellen Werte von t definiert ist, ferner, dass sie gerade ist und den Bedingungen 2) 3) 4) der Nr. 1 genügt. Für die Realität sämtlicher Nullstellen der Funktion $F(z)$, definiert durch (1), fanden sich in Jensens Nachlass[16] drei verschiedene notwendigen und hinreichenden Kriterien.

I. Die Nullstellen von $F(z)$ sind dann und nur dann sämtlich reell, wenn

$$(18)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\,\Psi(\beta)\,e^{i(\alpha+\beta)x}\,e^{(\alpha-\beta)y}\,(\alpha-\beta)^2\,d\alpha\,d\beta \geqq 0$$

für alle reellen Werte von x und y.

II. Die Nullstellen von $F(z)$ sind dann und nur dann sämtlich reell, wenn

$$(19)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\,\Psi(\beta)\,e^{i(\alpha+\beta)x}\,(\alpha-\beta)^{2n}\,d\alpha\,\alpha\beta \geqq 0$$

für alle reellen Werte von x und $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

III. Die Nullstellen von $F(z)$ sind dann und nur dann sämtlich reell, wenn

$$(20)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\,\Psi(\beta)\,(x+i\alpha)^n(x+i\beta)^n(\alpha-\beta)^2\,d\alpha\,d\beta > 0$$

für alle reellen Werte von x und $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ob diese Kriterien durch die ξ-Funktion erfüllt sind oder nicht, wissen wir nicht, und es ist auch kein Weg

[16] In JN steht $\geqq 0$ in Kriterium III anstelle von dem hier gegebenen > 0. Für den Fall $\geqq 0$ ist das Hinreichen, für > 0 die Notwendigkeit schwieriger zu begründen. Ich habe mich auf den Fall > 0 beschränkt und zu dessen Behandlung das über JV und JN etwas hinausgehende Kriterium III′ aufgestellt. — In JV werden nur Funktionen vom Geschlecht 0 oder 1 betrachtet (dies hätte schon in Fussnote [5] hervorgehoben werden sollen). Die Ausdehnung auf den etwas allgemeineren Fall von »erhöhtem Genus 1« wird in JN für verschiedene verwandte Sätze ins Auge gefasst. Durch diese Ausdehnung wird der volle Gültigkeitsbereich der Sätze erreicht. Vgl. PSch, insbesondere Satz IV, S. 110.

ersichtlich, an dem das Erfülltsein geprüft werden könnte. Nur das ist leicht zu sehen, dass alle fraglichen Ungleichungen für $x = 0$ sicher richtig sind, falls $\Psi(t) > 0$ ist, also insbesondere auch im Fall der ξ-Funktion.

Um die Kriterien I, II, III zu beweisen, ist es vorteilhaft sie anders und etwas allgemeiner zu formulieren:

Es sei $F(z)$ eine reelle ganze Funktion von erhöhtem Genus 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Nullstellen von $F(z)$ sämtlich reell seien, lässt sich in den folgenden beiden Formen ausdrücken:

I′. Für alle reellen Werte von x und y ist

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} | F(x+iy) |^2 \geqq 0.$$

II′. Für alle reellen Werte von x sind die Entwicklungskoeffizienten von $|F(x+iy)|^2$ nach wachsenden Potenzen von y sämtlich nicht negativ.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Nullstellen von $F(z)$ sämtlich reell seien und $F(z)$ **nicht von der Gestalt** $e^{\alpha z} P(z)$ sei, wo α eine Konstante und $P(z)$ ein Polynom ist, lautet so:

III′. Wird

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} z^n + \dots$$

und das Polynom

$$a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \dots + a_n = F_n(z) \tag{21}$$

gesetzt, so ist für alle reelle Werte von x und für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$F_n^2(x) - F_{n-1}(x) F_{n+1}(x) > 0. \tag{22}$$

Dass die Kriterien I′, II′, III′ tatsächlich auf I, II, III herauskommen, falls $F(z)$ durch (1) gegeben und $\Psi(t)$ gerade ist, ist leicht zu sehen. Man beachte zunächst, dass in diesem Fall

$$|F(x+iy)|^2 = F(x+iy)\,F(z-iy) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\,\Psi(\beta)\,e^{i(\alpha+\beta)x}\,e^{-(\alpha-\beta)y}\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n!} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha)\,\Psi(\beta)\,e^{i(\alpha+\beta)x}\,(\alpha-\beta)^{2n}\,d\alpha\,d\beta$$

und

$$F_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\,(z+it)^n\,dt$$

ist. Hieraus folgen I, II und auch das Formale an III.

Nun kann die durch (1) definierte Funktion $F(z)$ nicht identisch verschwinden, da $\Psi(t)$ nicht identisch verschwindet[17]. Ferner strebt $F(z)$ gegen 0, wenn z entlang der reellen Achse gegen ∞ strebt, wie man durch partielle Integration zeigt, vgl. den Beweis von I unter Nr. 6; somit ist $F(z)$ auch kein Polynom. Schliesslich ist $F(z)$ eine gerade Funktion, und kann als solche auch nicht die Gestalt $e^{\alpha z} \times$ Polynom annehmen.

8. Die Beweise der Kriterien I′ und II′ finden sich im Jensenschen Vortrag und sind ziemlich einfach, der Beweis des Kriteriums III′ ist heikler und erfordert einige Hilfssätze[18].

Hilfssatz I. Es sei α eine reelle Konstante, $g(z)$ ein Polynom mit nur reellen Nullstellen, und M

[17] Vgl. G. Pólya, Mathematische Zeitschrift, 18 (1923) 105—106.

[18] Betreffend die Kriterien I, II vgl. JV 191—193. Die Hilfssätze I, III, IV verschärfen in JV befindliche Gedankengänge (S. 184—187), die teilweise schon auf Hermite und Laguerre zurückgehn. Die Methode ist ähnlich wie in P_1, S. 232—234.

die grösste von den Nullstellen des Polynoms $g(z)$ erreichte Multiplizität. Dann besitzt

$$(D-\alpha)\, g(z) = g'(z) - \alpha\, g(z)$$

ebenfalls nur reelle Nullstellen, und zwar keine von höherer Multiplizität als $M-1$, falls $M \geqq 2$ ist.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_l$ sämtliche Stellen, an denen $g(z)$ verschwindet, $x_1 < x_2 < \ldots < x_l$, und zwar sei x_ν eine Nullstelle von der Multiplizität m_ν. Es ist $M = Max(m_1, m_2, \ldots m_l)$. Betrachten wir, Bestimmtheit halber, den Fall, in dem $\alpha > 0$ ist. Es hat die Funktion

$$De^{-\alpha z} g(z) = e^{-\alpha z}\big(g'(z) - \alpha\, g(z)\big)$$

auf Grund des Satzes von Rolle, im Innern des halboffenen Intervalles $x_{\nu-1} < x \leqq x_\nu$ mindestens eine Nullstelle und an dessen rechtem Endpunkt x_ν hat sie offenbar $m_\nu - 1$ (was $\geqq 0$ ist) zusammenfallende Nullstellen. Dies gilt auch für $\nu = 1$, wenn $x_0 = -\infty$ gesetzt ist. Somit haben wir $m_1 + m_2 + \ldots + m_l$ reelle Nullstellen des Polynoms $g'(z) - \alpha\, g(z)$ nachgewiesen. Die sind alle seine Nullstellen, Insbesondere ist die Nullstelle im Innern des Intervalls $x_{\nu-1} < x \leqq x_\nu$ einfach, und somit hat von den eventuellen mehrfachen Nullstellen keine höhere Multiplizität als $M-1$.

Hilfssatz II. Eine reelle ganze Funktion $F(z)$ von erhöhtem Genus 1 kann so durch eine **reelle** Polynomfolge $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ angenähert werden, dass erstens

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = F(z)$$

gleichmässig in jedem beschränktem Bereich gilt, und zweitens alle **nichtreellen** Nullstellen von $f_n(z)$ unter den Nullstellen von $F(z)$ enthalten sind.

In der Tat, $F(z)$ hat nach Definition eine Produktzerlegung von der Gestalt

$$F(z) = c e^{-\gamma z^2 + \beta z} z^q \Pi \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\nu}}; \tag{23}$$

α_ν, β, γ, c, q sind Konstanten, q ganz und $\geqq 0$, γ reell und $\geqq 0$. Die α_ν sind entweder gar nicht vorhanden (in diesem Fall ist das Produkt durch 1 zu ersetzen) oder in endlicher Anzahl oder es ist $\Sigma |\alpha_\nu|^{-2}$ konvergent; soweit vorhanden, ist $\alpha_\nu \neq 0$. Da $F(z)$ eine reelle Funktion ist, sind β und c reell, und die α_ν zerfallen in zwei Kategorien: gewisse unter ihnen sind reell, andere gehören paarweise zusammen und sind konjugiert imaginär.

Man setze nun

$$f_n(z) = \left(1 - \frac{\gamma z^2}{N}\right)^N \left(1 + z \frac{\beta + \Sigma_n \alpha_\nu^{-1}}{N}\right)^N c z^q \Pi_n \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right).$$

Die Summe Σ_n und das Produkt Π_n sind über solche Werte von ν erstreckt, für welche $|\alpha_\nu| \leqq n$ ist. Mit jedem nicht reellen α_ν kommt also das dazu konjugierte $\overline{\alpha}_\nu$ in in Σ_n und Π_n vor. Daher ist $f_n(z)$ reell und hat ausser den betreffenden α_ν keine nichtreellen Nullstellen. (Man beachte, dass $\gamma \geqq 0$ ist).

Die ganze Zahl $N = N(n)$ sei so bestimmt, dass im Kreise $|z| \leqq n$

$$\left| f_n(z) - e^{-\gamma z^2} e^{z(\beta + \Sigma_n \alpha_\nu^{-1})} c z^q \Pi_n \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right| < \frac{1}{n}$$

ist; N muss bloss genügend gross gewählt werden.

Die Polynomfolge $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... besitzt offenbar alle von ihr im Hilfssatz II behaupteten Eigenschaften.

Hilfssatz III. H a b e n s o w o h l d i e r e e l l e g a n z e F u n k t i o n

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \frac{a_3 z^3}{3!} + \dots$$

von erhöhtem Genus 1 wie das Polynom $g(z)$ nur reelle Nullstellen, so hat auch das Polynom

$$F(D)\, g(z) = a_0\, g(z) + \frac{a_1 g'(z)}{1!} + \frac{a_2 g''(z)}{2!} + \dots$$

nur reelle Nullstellen, und zwar hat es lauter **verschiedene** Nullstellen, wenn $F(z)$ **nicht** von der Gestalt $e^{\alpha z} P(z)$ ist, wo α eine reelle Konstante und $P(z)$ ein Polynom bedeutet.

Wir wollen zum Beweis mehrere spezielle Fälle unterscheiden

(a) Falls $F(z)$ ein Polynom m-ten Grades,

$$F(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_m)$$

ist, ergibt sich die Realität aller Nullstellen von

$$(24) \quad F(D)\, g(z) = (D - \alpha_m)(D - \alpha_{m-1}) \dots (D - \alpha_1)\, g(z)$$

durch m-malige Anwendung des Hilfsatzes I.

b) Falls $F(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist und der Grad von $g(z)$ nicht mehr als $m+1$ beträgt, ist die in Hilfssatz I genannte Zahl $M \leqq m+1$ und somit hat, wie es sich wieder durch m-malige Anwendung des Hilfssatzes I ergibt, das Polynom (24) lauter einfache Nullstellen.

c) Falls $F(z)$ irgend eine reelle ganze Funktion von erhöhtem Genus 1 mit nur reellen Nullstellen ist, haben die in Hilfssatz II erwähnten Polynome $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... nur reelle Nullstellen. Somit hat, wie unter a) gezeigt, $f_n(D)\, g(z)$ nur reelle Nullstellen, und dasselbe kann man auf Grund einer geläufigen Überlegung auch von

$$\lim_{n \to \infty} f_n(D)\, g(z) = F(D)\, g(z)$$

behaupten.

d) Falls $F(z)$ unendlich viele Nullstellen besitzt, und der Grad von $g(z)$ $m+1$ beträgt, wähle man m Nullstellen von $F(z)$ aus und bilde man das Polynom $f(z)$ m-ten Grades, das diese m Nullstellen besitzt. Man spaltet also $F(z)$ folgendermassen:

$$F(z) = f(z)\, F_1(z),$$

wobei $F_1(z)$ wieder eine reelle ganze Funktion von erhöhtem Genus 1 mit nur reellen Nullstellen bezeichnet. Indem man c) auf $F_1(z)$ anstelle auf $F(z)$ anwendet, findet man, dass

$$F_1(D)\, g(z) = g_1(z)$$

nur reelle Nullstellen hat; übrigens ist der Grad von $g_1(z)$ nicht grösser als $m+1$. Daher hat auf Grund von b)

$$F(D)\, g(z) = f(D)\, F_1(D)\, g(z) = f(D)\, g_1(z)$$

nur reelle einfache Nullstellen.

e) Falls $F(z) = e^{-\gamma z^2}$ ist, $\gamma > 0$, wissen wir schon auf Grund von c), dass

$$e^{-\gamma D^2} g(z) = g^*(z)$$

nur reelle Nullstellen hat. Um mehr zu beweisen, betrachten wir die Formel

$$(25) \qquad g(z) = e^{\gamma D^2} g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - t\sqrt{2\gamma}D}\, dt \cdot g^*(z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} g^*(z - t\sqrt{2\gamma})\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{4\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu}\, e^{-\gamma u^2} g^*(2\gamma u)\, du.$$

Wendet man einen von Laguerre herrührenden, der Descartesschen Zeichenregel analogen Satz[19] auf das letzte Integral in (25) an, so findet man, dass $g(z)$ nicht mehr reelle Nullstellen haben kann, als $e^{-\gamma u^2} g^*(2\gamma u)$ voneinander verschiedene reelle Nullstellen ungerader Multiplizität aufweist. Da $g(z)$ nur reelle Nullstellen und denselben Grad wie $g^*(z)$ besitzt, muss $g^*(z)$ lauter reelle einfache Nullstellen haben.

f) Falls $F(z)$ nicht unendlich viele Nullstellen hat und auch nicht von der Gestalt $e^{\alpha z} \times$ Polynom ist, ist es, vgl. (23), sicherlich von der Gestalt

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} F_1(z),$$

wobei $\gamma > 0$ ist und $F_1(z)$ wieder eine reelle ganze Funktion von erhöhtem Genus 1 mit nur reellen Nullstellen bezeichnet. Es folgt aus e), ähnlich wie unter d), dass $F_1(D)\, g(z)$ nur reelle Nullstellen und

$$F(D)\, g(z) = e^{-\gamma D^2} \bigl(F_1(D)\, g(z)\bigr)$$

nur reelle einfache Nullstellen besitzt.

Hilfssatz III ist durch a) b) c) d) e) f) vollständig bewiesen.

Hilfssatz IV. Notwendig und hinreichend dafür, dass die reelle ganze Funktion

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \ldots + \frac{a_n z^n}{n!} + \ldots$$

von erhöhtem Genus 1 nur reelle Nullstellen besitze und **nicht von der Gestalt** $e^{\alpha z} \times$ Polynom sei, ist die Bedingung, dass das Polynom

[19] Laguerre, Oeuvres, Bd. I, S. 29. Der dort befindliche Beweis ist lückenhaft, vgl. jedoch PSz Bd. 2, Aufgabe V 80, S. 50 und 236.

$$a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = F_u(z)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nur reelle **einfache** Nullstellen besitzen soll.

Falls $F(z)$ nur reelle Nullstellen hat und nicht von der Gestalt $e^{\alpha z} \times$ Polynom ist, hat

$$F_n(z) = F(D)\, z^n$$

nur reelle einfache Nullstellen, auf Grund des Hilfssatzes III.

Falls $F(z) = e^{\alpha z} P(z)$, wo $P(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist, hat, für $n > m$,

$$P(D)\, z^n = P^*(z)$$

eine $(n-m)$-fache Nullstelle im Punkte $z = 0$, und folglich

$$F_n(z) = F(D)\, z^n = e^{\alpha D} P(D)\, z^n = e^{\alpha D} P^*(z) = P^*(z+\alpha)$$

eine $(n-m)$-fache Nullstelle im Punkte $z = -\alpha$.

Wenn, umgekehrt, $F_n(z)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nur reelle Nullstellen hat, hat auch

$$\left(\frac{z}{n}\right)^n F_n\left(\frac{n}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{a_3 z^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

nur reelle Nullstellen, und folglich auch

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n F_n\left(\frac{n}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n z^n}{n!} + \ldots = F(z).$$

Diese drei Feststellungen erschöpfen den Inhalt von Hilfssatz IV.

Hilfssatz V. Das reelle Polynom n-ten Grades $f(x)$ hat dann und nur dann lauter reelle einfache Nullstellen, wenn die $n-1$ Ungleichungen

$$(26) \quad \begin{cases} (n-1)\left(f'(x)\right)^2 - n f(x) f''(x) > 0, \\ (n-2)\left(f''(x)\right)^2 - (n-1) f'(x) f'''(x) > 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(f^{(n-1)}(x)\right)^2 - 2 f^{(n-2)}(x) f^{(n)}(x) > 0 \end{cases}$$

für alle reellen Werte von x Geltung haben.

a) Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Bekanntlich ist[20] die Hessesche Form von $f(x)$

$$(n-1) f'^2(x) - n f(x) f''(x) =$$
$$= \frac{1}{2} f^2(x) \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha_j-\alpha_k)^2}{(x-\alpha_j)^2 (x-\alpha_k)^2}.$$

Diese Formel zeigt, dass die erste im Hilfssatz V genannte Ungleichung für alle reellen Werte von x erfüllt ist, wenn alle Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ reell und voneinander verschieden sind.

b) Wenn $f(x)$ die Eigenschaft besitzt, dass seine Nullstellen alle reell und voneinander verschieden sind, besitzen die Derivierten $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-2)}(x)$ dieselbe Eigenschaft. Somit sind, auf Grund von a) alle im Hilfssatz V genannten Ungleichungen erfüllt.

c) Wenn die $n-1$ Ungleichungen (26) für alle reellen Werte von x erfüllt sind, bildet die Funktionenfolge

$$(27) \qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x)$$

eine verallgemeinerte Sturmsche Kette. In der Tat, aus $f^{(\nu)}(\xi) = 0,\ 1 \leqq \nu \leqq n-1$ und (26) folgt

$$-f^{(\nu-1)}(\xi) f^{(\nu+1)}(\xi) > 0,$$

[20] Vgl. z. B. E. Cesàro, Einleitung in die Infinitesimalrechnung, Leipzig u. Berlin, 1922, S. 411—413.

also dass $f^{(\nu-1)}(x)$ und $f^{(\nu+1)}(x)$ von Null verschieden und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Für $x = -\infty$ zeigt die Kette (27) nur Zeichenwechsel, für $x = +\infty$ nur Zeichenfolgen, somit hat $f(x)$ nur reelle Nullstellen.

Unter a) und b) haben wir bewiesen, dass die Bedingungen (26) für die Realität und Einfachheit aller Nullstellen von $f(x)$ notwendig sind, unter c), dass sie hinreichen [21].

9. Aus den Hilfssätzen der vorangehenden Nummer folgt das Kriterium III′ der Nr. 7.

Dass $F(z)$ nur reelle Nullstellen hat und nicht von der Gestalt $e^{\alpha z} \times$ Polynom ist, ist, gemäss Hilfssatz IV, mit dem Umstand äquivalent, dass die Polynome $F_n(z)$ nur reelle, voneinander verschiedene Nullstellen besitzen.

Es folgt aus (21), dass

$$F_n'(z) = n F_{n-1}(z), \quad F_n''(z) = n(n-1) F_{n-2}(z)$$

also

$$(n-1) F_n'^2(z) - n F_n(z) F_n''(z) = \\ = n^2 (n-1) \left(F_{n-1}^2(z) - F_n(z) F_{n-2}(z)\right).$$

Die im Hilfssatz V erwähnten $n-1$ Ungleichungen (26) haben also im Falle $f(z) = F_n(z)$ eine besondere Struktur: Sie entstehen aus den analogen auf $F_{n-1}(z)$ bezüglichen $n-2$ Ungleichungen durch hinzufügen einer. Dass die

[21] Hilfssatz V steht in Zusammenhang mit einer merkwürdigen, zwischen Fourier und Poisson diskutierten Fragestellung (vgl. Oeuvres de Fourier Bd. 2 (1890), 185—210), worauf auch in JN wiederholt Bezug genommen wird. Ich benütze die Gelegenheit einen damit zusammenhängenden Satz zu erwähnen: »Ist $F(z)$ eine reelle ganze Funktion mit nur endlich vielen imaginären Nullstellen, deren Ordnung kleiner als $\frac{2}{3}$ ist, so gibt es in der Folge der Derivierten $F'(z)$, $F''(z)$, $F'''(z)$, ... eine, die (ebenso, wie alle nachfolgenden) **nur reelle Nullstellen** hat.« Die Zahl $\frac{2}{3}$ scheint nicht in der Natur der Sache, vielmehr in der des benutzten Beweisverfahrens zu liegen.

Polynomfolge $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, ... nur Polynome mit lauter reellen und einfachen Nullstellen enthält, ist somit, gemäss Hilfssatz V, mit dem Bestehen der Ungleichung (22) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ äquivalent. Somit ist Kriterium III′ bewiesen.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz unendlich vieler reeller Nullstellen.

10. Im vorangehenden haben wir dem Nachlass von Jensen folgend, die Funktion $\Psi(t)$ als Funktion der reellen Variablen t betrachtet. Die Methode, durch welche Hardy [22] die Existenz unendlich vieler reeller Nullstellen der ξ-Funktion zuerst bewiesen hat, und welche von F. Bernstein [23] auf ein anderes Beispiel angewendet wurde, führt schliesslich dazu, die Funktion $\Psi(t)$ als analytische Funktion einer komplexen Veränderlichen zu betrachten.

Ich beginne mit dem Beweis des folgenden Satzes [24]:

I. Es sei $\Psi(t)$ eine gerade Funktion, analytisch und reell für reelles t; ihre Potenzreihenentwicklung um den Punkt $t = 0$ herum sei

$$\Psi(t) = c_0 - c_1 t^2 + c_2 t^4 - c_3 t^6 + \ldots$$

und ihre Derivierten seien der Bedingung

[22] G. H. Hardy, Sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann, Comptes rendus, 158 (1914) 1012—1014.

[23] F. Bernstein, Über das Fourierintegral $\int_0^\infty e^{-x^4} \cos tx \cdot dx$, Mathematische Annalen 79 (1919) 265—268.

[24] Satz I kombiniert die Überlegungen von F. Bernstein a. a. O. [23] mit denen von L. Fejér, Nombre des changements de signe d'une fonction dans un intervalle et ses moments, Comptes rendus, 158 (1914) 1328—1331; auch die letztere Arbeit ist im Anschluss an G. H. Hardy entstanden. Der aus I leicht folgende Satz II ist in P_4 formuliert und auf die im folgenden ausführlicher dargestellte Weise auf die ξ-Funktion angewendet.

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \Psi^{(n)}(t) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

unterworfen. Hat das Integral

$$(1') \qquad F(z) = 2\int_0^{\infty} \Psi(t) \cos zt \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) e^{izt} \, dt$$

nur p positive, voneinander verschiedene Nullstellen ungerader Multiplizität, so kann die Zahlenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ nicht mehr als p verschwindende Glieder und auch nicht mehr als p Zeichenwechsel aufweisen.

Die zum Beweis des Satzes II in Nr. 6 verwendete partielle Integration zeigt unter den vorliegenden Bedingungen ($\Psi(t)$ gerade!), dass

$$(28) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} x^{2q} F(x) = 0$$

(x ist reell) für beliebig grosses q gilt. Mit Rücksicht auf (28) kann man auf (1′) die Fouriersche Umkehrformel anwenden und beliebig oft differenzieren. Man erhält so

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(x) \, dx$$

$$\Psi^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (-ix)^m F(x) \, dx$$

$$(29) \qquad 2\,n!\,c_n = (-1)^n \Psi^{(2n)}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x^{2n} F(x) \, dx.$$

Nach einem (schon einmal benutzten) Satz von Laguerre[25] hat die für $\Re z > -1$ sicher reguläre Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x^z F(x) \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zu} F(e^u) e^u \, du$$

nicht mehr reelle nichtnegative Nullstellen, als $F(x)$ voneinander verschiedene positive Nullstellen ungerader Multi-

[25] A. a. O. [19].

plizität aufweist. Beachtet man (29), also dass $f(2n)$ das Vorzeichen von c_n hat, so folgt I ohne weiteres. — Die schwächere Aussage, dass c_n für grosses n nicht verschwindet und festes Vorzeichen bewahrt, ist aus (29) auch ohne den Laguerreschen Satz leicht abzulesen[26]. Für uns genügt eigentlich diese schwächere Aussage. Sie führt durch die Betrachtung der Potenzreihe

$$\Psi(it) = c_0 + c_1 t^2 + c_2 t^4 + \dots$$

und mit Benutzung wohlbekannter funktionentheoretischer Tatsachen, unmittelbar zum folgenden Satz:

II. Wenn $\Psi(t)$ den Bedingungen von Satz I unterworfen bleibt und $F(z)$ **nur endlich viele reellen Nullstellen besitzt**, so liegt keine singuläre Stelle der Funktion $\Psi(t)$ dem Punkte $t = 0$ näher als ein gewisser Punkt iT an der imaginären Achse ($T > 0$), und es gibt ein N, so beschaffen, dass $|\Psi^{(n)}(it)|$ mit wachsendem reellen t ständig wächst, wenn $0 < t < T$ und $n > N$.

(Wenn $\Psi(t)$ eine ganze Funktion ist, bleibt der Schlusssatz von II mit $T = +\infty$ gültig).

Die Aussage II ist auf die ξ-Funktion anzuwenden. Die in der Integraldarstellung (9) von ξ auftretende Funktion $\Phi(t)$ besitzt alle von $\Psi(t)$ in I geforderten Eigenschaften (vgl. I und II unter Nr. 4 und den Anfang von Nr. 5); ihr zum Punkt $t = 0$ nächstgelegener singulärer Punkt ist $t = \frac{i\pi}{8}$, aber keine Derivierte von $\Phi(t)$ kann dem Betrage nach monoton zunehmen, wenn t geradlinig von $t = 0$ zu $t = \frac{i\pi}{8}$ sich bewegt, kraft des Schlusssatzes

[26] Vgl. Hardy, a. a. O. [22]. Bernstein a. a. O. [23].

von Nr. 5. Die Folgerung von II ist nicht erfüllt und somit muss $\xi(z)$ unendlich viele reellen Nullsstellen haben.

Der vorgetragene Beweis folgt dem ursprünglichen Hardyschen Beweis für die Existenz unendlich vieler Nullstellen an der kritischen Geraden nicht nur in dem Grundgedanken, sondern auch darin, dass dieselbe singuläre Stelle der Funtion (6) betrachtet wird. Er ist aber vom Hardyschen Beweis doch verschieden, denn es wird eine andere Integraldarstellung benutzt, und er ist insoferne einfacher, dass die Konvergenz, u. zw. die absolute Konvergenz des betrachteten Integrals von vornherein feststeht. Vielleicht verdient noch erwähnt zu werden, dass in dem vorgetragenen Beweis die Riemannsche Integraldarstellung der ξ-Funktion, worauf Riemann einiges Gewicht gelegt zu haben scheint, verwendet worden ist, und dass dieselbe vorher, soweit mir bekannt, nie für die Frage der Lage der Nullstellen mit greifbarem Nutzen verwendet wurde.

Schlussbemerkungen.

11. Die Frage, um welche sich die ganze Untersuchung dreht, ist eigentlich die folgende: Welche Eigenschaften der Funktion $\Psi(t)$ vermögen die Realität aller Nullstellen von $F(z)$ zu sichern? Auf allgemeine Eröterungen will ich hier nicht eingehen[27], nur zwei Beispiele sollen die Komplikationen der Fragestellung erörtern.

a) Man weiss heute noch nicht, ob das Integral

$$2\int_0^{\infty}(\omega''(t)-\omega(t))\cos zt\,dt=\xi\left(\frac{1}{2}z\right)$$

nur reelle Nullstellen hat oder nicht, man kann aber beweisen, dass das Integral

[27] Vgl. P_5.

$$2\int_0^\infty \left(\omega''(t) - \omega(t)\right)(e^t + e^{-t}) \cos zt\, dt \tag{30}$$

sicherlich nur reelle Nullstellen besitzt. Aus der Integraldarstellung können wir dies allerdings kaum einsehen, wohl aber folgendermassen: Durch (30) wird

$$\xi\left(\frac{z-i}{2}\right) + \xi\left(\frac{z+i}{2}\right) \tag{31}$$

dargestellt. Nun liegen alle Nullstellen von $\xi\left(\frac{1}{2}(z-i)\right)$ in der oberen Halbebene, wo $\Im z > 0$. Da $\xi(z)$ eine gerade Funktion vom Geschlecht 1 ist, kann es durch Polynome angenähert werden, die nur in den Nullstellen von $\xi(z)$ verschwinden. Ersetzt man in (31) beide Summanden durch die entsprechenden Polynome, so entsteht ein Polynom, dessen Nullstellen nach dem bekannten Hermite-Biehlerschen Satz[28] sämtlich reell sind. Hieraus folgt das Behauptete durch Grenzübergang.

b) Es soll jetzt

$$\Psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^t + e^{-t} + 2a\sqrt{e}\right) \tag{32}$$

gesetzt werden, wobei a eine positive Konstante bedeutet. Bei dieser Wahl ist

$$2\int_0^\infty \Psi(t) \cos zt\, dt = 2\sqrt{2\pi e}\, e^{-\frac{z^2}{2}}(a + \cos z). \tag{33}$$

Nun hat die Funktion (32) ersichtlicherweise folgende Eigenschaften:

I. Es gilt für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \log |\Psi^{(n)}(t)| = -\infty.$$

II. $\Psi(t)$ ist eine gerade Funktion.

[28] Vgl. z. B. PSz, Bd. I, Aufgabe III 25, S. 88 und 256.

III. Es ist $\Psi(t) > 0$ für reelles t.

IV. Es ist für $t \to +\infty$

$$\Psi(t) \sim e^{-\frac{t^2}{2}}(e^t + e^{-t}). \tag{34}$$

Wird in (33) $\Psi(t)$ durch die rechte Seite von (34) ersetzt, so entsteht eine Funktion mit nur reellen Nullstellen.

Diese Eigenschaften entsprechen den unter Nr. 4 betrachteten Eigenschaften I—IV der Funktion $\Phi(t)$, die in der Integraldarstellung der ξ-Funktion auftritt. Wir sehen, dass aus diesen Eigenschaften nicht auf die Realität der Nullstellen geschlossen werden kann: (33) hat nur reelle Nullstellen, wenn $0 < a \leq 1$, und nur imaginäre Nullstellen, wenn $a > 1$.

Man kann durch eine numerische Rechnung, die mit beschränkter Genauigkeit geführt werden muss, nie entscheiden, ob eine Zahl irrational ist oder nicht, und ebensowenig ob sie genau $= 1$ ist oder nicht.

Wenn man aber bei dem erreichbaren Genauigkeitsgrad der numerischen Rechnung etwa 0,9999 nicht von 1,0001 zu unterscheiden vermag, kann man auch die Fälle, in denen (33) nur reelle Nullstellen hat, nicht von denen unterscheiden, in denen es keine hat.[29]

[29] Es sind noch hier einige Literaturangaben zu verschiedenen Teilen der Arbeit nachzutragen. Zu Nr. 6, IV vgl. ausser a. a. O.[11] M. Bôcher, On some applications of Bessel's functions with pure imaginary index, Annals of Mathematics (1) 6 (1891—92) 137—160, insbesondere S. 149 und ff. (Den Hinweis auf diese Stelle verdanke ich Herrn Prof. Einar Hille.) — Zu Nr. 11, Beispiel a) vgl. L. Tchacaloff, Sur le l'extension d'un théorème algébrique de Biehler à une certaine classe de trancendantes entières, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche et Matematiche di Napoli, (3) 31 (1925) 104—107. — Einen völlig falschen Satz über den Gegenstand dieser Arbeit veröffentlichte kürzlich Herr O. Onicescu, Il comportamento assintotico et gli zeri di una classe di funzioni intere, Atti della R. Accademia dei Lincei, (6) 5 (1927) 271—274.

Færdig fra Trykkeriet den 30. Juni 1927.