

Zur Theorie der Elementarteilchen

Von H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER und K. YAMAZAKI *

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 14 a, 441—485 [1959]; eingegangen am 3. März 1959)

The equation $\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi \pm l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = 0$ is analysed with respect to the following con-

sequences. In I the group theoretical structure of the equation is studied. The equation is invariant under a number of continuous transformations: the inhomogeneous Lorentzgroup, the transformations of PAULI, GÜRSEY and TOUSCHEK, and the scale transformation $[x \rightarrow \eta x \text{ or } \psi \rightarrow \eta^{3/2} \psi(x, \eta)]$. The PAULI-GÜRSEY group is used for the interpretation of the isospin; the γ_5 -transformation of TOUSCHEK establishes a quantum number l_N , and the scale transformation leads to a quantum number l_N , which both are connected with the baryonic and the leptonic number. The strangeness $s = l_N - l_Q$ is suggested to be connected with the discrete groups of the equation and could then be defined and conserved only modulo 4. Of the discrete groups only the well known transformations P , C and T and the reversal of l ($l \rightarrow -l$) are briefly discussed. In II the vacuum expectation values of products of two field operators are studied. These values are considered to be only in a first approximation invariant under the Isospin-group. The deviations from the PAULI-GÜRSEY symmetry in higher approximations are supposed to be due to the replacement of the state "vacuum" by an idealised state "world", which possesses an infinite isospin; the strange particles are consequently interpreted as states which "borrow" an isospin $1/2$ or 1 from the ground state "world". The concept of "One particle-wavefunctions" is discussed in III. The fermions of finite mass belong to wavefunctions obeying a KLEIN-GORDON-spinor equation instead of a DIRAC equation. The connection with the conventional formalism of the DIRAC equation is treated in detail. The process of $\hat{\alpha}$ -conjugation springing from these discussions is used for a variation of the methods of approximation needed later on for the determination of mass values and the pion-nucleon coupling constant. In IV the TAMM-DANCOFF method is applied in two different forms for an estimate of the masses of nucleons and π -mesons. The masses and the symmetry properties of the particles agree qualitatively with the experimental results. The scattering of π -mesons from nucleons is treated in V by a method related more closely to the BETHE-SALPETER theory than to the TAMM-DANCOFF method; the theory leads to a relativistic pseudovector-coupling as the main term and to a value of the coupling constant of the right order of magnitude. In VI the interaction for β -decay is analysed with respect to its symmetry properties. The theory leads to $c_s = c_T = c_D = 0$ and, in the lowest approximation, to $c_A = -c_V$, while in higher approximations the ratio c_A/c_V will be somewhat altered. In VII some mathematical questions are discussed that have been raised by PAULI at the Geneva conference 1958. For the renormalized operators of the Lee model an integro-differential equation is given, that contains only the arbitrarily small time interval Δt . It is further shown in detail why a linear differential equation leads to δ -functions on the light cone for the propagator, while a non linear differential equation can produce there a different kind of singularity.

Die nichtlineare Spinortheorie, über die in einer Reihe früherer Arbeiten¹⁻⁸ (vgl. auch⁹⁻¹²) berichtet wurde, bietet die Möglichkeit, neben den üblichen Erhaltungssätzen auch die Erhaltungssätze für die Baryonenzahl und den Isospin darzustellen, wenn man, einem Vorschlag von GÜRSEY¹³ folgend, die von PAULI¹⁴ für die Neutrinotheorie gefundenen

Transformationseigenschaften mit den eben genannten Erhaltungssätzen in Verbindung bringt.

Wie von PAULI und einem der Verfasser gezeigt wurde^{15, 16}, kommt man dabei zu der Differentialgleichung¹⁷

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \pm l^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = 0, \quad (1)$$

* Der Aufenthalt von K. YAMAZAKI in Göttingen und München wurde durch die Alexander v. Humboldt-Stiftung ermöglicht.

¹ W. HEISENBERG, Nachr. d. Gött. Akad. d. Wiss. 1953, S. 111.

² W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. 9 a, 292 [1954].

³ W. HEISENBERG, F. KORTÉL u. H. MITTER, Z. Naturforschg. 10 a, 425 [1955], im folgenden auch als [3] zitiert.

⁴ W. HEISENBERG, Z. Phys. 144, 1 [1956].

⁵ W. HEISENBERG, Nachr. d. Gött. Akad. d. Wiss. 1956, S. 27.

⁶ R. ASCOLI u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. 12 a, 177 [1957].

⁷ W. HEISENBERG, Rev. Mod. Phys. 29, 269 [1957].

⁸ W. HEISENBERG, Nuclear Phys. 4, 532 [1957]; 5, 195 [1958].

Von früheren Arbeiten, die von einer nichtlinearen Spinortheorie Gebrauch machen, seien erwähnt: ⁹ E. FERMI, Z.

Phys. 88, 161 [1934]. ¹⁰ W. HEISENBERG, Z. Phys. 101, 533 [1936]. ¹¹ D. IWANENKO, Phys. Z. Sowjetunion 13, 141 [1938], und ¹² D. IWANENKO u. A. BRODSKY, C. R. Acad. Sci. USSR 84, 683 [1952].

¹³ F. GÜRSEY, Nuovo Cim. 7, 411 [1958].

¹⁴ W. PAULI, Nuovo Cim. 6, 204 [1957].

¹⁵ W. HEISENBERG u. W. PAULI, On the Isospin group in the theory of elementary particles. Preprint 1958.

¹⁶ W. HEISENBERG, Proceedings of the Conference on High Energy Physics (CERN, Geneva 1958).

¹⁷ Der zu ψ adjungierte Operator wird hier mit $\bar{\psi}$ bezeichnet, da dies in den letzten Jahren allgemein üblich geworden ist. In den früheren Arbeiten war für diesen Operator ψ^\dagger geschrieben worden.

die möglicherweise als Grundlage für eine einheitliche Theorie der Elementarteilchen dienen kann. Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, einige einfache Folgerungen aus Gl. (1) zu ziehen; ihre gruppentheoretischen Eigenschaften sollen wenigstens teilweise aufgeklärt, die Masseneigenwerte der einfachsten Elementarteilchen näherungsweise berechnet, ihre Wechselwirkung abgeschätzt werden.

I. Die gruppentheoretischen Eigenschaften der Gl. (1)

a) Kontinuierliche Gruppen

Die Gl. (1) ist zunächst invariant für alle Transformationen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe. Daraus lassen sich in der klassischen Theorie ebenso wie in der Quantentheorie die Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und die Schwerpunktsätze herleiten. In der Quantentheorie ist dabei zu beachten, daß Translation und Rotation nicht miteinander vertauschbar sind. Man kann daher den Drehimpuls eines Systems um eine Achse nur dann durch eine Quantenzahl charakterisieren, wenn der Translationsimpuls des Systems senkrecht zu dieser Achse entweder verschwindet oder unbekannt ist.

Gl. (1) bleibt ferner ungeändert bei den PAULI-GÜRSEYSchen Transformationen^{13, 14}:

$$\psi \rightarrow a\psi + b\gamma_5 C^{-1} \bar{\psi}^T; \quad \bar{\psi} \rightarrow a^* \bar{\psi} + b^* \psi^T C \gamma_5 \quad [I]$$

(mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$); $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$; $C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$,
 $C \gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T$; $C^T = -C$

und der zuerst von TOUSCHEK¹⁸ diskutierten Transformation:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5}. \quad [II]$$

(Das Zeichen T bedeutet Vertauschung von Zeilen und Spalten bei den DIRAC-Indizes.)

Die Gruppe I ist der Gruppe der Drehungen im dreidimensionalen Raum isomorph. Die zugehörigen „Drehimpulse“ I_1, I_2, I_3 sollen mit den drei Komponenten des Isospins identifiziert werden. Insbesondere ist es zweckmäßig (aber nicht notwendig!), die Komponente I_3 des Isospins, die zur Ladung des Elementarteilchens beiträgt, mit der Transformation

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \quad (2)$$

zu verknüpfen.

Die Transformationen der Gruppe II sind mit denen der Gruppe I vertauschbar. Der zugehörige „Drehimpuls“ I_N soll in einer noch näher zu bezeichnenden Weise zur Baryonenzahl beitragen.

I und II zusammen sind der Gruppe der unitären Transformationen zweier komplexer Variablen isomorph. Die Untergruppe I entspricht den unitären Transformationen mit der Determinante 1.

Durch I und II werden in der Quantentheorie drei unabhängige Quantenzahlen I, I_3 und I_N definiert ($\mathfrak{N}^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$), die halb- oder ganzzahlig sein können. In der Näherung, in der es möglich ist, ein für I und II invariantes „Vakuum“ zu konstruieren, müssen Zustände, die durch Anwendung einer geraden bzw. ungeraden Zahl von ψ -Operatoren auf dieses Vakuum entstehen, zu ganzzahligen bzw. halbzahligen Werten von I, I_3 und I_N gehören.

Diese Quantenzahlen reichen aber zur Beschreibung des empirischen Systems der Elementarteilchen noch nicht aus. In der oben erwähnten Arbeit¹⁵ wurde daher in Anlehnung an die bekannten phänomenologischen Darstellungen vorgeschlagen, für die Ladung Q und die Baryonenzahl N

$$Q = I_3 + \frac{l_Q}{2}, \quad (3)$$

$$N = I_N + \frac{l_N}{2} \quad (4)$$

Tab. 1*.

	p	n	\bar{n}	\bar{p}	e ⁺	$\bar{\nu}$	ν	e ⁻	π^+	π^0	π^-	A_0	Σ^+	Σ^0	Σ^-	Ξ^-	Ξ^0	K^+	K_0	\bar{K}_0	K^-	μ^+	μ^-	$\hbar\nu$
I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{l_Q}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	0
Q	1	0	0	-1	1	0	0	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	-1	0	1	0	0	-1	1	-1	0
I_N	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{l_N}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
N	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$l_Q - l_N$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-2	1	1	-1	-1	1	-1	0

* Die Bezeichnungen ν und $\bar{\nu}$ sind gegenüber der ursprünglichen Tabelle vertauscht, um in Übereinstimmung mit der konventionellen Bezeichnung den β -Zerfall des Neutrons als $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ beschreiben zu können.

¹⁸ B. TOUSCHEK, *Nuovo Cim.* **5**, 1281 [1957].

zu setzen. l_Q und l_N sollen zwei weitere Quantenzahlen sein, die mit der „Seltsamkeit“ (strangeness) s der Teilchen durch die Beziehung

$$s = l_Q - l_N \tag{5}$$

verbunden sind und außerdem die Definition der Leptonenzahl gestatten. Die Quantenzahlentabelle der genannten Arbeit ist hier als Tab. 1 nochmals wiedergegeben. l_Q und l_N müssen beliebige positive oder negative Werte annehmen können, um die beobachteten atomaren Systeme darzustellen. Dagegen braucht die Quantenzahl s nicht die ganze Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen zu durchlaufen. Vielmehr scheint es für die Darstellung der Erfahrungstatsachen zu genügen, wenn s die Werte

$$s = 0, \pm 1, 2 \tag{6}$$

annehmen kann, also gewissermaßen nur modulo 4 definiert ist (vgl. ¹⁹).

Man wird daher noch mindestens eine kontinuierliche einparametrische Gruppe zur Darstellung von l_Q oder l_N brauchen, während für die Darstellung von s eine endliche, diskrete Gruppe ausreichen sollte ¹⁹. In dem erwähnten Entwurf von PAULI und einem der Verfasser ¹⁵ war versucht worden, diese Gruppen durch eine Verdopplung der Vektoren im HILBERT-Raum, insbesondere des Vakuums, zu gewinnen. Dies erscheint uns aber nach einer genaueren Analyse der Folgerungen von (1) nicht mehr möglich. Denn obwohl eine solche Verdopplung durch die Struktur der Gl. (1) nahegelegt wird (vgl. Kap. III der vorliegenden Arbeit), so kann doch nicht in dieser Weise eine Symmetrieeigenschaft neu entstehen, die nicht schon in Gl. (1) enthalten wäre.

Tatsächlich enthält Gl. (1) noch eine weitere einparametrische kontinuierliche Gruppe. Bekanntlich gehört zur Gruppe der konformen Abbildungen die einfache raum-zeitliche Dilatation:

$$x_\nu \rightarrow \eta x_\nu \quad (\eta \text{ reell}). \tag{7}$$

Diese Gruppe ist in Gl. (1) in der Weise enthalten, daß (1) invariant ist gegen die Transformation

$$\psi \rightarrow \eta^{3/2} \psi(x, \eta, l, \eta). \tag{8}$$

Auch die Vertauschungsrelationen sind (wenigstens in der bisher behandelten Näherung) gegen (8) invariant. Für die Transformation (8) muß ψ als Funktion von x und l aufgefaßt werden. l spielt also jetzt die Rolle einer unabhängigen Variablen und

man betrachtet Gesamtheiten von Lösungen von (1) für alle möglichen Werte von l . Vom Standpunkt der LAGRANGE-Funktion aus betrachtet bedeutet dies, daß wir bei Anwendung des Variationsprinzips beliebige Funktionen $L(J_a, J_b)$ der Invarianten

$$J_a = \int d^4x \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi,$$

$$J_b = \int d^4x (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)$$

zur Konkurrenz zulassen und nicht mehr nur die Klasse von Funktionen, für die $(\partial L / \partial J_b) / (\partial L / \partial J_a)$ denselben invarianten Wert l^2 annimmt. Die zu (8) gehörige infinitesimale Transformation lautet mit $\eta = 1 + \varepsilon$; ($|\varepsilon| \ll 1$):

$$\psi \rightarrow \psi + \varepsilon \left(\frac{3}{2} \psi + x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right). \tag{9}$$

Die Skalentransformation (8) ist mit den Elementen der homogenen LORENTZ-Gruppe und mit den PAULISCHEN Transformationen I und II vertauschbar, zunächst aber nicht mit den Translationen. Das bedeutet in der Quantentheorie, daß man nicht gleichzeitig den Masseneigenwert eines Zustandes angeben und das Verhalten des Zustandes bei der Transformation (8) durch eine Quantenzahl charakterisieren kann. Das ist aber auch unnötig; denn die Masseneigenwerte verhalten sich wie Z/l , wobei Z einen für den Zustand charakteristischen Zahlwert bedeutet. Wichtig für die Theorie sind nur die Zahlwerte Z , die sich aus den Eigenlösungen von (1) ergeben müssen, nicht aber die Werte von Z/l . In anderen Worten: Nur die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Massen sind der Theorie zugänglich und können experimentell nachgeprüft werden; es gibt aber in der Natur keinen immanenten Längen- oder Massenmaßstab. Natürlich kann empirisch ein Maßstab vereinbart werden, z. B., indem man willkürlich die Masse oder einen geeignet definierten Radius des Protons = 1 setzt; es gibt aber keinen Grund in den Naturgesetzen, nach dem man hier der Zahl 1 vor irgendeinem anderen Zahlwert den Vorzug geben könnte. Man kann diesen Sachverhalt auch in folgender Weise ausdrücken: Wenn man die Translationen nicht in der üblichen Form, sondern durch die Beziehung

$$\psi(x_\nu, l) \rightarrow \psi(x_\nu + \alpha_\nu l, l) \tag{9a}$$

charakterisiert, so sind auch die Translationen mit der Transformation (8) vertauschbar, man kann

¹⁹ B. D'ESPAGNAT u. J. PRENTKI, Nuclear Phys. 1, 33 [1956].

also gleichzeitig Eigenwerte für Z und für das Verhalten bei der Transformation (8) angeben.

Wenn man in der klassischen Theorie aus (8) einen Erhaltungssatz ableiten will, so kann man von der LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu \psi \right] \pm \frac{l^2}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)^2 \quad (10) \quad \text{und}$$

ausgehen. Führt man die infinitesimale Transformation (9) aus, so folgt aus (1) in der üblichen Weise

$$\int d^4x \delta L = \int d^4x \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x_\nu)} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial (\partial \bar{\psi} / \partial x_\nu)} \right) \quad (11)$$

$$\int d^4x \left[\frac{d}{dx_\nu} (x_\nu L) + l \frac{dL}{dl} \right] = \int d^4x \frac{d}{dx_\nu} \left[\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\frac{3}{2} \psi + x_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \bar{\psi} + x_\mu \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} + l \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial l} \right) \gamma_\nu \psi \right], \quad (12)$$

$$\int d^4x l \frac{dL}{dl} = \int d^4x \frac{d}{dx_\nu} \left[\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\nu \left(x_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + l \frac{\partial \psi}{\partial l} \right) - \frac{1}{2} \left(x_\mu \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} + l \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial l} \right) \gamma_\nu \psi - x_\nu L \right]. \quad (13)$$

Hier ist über ein beliebiges Raum-Zeitvolumen zu integrieren. Führt man insbesondere die Integration über den ganzen Raum zwischen zwei Zeitwerten aus, multipliziert (13) noch mit d/l und integriert auch über l , so erhält man, sofern ψ an den Grenzen hinreichend rasch verschwindet oder eine Periodizitätsforderung gestellt wird (z. B. kann in der komplexen l -Ebene um den Punkt $l=0$ herum integriert werden):

$$\int \frac{dl}{l} dx dy dz \left[\frac{x_\mu}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} \gamma_4 \psi \right) + \frac{l}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial l} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial l} \gamma_4 \psi \right) - x_4 L \right] \quad (14)$$

$$= \int \frac{dl}{l} dx dy dz \left[x_\mu \Theta_{\mu 4} + \frac{l}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_4 \frac{\partial \psi}{\partial l} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial l} \gamma_4 \psi \right) \right] = \text{const.}$$

wo $\Theta_{\mu\nu}$ den kanonischen Energie-Impulstensor bedeutet.

Wenn das Integral auf der linken Seite von (14) zur Anfangszeit existiert — und dort kann ja $\psi(x, l)$ willkürlich vorgegeben werden — so existiert es auch zu jeder späteren Zeit. Gl. (14) ist zwar kein Erhaltungssatz im üblichen Sinn, da (14) sich nicht auf eine bestimmte Lösung von (1), sondern auf eine Gesamtheit von Lösungen für verschiedene l -Werte bezieht, ist aber doch für die Definition einer Quantenzahl geeignet, wenn man die Zustände durch ihr Transformationsverhalten (8) charakterisiert. Ersetzt man in (14) x_μ durch $x_\mu + a_\mu$, so erhält man Zusätze, die infolge der Erhaltung von Energie und Impuls von selbst konstant sind.

In der Quantentheorie kann man wegen der Invarianz der Gl. (1) und der Vertauschungsrelation bei der Transformation (8) einen Operator O_η im HILBERT-Raum definieren mit der Eigenschaft

$$O_\eta \psi(x, l) O_\eta^{-1} = \eta^{3/2} \psi(x, l, \eta). \quad (15)$$

Für die zugehörige infinitesimale Transformation A kann man

$$O_\eta = e^{\epsilon A} = \eta^A \quad (15a)$$

setzen und erhält

$$A \psi - \psi A = \frac{3}{2} \psi + x_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + l \frac{\partial \psi}{\partial l} = \lambda \psi,$$

$$A \bar{\psi} - \bar{\psi} A = \frac{3}{2} \bar{\psi} + x_\nu \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} + l \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial l} = \lambda \bar{\psi}. \quad (16)$$

Die verschiedenen Quantenzustände können durch ihr Transformationsverhalten, d. h. durch die zugehörigen Eigenwerte von A charakterisiert werden.

Diese Eigenwerte sind, wie weiter unten noch erörtert wird, unter den speziellen Voraussetzungen der vorliegenden Theorie ganz- oder halbzahlige und sollen mit der Quantenzahl $l_N/2$ (für Teilchen mit $s=0$ also auch mit $l_Q/2$) identifiziert werden.

Die Transformation (15) ist keine unitäre Transformation; der Operator O_η multipliziert die Eigenvektoren mit reellen Faktoren η^A . Man kann diese Transformation aber im HILBERT-Raum mit indefiniter Metrik als eine pseudo-unitäre Transformation bezeichnen. Wenn der Zustand $|\Psi_n\rangle$ zum Eigenwert λ_n gehört und sich daher wie η^{λ_n} transformiert:

$$O_\eta |\Psi_n\rangle = \eta^{\lambda_n} |\Psi_n\rangle,$$

so transformiert sich der inverse Zustand $|\Psi^n\rangle$ wie $\eta^{-\lambda_n}$:

$$O_\eta |\Psi^n\rangle = \eta^{-\lambda_n} |\Psi^n\rangle.$$

Da die Dgl. (1) nur ungerade und nicht beliebige nicht-ganzzahlige Potenzen von ψ enthält, kann man wohl fordern, daß in der Matrixdarstellung des Operators ψ nur solche Übergänge vorkommen, die halbzahligen Änderungen der Quantenzahl λ entsprechen: $\lambda \lambda' = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$. Die zugehörigen Matrixelemente $\langle \Psi^{\lambda'} | \psi | \Psi^{\lambda + \lambda'} \rangle$ transformieren sich dann wie die Potenz $l^{\lambda \lambda' - 3/2}$. Die wichtigsten Anteile gehören zu $\lambda \lambda' = \pm \frac{1}{2}$ und können als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren von Teilchen mit $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ betrachtet werden. Die Anteile

mit $\Delta A = \pm \frac{3}{2}$ gehören zur Entstehung bzw. Vernichtung von 3 Teilchen oder von aus diesen Teilchen zusammengesetzten Gebilden. Zum Beispiel gehört ein Matrixelement von ψ mit $\Delta I_3 = \frac{1}{2}$, $\Delta I_N = \frac{1}{2}$ und $\Delta A = \frac{3}{2}$ zur gleichzeitigen Entstehung eines Protons, Neutrons und Positrons. Möglicherweise gibt es die Übergänge $\Delta A = \pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{5}{2} \dots$ daher nur im kontinuierlichen Spektrum.

Die Forderung, daß die Änderung ΔA bei den Matrixelementen von ψ stets halbzahlbig sein solle, hat zur Folge, daß diese Matrixelement (von der Abhängigkeit $l^{A-3/2}$) eindeutige Funktionen von l sein können, da die Differenz $\Delta A - \frac{3}{2}$ ganzzahlig ist. Dies kann als indirekte Begründung dafür angesehen werden, daß im Rahmen der vorliegenden Theorie A nur halb- und ganzzahlige Eigenwerte annehmen kann. Wenn man mit einem HILBERT-Raum beginnt, in dem es nur halb- und ganzzahlige Eigenwerte von A gibt, so führt die Dgl. (1) nicht aus diesem Raum heraus. Zustände mit halbzahligen Eigenwerten von A entstehen durch Anwendung einer ungeraden Anzahl von ψ -Operatoren auf das Vakuum, solche mit ganzzahligen A -Eigenwerten durch Anwendung einer geraden Zahl solcher Operatoren.

Die Folgen der eben geschilderten Eigenschaften des Operators ψ für die Vakuum Erwartungswerte des Produktes von zwei Feldoperatoren werden weiter unten noch besprochen (Kap. II).

b) Diskrete Gruppen

Gl. (1) ist invariant gegen die Operationen: Spiegelung (P), Ladungskonjugation (C) und Zeitumkehr (T). Die üblichen Formeln lauten:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad \psi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \gamma_4 \psi(-\mathbf{r}, t), \\ \text{C:} \quad \psi &\rightarrow C^{-1} \bar{\psi}^T. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Zeitumkehr kann im HILBERT-Raum durch eine antilineare Transformation vorgenommen werden.

Die Operationen P, C und T sind mit den im Abschnitt Ia behandelten kontinuierlichen Transformationen nur zum Teil vertauschbar. Da die Eigenzustände durch die Quantenzahlen I_3 , I , I_N , $l_N/2$ charakterisiert werden sollen, interessiert besonders die Vertauschbarkeit mit den zu diesen Quantenzahlen gehörigen Transformationen.

Die Spiegelung ist mit der Operation $e^{i\alpha\gamma_5}$ nicht vertauschbar. Daher kann man einem Teilchen, das durch einen Wert von I_N gekennzeichnet ist, keine Parität zuordnen. Der übliche Paritätsbegriff versagt

in der vorliegenden Theorie also schon in der größten Näherung. Dagegen kann man, wie in Kap. III ausgeführt werden wird, eine mit P eng verwandte Operation definieren („Parität 2. Art“), die mit $e^{i\alpha\gamma_5}$ und den anderen Transformationen vertauschbar ist und für die näherungsweise die Invarianz bestehen dürfte. Diese Operation kann dann zur Definition einer Paritätsquantenzahl benutzt werden, die näherungsweise erhalten bleibt.

Die Operation C ist mit der Transformation $e^{i\alpha}$ nicht vertauschbar, eignet sich also nicht zur Definition einer Quantenzahl. Sie bewirkt aber in der vorliegenden Theorie auch nicht den Übergang von Teilchen zu Antiteilchen, da sie mit der Transformation (II) vertauschbar ist. Dagegen liefern wieder die Operationen PC und PCT solche Übergänge. Es läßt sich aber näherungsweise (vgl. Kap. III) wieder eine mit C verwandte Operation („Ladungskonjugation 2. Art“) definieren, welche den Übergang Teilchen \longleftrightarrow Antiteilchen in der üblichen Art bewerkstelligt, d. h. ohne gleichzeitig Orts- und Zeitkoordinaten zu invertieren.

Ferner ist die Gl. (1) invariant gegen die Transformation

$$l \rightarrow -l, \text{ d. h. } \psi(x, l) \rightarrow \psi(x, -l). \quad (22)$$

Da l in der vorliegenden Theorie die Rolle einer unabhängigen Variablen spielt, handelt es sich hier um eine echte Transformationseigenschaft. Die Operation (22) ist mit allen anderen Transformationen vertauschbar, kann also zur Definition einer Quantenzahl verwendet werden.

Die diskreten Gruppen der Gl. (1) dürften mit dieser Aufzählung noch nicht erschöpft sein, doch soll die weitere Analyse der diskreten Gruppen auf eine spätere Arbeit verschoben werden. Auch die Frage, ob die Quantenzahl s , die „Seltsamkeit“, durch diese Gruppen gedeutet werden kann, soll in der vorliegenden Arbeit noch nicht behandelt werden.

II. Vertauschungsrelationen und Vakuum-erwartungswerte

Wenn man am Prinzip der Mikrokausalität festhält – und das wird auch in der nichtlinearen Spinortheorie getan –, so erfolgt die Quantisierung einer Theorie durch die Forderung, daß der Kommutator bzw. Antikommutator der Feldoperatoren für raumartige Abstände verschwinden, für zeitartige

aber nicht überall verschwinden soll. Diese Forderung genügt jedenfalls bei den linearen Theorien, um die Quantisierung im Zusammenhang mit der Differentialgleichung vollständig festzulegen; denn da die Kommutatoren dort zugleich Lösungen der Feldgleichungen sein müssen, folgen die δ - bzw. δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel aus der Differentialgleichung (vgl. Kap. VII). Nur ihr Zahlfaktor ist noch willkürlich, kann aber immer durch geeignete Normierung etwa zu 1 festgesetzt werden. Es ist daher zu erwarten, daß die eben genannte Forderung auch in der nichtlinearen Theorie genügt, um die Quantisierung vollständig festzulegen; jedoch wird die nichtlineare Differentialgleichung keine δ -Funktionen auf dem Lichtkegel zulassen, sondern dort Singularitäten anderer Art hervorbringen (vgl. Kap. VII). Die Untersuchungen über die ältere Spinorgleichung machen es wahrscheinlich, daß der Antikommutator in der Nähe des Lichtkegels unendlich oszilliert, doch ist die entsprechende Untersuchung für die Gl. (1) bisher noch nicht durchgeführt worden.

Die genannte Quantisierungsforderung ist mit allen Symmetrieeigenschaften der Gl. (1) verträglich, kann diese Symmetrie daher auch nicht stören. Eine Symmetrieverminderung durch den Prozeß der Quantisierung ist im Prinzip unmöglich. Anders ist es jedoch mit dem Vakuumerwartungswert des Antikommutators. Es ist keineswegs von vornherein sicher, daß es auch einen Zustand „Vakuum“ geben muß, der alle Symmetrieeigenschaften der Ausgangsgleichung besitzt. Die Frage, ob etwa der Vakuumerwartungswert des Antikommutators die volle Symmetrie aufweisen kann, ist mathematisch eng verwandt (aber nicht identisch) mit der Frage, ob es auch Lösungen der Differentialgleichung mit der entsprechenden Randbedingung gibt, die voll symmetrisch sind. Das braucht aber keineswegs der Fall zu sein. Denn zwar sorgt die Differentialgleichung dafür, daß aus einer Lösung durch eine der erlaubten Transformationen wieder eine Lösung hervorgehen muß, aber die Lösung braucht dabei nicht in sich überzugehen. Zum Beispiel besitzt die DIRAC-Gleichung des Wasserstoffatoms die volle Rotations-symmetrie, es gibt aber keine rotationssymmetrische Lösung.

In diesem Sachverhalt sehen wir den Grund für die Symmetrieverminderung, die sich z. B. experimentell im Versagen der Isospingruppe in der Quantenelektrodynamik äußert. Man wird an dieser Stelle zu der Vermutung geführt, daß zwar die einfachsten

Vakuumerwartungswerte, nämlich die von Produkten zweier Feldoperatoren, in erster Näherung noch die volle Symmetrie besitzen können, daß aber bei Einbeziehung der höheren Vakuumerwartungswerte diese Symmetrie zwangsläufig verlorengeht.

Wenn es sich als unmöglich erweist, einen voll symmetrischen Zustand „Vakuum“ zu konstruieren, so kann dies anschaulich wohl nur so gedeutet werden, daß es sich bei dem unsymmetrischen Grundzustand nicht eigentlich um ein Vakuum, sondern um einen Zustand „Welt“ handelt, der die Grundlage für die Existenz der Elementarteilchen bildet. Dieser Zustand muß dann entartet sein; er kann z. B. einen sehr hohen Isospin besitzen. Wenn man – gewissermaßen als Idealisierung des realen Zustandes der Welt – die Translationseigenschaften des Vakuums beibehalten will, so muß er sogar unendlich hoch entartet sein. In der vorliegenden Theorie kann man zwar noch ein voll symmetrisches Vakuum konstruieren, wenn man etwa durch die Forderung $\psi = (1 + \gamma_5) \chi$ zu einer zweikomponentigen Theorie übergeht, in der die Wechselwirkung außerdem verschwindet. Wenn man aber einen Grundzustand sucht, von dem aus durch Anwendung des Feldoperators Teilchen mit Masse und Wechselwirkung gebildet werden können, so scheint es nur in der Näherung, in der man allein den Erwartungswert des Produkts von zwei Feldoperatoren berücksichtigt, noch möglich zu sein, die Symmetrie für die PAULI-GÜRSEY-TOUSCHEK-Gruppe zu wahren. Bei konsequenter Berücksichtigung der Erwartungswerte für das Produkt von vier Feldoperatoren geht diese Symmetrie wahrscheinlich verloren. Der Symmetrieverlust wäre in der vorliegenden Theorie also ähnlich zu deuten wie das Auftreten einer Zentrifugalkraft in der allgemeinen Relativitätstheorie, das ja auch einen Symmetrieverlust anzeigt. Die Zentrifugalkraft kann dort nur als Folge der unendlich fernen Massen im Weltall angesehen werden, obwohl diese Massen in der mathematischen Formulierung schließlich nur als eine Art Randbedingung im Unendlichen erscheinen, die eben die Zentrifugalkraft indirekt hervorruft.

Der Grundzustand hätte in der vorliegenden Theorie also einen praktisch unendlich großen Isospin (die Welt enthält neben Protonen und Elektronen beliebig viele Neutronen!) und es würde verständlich, daß die Zustände Neutron und Proton eine etwas verschiedene Masse erhalten. Sie wären gewissermaßen die beiden Dublett-komponenten eines

Zustandes „Nukleon + Welt“, bei dem sich der hinzukommende Isospin parallel oder antiparallel zu dem der „Welt“ stellen kann, und der als Ganzes wieder einen beliebig hohen Isospin trüge.

Bei dieser Deutung werden auch grundsätzlich Zustände möglich, die, wie etwa die Λ_0 -Teilchen, zwar halbzahligen Spin, aber ganzzahligen Isospin zu haben scheinen. Wenn der Grundzustand im gewöhnlichen Raum rotationssymmetrisch ist, so entsteht aus ihm durch Anwendung einer ungeraden Anzahl von Feldoperatoren ein Teilchen mit halbzahligem Spin. Der ebenfalls halbzahlige Isospin, der dabei dem unendlichen Isospin des Grundzustandes zugefügt wird, kann aber so angekoppelt werden, daß sozusagen das am leichtesten drehbare Gelenk einen ganzzahligen Isospin von dem unendlich großen Rest trennt; daß also ein halbzahliger Isospin vom Grundzustand abgezweigt, dem neu hinzukommenden angefügt und erst der so entstandene ganzzahlige Isospin an den Rest angekoppelt wird. Dieser Fall würde sich vom Normalfall etwa ähnlich unterscheiden wie in der Atomhülle die RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung von der $(j-j)$ -Kopplung. Die Λ_0 - oder Σ^- -Hyperonen wären also genau in dem gleichen Sinne Teilchen mit ganzzahligem Isospin, in dem man etwa das Valenzelektron im optischen Spektrum des Ca-Atoms als ein Teilchen mit ganzzahligem Spin bezeichnen kann²⁰. Die Annahme, daß die „Seltsamkeit“ s nur mod 4 definiert sei, würde bedeuten, daß Übergänge, bei denen sich der angekoppelte Isospin um 2 ändert, schon durch relativ starke Wechselwirkungen hervorgebracht werden können.

Nach diesen Vorbemerkungen kehren wir zurück zur Frage der Vakuum erwartungswerte des Produkts von zwei Feldoperatoren. Hier kann die volle Symmetrie noch gewährleistet werden durch den Ansatz

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \varrho(\kappa^2) d(\kappa^2) \int d^4p e^{ip(x-x')} \frac{p_\nu \gamma_\nu^{\alpha\beta}}{p^2 + \kappa^2}, \quad (23)$$

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle = l^{-3} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \varrho(\zeta) d\zeta \int d^4q \exp\{iq(x-x')/l\} q_\nu \gamma_\nu^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{q^2 + \zeta} - \frac{1}{q^2} + \frac{\zeta}{(q^2)^2} \right]. \quad (26)$$

Damit ist jedem Eigenwert formal ein „Geisterdipol“ zugeordnet, der die δ - bzw. δ' -Funktionen beseitigt, und die Möglichkeit geschaffen, die rechte

wobei $\varrho(\kappa^2)$ ein zunächst noch beliebiges Massenspektrum darstellt. Die Integration über p_0 bzw. p_4 muß rechts auf den üblichen Integrationswegen in der komplexen p_0 - bzw. p_4 -Ebene erfolgen, damit die analytischen Eigenschaften der rechten Seite mit den Forderungen der Mikrokausalität übereinstimmen. Um die Invarianz gegen die Transformation (7), (8) deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir (23) in der Form

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle = l^{-3} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\zeta \varrho(\zeta) \int d^4q \exp\{iq(x-x')/l\} \frac{q_\nu \gamma_\nu^{\alpha\beta}}{q^2 + \zeta} \quad (24)$$

schreiben. Das Massenspektrum $\varrho(\zeta)$ (die Variable ζ ist dimensionslos und nur auf der positiven reellen Achse definiert) muß durch die Dgl. (1) bestimmt werden. Es wird etwa einige diskrete Eigenwerte (d. h. δ -funktionsartige Anteile), die den FERMI-Teilchen entsprechen, und einen ins Unendliche reichenden kontinuierlichen Teil enthalten.

Die nichtlineare Dgl. (1) verhindert das Auftreten von δ - bzw. δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel. Daraus folgen für die Funktion $\varrho(\zeta)$ die Bedingungen:

$$\int \varrho(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int \varrho(\zeta) \zeta d\zeta = 0. \quad (25)$$

$\varrho(\zeta)$ muß also Werte beiderlei Vorzeichens annehmen können, was nur im Rahmen einer indefiniten Metrik im HILBERT-Raum möglich ist. Für das Verhalten von $\varrho(\zeta)$ bei großen ζ kann man nach den früheren Untersuchungen über die ältere Spinorgleichung vermuten, daß die Funktion $\varrho(\zeta)$ dort oszillieren muß, um die unendlichen Oszillationen des Antikommutators in der Nähe des Lichtkegels darzustellen, daß also die Integrale (25) eventuell nur im Sinne eines ABELSCHEN Grenzwertes konvergieren. Die Bedingungen (25) erlauben, Gl. (24) auch durch die folgende Beziehung zu ersetzen:

Seite von (26) durch einen oder einige wenige Eigenwerte des Massenspektrums zu approximieren. Über die Güte einer solchen Approximation kann

²⁰ Diese Vorstellung ist offenbar eng verwandt mit dem von G. WENTZEL²¹ eingeführten Begriff des „Spurions“.

²¹ G. WENTZEL, Sixth Annual Rochester Conference 1956, S. VIII-16 und Phys. Rev. **101**, 1214 [1956].

man allerdings nichts aussagen, solange man das Massenspektrum noch nicht kennt. Die Klammer auf der rechten Seite von (26) verschwindet für $\zeta = 0$. Ein Eigenwert bei $\zeta = 0$, d. h. ein Anteil der Form $\delta(\zeta)$ im Massenspektrum $\varrho(\zeta)$ tritt also bei der Darstellung (26) nur indirekt, d. h. über die Beziehung (25) in Erscheinung.

In einer linearen Theorie läßt die rechte Seite von (24) noch einen Normierungsfaktor offen, der festgelegt werden muß, um das Problem eindeutig zu bestimmen. Wenn die Verhältnisse in der nichtlinearen Theorie ähnlich liegen, könnte man dafür etwa

$$\int_0^\infty \varrho(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta = 1 \tag{27}$$

oder irgendeine andere ähnliche Bedingung wählen. Eine Änderung der Normierung würde zwar vielleicht die Lage der Eigenwerte, aber nicht die Verhältnisse zwischen den Eigenwerten ändern und insofern den physikalischen Gehalt der Theorie nicht beeinflussen.

Legt man bei der Berechnung der Eigenwertgleichung von FERMI-Teilchen mit Hilfe der neuen

TAMM-DANCOFF-Methode die Beziehung (26) zugrunde, so erhält man für die Einpunktwellenfunktion $\tau(x) = \langle 0 | \psi(x) | p \rangle$ für einen Einteilchenzustand mit Impuls $p = q/l$ eine Dgl. der Form:

$$(\gamma_v q_v) Q(-q^2) \tau(x) = 0. \tag{28}$$

Die Lösungen dieser Gleichung können in der Form $-q^2 = \zeta_i$ geschrieben werden und bedeuten daher Teilchen mit Massenzahl $\zeta_0^{1/2} = 0$ und Teilchen mit endlichen Massenzahlen $\zeta_i^{1/2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die durch die Nullstellen der Funktion $Q(-q^2)$ gegeben sind. $Q(-q^2)$ läßt sich in der Umgebung dieser Nullstellen z. B. schreiben

$$Q(-q^2) = f(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_n) \prod_{i=0}^n (q^2 + \zeta_i) \tag{29}$$

mit $f(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_n) \neq 0$ und $\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_n$.

Die Massendichtefunktion $\varrho(\zeta)$ in (26) muß für jeden diskreten Eigenwert ζ_i eine δ -Funktion enthalten. Vernachlässigt man den kontinuierlichen Anteil des ϱ -Spektrums, so müßten also in (26) Glieder auftreten der Form

$$\frac{q_v \gamma_v}{q^2 Q(-q^2)} = f^{-1}(\zeta_i) \frac{q_v \gamma_v}{\prod_{i=0}^n (q^2 + \zeta_i)} = f^{-1}(\zeta_i) \sum_{i=0}^n \frac{1}{\prod_{l \neq i} (\zeta_l - \zeta_i)} \frac{q_v \gamma_v}{q^2 + \zeta_i}. \tag{30}$$

Letzterer Ausdruck, den man einfach mit den Sätzen der Partialbruchzerlegung finden kann, zeigt, daß die Teilchen, wenn man sie den Massen entsprechend ordnet, abwechselnd positive und negative Norm erhalten (vgl. hierzu auch ²²). Die hier auftretenden Teilchen unterscheiden sich aber neben ihrer Masse und Vorzeichen ihrer Norm noch durch ihr Verhalten bei der Skalentransformation. Da starke Wechselwirkungen zwischen ihnen existieren, können jedoch für jede l_N -Quantenzahl nur die Teilchenzustände mit kleinster Masse und entgegengesetzter Norm stabil sein. Alle Zustände mit höherer Masse würden in diese tiefsten Zustände zerfallen,

d. h. sie liefern überhaupt keine diskreten Masseneigenwerte mehr und können deshalb – bei genügend hoher Näherung – auch nicht mehr als reelle Nullstellen von $Q(-q^2)$ in Erscheinung treten.

Da die Transformation (8) voraussetzt, daß man die Länge l als neue Variable neben x betrachtet, kann man – um die Abhängigkeit von der $l_N = 2A$ -Quantenzahl besser aufzuzeigen – auch nach dem Vakuumerwartungswert für das Produkt von zwei Feldoperatoren fragen, die sich auf verschiedene l -Werte beziehen. Unterscheidet man ferner noch zwischen Rechts- und Linksmassenfunktionen, so erhält man an Stelle von (24)

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x, l) \bar{\psi}_\beta(x', l') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\zeta \int d^4q e^{iq[(x/l) - (x'/l')] - \zeta} (l l')^{-3/2} \sum_A \left(\frac{l'}{l}\right)^A (\varrho_{A^R}(\zeta) R + \varrho_{A^L}(\zeta) L) \frac{q_v \gamma_v^{\alpha\beta}}{q^2 + \zeta} \tag{31}$$

[$R = (1 + \gamma_5)/2$; $L = (1 - \gamma_5)/2$; R, L als oberer Index von ϱ unterscheidet nur das Rechts- vom Linksmassenspektrum.]

²² T. W. B. KIBBLE u. J. C. POLKINGHORNE, NUOVO Cim. **8**, 74 [1958].

$\varrho_A^R(\zeta)$ bzw. $\varrho_A^L(\zeta)$ bedeuten die Rechts- bzw. Linksmassenspektren für Zustände mit der Quantenzahl $A = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ usw. Die Form (31) kann also dazu benutzt werden, eine Trennung zwischen den verschiedenen Massenspektren durchzuführen und mit Hilfe von Projektionsoperatoren etwa nur eines von ihnen auszusondern. Durch die Trennung der Rechts- und Linksmassenspektren ist der Ausdruck (31) im allgemeinen nicht mehr invariant gegenüber der PAULI-GÜRSEY-Transformation I, wohl aber gegenüber der TOUSCHEK-Transformation II. Um wieder die volle Symmetrie zu gewährleisten, müssen jeweils Paare von Rechts- und Linksfunktionen einander gleich sein, z. B. können wir fordern

$$\varrho_A^R(\zeta) = \varrho_{-A}^L(\zeta) \quad (32)$$

Wie oben erwähnt, wollen wir als grösste Näherung annehmen, daß die Spektren für $A = \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}$ kontinuierlich sind und daher zunächst vernachlässigt werden können, daß also nur für $A = \pm \frac{1}{2}$ diskrete Eigenwerte auftreten; und zwar setzen wir im besonderen:

$$\varrho_{1/2}^R(\zeta) = \varrho_{-1/2}^L(\zeta) = \varrho_B(\zeta) = \delta(\zeta - \zeta_B) + \dots \quad (33)$$

und

$$\varrho_{1/2}^L(\zeta) = \varrho_{-1/2}^R(\zeta) = \varrho_L(\zeta) = \delta(\zeta) + \dots$$

$\varrho_B(\zeta)$ können wir dann als das Massenspektrum der Nukleonen ansehen, wenn $Z_B = \zeta_B^{1/2}$ die Massenzahl der Nukleonen ist. $\varrho_L(\zeta)$ ist die Massenfunktion der Leptonen, die in der Näherung der PAULI-GÜRSEY-Symmetrie alle noch die Masse 0 haben. In beiden Massenspektren können auf Grund der vorigen Überlegungen keine weiteren positiven δ -Funktionen für reelle $\zeta > 0$ enthalten sein. Approximiert man in dieser Näherung die Massenspektren durch ihre Pole und regularisiert wieder in der oben angegebenen Weise durch „Dipolgeister“, so behält man nur die δ -Funktionen von $\varrho_B(\zeta)$ übrig. Das heißt, man hat für $l = l'$ einfach

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x, l) \bar{\psi}_\beta(x', l) | 0 \rangle \quad (34)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{l^3} \frac{q_\nu \gamma_\nu^{\alpha\beta}}{q^4(q^2 + \zeta_B)} \exp\{i q(x - x')/l\},$$

wobei $\zeta_B^{1/2}/l$ den Masseneigenwert der Baryonen bedeutet. Dieser Vakuumerwartungswert soll später den numerischen Rechnungen zugrunde gelegt werden. Da in dieser Näherung die Leptonen noch gar nicht in Erscheinung treten, können wir in den folgenden Kapiteln sehr oft so tun, als gäbe es nur Nukleonen, und brauchen dann nicht auf das ver-

schiedene Verhalten bei Skalentransformationen einzugehen.

Eine Bemerkung soll noch angefügt werden über die Vakuumerwartungswerte an der Stelle $x = x', l = l'$. Wenn die Antikommutatoren das oben besprochene oszillatorische Verhalten in der Nähe des Lichtkegels zeigen, so sind die Vakuumerwartungswerte an der Stelle $x = x', l = l'$ unbestimmt. In den früheren Arbeiten (l. c. ¹⁻³) wurde die zusätzliche Annahme gemacht, daß diese Größen im Rahmen des TAMM-DANCOFF-Verfahrens gleich Null gesetzt werden sollen, und es wurde betont, daß es sich dabei (Weglassen der Kontraktionsfunktionen für $x = x'$) nicht eigentlich um eine Annahme über die Vakuumerwartungswerte, sondern über die zugrunde liegende Feldgleichung handelt. Man kann die an dieser Stelle nötige Annahme mathematisch richtiger ausdrücken, indem man nichts über die Vakuumerwartungswerte voraussetzt, dafür aber die Feldgleichung (1) in der Form

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \pm l^2 : \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) : = 0 \quad (35)$$

schreibt, wobei die Punkte $:$ in üblicher Weise bedeuten, daß es sich um ein im WICKSchen Sinne geordnetes Produkt (Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren) handeln soll. In den folgenden Rechnungen soll die Feldgleichung – ebenso wie in den früheren Arbeiten – stets im Sinne der Gl. (35) aufgefaßt werden.

III. Wellengleichungen der einzelnen Elementarteilchen und ihre Gruppeneigenschaften

a) Einteilchenwellenfunktionen

Wie oben bemerkt, ist die Dgl. (1) [bzw. (35)] invariant gegenüber der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, der PAULI-GÜRSEY-TOUSCHEK-Gruppe (Transformationen I und II) und der Skalen-Transformation. Vier komplexe Operator-Funktionen reichen im allgemeinen zur Beschreibung von nur zwei Spinor-teilchen aus, wenn sie einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung gehorchen. Die Beschreibung von freien Elektronen und Positronen durch eine vierkomponentige Funktion, die der DIRAC-Gleichung genügt, ist hierfür das beste Beispiel. Da unsere Differentialgleichung wohl von 1. Ordnung, jedoch nicht linear ist, läßt sich diese Abzählung der möglichen Zustände (d. h. der durch sie beschriebenen Elementarteilchen) nicht in derselben Weise vorneh-

men. Auf die Frage, wieviele Teilchen durch einen vorgegebenen Feldoperator dargestellt werden können, gibt es in einer nichtlinearen Theorie keine von den speziellen Eigenschaften der Differentialgleichung unabhängige Antwort; auch nicht auf die Frage, wieviele verschiedene Felder man benötigt, um alle beobachteten Teilchen darzustellen. Sinnvoll ist allein die Frage nach den Gruppeneigenschaften des Feldoperators und seiner irreduziblen Bestandteile. Die Gesamtheit der Matrixelemente des komplexen Operators $\psi(x)$ läßt sich in eine Reihe von irreduziblen Bestandteilen zerlegen, die sich bei den LORENTZ-Transformationen, den Transformationen (I) und (II) und der Skalentransformation unterschiedlich transformieren. Dies führt dazu, daß man im Prinzip viele verschiedene, stabile Teilchenzustände damit beschreiben kann. Daneben gibt es Matrixelemente von $\psi(x)$, die zur Erzeugung mehrerer Teilchen im gleichen Raum-Zeitpunkt oder zur Entstehung labiler Zustände gehören.

Um wenigstens einen gewissen formalen Zusammenhang herzustellen zwischen dem Feldoperator $\psi(x)$ und den Wellenfunktionen einer linearen Feldtheorie, können wir uns für die raum-zeitlichen Translationseigenschaften jener Matrixelemente $\varphi(x)$ des Feldoperators $\psi(x)$ (oder von Produkten) interessieren, die vom Vakuum zu einem Einteilchenzustand überführen. Diese Matrixelemente $\varphi(x)$ können wir dann in einem gewissen Sinn als die „Wellenfunktionen“ von Elementarteilchen interpretieren. Ihr Schwerpunkt wird, auf Grund der Translationseigenschaften und unter gewissen Grenzbedingungen, einer linearen Differentialgleichung genügen, die der freien Wellengleichung dieser Elementarteilchen entspricht. Das Auffinden dieser freien Wellengleichung der Elementarteilchen führt später zu einer Bestimmung ihrer Ruhmasse. Wie man diese linearen Wellengleichungen der Elementarteilchen, d. h. der Einteilchen-Matrixelemente aus der ursprünglichen nichtlinearen Gleichung der Feldoperatoren gewinnen kann, wird in einer sehr groben Näherung in Kap. IV gezeigt werden. Wir wollen uns im vorliegenden Kapitel nur mit den gruppentheoretisch möglichen Formen solcher Wellengleichungen befassen.

In erster Näherung müssen diese linearen Differentialgleichungen dieselbe hohe Symmetrie wie die

nichtlineare Feldgleichung (1) besitzen. Die DIRAC-Gleichung mit endlicher Masse scheidet deshalb aus, da sie wegen des Massengliedes nicht invariant ist gegen die Transformationen I und II. Die DIRAC-Gleichung des masselosen FERM-Teilchens, die Neutrinogleichung,

$$p_\nu \gamma_\nu \varphi_L = -i \gamma_\nu \frac{\partial \varphi_L}{\partial x_\nu} = 0, \quad (36)$$

oder $[p_0 + \gamma_5(\vec{\sigma}, \mathfrak{p})] \varphi_L = 0$,

hat jedoch diese Symmetrieeigenschaft. Die Neutrinogleichung beschreibt vier masselose Spinorteilchen, die wir, da in dieser Näherung die Masse der Elektronen vernachlässigt werden kann, mit den Elektronen, Positronen, Neutrinos und Antineutrinos identifizieren könnten. Wir können z. B. folgende Darstellung wählen

$$\varphi_{e^+} = L \varphi_L, \quad \varphi_{\bar{\nu}} = L \varphi_L^C, \quad \varphi_{e^-} = R \varphi_L^C, \quad \varphi_\nu = R \varphi_L, \quad (37)$$

wobei wir $\varphi^C = C^{-1} \bar{\varphi}^T$ (38)

und die Projektionsoperatoren

$$R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (39)$$

eingeführt haben. Positron und Antineutrino erfüllen also die Differentialgleichung

$$p_0 \varphi_{e^+, \bar{\nu}} = (\vec{\sigma}, \mathfrak{p}) \varphi_{e^+, \bar{\nu}}, \quad (40)$$

Elektron und Neutrino hingegen

$$p_0 \varphi_{e^-, \nu} = -(\vec{\sigma}, \mathfrak{p}) \varphi_{e^-, \nu}, \quad (41)$$

d. h. für Positron und Antineutrino stehen Impuls und Spin parallel (*positive helicity*), für Elektron und Neutrino antiparallel (*negative helicity*)²³. Teilchen (Elektronen, Neutrinos) erhalten bei obiger Definition also die Quantenzahl $I_N = +\frac{1}{2}$, Antiteilchen die Quantenzahl $I_N = -\frac{1}{2}$. Wie man unmittelbar sieht, sind die Neutrinolösungen mögliche Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung, nämlich dann, wenn das nichtlineare Glied in der Feldgleichung (1) verschwindet. Wegen der fehlenden Wechselwirkung sind aber diese Lösungen physikalisch relativ uninteressant.

Massenbehaftete Felder, die die volle Symmetrie der Feldgleichung (1) haben, können nicht mehr durch Differentialgleichungen 1. Ordnung dargestellt werden. Wir sehen jedoch, daß, wie schon GÜRSEY

²³ In der vorliegenden Arbeit wurde R mit $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ definiert, so daß Neutrino und Elektron das Symbol R erhalten. R bedeutet also negative „helicity“ und hat damit die gleiche

Bedeutung wie der Ausdruck „rechtszirkulare Polarisation“ in der Optik.

bemerkt hat, eine KLEIN-GORDON-Gleichung für ein Spinorfeld

$$(p^2 + \kappa^2) \varphi_B(x) = 0 \quad (42)$$

diese volle Symmetrie wieder hat. Tatsächlich führt auch die TAMM-DANCOFF-Methode, wie schon bemerkt wurde und später (Kap. IV) gezeigt wird, zu KLEIN-GORDON-Gleichungen für die Nukleonen. Es ist eine altbekannte Tatsache, daß eine DIRAC-Gleichung eines vierkomponentigen Spinors dargestellt werden kann als eine KLEIN-GORDON-Gleichung eines zweikomponentigen Spinors. Umgekehrt läßt sich eine KLEIN-GORDON-Gleichung eines vierkomponentigen Spinors umschreiben in eine Differentialgleichung 1. Ordnung einer acht-komponentigen Funktion. Dies geschieht (vgl. hierzu GÜRSEY¹³, FEYNMAN und GELL-MANN²⁴ u. a. *), indem man für die ersten Ableitungen von $\varphi_B(x)$, die ja in einer Differentialgleichung 2. Ordnung frei wählbar sind, neue Symbole einführt. Am zweckmäßigsten definiert man

$$\hat{\varphi}_B(x) = -i \frac{\gamma_\nu p_\nu}{\kappa} \varphi_B(x) = -\frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial \varphi_B}{\partial x_\nu}, \quad (43)$$

denn hieraus folgt vermöge der Dgl. (42)

$$\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \hat{\varphi}_B(x) = -\kappa \varphi_B(x). \quad (44)$$

$\varphi(x)$ und $\hat{\varphi}(x)$ verhalten sich also gänzlich symmetrisch. Definieren wir einen achtkomponentigen Spinor

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \hat{\varphi}(x) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

so gilt für diesen nun die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\left(I \cdot \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \Sigma_1 \cdot \kappa \right) \Phi(x) = 0. \quad (46)$$

Hierbei ist $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in dem durch die Aufspaltung $\varphi_B(x)$ und $\hat{\varphi}_B(x)$ definierten Raum. Transformiert man die Funktion Φ durch:

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Sigma_1 + \Sigma_3) \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_B + \hat{\varphi}_B \\ \varphi_B - \hat{\varphi}_B \end{pmatrix}, \quad (47)$$

so zerfällt die Differentialgleichung in zwei DIRAC-Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa \right) \frac{1}{2} (\varphi_B + \hat{\varphi}_B) &= 0, \\ \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \kappa \right) \frac{1}{2} (\varphi_B - \hat{\varphi}_B) &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Eine vierkomponentige Feldfunktion, die einer KLEIN-GORDON-Gleichung genügt, ist also äquivalent

zu zwei DIRAC-Gleichungen vierkomponentiger Funktionen und reicht zur Beschreibung eines Massendubletts aus, d. h. zur Beschreibung von zwei Spinor-teilchen und ihrer Antiteilchen.

In der niedersten Näherung werden die Baryonen nur als Nukleonen in Erscheinung treten; die Hyperonen können sich erst in einer Näherung zeigen, in der die Isospin-Invarianz gestört ist (vgl. Kap. II). Die beiden Nukleonen, Proton und Neutron, wollen wir mit einem solchen Massendublett identifizieren. Für die Darstellung der „Wellenfunktionen“ von Proton φ_p , Neutron φ_n , Antiproton $\varphi_{\bar{p}}$ und Antineutron $\varphi_{\bar{n}}$, die wir kurz mit dem Symbol φ_N kennzeichnen wollen, aus $\varphi_B(x)$ bzw. aus den Matrixelementen von $\psi(x)$ werden folgende Forderungen aufgestellt:

1. Die Wellenfunktionen der vier Nukleonen sollen Lösungen positiver Energie einer DIRAC-Gleichung sein: $[\gamma_\nu (\partial/\partial x_\nu) + \kappa] \varphi_N = 0$.

2. Unterwirft man den Operator $\psi(x)$ und damit auch die KLEIN-GORDON-Funktion $\varphi_B(x)$ der PAULI-GÜRSEY-Transformation (I), so sollen sich die Nukleonenfunktionen $\varphi_N(x)$ entsprechend der üblichen Isotopenspin-Transformation untereinander transformieren. Proton und Antineutron sollen einen Isotopenspin $I_3 = +\frac{1}{2}$, Neutron und Antiproton einen Isospin $I_3 = -\frac{1}{2}$ erhalten.

3. Unterwirft man $\varphi_B(x)$ der TOUSCHEK-Transformation (II), so sollen sich die $\varphi_N(x)$ transformieren wie

$$\varphi_N \rightarrow \exp\{i \alpha_0 I_N\} \varphi_N,$$

wobei $I_N = +\frac{1}{2}$ sein soll für Teilchen (Proton, Neutron) und $I_N = -\frac{1}{2}$ für Antiteilchen (Antiproton, Antineutron).

Die Darstellung der Wellenfunktionen für die Baryonen ist damit noch nicht vollständig festgelegt. Wohl verknüpft die Forderung 2. die PAULI-GÜRSEY-Gruppe mit der Isospingruppe, doch kann diese Zuordnung auf verschiedene Weisen vorgenommen werden. Um die Zuordnung eindeutig zu machen, müssen wir noch festlegen, welche Drehachsen ein-

²⁴ R. P. FEYNMAN u. M. GELL-MANN, Phys. Rev. **109**, 193 [1958].

* A n m. b. d. K o r r.: vgl. schon GÉHÉNIAU, Mécanique ondulatoire de l'Électron et du Photon, Gauthier-Villars, Paris 1938. Die wesentlichen Resultate dieses Abschnitts sind auch von G. MARX, Nuclear Phys. **9**, 337 [1958] u. **10**, 468 [1959] gefunden worden.

ander in den beiden Transformationen entsprechen sollen. Für den praktischen Fall reicht es aus anzugeben, welche PAULI-GÜRSEY-Transformation einer Drehung um die 3. Isotopenachse entspricht. Wir fordern z. B.

4. Bei der Eichtransformation $\varphi_B \rightarrow e^{i\alpha_3/2} \varphi_B$ sollen sich die φ_N wie bei einer Drehung um die 3. Isotopenachse transformieren.

Daß wir gerade die Eichtransformation mit der Drehung um die 3. Isotopenachse verknüpfen, ist an sich willkürlich, hat jedoch den Vorteil, daß die Darstellung der φ_N und ihre allgemeinen Transformationseigenschaften von der konventionellen Darstellung nur wenig abweichen. Zum Vergleich werden wir weiter unten auch die Darstellung angeben, die man erhält, wenn man die Transformation

$$\varphi \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \varphi + i \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_5 \varphi^C$$

mit der Drehung um die 3. Achse verbindet.

Durch die Forderungen 1. bis 4. erhalten wir bis auf einen willkürlichen Normierungsfaktor nun mit den Gln. (38), (39) folgende Darstellung der Nukleonen:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \varphi_B(x), \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \varphi_B^C(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \varphi_B^D(x), \\ \varphi_{\bar{p}}(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) L \varphi_B^C(x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) L \varphi_B^D(x), \\ \varphi_{\bar{n}}(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) L \varphi_B(x). \end{aligned} \quad (49)$$

$$\varphi_p \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \left\{ \left(1 + i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_B + \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_1) \varphi_B^C \right\} = \left(1 + i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_p + \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_1) \varphi_n, \quad (54)$$

die Neutronfunktion wie

$$\varphi_n \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \left\{ \left(1 - i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_B^C - \frac{1}{2} (\alpha_2 - i \alpha_1) \varphi_B \right\} = \left(1 - i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_n - \frac{1}{2} (\alpha_2 - i \alpha_1) \varphi_p. \quad (55)$$

Diese beiden Transformationen lassen sich zusammenfassen, wenn wir, wie üblich, φ_p und φ_n als Zustände in einem Spinraum auffassen

Hierbei ist

$$\varphi^D(x) = C^{-1} \gamma_5 \bar{\varphi}^T(x) = D^{-1} \bar{\varphi}^T(x). \quad (50)$$

Durch das Auftreten des Operators $1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ erfüllen alle Wellenfunktionen die DIRAC-Gleichung, denn

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa \right) \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi_B \\ = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} - \kappa^2 \right) \varphi_B = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Transformieren wir φ_B entsprechend (II)

$$\varphi_B \rightarrow e^{i(\alpha_3/2) \gamma_5} \varphi_B \quad \text{und} \quad \varphi_B^C \rightarrow e^{i(\alpha_3/2) \gamma_5} \varphi_B^C,$$

so transformieren sich

$$\begin{aligned} R \varphi_B \rightarrow e^{i(\alpha_3/2)} R \varphi_B, \quad R \varphi_B^C \rightarrow e^{i(\alpha_3/2)} R \varphi_B^C, \\ L \varphi_B \rightarrow e^{-i(\alpha_3/2)} L \varphi_B, \quad L \varphi_B^C \rightarrow e^{-i(\alpha_3/2)} L \varphi_B^C. \end{aligned} \quad (52)$$

Proton und Neutron erhalten also die Quantenzahl $I_N = \frac{1}{2}$, Antiproton und Antineutron die Quantenzahl $I_N = -\frac{1}{2}$. Um nachzuweisen, daß die PAULI-GÜRSEY-Transformation (I) an φ_B ausgeführt äquivalent zur Isospintransformation der φ_N ist, führen wir eine infinitesimale Transformation I aus

$$\begin{aligned} \varphi_B \rightarrow \left(1 + i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_B + \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_1) \gamma_5 \varphi_B^C, \\ \varphi_B^C \rightarrow \left(1 - i \frac{\alpha_3}{2} \right) \varphi_B^C - \frac{1}{2} (\alpha_2 - i \alpha_1) \gamma_5 \varphi_B. \end{aligned} \quad (53)$$

Wir haben hier gesetzt

$$a = 1 + i \frac{\alpha_3}{2}, \quad b = \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_1)$$

mit $\alpha_{1,2,3} \ll 1$ (reell),

so daß die Nebenbedingung $|a^2| + |b^2| = 1$ bis auf die kleinen quadratischen Glieder in α_i erfüllt ist. Die Protonfunktion transformiert sich dann wie

$$\begin{pmatrix} \varphi_p \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + i \frac{\alpha_3}{2} & \frac{i}{2} (\alpha_1 - i \alpha_2) \\ \frac{i}{2} (\alpha_1 + i \alpha_2) & 1 - i \frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_p \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Dies ist jedoch

$$\varphi_\tau \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2} \vec{\alpha} \vec{\tau}\right) \varphi_\tau, \quad (57)$$

d. h. gerade eine infinitesimale Drehung des Isospinors $\varphi_\tau = \begin{pmatrix} \varphi_p \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ um die Winkel α_i bezüglich der drei Isospinachsen τ_i . Führt man eine endliche Transformation I aus, so erhält man in entsprechender Weise die allgemeine endliche Isospintransformation

$$\varphi_\tau \rightarrow e^{(i/2) \vec{\alpha} \vec{\tau}} \varphi_\tau. \quad (58)$$

Für die Antiprotonen und Antineutronen finden wir in analoger Weise

$$\begin{pmatrix} \varphi_{\bar{p}} \\ \varphi_{\bar{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \frac{\alpha_3}{2} & -\frac{i}{2} (\alpha_1 + i \alpha_2) \\ -\frac{i}{2} (\alpha_1 - i \alpha_2) & 1+i \frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\bar{p}} \\ \varphi_{\bar{n}} \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\text{d. h.} \quad \varphi_{\bar{\tau}} \rightarrow \left(1 - \frac{i}{2} \vec{\alpha} \vec{\tau}^*\right) \varphi_{\bar{\tau}}, \quad (60)$$

wie man es für die Antinukleonen erwarten muß. Daß die Teilchen – Antiteilchen-Beziehung korrekt beschrieben wird, ersieht man auch daraus, daß die Anwendung der üblichen Ladungskonjugation auf die Nukleonenfunktionen

$$(\varphi_N)^C = C^{-1} \bar{\varphi}_N^T \quad (61)$$

vom Teilchen zum Antiteilchen überführt. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} (\varphi_p)^C &= C^{-1} \gamma_4^T \left[\left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) R \varphi_B \right]^*{}^T \quad (62) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) L \varphi_B^C = \varphi_{\bar{p}}. \end{aligned}$$

Würde man die Forderung 4. ersetzen durch die Forderung der Äquivalenz der Transformation

$$\varphi_B \rightarrow \cos \frac{\alpha_3}{2} \varphi_B + i \sin \frac{\alpha_3}{2} \gamma_5 \varphi_B^C$$

mit der Drehung um die 3. Isoachse, so müßten wir für die Nukleonen folgende Darstellungen verwenden:

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) R (\varphi_B + \varphi_B^C),$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) R (\varphi_B - \varphi_B^C),$$

$$\varphi_{\bar{p}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) L (\varphi_B^C + \varphi_B),$$

$$\varphi_{\bar{n}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) L (\varphi_B^C - \varphi_B).$$

Daß die so definierten Funktionen wieder die DIRAC-Gleichung erfüllen und auch das richtige Verhalten bei der Transformation II haben, läßt sich wie oben zeigen. Bei den PAULI-GÜRSEY-Transformationen verhalten sie sich jedoch anders. Schreiben wir die infinitesimale Transformation I nun folgendermaßen

$$\varphi_B \rightarrow \left(1 + i \frac{\alpha_1}{2}\right) \varphi_B - \frac{1}{2} (\alpha_2 - i \alpha_3) \gamma_5 \varphi_B^C,$$

$$\varphi_B^C \rightarrow \left(1 - i \frac{\alpha_1}{2}\right) \varphi_B^C + \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_3) \gamma_5 \varphi_B,$$

so gilt also

$$R (\varphi_B + \varphi_B^C) \rightarrow \left(1 + i \frac{\alpha_3}{2}\right) R (\varphi_B + \varphi_B^C) + \frac{1}{2} (\alpha_2 + i \alpha_1) R (\varphi_B - \varphi_B^C),$$

$$R (\varphi_B - \varphi_B^C) \rightarrow \left(1 - i \frac{\alpha_3}{2}\right) R (\varphi_B - \varphi_B^C) - \frac{1}{2} (\alpha_2 - i \alpha_1) R (\varphi_B + \varphi_B^C).$$

$R(\varphi_B + \varphi_B^C)$ und $R(\varphi_B - \varphi_B^C)$ transformieren sich jetzt genau so wie früher $R \varphi_B$ bzw. $R \varphi_B^C$ und wir werden deshalb auch wieder zu den richtigen Isospintransformationen geführt. Auch der Isospin der Antiteilchen wird korrekt, da wieder die Beziehungen gelten:

$$(\varphi_p)^C = \varphi_{\bar{p}}, \quad (\varphi_n)^C = \varphi_{\bar{n}}.$$

b) Parität und Ladungskonjugation

Unsere Nukleonenfelder wurden so definiert, daß sich bei den Transformationen I und II die Nukleonenfunktionen wie Isospinoren in der konventionellen Weise transformieren. Wir stellen nun die Frage: Welche Transformation der KLEIN-GORDON-Funktion entspricht der Paritätsoperation der DIRAC-Funktion φ_N der Nukleonen? Zum Beispiel soll transformiert werden

$$\begin{aligned} \varphi_p(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \gamma_4 \varphi_p(-\mathbf{r}, t), \\ \varphi_p^C(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\gamma_4 \varphi_p^C(-\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (63)$$

Diese übliche Vorschrift der Paritätsoperation, bei der PC=CP wird, wollen wir wie in Kap. I mit „Paritätsoperation 1. Art“ bezeichnen. In Kap. I ist darauf hingewiesen worden, daß die Dgl. (1) gegen die Ausführung dieser Operation an $\psi(x)$ invariant ist. Es ist aber sofort klar, daß die gesuchte Operation an der Funktion φ_B nicht diese Operation 1. Art sein kann; denn diese Operation ist nicht vertauschbar mit der Transformation II, die mit der Baryonenzahl zusammenhängen soll. Sie ist deshalb auch nicht mit den Projektionsoperatoren vertauschbar, die in den Nukleonenfunktionen (49) auftreten. Dies sieht man z. B. an der Protonfunktion

$$\varphi_D(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \gamma_4 \varphi_B(-\mathbf{r}, t) = \gamma_4 \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\varkappa} (\gamma_4 \gamma_\nu \gamma_4) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right] L \varphi_B(-\mathbf{r}, t) = \gamma_4 \varphi_{\bar{n}}(-\mathbf{r}, t).$$

Die Paritätsoperation 1. Art, ausgeführt an φ_B , führt zu den gespiegelten Antiteilchen gleichen Isospins über (hier z. B. $p \rightarrow \bar{n}$). Wir stellen jedoch fest, daß folgende Operation zu einer für die Definition einer Quantenzahl brauchbaren Paritätsformulierung führt:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \gamma_4 \varphi(-\mathbf{r}, t), \quad \varphi^C(\mathbf{r}, t) \rightarrow +\frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \gamma_4 \varphi^C(-\mathbf{r}, t). \quad (64)$$

Wir wollen diese Vorschrift als „Paritätsoperation 2. Art“ bezeichnen. Da auf Grund der Forderung $PC=CP$ bei der ladungskonjugierten Funktion in der Paritätsoperation immer das negative Vorzeichen auftritt, wo bei der Funktion selbst das positive steht, besitzen identische Raum-Zeit-Funktionen von φ und φ^C die entgegengesetzte Parität. Wir können dies auch so ausdrücken, daß die durch φ bzw. φ^C beschriebenen Teilchen eine entgegengesetzte Eigenparität (*intrinsic parity*) haben. Führt man die Paritätsoperation 2. Art an φ_B aus, so erhält man für die Nukleonenfunktionen

$$\begin{aligned} \varphi_p(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \gamma_4 \varphi_p(-\mathbf{r}, t), \\ \varphi_n(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\gamma_4 \varphi_n(-\mathbf{r}, t), \\ \varphi_{\bar{p}}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\gamma_4 \varphi_{\bar{p}}(-\mathbf{r}, t), \\ \varphi_{\bar{n}}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \gamma_4 \varphi_{\bar{n}}(-\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (65)$$

Die Paritätsoperation 2. Art an φ_B ist also äquivalent der Paritätsoperation 1. Art an den Nukleonenfunktionen, wenn man den Protonen und Neutronen entgegengesetzte Eigenparität gibt. Letztere Definition steht allerdings im Gegensatz zur Konvention, die den Protonen und Neutronen die gleiche Eigenparität zuordnet; doch handelt es sich dabei um einen unwesentlichen formalen Unterschied.

Die Dgl. (1) [bzw. (35)] ist gegen die Paritätsoperation 2. Art *nicht* in Strenge invariant. Es besteht aber Anlaß, eine angenäherte Invarianz im Bereich der Baryonenlösungen anzunehmen und insbesondere dem π -Meson eine ziemlich gut definierte Parität 2. Art zuzuschreiben. Es wird später ein Näherungsverfahren entwickelt werden (III d), das die Invarianz gegenüber der Parität 2. Art sogar ausdrücklich voraussetzt, dessen Annäherungsgrad aber noch nicht untersucht ist. Die Frage, in welchen Wechselwirkungen oder in welcher Näherung diese Invarianz durchbrochen wird, bedarf also noch einer späteren Untersuchung.

Die Dgl. (1) [bzw. (35)] ist gegen die übliche Ladungskonjugation an den Feldoperatoren in-

variant. Die entsprechende Operation an den Matrixelementen φ_B lautet:

$$\varphi_B \rightarrow C^{-1} \bar{\varphi}_B^T. \quad (66)$$

Wir bezeichnen diese Operation mit „Ladungskonjugation 1. Art“. Diese Operation an den φ_B führt aber nicht zur Ladungskonjugation an den Nukleonenwellenfunktionen Gl. (49). Die Vorschrift

$$\varphi \rightarrow -\frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} C^{-1} \bar{\varphi}^T, \quad (67)$$

die wir künftig als „Ladungskonjugation 2. Art“ bezeichnen wollen, ist hingegen der Ladungskonjugation der DIRAC-Funktionen (49) äquivalent. Für sie ist die Feldgleichung (1) wieder nicht streng invariant. Für die CP-Operation 2. Art findet man

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} C^{-1} \left[-\frac{1}{\varkappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \gamma_4 \varphi(-\mathbf{r}, t) \right]^T \\ &= C^{-1} [\gamma_4 \varphi(-\mathbf{r}, t)]^T. \end{aligned}$$

Die CP-Operation 2. Art ist also identisch mit der CP-Operation 1. Art. Die Feldgleichung (1) ist invariant gegen CP. Auch die Operation der Zeitumkehr und der starken Reflexion (CPT) ist an den DIRAC- und KLEIN-GORDON-Funktionen in derselben Weise vorzunehmen.

Wir haben so gezeigt, daß die Spinorlösungen einer KLEIN-GORDON-Gleichung ausreichen zur vollständigen Beschreibung eines Nukleonendoublets Proton-Neutron. Die resultierenden Funktionen für Proton und Neutron und ihre Antiteilchen unterscheiden sich in ihren Eigenschaften nur darin von der konventionellen Isospindarstellung, daß Proton und Neutron entgegengesetzte Eigenparität erhalten. Dies führt z. B. dazu, daß bei der Interpretation des PANOFSKY-Experiments $\pi^- + d \rightarrow n + n$, das durch seine Kinematik die entgegengesetzte Eigenparität für Deuteron und π^- -Meson fordert, nun zu folgern ist, daß das π^- -Meson positive Parität besitzt, also ein skalares Teilchen ist, da das Deuteron negative Parität besitzen muß. Wegen der Ladungskonjugation muß auch das π^+ -Meson ein skalares Teilchen

sein. Das π^0 -Meson bleibt jedoch weiterhin pseudoskalar, da bei seiner Erzeugung kein Übergang von Proton in Neutron stattfindet. Es wird später gezeigt werden, daß die vorliegende Theorie auch gerade diese Ergebnisse für die π -Mesonen liefert. FERMI-Teilchen und ihre zugehörigen Antiteilchen haben weiterhin entgegengesetzte Parität.

Für die Leptonenlösungen – unter denen wir hier und künftig nur das massenlose Elektron – Neutrino-Dublett verstehen wollen – läßt sich eine Paritätsoperation und Ladungskonjugation 2. Art nicht mehr definieren. Denn der Operator $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}/p_0$, der im gewissen Sinn dem Operator $\frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ bei den Nukleonen entspricht, ist jetzt mit der Transformation II vertauschbar. Dagegen bleiben CP, T und folglich auch CPT weiterhin definiert, welche zur Beschreibung des experimentellen Sachverhaltes ausreichen.

c) Vereinigung von Leptonen- und Baryonen-darstellung

Benutzt man, wie eingangs bemerkt, die Invarianz der Scharen von Wellengleichungen mit Parameter l gegenüber der Skalentransformation, so lassen sich Leptonen (im engeren Sinne) und Nukleonen in ein System bringen. Wir müssen dann zwischen zwei verschiedenen Matrixelementen unterscheiden, je nachdem, ob sie zu einem Einteilchenzustand χ mit $A = \pm \frac{1}{2}$ gehören

$$\begin{aligned} \varphi_{1/2}(x, l) &= \langle 0 | \psi(x, l) | \chi^{1/2} \rangle, \\ \varphi_{-1/2}(x, l) &= \langle 0 | \psi(x, l) | \chi^{-1/2} \rangle. \end{aligned} \quad (68)$$

$\psi(x, l)$ ist hierbei der Feldoperator, der die Wellengleichung (1) mit Parameter l erfüllt. Wir haben hierbei nur den einfachsten Feldoperator explizit angeschrieben. Da ja A definiert ist durch (15 a) und (16) und für das Vakuum definitionsgemäß gelten soll

$$A | 0 \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle 0 | A = 0,$$

so folgt daraus, daß $\varphi_{1/2}$ und $\varphi_{-1/2}$ verschiedene Längendimensionen besitzen; und zwar können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_{1/2}(x, l) &= l^{-1} \varphi\left(\frac{x}{l}\right), \\ \varphi_{-1/2}(x, l) &= l^{-2} \varphi\left(\frac{x}{l}\right). \end{aligned} \quad (69)$$

Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_{1/2}(x, l) &= \lambda \left[l^{-1} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right] \\ &= \frac{l_N}{2} \varphi_{1/2}(x, l) = \frac{1}{2} \varphi_{1/2}(x, l), \\ \lambda \varphi_{-1/2}(x, l) &= \lambda \left[l^{-2} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right] \\ &= \frac{l_N}{2} \varphi_{-1/2}(x, l) = -\frac{1}{2} \varphi_{-1/2}(x, l). \end{aligned} \quad (70)$$

Mit λ lassen sich wieder Projektionsoperatoren der Form bilden

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(1 + 2\lambda) \quad \text{und} \quad \lambda_{-1/2} = \frac{1}{2}(1 - 2\lambda), \quad (71)$$

mit denen die eine oder andere Wellenfunktion aus der Gesamtheit herausgeblendet werden kann.

Nukleonen und Leptonen ließen sich nun folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{z_N} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \left[l^{-1} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ \varphi_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{z_N} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \left[l^{-1} \varphi^C\left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ \varphi_{\bar{p}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{z_N} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) L \left[l^{-2} \varphi^C\left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ \varphi_{\bar{n}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{z_N} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) L \left[l^{-2} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right]; \\ \varphi_{e^+} &= L \left[l^{-1} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right], \quad \varphi_{e^-} = R \left[l^{-2} \varphi^C\left(\frac{x}{l}\right) \right], \\ \varphi_{\bar{\nu}} &= L \left[l^{-1} \varphi^C\left(\frac{x}{l}\right) \right], \quad \varphi_{\nu} = R \left[l^{-2} \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

z_N bedeutet hier eine reine Zahl, die der Nukleonenmasse proportional ist und die sich unabhängig von der Wahl von l aus der nichtlinearen Differentialgleichung und der Vertauschungsfunktion ergeben soll. Die experimentell beobachteten Massenverhältnisse sind durch die Verhältnisse von solchen Massenzahlen gegeben. In obiger Schreibweise ist offensichtlich, daß die in den Nukleonenwellenfunktionen auftretenden Projektionsoperatoren mit dem Operator λ vertauschbar sind, da $\gamma_\nu l(\partial/\partial x_\nu)$ mit λ vertauschbar ist.

Bei dieser Darstellung von Nukleonen-Leptonen müssen wir die Definition der Ladungskonjugation etwas abändern, da ja beim Übergang vom Teilchen zum Antiteilchen die „Längenquantenzahl“ umgedreht werden muß. Dies geschieht, indem man die Nukleonen- und Antileptonen-Wellenfunktionen bei Ladungskonjugation noch mit l^{-1} , die Antinukleonen- und Leptonen-Wellenfunktionen noch mit l multipliziert. Es ist vielleicht zweckmäßiger, in diesem Fall wieder eine Matrixschreibweise einzuführen

ren, derart, daß wir zuordnen

$$l^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen beiden Matrizen ließe sich dann eine PAULI-Spinmatrix aufbauen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (73)$$

die nun zusammen mit obigem Operator λ , den wir zweckmäßig

$$2\lambda \rightarrow \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

schreiben, einen neuen Raum definiert. Die Ladungskonjugation der KLEIN-GORDON-Funktionen wäre nun zu schreiben:

$$\varphi \rightarrow -\lambda_1 \frac{\gamma_\nu}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\nu} C^{-1} \bar{\varphi}^T. \quad (75)$$

An sich müßte man λ und λ_1 durch unendliche antikommutierende Matrizen darstellen, um auch Zustände mit den Quantenzahlen $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$ usw. beschreiben zu können. Läßt man diese Zustände außer

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \varphi_B = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) R \langle 0 | \psi(x) + \dots | \chi \rangle.$$

Vermöge der Wellengleichung (1) können wir dies auch schreiben

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| R \psi(x) + L \frac{l^2}{\kappa} : \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) [\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)] : + \dots \right| \chi \right\rangle.$$

Der Feldoperator des Protons wäre also gleichsam in niederster Näherung

$$\psi_p(x) = \frac{1}{2} \left[R \psi(x) + \frac{l^2}{\kappa} L : \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) [\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)] : \right] \quad (76)$$

In Strenge läßt sich der Zustand „Proton“ natürlich aus dem Vakuum nur gewinnen, indem man eine unendliche Reihe von Produkten von Feldoperatoren (ψ , $\psi \bar{\psi} \psi$, $\psi \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi$, ...) auf das Vakuum anwendet. Die höheren Glieder dieser Reihe mögen verhältnismäßig wenig beitragen. Die beiden ersten aber sind von gleicher Wichtigkeit.

Die Feldoperatoren der Nukleonen können in ihrem asymptotischen Verhalten nicht mehr durch eine Einpunktfunktion in ihrer vollen Symmetrie dargestellt werden, sondern man braucht dazu auch die 3-Punktfunktion, die dieselbe Größenordnung hat wie die 1-Punktfunktion. Dies liegt daran, daß die 3-Punktfunktionen [oder ganz allgemein alle $(3+4n)$ -Punktfunktionen mit $n=0, 1, \dots$] sich bei den Transformationen I und II umgekehrt im Sinne einer Rechts-Links-Beziehung transformieren im Vergleich zu den Einpunktfunktionen [oder allgemein den $(1+4n)$ -Punktfunktionen]. Für die Neutrinos verschwindet wegen der fehlenden Wechselwirkung die 3-Punktfunktion.

Betracht, was wir immer getan haben, so können wir uns für Einteilchenzustände auf die zweireihigen Matrizen beschränken. Die durch (71) gegebene Darstellung von Nukleonen und Leptonen (im engeren Sinne) wollen wir jedoch nur benutzen, wenn die Leptonen überhaupt in Erscheinung treten und wir sie von den Nukleonen trennen wollen. Meist wird es ausreichen, die Darstellungen (37) und (49) zu betrachten.

d) Ausnützung des Σ -Raums für die Näherungsmethoden

Unsere Betrachtungen in den vorangehenden Abschnitten haben sich im wesentlichen auf die Untersuchung von Matrixelementen beschränkt. Wir haben z. B. in (49) für die Wellenfunktion des Protons, wenn wir von den Verfeinerungen (72) absehen, die durch die Skalentransformation bedingt sind, angesetzt:

Andererseits haben wir auch festgestellt, daß man bei den Nukleonen durch Einführung von

$$\hat{\varphi}_B = -\frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \varphi_B$$

als unabhängiger Variabler (vgl. 43, 44) eine KLEIN-GORDON-Gleichung für φ_B in eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit der doppelten Anzahl von Komponenten umschreiben kann [Gl. (46)]. Mit dem achtkomponentigen Spinor $\Phi(x)$ von Gl. (45) lassen sich die Nukleonen nun folgendermaßen darstellen, wenn wir noch die Diagonalmatrix $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ einführen:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \Sigma_3) \Phi, \\ \varphi_n &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \Sigma_3) \Phi^C \\ &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \Sigma_3) \Phi^D, \\ \varphi_{\bar{p}} &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \Sigma_3) \Phi^C \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \Sigma_3) \Phi^D, \\ \varphi_{\bar{n}} &= \frac{1}{2} (1 + \Sigma_1) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5 \Sigma_3) \Phi. \end{aligned} \quad (77)$$

Zur Abkürzung haben wir gesetzt

$$\Phi^D = \gamma_5 \Sigma_3 \Phi^C = \gamma_5 \Sigma_3 C^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_B^T \\ \hat{\varphi}_B \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Da φ_B und $\hat{\varphi}_B$ sich bei den Transformationen I und II umgekehrt transformieren, lauten die PAULI-GÜRSEY-TOUSCHEK-Transformationen an Φ ausgeführt

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow a \Phi + b \Phi^D, & \Phi^D &\rightarrow a^* \Phi^D - b^* \Phi, \\ \hat{\Phi} &\rightarrow e^{i/2 i \alpha_0 \gamma_5 \Sigma_3} \hat{\Phi}, & \hat{\Phi}^D &\rightarrow e^{i/2 i \alpha_0 \gamma_5 \Sigma_3} \hat{\Phi}^D. \end{aligned}$$

Die Nukleonenfunktionen erfüllen bei obiger Darstellung alle wieder die gewöhnliche DIRAC-Gleichung

$$\left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa \right) \varphi_N = 0.$$

Die Paritätsoperation 2. Art wird definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \Sigma_1 \gamma_4 \Phi(-\mathbf{r}, t), & (79) \\ \Phi^C(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\Sigma_1 \gamma_4 \Phi^C(-\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Dies hat zur Folge, daß wieder (65) gilt. Für die Ladungskonjugation 2. Art haben wir entsprechend

$$\bar{\Phi}(x) \rightarrow \Sigma_1 C^{-1} \bar{\Phi}^T(x), \quad (80)$$

was die übliche Ladungskonjugation für die Nukleonenfelder zur Folge hat.

In einer Näherung, in der wir die Leptonenlösungen ganz vernachlässigen und uns auf die niederste Näherung der Nukleonen beschränken, sollten sich auch die Feldoperatoren

$$\psi(x) \text{ und } \hat{\psi}(x) = -i \frac{\gamma_\nu p_\nu}{|p|} \psi(x)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi(x) \pm l^2 \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) + \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \hat{\psi}(x)] &= 0, \\ \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \hat{\psi}(x) \pm l^2 \gamma_5 \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x) + \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \hat{\psi}(x)] &= 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Dieses Gleichungspaar ist also nur in einer solchen Näherung der ursprünglichen Differentialgleichung ähnlich, in der auch $\hat{\psi}(x)$ sich ähnlich wie $\psi(x)$ verhält.

Dieser Sachverhalt läßt sich auch folgendermaßen interpretieren: In einer Näherung, in der nur die Nukleonen als Lösungen der nichtlinearen Feldgleichung (1) auftreten, können wir die Feldgleichung näherungs-

ähnlich verhalten. $|p|$ ist im Impulsraum eindeutig definiert und geht bei den Nukleonen dann in die Nukleonenmasse über, wenn diese auf die Energieschale zu liegen kommen. Die Feldgleichung (1) und das daraus resultierende τ -Gleichungssystem ist gegen die Substitution $\psi(x) \rightarrow \hat{\psi}(x)$ im allgemeinen nicht invariant, wie man nachprüfen kann. Näherungsweise dürfte aber eine solche Invarianz bestehen, insbesondere dann, wenn man sich auf die Berücksichtigung von Kontraktionen zwischen je zwei Feldoperatoren beschränkt. Innerhalb einer solchen Näherung können wir deshalb den Versuch wagen, die nichtlineare Feldgleichung vor der Quantisierung gewissermaßen zu „symmetrisieren“, und zwar so, daß wir eine neue 8-komponentige Operatorfunktion $\Psi(x)$ einführen durch die Definition

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \hat{\psi}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ -i \frac{\gamma_\nu p_\nu}{|p|} \psi(x) \end{pmatrix} \quad (81)$$

und nun für diese Operatorfunktion dieselbe nichtlineare Feldgleichung (1) fordern, d. h.

$$\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Psi(x) \pm l^2 \gamma_5 \gamma_\mu \Psi(x) [\bar{\Psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \Psi(x)] = 0. \quad (82)$$

Alle γ -Matrizen sollen sich dabei in dem durch $\psi(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ aufgespannten Raum, den wir wieder mit den Σ -Spinmatrizen beschreiben, wie Einheitsmatrizen verhalten. Ausgeschrieben in seine Σ -Spin-Komponenten entspricht diese Gleichung folgendem Gleichungspaar:

weise als eine Operatorgleichung betrachten, welche die „nackten“ Nukleonenoperatoren $\psi(x)$ direkt miteinander verknüpft. Für die „angezogenen“ Nukleonen $\psi'(x)$ hingegen wird die Wechselwirkung im allgemeinen komplizierter sein, und wir erwarten deshalb, daß in den Wechselwirkungstermen dieses Operators auch beliebige Ableitungen nach den Raum-Zeit-Koordinaten auftreten können. Wir betrachten nun allgemeine nichtlineare Ausdrücke von $\psi'(x)$ der Form:

$$L_W = \sum_i \int C_i(p^2, q^2, k^2, p, q, \dots) [\bar{\psi}'(p - \frac{1}{2}k) O_i^{(1)}(p, k) \psi'(p + \frac{1}{2}k)] [\bar{\psi}'(q + \frac{1}{2}k) O_i^{(2)}(q, k) \psi'(q - \frac{1}{2}k)] d^4p d^4q d^4k, \quad (84)$$

wo $O_i^{(1)}$ und $O_i^{(2)}$ allgemeine DIRAC-Operatoren sind, welche von den Impulsen p, k bzw. q, k abhängen können und so miteinander kombiniert werden sollen, daß L_W eine LORENTZ-Invariante ist. Soll L_W ein HERMITESCHER Operator sein, so ist dafür hinreichend, daß $O_i^{(1)}$ $O_i^{(2)}$ die Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} O_i^{(1)}(p, k) &= \pm \gamma_4 O_i^{(1)*}(p, -k) \gamma_4, \\ O_i^{(2)}(q, k) &= \pm \gamma_4 O_i^{(2)*}(q, -k) \gamma_4. \end{aligned} \tag{85}$$

Hierbei sind für jedes Glied in (84) entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu verwenden. Diese Bedingungen bedeuten keine wesentliche Einschränkung bezüglich der HERMITESCHKEITSForderung für L_W . Nun soll L_W außerdem invariant sein gegenüber den PAULI-GÜRSEY-TOUSCHEK-Transformationen (I) und (II). Um dies zu gewährleisten, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$O_i^{(1)}(p, k) = \begin{cases} i(\gamma_\nu p_\nu) \gamma_5 (\gamma_\nu k_\nu), & \text{Skalare} \\ \begin{aligned} & \gamma_5 \gamma_\mu ; (\gamma_\nu p_\nu) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_\nu p_\nu) ; (\gamma_\nu k_\nu) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_\nu k_\nu) ; [(\gamma_\nu k_\nu) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_\nu p_\nu) - (\gamma_\nu p_\nu) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma_\nu k_\nu)] ; \\ & i k_\mu (\gamma_\nu p_\nu) ; i p_\mu (\gamma_\nu k_\nu) ; i [(\gamma_\nu k_\nu) \gamma_\mu (\gamma_\nu p_\nu) - (\gamma_\nu p_\nu) \gamma_\mu (\gamma_\nu k_\nu)], \end{aligned} & \text{Vektoren} \\ i \gamma_\mu p_\nu ; \gamma_5 \gamma_\mu k_\nu & \text{Tensoren,} \end{cases} \tag{88}$$

für $O_i^{(2)}(q, k)$ finden wir entsprechende Glieder, wenn wir p durch q ersetzen. Die skalaren, vektoriellen und tensoriellen Anteile von $O_i^{(1)}$ und $O_i^{(2)}$ müssen so miteinander verknüpft werden, daß L_W LORENTZ-invariant wird.

Wir fordern nun weiter, daß $O_i^{(1)}$ und $O_i^{(2)}$ und hiermit L_W auch invariant sein sollen gegenüber der „Dach“-Transformation:

$$\psi \rightarrow \hat{\psi} = - \frac{i \gamma_\nu p_\nu}{|p|} \psi.$$

Dann finden wir für $O_i^{(1)}$ nur einen Ausdruck der Form:

$$O^{(1)} = \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{i \gamma_\nu (p_\nu - \frac{1}{2} k_\nu)}{|p - \frac{1}{2} k|} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i \gamma_\nu (p_\nu + \frac{1}{2} k_\nu)}{|p + \frac{1}{2} k|} \tag{89}$$

und für $O^{(2)}$ einen entsprechenden Ausdruck mit q statt p . Nimmt man die Funktion C_i in (84) als konstant an, so führt dieser Ansatz für das nichtlineare Glied zu einer Differentialgleichung der Form (83), denn das bilineare Glied $\bar{\psi}'(p) i \gamma_\nu p_\nu \psi'(p)$ der „freien“ LAGRANGE-Funktion ist ebenfalls invariant gegenüber der „Dach“-Transformation. Um die näherungsweise Gültigkeit der Dgl. (83) zu zeigen, müßte plausibel gemacht werden können, daß die gegen die „Dach“-Transformation nicht invarianten Glieder wirklich gegenüber dem aus (89) resultierenden Glied klein sind.

Wir wollen nun diese erweiterte, jedoch – im günstigsten Fall – nur näherungsweise gültige Differentialgleichung (83) verwenden, um eine andere, unter Umständen „höhere“ Näherung für die Eigenwertgleichung der Nukleonen zu erhalten. Ob man

$$\begin{aligned} O_i^{(1)}(p, k) &= C^{-1} O_i^{(1)T}(-p, k) C, \\ O_i^{(2)}(q, k) &= C^{-1} O_i^{(2)T}(-q, k) C \end{aligned} \tag{86}$$

und

$$\begin{aligned} O_i^{(1)}(p, k) &= -\gamma_5 O_i^{(1)}(p, k) \gamma_5, \\ O_i^{(2)}(q, k) &= -\gamma_5 O_i^{(2)}(q, k) \gamma_5. \end{aligned} \tag{87}$$

Hängen $O^{(1)}$ und $O^{(2)}$ nicht von den Impulsen ab, so sind die Bedingungen (85) erfüllt durch: 1, γ_5 , γ_μ , $\gamma_5 \gamma_\mu$, $\gamma_{\mu\nu}$; die Bedingungen (86) durch: 1, γ_5 , $\gamma_5 \gamma_\mu$; und die Bedingungen (87) durch: γ_μ , $\gamma_5 \gamma_\mu$; d. h. alle Bedingungen sind erfüllt durch $O^{(1)} = O^{(2)} = \gamma_5 \gamma_\mu$. Ist im Ausdruck für L_W die Funktion C_i ebenfalls von den Impulsen unabhängig, so erhält man für L_W gerade das nichtlineare Glied in der LAGRANGE-Funktion, die zur Feldgleichung (1) führt.

Läßt man Impulse in den O_i zu, so ergeben sich für die DIRAC-Operatoren folgende Möglichkeiten:

durch diese primitive Manipulation wirklich eine Verbesserung der Nukleoneneigenwerte im Vergleich zu der entsprechenden Näherung mit einem 4-komponentigen $\psi(x)$ erzielt, ist allerdings zunächst ungewiß und könnte erst durch eine spätere Verbesserung der Eigenwertberechnung entschieden werden. Es besteht immerhin die Hoffnung, daß dadurch, daß man die Symmetrie von $\psi(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ – die bei freien Nukleonen auftreten muß – schon zu Beginn der Rechnung einbaut, in gewisser Hinsicht höhere Glieder berücksichtigt werden – insbesondere die 3-Punktfunction – und damit auch eine Verbesserung der Resultate erreicht wird.

Für die Quantisierung der $\Psi(x)$ benötigen wir noch die Vakuumerwartungswerte von Produkten der $\psi(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ (also quasi der 4-Punktfunction).

Gemäß der Definition von $\hat{\psi}(x)$ folgt aus

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\gamma_\nu p_\nu}{p^2 + \kappa^2} e^{i p(x-x')}$$

bei Anwendung des Operators $-\frac{i \gamma_\nu p_\nu}{|p|}$ nun

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\psi}(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \psi(x) \hat{\bar{\psi}}(x') | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i \kappa}{p^2 + \kappa^2} e^{i p(x-x')}, \end{aligned}$$

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle,$$

oder für die 8-komponentigen Operatoren

$$\langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\gamma_\nu p_\nu + i \Sigma_1 \kappa}{p^2 + \kappa^2} e^{i p(x-x')} . \quad (90)$$

Diese Funktion soll nun wieder auf ähnliche Weise wie oben regularisiert werden, indem wir unter Benützung von I, Gl. (25), einfach auf dem Lichtkegel

die δ - und δ' -Funktion im Ausdruck $\gamma_\nu p_\nu / (p^2 + \kappa^2)$ und die δ -Funktion im Ausdruck $i \kappa / (p^2 + \kappa^2)$ abziehen, also für die praktische Rechnung verwenden

$$\langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{p_\nu \gamma_\nu \kappa^4}{(p^2)^2 (p^2 + \kappa^2)} + \frac{i \Sigma_1 \kappa^3}{p^2 (p^2 + \kappa^2)} \right] \quad (91)$$

oder in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\psi}(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \psi(x) \hat{\bar{\psi}}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{1}{p^2 + \kappa^2} - \frac{1}{p^2} \right] i \kappa e^{i p(x-x')} , \\ \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{1}{p^2 + \kappa^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{\kappa^2}{(p^2)^2} \right] p_\nu \gamma_\nu e^{i p(x-x')} . \end{aligned} \quad (92)$$

Statt der Verdopplung der Feldoperatoren kann man auch, wie im Entwurf von PAULI und einem der Verfasser¹⁵ erwähnt, eine Verdopplung des Vakuums vornehmen. Da wir uns hier nur für die Matrixelemente zwischen einem Einteilchenzustand und dem Vakuum interessieren, kann man zwei Vakua einführen: $0\rangle$ und $\hat{0}\rangle$, und die Matrixelemente $\langle 0 | \psi(x) | \chi \rangle$ und $\langle \hat{0} | \psi(x) | \chi \rangle$ unterscheiden. Die Operatoren Σ wirken dann auf die Zustände des Vakuums. Die Vakuumerwartungswerte von Produkten von 2 Feldoperatoren werden 2×2 -Matrizen, solche von $2n$ Feldoperatoren $2^n \cdot 2^n$ -Matrizen. Im Prinzip hat man damit eine unendliche Entartung des Vakuums formal eingeführt, nicht nur eine Verdopplung. Ob sich ein solcher Formalismus als zweckmäßig erweist, kann erst die weitere Entwicklung der Theorie lehren.

e) Verletzung der Isoinvarianz

Es erhebt sich die Frage, ob die im Abschnitt III a und IIIc eingeführten Darstellungen für Nukleonen und Leptonen im Prinzip eine solche Verallgemeinerung zulassen, daß auch die wirklichen Nukleonen und Leptonen mit den die Isoinvarianz störenden kleinen Massendifferenzen dargestellt werden können. Wir wollen hier z. B. das Neutron-Proton-Dublett ins Auge fassen. Nur in 1. Näherung, in der die volle Isosymmetrie gilt, sind die Massen dieser beiden Teilchen identisch, ist also das Dublett streng entartet. Wir fordern nun die realistischen DIRAC-Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa_p \right) \varphi_p = 0, \quad \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa_n \right) \varphi_n = 0, \\ \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa_{\bar{p}} \right) \varphi_{\bar{p}} = 0, \quad \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \kappa_{\bar{n}} \right) \varphi_{\bar{n}} = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\kappa = \frac{1}{2}(\kappa_p + \kappa_n), \quad \varepsilon = (1/2 \kappa) (\kappa_n - \kappa_p). \quad (94)$$

Für die KLEIN-GORDON-Funktionen φ_B setzen wir statt (42) daher eine modifizierte KLEIN-GORDON-Gleichung an

$$[p^2 + \kappa^2 (1 - \gamma_5 \varepsilon)^2] \varphi_B = 0 \quad (95)$$

und folglich für das ladungskonjugierte Feld

$$[p^2 + \kappa^2 (1 + \varepsilon \gamma_5)^2] \varphi_B^C = 0. \quad (96)$$

Diese Gleichungen sind invariant gegenüber der Transformation II, der Eichtransformation Ia und der CP-Transformation. Auch die Skalentransformation, die wir in der Schreibweise nicht berücksichtigt haben, erfolgt wieder wie früher und wird durch γ_5 nicht beeinflusst. Die allgemeine PAULI-GÜRSEY-Transformation I ist allerdings durch $\varepsilon \gamma_5$ gestört. Die so beschriebenen Teilchen besitzen eine wohldefinierte Ladung und Baryonenzahl, weichen aber von der strengen Isosymmetrie in der Größenordnung von ε ab. Wir können die KLEIN-GORDON-Gleichung analog (43) zerlegen in das GÜRSEY-Gleichungspaar

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \varphi &= -\kappa (1 + \varepsilon \gamma_5) \hat{\varphi}, \\ \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \hat{\varphi} &= -\kappa (1 - \varepsilon \gamma_5) \varphi. \end{aligned} \quad (97)$$

Wir sehen schon, daß an die Stelle des früheren $\frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ jetzt die DIRAC-Operatoren

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \gamma_5} \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{1 - \varepsilon \gamma_5}{1 - \varepsilon^2} \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

bzw. $\frac{1}{1 - \varepsilon \gamma_5} \frac{1}{\kappa} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$

zu treten scheinen. Mit Hilfe dieser Operatoren läßt sich auch tatsächlich wieder eine Parität 2. Art definieren

$$\begin{aligned}\varphi_B(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\frac{1+\varepsilon\gamma_5}{1-\varepsilon^2} \frac{1}{\varkappa} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \gamma_4 \varphi_B(-\mathbf{r}, t), \\ \varphi_B^C(\mathbf{r}, t) &\rightarrow +\frac{1-\varepsilon\gamma_5}{1-\varepsilon^2} \frac{1}{\varkappa} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \gamma_4 \varphi_B^C(-\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (98)$$

$$\text{d. h. z. B. } R\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\frac{1}{1-\varepsilon} \frac{1}{\varkappa} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} R\varphi(-\mathbf{r}, t).$$

Für die Nukleonen finden wir nun folgende Darstellungen

$$\begin{aligned}\varphi_p &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa(1-\varepsilon)} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) R\varphi_B, \\ \varphi_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa(1+\varepsilon)} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) R\varphi_B^C, \\ \varphi_{\bar{p}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa(1-\varepsilon)} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) L\varphi_B^C, \\ \varphi_{\bar{n}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa(1+\varepsilon)} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) L\varphi_B.\end{aligned}\quad (99)$$

Auf Grund der modifizierten KLEIN-GORDON-Gleichung (95) gilt nämlich

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa^2(1-\varepsilon)^2\right] R\varphi_B &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa^2(1+\varepsilon)^2\right] L\varphi_B &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa^2(1+\varepsilon)^2\right] R\varphi_B^C &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa^2(1-\varepsilon)^2\right] L\varphi_B^C &= 0.\end{aligned}$$

Für das Proton ergibt sich die richtige DIRAC-Gleichung:

$$\gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \varphi_p = -\varkappa(1-\varepsilon) \varphi_p = -\varkappa_p \varphi_p.$$

Ebenso erhält man für das Neutron:

$$\gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \varphi_n = -\varkappa(1+\varepsilon) \varphi_n = -\varkappa_n \varphi_n.$$

Wie früher gilt auch wieder

$$(\varphi_p)^C = \varphi_{\bar{p}} \quad \text{und} \quad (\varphi_n)^C = \varphi_{\bar{n}}$$

und umgekehrt.

Auch die Paritätsoperation 2. Art führt wieder zu den früheren Beziehungen (65).

Für die Leptonen läßt sich auf ähnliche Weise eine Störung der Isosymmetrie einführen. Wir können etwa

das Gleichungspaar ansetzen

$$\begin{aligned}\gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \varphi_L &= -\varkappa_e \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \hat{\varphi}_L, \\ \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} (1 + \gamma_5) \hat{\varphi}_L &= -\varkappa_e (1 - \gamma_5) \varphi_L,\end{aligned}\quad (100)$$

d. h.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa_e^2\right) L\varphi_L &= 0, \quad \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} R\varphi_L = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} - \varkappa_e^2\right) R\varphi_L^C &= 0, \quad \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} L\varphi_L^C = 0.\end{aligned}\quad (101)$$

Dann kann man die Teilchen folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned}\varphi_{e^+} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_e} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) L\varphi_L, \quad \varphi_{\bar{e}} = L\varphi_L^C, \\ \varphi_{e^-} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varkappa_e} \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) R\varphi_L^C, \quad \varphi_{\nu} = R\varphi_L.\end{aligned}\quad (102)$$

Wie in Abschnitt III c könnten wir auch wieder die Skalentransformation zur Unterscheidung von Nukleonen und Leptonen heranziehen. Wir wollen dies nicht explizit ausführen. Interessant ist hingegen eine Betrachtung der Vakuum Erwartungswerte. Für die Massenfunktionen gilt nun nicht mehr [vgl. Gl. (33)]

$$\begin{aligned}\varrho_{1/2}^R &= \varrho_{-1/2}^L = \varrho_B = c_B \delta(\zeta - z_B^2), \\ \varrho_{1/2}^L &= \varrho_{-1/2}^R = \varrho_L = c_L \delta(\zeta),\end{aligned}\quad (103)$$

sondern

$$\varrho_{1/2}^R = c_p \delta(\zeta - z_p^2), \quad \varrho_{-1/2}^L = c_n \delta(\zeta - z_n^2)$$

und

$$\varrho_{1/2}^L = c_e \delta(\zeta - z_e^2), \quad \varrho_{-1/2}^R = c_\nu \delta(\zeta). \quad (104)$$

Hierbei sind z_p , z_n und z_e die Massenzahlen von Proton bzw. Neutron bzw. Elektron, und man wird annehmen können, daß sich die Konstanten c_p und c_n auch nur wenig unterscheiden. Wichtig ist, daß die Massendichtefunktionen, die als Faktoren des „Massenterms“ in den invarianten Funktionen gewöhnlich auftreten, weiterhin verschwinden, da die Invarianz gegenüber der Transformation II noch streng gilt.

Berücksichtigt man in den Massenfunktionen nur die δ -Funktionen und regularisiert wieder wie oben, so würde man etwa erwarten

$$\langle 0 | \psi(x, l) \bar{\psi}(x', l) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{\exp\{i q(x-x')/l\}}{l^3} \left\{ \frac{c_p R z_p^4}{q^2 + z_p^2} + \frac{c_n L z_n^4}{q^2 + z_n^2} + \frac{c_e L z_e^4}{q^2 + z_e^2} \right\} \frac{q_r \gamma_r}{(q^2)^2}. \quad (105)$$

Es ist in diesem Zusammenhang vielleicht interessant, daß dann, wenn die c -Faktoren für Leptonen und Nukleonen die gleiche Größenordnung haben, der Leptonenterm nach der Regularisierung mit einem zusätzlichen Gewichtungsfaktor $(z_e/z_p)^4 \approx 10^{-13}$ vorkommt. Bei strenger Gültigkeit der Isospintransformation verschwindet er ja überhaupt, wie in Kap. II gezeigt wurde.

IV. Anwendung der Tamm-Dancoff-Methode zur Berechnung der einfachsten Massen-Eigenwerte

a) Vorbemerkungen

Die TAMM-DANCOFF-Methode (in ihrer mehrzeitigen, auf das wirkliche Vakuum bezogenen Form)

ermöglicht prinzipiell die Bestimmung von Eigenwerten nach folgendem Verfahren: Die Dgl. (1) [bzw. (35)] erzeugt ein unendliches System von Differential- bzw. Integralgleichungen zwischen den Matrixelementen für zeitlich geordnete Produkte von Feldoperatoren, den sogenannten τ -Funktionen. Dieses System wird durch zwei verschiedene Arten von Randbedingungen ergänzt.

Erstens wird gefordert, daß die τ -Funktionen im Unendlichen verschwinden und eine hinreichend schwache Singularität am Lichtkegel besitzen sollen, so daß die bei der Behandlung des Systems auftretenden Integrale konvergieren.

Zweitens muß es möglich sein, die τ -Funktionen mit sehr vielen Variablen auf solche mit einer geringeren Variablenzahl zurückzuführen. Daher muß man neben den τ -Funktionen noch einen anderen Satz von Funktionen (in den früheren Arbeiten φ -Funktionen genannt) postulieren, die eindeutig durch die τ -Funktionen definiert sind und folgende Eigenschaft haben. Wenn man in diesem zweiten Satz von Funktionen $\varphi_n = 0$ für $n > N$ setzt (n ist hier die Anzahl der Variablen), so erhält man als Lösung des Integralgleichungssystems einen Satz von τ -Funktionen, die im Limes $N \rightarrow \infty$ gegen endliche Grenzwerte konvergieren. Dieser Satz von φ -Funktionen braucht nicht der in den früheren Arbeiten mit Hilfe der „Kontraktionsfunktion“ $\frac{1}{2} S_F$ definierte Satz zu sein. Im Falle des anharmonischen Oszillators hat SYMANZIK²⁵ zeigen können, daß es unendlich viele Sätze von φ -Funktionen gibt, die zu einem konvergenten Formalismus führen. Die Existenz solcher Funktionen-Sätze ist also plausibel; ob aber der bestimmte in den früheren Arbeiten benützte Satz diese Eigenschaft hat, ist ungewiß.

Praktisch wird man einstweilen kaum anders vorgehen können, als daß man zur Konstruktion dieses Satzes von φ -Funktionen Kontraktionsfunktionen benützt, die aus Näherungsannahmen für (26) hergeleitet sind. Als einfachste Annahme bietet sich wie in den früheren Arbeiten die Möglichkeit dar, im Massenspektrum $\varrho(\zeta)$ in (26) nur einen einzigen diskreten Eigenwert zu berücksichtigen, der zu den stabilsten massebehafteten Fermionen, den Nukleonen, gehört. Die Leptonen können zunächst vernachlässigt werden, da sie in der ersten Näherung die Masse 0 besitzen und daher in der Darstellung (26) nicht in Erscheinung treten; der Eigenwert der

Nukleonen wird im Verlauf des TAMM-DANCOFF-Verfahrens näherungsweise bestimmt werden können.

Eine so gewonnene Näherungsfunktion für (26) kann allerdings die wirkliche Funktion $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle$ bestenfalls für größere Werte von $|x - x'|^2$ ungefähr darstellen. In der Nähe des Lichtkegels zeigt die Näherungsfunktion ein analytisch völlig anderes Verhalten als die wirkliche Funktion. Sie hat mit der wirklichen Funktion hier nur die wichtige Eigenschaft gemein, daß die unmittelbare Umgebung des Lichtkegels zu Integralen fast nichts mehr beiträgt. Daher werden auch die durch das Näherungsverfahren gewonnenen τ -Funktionen von mehreren Variablen bestenfalls für größere Abstände zwischen den verschiedenen Variablen die richtigen Funktionen approximieren; in der Nähe der betreffenden Lichtkegel aber müssen sie ganz falsch werden. Das oszillatorische Verhalten, das in der Nähe der Lichtkegel bei den richtigen Funktionen zu erwarten ist, kann bei den Näherungsfunktionen noch nicht auftreten. Trotzdem darf man vielleicht hoffen, durch diese Näherungsfunktionen Eigenwerte abschätzen zu können, da es sich bei den Gleichungen der TAMM-DANCOFF-Methode praktisch stets um Integralgleichungen handelt und da bei den Integrationen die Umgebungen der Lichtkegel nur eine verhältnismäßig geringe Rolle spielen. Wenn im Näherungsverfahren τ -Funktionen auftreten, bei denen zwei oder mehr Variable gleich werden, so bedeuten sie im Rahmen des Verfahrens also eigentlich Mittelwerte über endliche Bereiche, durch die der oszillatorische Anteil weggemittelt ist. Sie können nicht mit dem wirklichen Wert der τ -Funktion an dieser Stelle verglichen werden, da der letztere infolge des oszillatorischen Charakters des Antikommutators häufig gar nicht definiert ist.

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß in einer nichtlinearen Theorie von der hier besprochenen Art – ähnlich wie im LEE-Modell nach der Renormierung – die aus der klassischen Theorie der Ausgangsgleichung gewonnene Form der Erhaltungssätze, z. B.

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu} [\bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x)] = 0,$$

nicht verwendet werden kann, da die Matrixelemente dieser Operatoren wegen der Oszillationen gar nicht definiert sind. Man muß vielmehr Operatoren vom Typus $\bar{\psi}(x) \gamma_\nu \int \psi(x') dx'$ betrachten, bei denen über ein kleines, aber endliches Raum-Zeit-Volumen etwa um den Punkt $x = x'$ integriert wird.

²⁵ K. SYMANZIK, Göttinger Dissertation, 1954.

Erst für die Matricelemente solcher Operatoren kann man hoffen, Erhaltungssätze angeben zu können. Aus dem gleichen Grund ist es auch unmöglich, einen HAMILTON-Operator anzugeben, der nur aus Feldoperatoren zur gleichen Zeit aufgebaut ist (vgl. Anm. ⁸, S. 544, und Kap. VII der vorliegenden Arbeit).

Nach diesen Vorbemerkungen soll die Berechnung der einfachsten Eigenwerte in der gleichen Weise wie in der früheren Arbeit ³ vorgenommen werden. Der Wert eines solchen Approximationsverfahrens kann wohl erst beurteilt werden, wenn mehrere sukzessive Näherungen für den gleichen Eigenwert berechnet worden sind. Das kann wegen der großen Kompliziertheit höherer Näherungen in der vorliegenden Arbeit noch nicht geschehen.

Aber selbst wenn sich die Näherung als ungenügend erweisen sollte, gewährt das TAMM-DANCOFF-Verfahren manchen wertvollen Einblick in die in-

nere Struktur der Theorie, z. B. in die Symmetrieeigenschaften der einfachsten Elementarteilchen und der zugehörigen τ -Funktionen, der die zum Teil recht komplizierten Rechnungen rechtfertigen mag.

b) Spinorteilchen

Wir berechnen die Masse des leichtesten Spinorteilchens nach dem gleichen Verfahren wie in einer früheren Arbeit ³. Dazu gehen wir von der Gleichung für die Einpunktfunktion

$$(\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tau(x|) = l^2 (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\alpha\sigma} (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\tau\sigma} \tau(x x | x) \tag{106}$$

aus. Für die auf der rechten Seite stehende Dreipunktfunktion verwenden wir statt der Differentialgleichung die mit der GREEN-Funktion zur Masse Null integrierte Gleichung

$$\begin{aligned} \tau(x x | x) &= i l^2 \int G_{\sigma\pi}(x-x') (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\pi\varphi} (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\varepsilon\lambda} \tau(x' x x' | x' x) d^4x' \\ &= -i l^2 \int G_{\sigma\pi}(x-x') (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\pi\varphi} (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\varepsilon\lambda} \tau(x' x x' | x' x) d^4x' \\ &= i l^2 \int G_{\pi\tau}(x'-x) (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\varphi\pi} (\gamma_5 \gamma_\nu)_{\varepsilon\lambda} \tau(x x x' | x' x) d^4x'. \end{aligned} \tag{107}$$

Die Verwendung jeder dieser Gleichungen bedeutet eine andere Näherung. Wir werden gegebenenfalls über die drei erhaltenen Ausdrücke mitteln. Wir drücken nun die τ -Funktion auf der rechten Seite

durch φ -Funktionen und Kontraktionen aus (WICKSCHE Regel) und vernachlässigen alle φ -Funktionen bis auf die Einpunktfunktion. Als Kontraktionsfunktion verwenden wir ²⁶

$$\tau^V(x | x') \equiv F_{\alpha\beta}(x-x') = - \frac{\varkappa^4}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(p, x-x')} p_\mu \gamma_\mu}{(p^2 + \varkappa^2 - i\delta)(p^2 - i\delta)^2} d^4p; \quad (\delta \rightarrow 0) \tag{108}$$

wir vernachlässigen also die Beiträge der Leptonen und des kontinuierlichen Spektrums und berücksichtigen allein den Beitrag der Nukleonen in der Näherung, in der Protonen- und Neutronenmasse als gleich angenommen werden, und in der Form (26). Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tau(x) &= i l^4 \int d^4x' [\gamma_5 \gamma_\mu G(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu F(x'-x) \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|) \\ &\quad - \gamma_5 \gamma_\mu G(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|) \text{ Spur } \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu F(x'-x)] \\ &= -i l^4 \int d^4x' [\gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|) \text{ Spur } \gamma_5 \gamma_\mu G(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu F(x'-x) \\ &\quad - \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu F(x'-x) \gamma_5 \gamma_\mu G(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|)] \\ &= i l^4 \int d^4x' [\gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu G(x'-x) \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|) \\ &\quad - \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu \tau(x'|) \text{ Spur } \gamma_5 \gamma_\mu F(x-x') \gamma_5 \gamma_\nu G(x'-x)]. \end{aligned} \tag{109}$$

Dabei sind alle DIRAC-Matrizen in der Reihenfolge, in der sie in der Gleichung stehen, zu multiplizieren.

Nun benützen wir die Tatsache, daß τ periodisch ist: $\tau(x|) = e^{iJx} \tau_\alpha. \tag{110}$

²⁶ F entspricht $-\frac{1}{2} S_F$ (DYSON) und $i S_+$ (SCHWINGER), analog G .

Dabei ist J_μ der Impulsvektor des Zustandes, in dem ein Spinorteilchen vorhanden ist. Durch Transformation in den Impulsraum finden wir

$$(J \gamma) \tau = \frac{l^4 \kappa^6}{(2\pi)^8} \int \frac{d^4 q d^4 \kappa}{[(q-r+J)^2-i\delta] [q^2+\kappa^2-i\delta] [r^2+\kappa^2-i\delta] [q^2-i\delta] [r^2-i\delta]} M_{1,2,3}. \quad (111)$$

Dabei ist für die drei Ausdrücke in (109) mit der Abkürzung $Y(p) = -(p_\mu \gamma_\mu) \kappa / (p^2 - i\delta)$ (112)

$$M_1 = -\gamma_5 \gamma_\mu (\gamma, q-r+J) \gamma_5 \gamma_\nu Y(q) \gamma_5 \gamma_\mu Y(r) \gamma_5 \gamma_\nu \tau + \gamma_5 \gamma_\nu (\gamma, q-r+J) \gamma_5 \gamma_\nu \tau \cdot \text{Spur} [\gamma_5 \gamma_\mu Y(q) \gamma_5 \gamma_\nu Y(r)], \quad (113 \text{ a})$$

$$M_2 = -\gamma_5 \gamma_\mu Y(r) \gamma_5 \gamma_\nu Y(q) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma, q-r+J) \gamma_5 \gamma_\nu \tau + \gamma_5 \gamma_\mu Y(r) \gamma_5 \gamma_\nu \tau \cdot \text{Spur} [\gamma_5 \gamma_\mu (\gamma, q-r+J) \gamma_5 \gamma_\nu Y(q)], \quad (113 \text{ b})$$

$$M_3 = \gamma_5 \gamma_\mu Y(-q) \gamma_5 \gamma_\nu (\gamma, q-r+J) \gamma_5 \gamma_\mu Y(r) \gamma_5 \gamma_\nu \tau - \gamma_5 \gamma_\mu Y(-q) \gamma_5 \gamma_\nu \tau \cdot \text{Spur} [\gamma_5 \gamma_\mu Y(r) \gamma_5 \gamma_\nu (\gamma, q-r+J)]. \quad (113 \text{ c})$$

Für die weitere Rechnung ist es günstig, die schon früher³ berechneten Impulsraumintegrale zu verwenden. Wir setzen für die dort (s. [3, (29)]) vorkommenden Integrale

$$K \Big|_{a=b=0} = -\frac{\pi^4}{\kappa^2} (J \gamma) M(X^2), \quad \frac{\partial^2 K}{\partial a_\mu \partial b_\mu} \Big|_{a=b=0} = \frac{i(J \gamma) \pi^4}{\kappa^4} L(X^2), \quad \text{Spur} \left(\gamma_\nu \frac{\partial K}{\partial a_\nu} \right) \Big|_{a=b=0} = \frac{4i\pi^4}{\kappa^2} N(X^2), \quad X^2 = -J^2/\kappa^2. \quad (114)$$

Für die Kontraktionsfunktion (108) brauchen wir nur L . Nach einiger Rechnung findet man für M_1 , M_2 und M_3 dieselbe Eigenwertgleichung

$$(J \gamma) \left[1 + \left(\frac{\kappa l}{4\pi} \right)^4 \cdot 24 L(X^2) \right] = 0. \quad (115)$$

Mit dem numerisch berechneten Wert von L für $X^2=1$, nämlich $L(1) = -0,6238$, finden wir für κl des Nukleons

$$\kappa_N l = 6,39. \quad (116)$$

Für diesen Wert von κl hat die Eigenwertgleichung (115) außer bei $X=1$ allerdings noch eine weitere Nullstelle bei $X=1,26$. Der zu diesem zweiten Eigenwert gehörige Zustand hat eine Norm, deren Vorzeichen zu dem des Zustands $X=1$ entgegengesetzt ist. Das Auftreten der zweiten Nullstelle zeigt, daß die innere Konsistenz des ersten Näherungsschrittes noch ungenügend ist; denn wir waren von einer Kontraktionsfunktion ausgegangen, die in ihrem qualitativen Verhalten der Existenz nur einer Teilchensorte (und des regularisierenden „Dipolgeists“) entspricht, haben aber als Resultat zwei Teilchensorten erhalten. Im Prinzip wäre es möglich, nunmehr die Kontraktionsfunktion so lange abzuändern, bis die mit ihr gewonnenen Ergebnisse für die Zustände zu ihrem eigenen qualitativen Verhalten passen. Wegen der großen Umständlichkeit der Rechnungen schlagen wir diesen Weg jedoch nicht

ein, sondern führen in Abschnitt IV d ein anderes Näherungsverfahren unter Ausnützung des Σ -Raumes durch, das sich in seinen Resultaten als sehr viel besser konsistent erweist; tatsächlich liefert es nur eine Teilchensorte. Wir diskutieren die Nullstelle bei $X=1,26$ daher hier nicht weiter, betonen aber, daß die Existenz zweier so nahe benachbarter Nullstellen alle Aussagen über den Nukleonenzustand, soweit sie aus den Rechnungen des Abschnitts IV b folgen sollen, sehr zweifelhaft macht.

c) π -Mesonen

Für die Eigenwertgleichungen zur Berechnung der Massen der BOSE-Teilchen benötigen wir Beziehungen für die Zweipunktfunktionen, z. B. für $\tau(xy|)$.

Bevor wir diese Gleichungen aufstellen, sollen einige Erläuterungen über die Interpretation dieser Funktionen gegeben werden. $\tau(x|) = \langle 0 | \psi(x) | N \rangle$ soll im Sinn von Kap. III bis auf einen Faktor eine Einteilchenwellenfunktion genannt werden, wenn die Funktion auf einen entsprechenden Zustand $|N\rangle$ (N =Nukleon) bezogen ist. Als Proton-Wellenfunktion deuten wir dann (wieder bis auf einen Faktor) $\langle 0 | R \psi(x) | N \rangle = R \tau(x|)$, analog für das Neutron $R D \tau(x|)^T$, für das Antiproton $L D \tau(x|)^T$ und für das Antineutron $L \tau(x|)$.

Man kann sich nun fragen, wie man aus Produkten von zwei Spinoren $\psi_\alpha \psi_\beta$ Größen aufbauen kann, die sich bei PAULI-Transformation der Faktoren, also bei Drehungen im Isospinraum, wie ein ganzzahliger Isospin verhalten und außerdem zur Baryonenzahl Null gehören. Es ist leicht zu zeigen, daß die Kombinationen

$$\begin{aligned}
& (R\psi)_\alpha (L\psi)_\beta \quad \text{und} \quad (L\psi)_\alpha (R\psi)_\beta \quad \text{zu} \quad |\tilde{\mathcal{D}}|=1, \quad I_3=1, \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} [(R\psi)_\alpha (D L^T \bar{\psi}^T)_\beta + (D R^T \bar{\psi}^T)_\alpha (L\psi)_\beta] \quad \text{und} \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} [(L\psi)_\alpha (D R^T \bar{\psi}^T)_\beta + (D L^T \bar{\psi}^T)_\alpha (R\psi)_\beta] \quad \text{zu} \quad |\tilde{\mathcal{D}}|=1, \quad I_3=0, \\
& (D R^T \bar{\psi}^T)_\alpha (D L^T \bar{\psi}^T)_\beta \quad \text{und} \quad (D L^T \bar{\psi}^T)_\alpha (D R^T \bar{\psi}^T)_\beta \quad \text{zu} \quad |\tilde{\mathcal{D}}|=1, \quad I_3=-1, \quad (117) \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} [(R\psi)_\alpha (D L^T \bar{\psi}^T)_\beta - (D R^T \bar{\psi}^T)_\alpha (L\psi)_\beta] \quad \text{und} \\
& \frac{1}{\sqrt{2}} [(L\psi)_\alpha (D R^T \bar{\psi}^T)_\beta - (D L^T \bar{\psi}^T)_\alpha (R\psi)_\beta] \quad \text{zu} \quad |\tilde{\mathcal{D}}|=0, \quad I_3=0 \\
& (\tilde{\mathcal{D}} = \text{Isospin})
\end{aligned}$$

gehören. Das gleiche Verhalten zeigen Summe und Differenz der angegebenen Formen. Interpretieren wir nun

$$\tau(x y |) = \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) | \pi \rangle$$

usw. als τ -Funktion eines gebundenen Teilchens, so haben wir offenbar z. B. ein $\tau(x x |)$, für das die Beziehung

$$\begin{aligned}
\tau(x y |) = \frac{i l^2}{2} \int G_{\alpha\sigma}(x-x') (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\rho\sigma} \tau(x' y x' | x') (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\delta\epsilon} \cdot d^4 x' \\
+ \frac{i l^2}{2} \int G_{\beta\delta}(x'-y) (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\rho\sigma} \tau(x' x x' | x') (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\delta\epsilon} \cdot d^4 x'. \quad (118)
\end{aligned}$$

Wir benützen wieder die Wick'sche Regel und vernachlässigen alle φ -Funktionen mit vier Koordinaten, betrachten also wie in [3] als niedrigste Näherung nur eine Art „Kontaktwechselwirkung“. Die Rechnung ist in diesem Fall noch ungenauer als für die Fermionen, weil ein noch niedrigerer Graph

Die Gleichung für $\tau(x y |)$ lautet

$$\begin{aligned}
\tau(x y |) = - \frac{i l^2}{2} \int d^4 x' \{ [G(x-x') \gamma_5 \gamma_\mu]_{\alpha\sigma} [F(y-x') \gamma_5 \gamma_\mu]_{\beta\tau} \\
- [G(y-x') \gamma_5 \gamma_\mu]_{\beta\sigma} [F(x-x') \gamma_5 \gamma_\mu]_{\alpha\tau} \} \tau(x' x' |). \quad (119)
\end{aligned}$$

Nun machen wir wieder von der Periodizitätseigenschaft Gebrauch. Sei J_μ der Impulsvektor eines Zustandes mit einem BOSE-Teilchen, so wird mit

$$\begin{aligned}
x-y=z, \quad x+y=2\xi, \\
\tau(x y |) = \tau_{\alpha\beta}(z) e^{i(J\xi)}. \quad (120)
\end{aligned}$$

Wegen der entsprechenden Eigenschaft von $\tau(x y |)$ muß

$$\tau_{\alpha\beta}(z) = -\tau_{\beta\alpha}(-z) \quad (121)$$

$$\tau(x x |) = R_{\alpha\sigma} L_{\beta\sigma} \tau(x x |) + L_{\alpha\sigma} R_{\beta\sigma} \tau(x x |)$$

gilt, als Wellenfunktion eines π^+ aufzufassen. Auf diese Weise kann man aus mehreren Lösungen einer Eigenwertgleichung die mit vorgegebenen Symmetrieeigenschaften aussuchen.

Für die Eigenwertgleichung selbst verwenden wir die mit der GREEN-Funktion iterierte Gleichung

benützt wird. Insbesondere ist es nicht möglich, P-Zustände zu studieren, weil in dieser Näherung, wie gleich zu sehen sein wird, $\tau(x y |)$ durch $\tau(x x |)$ bestimmt ist. Daher müssen wir uns auf die Betrachtung von Zuständen mit Bahn- und Spindrehimpuls Null beschränken.

sein. Es ist zweckmäßiger, mit einer Größe zu arbeiten, die sich wie eine DIRAC-Matrix und nicht wie ein Produkt von zwei Spinoren transformiert. Wir setzen daher

$$\tau_{\alpha\beta}(z) = M_{\alpha\gamma}(z) C_{\beta\gamma}^{-1} = (M(z) C^{-1T})_{\alpha\beta} \quad (122)$$

mit einer DIRAC-Matrix M . Aus (121) folgt dann

$$M(z) = C^{-1} M^T(-z) C. \quad (123)$$

Setzen wir (122) und (120) in (119) ein und transformieren in den Impulsraum, so erhalten wir

$$M(z) C^{-1T} = \frac{i l^2 \kappa^3}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{[(J-p)^2 - i\delta][p^2 + \kappa^2 - i\delta][p^2 - i\delta]} [(\gamma, J-p) \gamma_5 \gamma_\mu M(0) \gamma_\mu \gamma_5 C^{-1} Y^T(p) e^{-i(z, p^{-1/2} J)} - Y(p) \gamma_5 \gamma_\mu M(0) \gamma_\mu \gamma_5 (\gamma, J-p) C^{-1} e^{i(z, p^{-1/2} J)}]. \quad (124)$$

$M(z)$ ist also in dieser Näherung durch $M(0)$ bestimmt. Wir betrachten nun diese Gleichung für $z=0$. Dort ist zwar (vgl. IV a) nicht zu erwarten, daß die Eigenfunktionen das richtige Verhalten zeigen; aber man darf vielleicht hoffen, für die Eigenwerte eine erste Abschätzung zu erhalten, da die

Werte $M(0)$ eine Art von Mittelwert über $M(z)$ bei kleinen z -Werten darstellen.

Es erweist sich als zweckmäßig, schon in [3, S. 443] berechnete Integrale zu verwenden. In der Bezeichnungsweise von [3] 2 d ist

$$\begin{aligned} -\frac{i l^2 \kappa^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p (J-p)_\alpha p_\beta}{[(J-p)^2 - i\delta][p^2 + \kappa^2 - i\delta](p^2 - i\delta)^2} &= J_\alpha J_\beta D(\lambda) + \delta_{\alpha\beta} C(\lambda), \\ \frac{l^2 \kappa^3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p (J-p)_\alpha}{[(J-p)^2 - i\delta][p^2 + \kappa^2 - i\delta][p^2 - i\delta]} &= J_\alpha B(\lambda), \end{aligned} \quad (125)$$

$$\lambda = -J^2/\kappa_N^2 = -J^2/\kappa^2$$

$[C(\lambda)$ hat nichts mit der oben verwendeten Transformationsmatrix C zu tun]. Damit wird die Eigenwertgleichung

$$M(0) = (\gamma J) \gamma_5 \gamma_\mu M(0) \gamma_5 \gamma_\mu (\gamma J) D(\lambda) + \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu M(0) \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu C(\lambda). \quad (126)$$

Da M eine DIRAC-Matrix ist und außerdem LORENTZ-invariant sein soll, kann man es auf die 16 Basiseinheiten der DIRAC-Algebra in folgender Weise aufspannen:

$$M(0) = A + A_5 \gamma_5 + A_\mu \gamma_\mu + A_{5\mu} \gamma_5 \gamma_\mu + A_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}. \quad (127)$$

Nicht alle Matrizen dieses Ansatzes erfüllen die für M zu fordernde Beziehung (123). Es muß daher $A_\mu = A_{\mu\nu} = 0$ sein. Für Teilchen vom Spin Null kann außerdem der Vektor $A_{5\mu}$ nur die Form $\text{const} \cdot J_\mu$ haben. Geht man mit den restlichen Ausdrücken des Ansatzes (127) in die Gl. (126) ein und vergleicht die Koeffizienten der einzelnen Algebraelemente, so erhält man die Eigenwertgleichungen

$$A_0(1 - 4 J^2 D(\lambda) - 16 C(\lambda)) = 0, \quad (128)$$

$$A_5(1 - 4 J^2 D - 16 C) = 0,$$

$$(A_{5\mu} J_\mu)(1 - 2 J^2 D + 4 C) = 0. \quad (129)$$

Wendet man die Operatoren R und L in der für das π^+ geforderten Weise an, so sieht man, daß die Anteile ~ 1 und γ_5 verschwinden. Daher ist die Masse des π -Mesons aus Gl. (129) zu bestimmen. Diese stellt, wie durch Einsetzen von [3, (143)] und [3, (145) f.] gesehen werden kann, eine transzen-

dente Gleichung in λ dar. Sie wurde mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine G 2 des Instituts²⁷ numerisch gelöst. Als einzige Nullstelle zwischen $\lambda=0$ und $\lambda=1$ findet man $\lambda_0 = 0,091$; das entspricht einer Mesonenmasse von $\kappa_\pi l = 1,92$; $\kappa_\pi = 0,301 \kappa_N$. Dabei wurde für $\kappa_N l$ der früher berechnete Wert (116) verwendet. Da in (129) unmittelbar $\ln \lambda$ durch $\kappa_N l$ bestimmt ist, hängt die Masse sehr empfindlich von $\kappa_N l$ ab. Eine Änderung von $\kappa_N l$ um 10% könnte κ_π um einen Faktor ~ 2 ändern.

Für die anderen beiden zum Triplette gehöri gen Teilchen erhält man in dieser Näherung dieselbe Masse, wie entweder durch direkte Berechnung oder durch PAULI-Transformation der Gleichung für das π^+ gesehen werden kann.

Für die Massenbestimmung des Singlett- π^0 muß die Gleichung für $\tau(x|x)$ in derselben Weise untersucht werden, wie die für $\tau(x|x)$ beim π^+ . Dabei treten wieder dieselben Integrale auf. Die einzige Änderung ist, daß es nun keine einschränkende Bedingung der Art (121) oder (123) gibt. Es kommen daher zunächst wirklich alle Koeffizienten des Ansatzes (127) vor. Aus der Eigenwertgleichung resultiert jedoch $A_{\mu\nu} = 0$. Bei der Auswahl der Lösungen mit den richtigen Transformationseigenschaften nach (117) hat man nun die Beziehung

$$\begin{aligned} 2 D_{\beta\sigma} \tau(x|x) = R_{\alpha\tau} L_{\beta\sigma} D_{\sigma\sigma} \tau(x|x) \mp L_{\beta\tau} R_{\alpha\sigma} D_{\sigma\sigma} \tau(x|x) \\ + L_{\alpha\tau} R_{\beta\sigma} D_{\sigma\sigma} \tau(x|x) \mp R_{\beta\tau} L_{\alpha\sigma} D_{\sigma\sigma} \tau(x|x) \end{aligned}$$

(oberes Vorzeichen für Triplette, unteres für Singlett)

²⁷ Herrn Prof. BIERMANN sei an dieser Stelle für die Erlaubnis zur Benützung der Maschine und Herrn Dr. TEMESVARY

für seine Hilfe bei der Rechnung gedankt.

zu fordern. Man erhält im ersten Fall nur $A_\mu \gamma_\mu$ mit der Eigenwertgleichung (129), im letzteren Fall hingegen nur $A_{5\mu} \gamma_5 \gamma_\mu$ mit der Eigenwertgleichung

$$1 - 6 J^2 D + 12 C = 0. \quad (130)$$

Als Lösung erhält man numerisch $\lambda = 0,845$, also $\kappa_{\pi_0} l = 5,87$; $\kappa_{\pi_0} = 0,92 \kappa_N$. Dieses Teilchen wäre also sehr instabil gegen Zerfall in die neutrale Iso-triplett-Komponente.

$$\tau \left(\begin{matrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{matrix} \middle| \right) = \text{const} \int \frac{d^4 p \cos(x-y, p - \frac{1}{2} J)}{[(J-p)^2 - i \delta][p^2 + \kappa^2 - i \delta][p^2 - i \delta]^2} [J^2 - (\gamma p)(\gamma J)] \gamma_5 (\gamma p) C^{-1} \exp \{i[J, (x+y)/2]\}.$$

Diese Näherungslösung sollte, wenn man von der Umgebung des Punktes $x = y$ absieht, die Abhängigkeit der τ -Funktion von x, y, α und β wenigstens qualitativ richtig darstellen.

d) Berechnung unter Benützung des Σ -Raumes

Wir führen nun die Berechnung der Eigenwerte

$$\tau^V \left(\begin{matrix} x & x' \\ i & k \\ B & B \end{matrix} \middle| \right) = \frac{\kappa^3}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p e^{i(p, x-x')}}{(p^2 + \kappa^2 - i \delta)(p^2 - i \delta)} \left[-\frac{\kappa(p, \gamma)}{p^2 - i \delta} \delta_{ik} + i \Sigma_{1 ik} \right], \quad \tau^V \left(\begin{matrix} x & x' \\ i & k \\ L & L \end{matrix} \middle| \right) = 0. \quad (132)$$

Man sieht, daß die Σ -Indizes genau wie die DIRAC-Indizes laufen und zu summieren sind. Es können daher die früher gefundenen Formeln (111), (113) und (123) verwendet werden, wobei aber jetzt an Stelle von (112)

$$Y(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{-\kappa(p, \gamma)}{p^2 - i \delta} \delta_{ik} + i \Sigma_{1 ik} \right] \quad (133)$$

zu setzen ist.

Spinorteilchen

Die Rechnung verläuft genau wie vorhin. Man findet nach einiger elementarer Matrizenrechnung für die drei Ausdrücke in (113), bzw. für das Mittel daraus, Eigenwertgleichungen der Form

$$(J \gamma) \left[1 + \left(\frac{\kappa l}{4 \pi} \right)^4 (A L(X^2) - B M(X^2)) \right] \tau \quad (134)$$

$$= i \kappa \left(\frac{\kappa l}{4 \pi} \right)^4 \Sigma_1 C N(X^2) \tau.$$

- Dabei ist für (113 a) $A = 6, B = 2, C = 2,$
- (113 b) $A = 6, B = 1, C = 4,$
- (113 c) $A = 6, B = 1, C = 4.$

Die gemittelten Werte sind $A = 6, B = 4/3, C = 10/3$. Mit letzteren Werten und mit den numerisch gefun-

Die gewöhnliche Parität der Teilchen, die für π -Mesonen noch definiert werden kann, wird für das Triplet gerade und für das Singlett ungerade. Die in Kap. III besprochene Parität 2. Art wird weiter unten noch untersucht.

Die τ -Funktion für verschiedene Koordinaten kann leicht gefunden werden, indem $M(0)$ in (124) eingesetzt wird. Man findet z. B. für

mit dem in III c geschilderten Σ -Formalismus durch, d. h. wir setzen

$$\Psi_{i, \alpha} = \Psi_{i, \alpha}^L + \Psi_{i, \alpha}^B \quad (131)$$

mit zweikomponentigen Spinoroperatoren ($i = 1, 2$) (Σ -Raum). Die Kontraktionsfunktion hat nach der vorgehenden Untersuchung die Form

denen Resultaten $M(1) = 1,9082$; $N(1) = 2,3060$ findet man

$$\kappa_N l = 6,50. \quad (135)$$

Man sieht, daß sich die drei Werte für (113 a, b, c) wenig voneinander und vom mittleren Wert unterscheiden und daß ungefähr derselbe Wert wie früher resultiert. Außerdem sieht man aus (134), daß wir durch die Verdopplung der Komponentenzahl nicht mehr Massenwerte erhalten haben als früher. Vielmehr kann man leicht nachrechnen, daß Gl. (134) außer $X^2 = 1$ keine anderen Lösungen mehr besitzt (vgl. [3, S. 433 und 434]). Das hier verwendete Näherungsverfahren erweist sich also im Gegensatz zu dem von IV b als befriedigend konsistent.

π -Mesonen

Wie schon bemerkt, läßt sich die Gl. (124) für die Zweipunktfunktion mit der abgeänderten Kontraktionsfunktion (133) übernehmen, ebenso die entsprechende Gleichung für $\tau(x|y)$, die man für die neutralen Teilchen braucht. Die weitere Rechnung verläuft zunächst vollkommen analog wie früher. Man hat nur zu bedenken, daß die im Ansatz (122)

auftretende DIRAC-Matrix M nun noch zusätzlich eine 2×2 -Matrix im Σ -Raum ist. An Stelle der Gl. (126) erhält man daher ein gekoppeltes System von vier algebraischen Gleichungen. Der Ansatz (127) läßt sich (bei Beachtung der Tatsache, daß die A nun 2×2 -Matrizen sind) ebenfalls durchführen. Die (123) entsprechenden Beziehungen haben aber nur für die Diagonalglieder der Matrix der A dieselben Folgen wie früher. Nur für diese verschwindet der vektorielle und tensorielle Anteil

$$(A_\mu)_{ii} = (A_{\mu\nu})_{ii} = 0.$$

Hingegen besteht für die Glieder der Nebendiagonale lediglich Gleichheit (für die skalaren, pseudoskalaren und pseudovektoriellen Anteile) bzw. entgegengesetzte Gleichheit (für die vektoriellen und tensoriellen Anteile), also Beziehungen der Form

$$(A_5)_{12} = (A_5)_{21}, \quad (A_\mu)_{12} = - (A_\mu)_{21} \text{ usw.}$$

Durch diese Beziehungen wird die Anzahl der Funktionen, aus denen die Wellenfunktion des Mesons aufgebaut ist, wesentlich reduziert. Wenn man die Koeffizienten der Basiselemente der DIRAC-Algebra vergleicht, erhält man aber dennoch ein gekoppeltes Gleichungssystem für die $(A_{0,\mu,5\dots})_{ik}$. Löst man dieses auf, so erhält man wieder Gleichungen der Art (128), (129), aus denen man die Massen der Teilchen bestimmen kann. Es gibt zunächst mehrere unabhängige Lösungen, da wir den allgemeinsten Bindungszustand zwischen zwei Baryonen untersucht und keine bestimmte Quantenzahl für Isospin, Baryonenzahl und Parität gefordert haben. Die Forderung, daß es sich um ein π^+ usw. handeln soll, stellen wir wieder in derselben Weise wie vorhin, d. h. wir suchen mit allgemeinen gruppentheoretischen Überlegungen jene Projektionsoperatoren, die man (mit der im Abschnitt II vorgenommenen Interpretation der projizierten Einpunktfunktion als Nukleonenwellenfunktion) auf eine Zweipunktfunktion anwenden muß, um eine Größe mit dem richtigen Transformationsverhalten bei Baryonenzahl- und Isospintransformationen zu erhalten.

Die Projektionsoperatoren enthalten jetzt neben den Symbolen R, L usw. auch noch Σ -Matrizen. Der Operator für das Proton lautet z. B. $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \Sigma_3)$. Die gruppentheoretischen Überlegungen, die zu (117) führten, lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeiten auf den Σ -Formalismus übertragen. Man erhält hier zunächst eine größere Anzahl von Möglichkeiten für die τ -Funktion als bei dem früheren

Verfahren. Durch Anwendung der Projektionsoperatoren läßt sich aber in jedem Fall eine einzige Form aussondern, wenn beachtet wird, daß mit der Aussage, daß z. B. das π^+ ein Gebilde aus Proton und Antineutron mit Bahn- und Spindrehimpuls Null sein soll, auch die Parität zweiter Art festgelegt ist. Lösungen, die zwar den Isospin, nicht aber die Parität eines solchen Gebildes haben, müssen ebenso ausgeschlossen werden wie solche mit Baryonenzahl $\neq 0$ oder Isospin $\neq 1$, da sie nicht aus Proton und Antineutron in dem geforderten Zustand bestehen können.

Für das Isotriplett erhält man die Eigenwertgleichung

$$(1 - J^2 D + 2 C) (1 - 2 J^2 D - 8 C) - 2 J^2 B^2 = 0 \tag{136}$$

mit der Lösung $\lambda_{1,0} = 0,00256$, also $\kappa_\pi l = 0,33$; $\kappa_\pi = 0,051 \kappa_N$. Die Masse ist für alle drei Mitglieder des Triplettts gleich. Für das Isosinglett ergibt sich die Gleichung

$$(1 - 5 J^2 D + 10 C) (1 - 2 J^2 D - 8 C) - 10 J^2 B^2 = 0 \tag{137}$$

mit der Lösung $\lambda_{0,0} = 0,953$, also $\kappa_\pi l = 6,37$, $\kappa_\pi = 0,98 \kappa_N$. Auch in dieser Näherung folgt also, daß das Isosinglett sehr instabil sein müßte.

Dabei wurde für $\kappa_N l$ der Wert (135) genommen. Die Empfindlichkeit der Triplett- π -Masse gegenüber einer anderen Wahl von $\kappa_N l$ ist am besten aus der schon erwähnten Tatsache ersichtlich, daß eine Änderung des $\kappa_N l$ -Wertes von etwa 10% die Masse des Triplettzustandes um einen Faktor 2 ändern kann. Diese Empfindlichkeit macht auch den großen Unterschied der Triplettmasse in den beiden Näherungsverfahren verständlich.

Die unnormierten Eigenfunktionen sind Triplett:

$$f = (J_\mu \gamma_5 \gamma_\mu + 0,012 i \kappa_\pi \Sigma_1 \gamma_5) C^{-1} e^{iJx}, \tag{138}$$

Singlett:

$$f = (J_\mu \gamma_\mu \Sigma_3 + 0,95 \kappa_\pi \Sigma_2) C^{-1} e^{iJx}.$$

Dabei bedeutet $f_{\alpha\beta}$ für π^+ bis auf einen Faktor $\tau(x|x)_{\alpha\beta}$, für π^0 bis auf einen Faktor $(D \Sigma_3)_{\beta\alpha} \tau(x|x)_{\alpha\beta}$.

Die Parität erster Art ist definiert als jener Faktor, den $\tau(x|x)_{\alpha\beta}$ bei der Transformation $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \gamma_4 \psi(-\mathbf{r}, t)$ (daraus folgt $\psi^C(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\gamma_4 \psi^C(-\mathbf{r}, t)$) annimmt. Da wir bei π^0 nicht $\psi \psi^C$, sondern $\psi \gamma_5 \psi^C$ betrachtet haben, ist daher für alle π -Mesonen $\gamma_4 f(-\mathbf{J}, J_0) \gamma_4$ zu bilden.

Die Parität zweiter Art ist als jener Faktor definiert, den f bei $\psi(r, t) \rightarrow \gamma_4 \Sigma_1 \psi(-r, t)$ [daraus folgt $D \bar{\psi}^T(r, t) \rightarrow -\gamma_4 \Sigma_1 D \bar{\psi}^T(-r, t)$] annimmt. In der Näherung, in der nur Kontraktionen zwischen je zwei Feldoperatoren betrachtet werden, besteht Invarianz für diese Operation. Wir haben also $\pm \gamma_4 \Sigma_1 f(-\mathfrak{S}, J_0) \gamma_4 \Sigma_1$ zu bilden (oberes Vorzeichen für π^\pm , unteres für π^0). Die so erhaltenen Paritäten sind in Tab. 2 eingetragen.

Die für den Vergleich mit dem Experiment allein brauchbare Parität 2. Art stimmt mit den in der Literatur angegebenen Werten zwar nicht überein (gewöhnlich wird die Parität von Neutron und Proton als gleich angenommen, während sie hier entgegengesetzt ist), sie ist ihr aber für die Deutung der Experimente äquivalent. Die Eigenfunktionen für verschiedene Koordinaten der beiden ψ -Operatoren findet man wie früher durch Einsetzen in (119).

e) Weitere Eigenwerte für Bosonen

Die bisherigen Rechnungen beziehen sich auf die Form der Gl. (1), in der das Wechselwirkungsglied das positive Vorzeichen trägt. Ändert man dieses Vorzeichen unter Beibehaltung der Kontraktionsfunktion (108), so bleibt die Eigenwertgleichung für die Fermionen ungeändert; die für die Bosonen aber führt zu neuen Eigenwerten, wobei die zugehörigen Eigenfunktionen wenigstens hinsichtlich der kontinuierlichen Gruppen die gleichen Eigenschaften aufweisen wie die π -Mesonen.

Die Angaben über Masse und Parität dieser Zustände (die erst bei Berücksichtigung des Σ -Raumes

auftreten) sind in der dritten Spalte von Tab. 2 unter „Andere Mesonen“ eingetragen.

An Stelle einer Vorzeichenänderung beim Wechselwirkungsglied in (1) kann man auch eine Vorzeichenänderung an der Kontraktionsfunktion (108) vornehmen; die beiden Änderungen sind äquivalent. Man erkennt daraus, daß sich der Übergang vom einen zum anderen Lösungssystem auch dadurch bewerkstelligen läßt, daß man die Norm aller Fermionenzustände (aber nicht der Bosonenzustände) umkehrt. Eine physikalische Interpretation dieser Lösungen kann erst im Zusammenhang mit einer Diskussion der diskreten Gruppen der Gl. (1) versucht werden, auf die in der vorliegenden Arbeit aber noch nicht eingegangen werden soll.

Die in Tab. 2 zusammengefaßten Ergebnisse passen qualitativ zu dem, was man aus den Experimenten über die einfachsten Elementarteilchen weiß. Die Existenz eines π -Mesonentriplets, dessen Masse erheblich kleiner ist als die des Nukleons, folgt aus der Theorie. Der Spin dieser Mesonen ist 0, und die Parität 2. Art führt zu den gleichen Schlüssen über Auswahlregeln wie die in den Lehrbüchern beschriebene übliche Parität. Über die Existenz eines π -Mesonensingletts ist experimentell nichts bekannt; aber das aus der Theorie als π_0^0 folgende Teilchen wäre sehr instabil, es würde schon unter Einfluß der starken Wechselwirkung in zwei oder mehr π_1^0 -Triplet-Teilchen zerfallen können.

Auf eine Behandlung der Bosonen mit einem von Null verschiedenen Bahn- oder Spin-Drehimpuls ist in den vorliegenden Rechnungen verzichtet worden,

Tab. 2²⁸.

Teilchen	Nukleonen				π -Mesonen				Andere Mesonen			
	p	n	\bar{p}	\bar{n}	π_1^+	π_1^0	π_1^-	π_0^0	+	0	-	0
Parität 1. Art	undefiniert				+	+	+	-	+	+	+	-
Parität 2. Art	+	-	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-
Graph												
Masse $\times l$												
Einfaches Verfahren	6,39				1,92				5,87			
Berücksichtigung des Σ -Raumes	6,50				0,33				6,37			
									2,36			
									2,46			

²⁸ Die Zahlen dieser Tabelle sind in der numerischen Rechnung genauer als die auf der Genfer Konferenz (CERN 1958) berichteten¹⁶; außerdem wurde ein Rechenfehler korrigiert, auf den uns Herr J. J. GRANOVSKY (Alma Ata,

USSR) freundlicherweise aufmerksam gemacht hat. Die dadurch bedingten Unterschiede in den Zahlenwerten liegen jedoch innerhalb der beträchtlichen Unsicherheit des ganzen Näherungsverfahrens.

da hierfür die einfachsten Graphen (reine Kontaktwechselwirkung) sicher nicht ausreichen.

Auch für die hier behandelten Bosonen vom Spin 0 ist diese grösste Näherung noch recht unbefriedigend, wie schon die großen Schwankungen in der π_1 -Masse zeigen. Wahrscheinlich wird es mit einem noch zu bewältigenden Rechenaufwand später möglich sein, auch Integralgleichungen vom Graphentypus  für die Bosonen zu behandeln. Erst dadurch käme man bei den Bosonen zu dem gleichen Grad der Approximation, der für die Fermionen in den bisherigen Rechnungen schon erreicht ist. Erst in dieser Näherung wird man auch Bosonen vom Spin 1 untersuchen können.

In höheren Näherungen müßten aus den Integralgleichungen für die $\tau(x)$ auch die Systeme mit 2 Nucleonen, z. B. das Deuteron, folgen, und der bisher für das π_0^0 -Teilchen gefundene Eigenwert müßte wegen des dann darstellbaren Zerfalls ins Komplexe rücken. Wahrscheinlich wird man aber für die Behandlung solcher Probleme nach einem neuen, von der TAMM-DANCOFF-Methode verschiedenen mathematischen Verfahren suchen müssen.

V. Wechselwirkung zwischen Nucleonen und Mesonen ²⁹

a) Allgemeine Formulierung

Die Übergangsamplitude für den Streuprozess

$$N_{p'} + \pi_{q'} \rightarrow N_p + \pi_q$$

ist aus der asymptotischen Form des Matrixelementes eines im WICKSchen Sinne geordneten Operator-

produkts zu berechnen. Man erhält nach einigen Umformungen (vgl. FREESE ³⁰ und [3, 2 a])

$$A = - \int \int d^4x d^4y \bar{\varphi}_{pq}^0(x, y) D(x)_{\sigma\sigma} K(y) \varphi_{p'q'}(x, y) \tag{139}$$

Dabei ist D der DIRAC-Operator mit der Nucleonenmasse κ , K der KLEIN-GORDON-Operator mit der Mesonenmasse κ_π und $\varphi^0(x, y)$ ist die geeignet normierte Wellenfunktion eines freien Mesons und Nucleons

$$\begin{aligned} \varphi^0(x, y) &= \varphi_\alpha^0(x) \varphi^0(y) \\ \text{mit} \quad D_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta^0(x) &= 0, \quad K(y) \varphi^0(y) = 0. \end{aligned}$$

Beschreiben wir die Teilchen nach der Streuung durch ebene Wellen, so können wir

$$\bar{\varphi}_{p,q}^0(x, y) = \bar{u}_\alpha(p) e^{-i(p \cdot x) - i(q \cdot y)} \tag{140}$$

mit $\bar{u}(p) [i(\gamma p) + \kappa] = 0$, $q^2 + \kappa_\pi^2 = 0$ setzen ³¹. An Stelle der DIRAC-Spinoren können auch zweikomponentige KLEIN-GORDON-Lösungen $v(p)$ verwendet werden, da in dieser Theorie die Nucleonen durch solche beschrieben werden. Der Zusammenhang ist z. B. für das Proton im Fall A

$$u(p) = \left(1 + \frac{\gamma p}{i \kappa}\right) v(p), \quad v(p) = \frac{1 + \gamma_5}{2} u(p). \tag{141}$$

Die beiden Beschreibungen sind äquivalent.

$\varphi_{p'q'}(x, y)$ bedeutet die ebenfalls normierte Funktion

$$\varphi_{p'q'}(x, y) = \langle 0 | : P_{x, \alpha\beta} \psi_\beta(x) \pi(y) : | N_{p'} \pi_{q'} \rangle, \tag{142}$$

wobei $\pi(y)$ je nach dem betrachteten Meson

$$\left. \begin{aligned} \pi^0(y) &= -II_{\alpha\beta}^0 \left(-i \frac{\partial}{\partial y}\right) [\bar{\psi}_\alpha(y) \psi_\beta(y)] = -\bar{\psi}_\alpha(y) II_{y, \alpha\beta}^0 \psi_\beta(y) \\ \pi^+(y) &= -II_{\alpha\beta}^+ \left(-i \frac{\partial}{\partial y}\right) [\bar{\psi}_\alpha^c(y) \psi_\beta(y)] = -\bar{\psi}_\alpha^c(y) II_{y, \alpha\beta}^+ \psi_\beta(y) \end{aligned} \right\} \text{(s. Anm. } ^{32}) \tag{143}$$

²⁹ Es ist vorteilhaft, die Rechnungen dieses Abschnittes für die Näherungen A) ohne Σ -Raum und B) mit Σ -Raum parallel durchzuführen. Wenn nicht besonders angeführt, gelten die Formeln daher für beide Fälle, wobei die Spinindizes im Fall B) von 1 bis 8 laufen (Spinor- und Σ -Index) und die Ersetzung $\gamma_5 \rightarrow \gamma_5 \Sigma_3$, $(\gamma p)/i \kappa \rightarrow \Sigma_1$ durchzuführen ist. Wenn Größen oder Formeln in beiden Fällen verschieden sind, werden sie durch Indizes A oder B gekennzeichnet. Für die π -Mesonen verwenden wir die

Bezeichnungswiese $\pi_i = (\pi_1^+, \pi_1^0, \pi_1^-, \pi_0^0)$, $\pi^0 = (\pi_1^0, \pi_0^0)$, wobei sich 1 bzw. 0 auf den Isospin beziehen.

³⁰ E. FREESE, Z. Naturforschg. **8 a**, 776 [1953].

³¹ Im Fall B ist $u(p)$ als

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Sigma_1) \begin{pmatrix} \Lambda u(p) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Lambda u(p) \\ \Lambda u(p) \end{pmatrix}$$

zu verstehen. ³² II_{y^0} bedeutet $II^0(-i \partial/\partial y)$ (eine Funktion des Arguments $-i \partial/\partial y$), analog für andere Ausdrücke.

und $P_{x, \alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma_x}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_{\alpha\beta} R_{\nu\beta}$ ist.

Die Operatoren II hängen eng mit den zu den τ -Funktionen der π -Mesonen gehörigen kontravarianten Komponenten zusammen. Die $II_{\alpha\beta}$ sind DIRAC-Matrizen, von denen wir zunächst nur wissen, daß sie dieselben Transformationseigenschaften wie

die in der τ -Funktion der π -Mesonen auftretenden Matrizen [vgl. z. B. (122)] haben. Setzen wir für diese

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta^C(y) | \pi_J^+ \rangle &= M_{\alpha\beta}^+(J) e^{i(Jy)}, \\ \langle 0 | \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(y) | \pi_{1J}^0 \rangle &= M_{1\alpha\beta}^0(J) e^{i(Jy)}, \text{ usw.} \end{aligned} \quad (144)$$

so ist im Fall

$$\left. \begin{aligned} \text{A)} \quad M^\pm(J)^A &= n \frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_1} \gamma_5, & \text{B)} \quad M^\pm(J)^B &= n \left(\frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_1} \gamma_5 + i \Sigma_1 \gamma_5 b_1 \frac{\kappa\pi_1}{\kappa} \right), \\ M_1^0(J)^A &= n_1 \frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_1}, & M_1^0(J)^B &= n_1 \left(\frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_1} \Sigma_3 + \Sigma_2 b_1 \frac{\kappa\pi_1}{\kappa} \right), \\ M_0^0(J)^A &= n_0 \frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_0} \gamma_5; & M_0^0(J)^B &= n_0 \left(\frac{(\gamma J)}{\kappa\pi_0} \gamma_5 + i \Sigma_1 \gamma_5 b_0 \frac{\kappa\pi_0}{\kappa} \right) \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

$$\text{mit } b_1 = \frac{1}{4,193}, \quad b_0 = \frac{1}{1,026},$$

wie aus Abschnitt IV c und IV d [vgl. insbesondere (138)] folgt. n sind Normierungskonstanten, die in IV nicht bestimmt wurden. Aus den Eigenschaften bei Rotation im Isospinraum folgt [siehe (117)] $n = \sqrt{2} n_1$. Das Verhältnis n_1/n_0 wird später bestimmt werden. Damit die Übergangsamplitude von $II(y)$ wirklich ein π -Meson beschreibt, fordern wir als Normierungsbedingung

$$\langle 0 | \pi_i(y) | \pi_j(J) \rangle = \delta_{ij} \cdot e^{i(Jy)}. \quad (146)$$

$$\text{Daraus folgt } \text{Spur } II_i(J) M_j(J) = \delta_{ij}, \quad (147)$$

was zur Bestimmung von II_i nicht ausreicht, aber die Möglichkeiten einschränkt. Weitere Einschränkungen werden später diskutiert.

Zur Bestimmung der Übergangsamplitude (139) muß also (142) berechnet werden. Wir werden als Modellfall stets die Streuung von Proton und π_1^0 betrachten und für die anderen Fälle nur die Resultate anführen, die im Abschnitt d) diskutiert werden sollen. Für den zu betrachtenden Fall brauchen wir

$$\varphi(x, y) = P_{x, \lambda\alpha} II_{1y, \gamma\beta}^0 \langle 0 | : \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) \bar{\psi}_\gamma(y) : | N_{p'} \pi_{q'} \rangle = P_{x, \lambda\alpha} II_{1y, \gamma\beta}^0 \varphi_{\alpha\beta}^{\gamma}(x, y | y). \quad (148)$$

Für die φ -Funktion könnten wir nun mit dem TAMM-DANCOFF-Verfahren eine Integralgleichung herleiten. Das wäre aber nicht zweckmäßig, da wir die Übergangsamplitude mit der in der konventionellen Theorie der π -N-Wechselwirkung in BORNScher Näherung gefundenen vergleichen wollen, um die Stärke und Form der Kopplung beurteilen zu können. Es wird daher vorteilhaft sein, eine dem BETHE-SALPETER-Verfahren ähnliche Methode zu verwenden, die der BORNSchen Näherung (Störungstheorie) besser angepaßt ist (in analoger Weise wurde in [3, 2 c] vorgegangen). Wir ziehen also Graphen mit einer Verbindungslinie zwischen Mesonen und Nukleonen z. B.

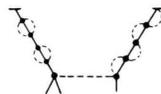


Abb. 1.

in Betracht, lassen hingegen solche mit 2 Verbindungslinien

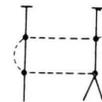


Abb. 2.

weg, obwohl diese in der TAMM-DANCOFF-Methode unter Umständen von niedrigerer Ordnung als die erstgenannten wären. Wir betrachten somit die Summe aller Graphen, bei denen in die äußeren Linien des niedrigsten Graphen



Abb. 3.

beliebig viele Nukleon- und Mesonenselbstenergiegraphen eingesetzt sind. Wir betrachten also



Abb. 4.

mit (Abb. 5) $\textcircled{\circ} = \bullet + \textcircled{\circ} + \textcircled{\circ} + \dots + \textcircled{\circ} + \dots = 1 + K_N + K_N^2 + \dots + K_N' + \dots = \frac{1}{1 - K_N}$.

Ähnlich (Abb. 6) $\textcircled{\ominus} = \ominus + \textcircled{\ominus} + \textcircled{\ominus} + \dots + \textcircled{\ominus} + \dots = 1 + K_\pi + K_\pi^2 + \dots + K_\pi' + \dots = \frac{1}{1 - K_\pi}$.

Damit die Rechnung mit der Massenbestimmung konsistent ist, werden wir \bar{K}_N und \bar{K}_π durch K_N und K_π annähern, also nur die einfachsten Selbstenergiegraphen betrachten. Das entspricht dem niedrigsten BETHE-SALPETER-Kern.

Man könnte meinen, daß es auch notwendig wäre, in die inneren Linien Selbstenergiegraphen einzusetzen. Das wäre aber nicht konsequent, weil

$$F(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

die exakte Zweipunktfunktion sein soll, also der korrigierten Funktion S'_F der konventionellen Theorie entspricht. Das bedeutet, daß man eigentlich $Z_2 F$ schreiben sollte, wenn die Analogie zur konventionellen Theorie hervorgekehrt werden soll. Das entspricht aber nur einer anderen Wahl von l in der Ausgangsgleichung, die physikalisch bedeutungslos sein soll. Mit anderen Worten, unser l^2 enthält einen Faktor Z_2 .

Dem ganzen Verfahren entspricht in der konventionellen Theorie die Renormierung von $\psi \rightarrow \psi' \sim Z_2^{1/2} \psi$, $S_F \rightarrow S'_F \sim Z_2 S_F$ und $\Phi \rightarrow \Phi' \sim Z_3^{1/2} \Phi$.

Der Nachteil des hier angewendeten Verfahrens ist, daß keine Vertexkorrekturen zu den Punkten x' und y' betrachtet werden, also z. B. keine Graphen



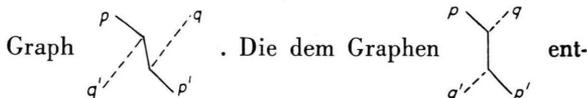
Abb. 7.

Dies ist insbesondere im Fall A nicht vertretbar. Eine Einbeziehung dieser Korrekturen (Faktor Z_1) würde jedoch die Rechnung zu kompliziert gestalten, da es derzeit kein einfaches Verfahren zu ihrer Berücksichtigung gibt. Durch die Vernachlässigung der Vertexkorrekturen ist die Ankopplung automatisch so festgelegt, daß keine Abhängigkeit von der Relativkoordinate des π -Mesons berücksichtigt wird. Im Fall A müßte dies jedoch unbedingt geschehen, um dem π -Meson überhaupt die Möglichkeit zu geben, eine definierte

Parität 2. Art anzunehmen. Eine Unterdrückung der Graphen (Abb. 7) muß sich also dadurch äußern, daß paritätsverletzende Glieder in der Wechselwirkung auftreten können, die experimentell nicht beobachtet sind. Im Fall B hingegen ist durch den Ansatz von vornherein gewährleistet, daß für die Nukleonen und π -Mesonen die Parität 2. Art definiert ist und in ihren Wechselwirkungen erhalten bleibt. Die Berücksichtigung der Vertexkorrekturen dürfte hier nur die numerischen Resultate ändern. Diesem durch die Vernachlässigung der Vertex-Korrekturen bedingten Mangel stehen jedoch einige bedeutende Vorteile gegenüber, die die hier gewählte Methode der (vielleicht konsequenteren) in [3, 1 b] entwickelten voraus hat. Diese sind:

1. Es können gewisse sehr hohe Graphen berücksichtigt werden.
2. Durch die Korrekturen $1/(1 - K_\pi)$ und $1/(1 - K_N)$ werden die GREEN-Funktionen für die auslaufenden Teilchen in der richtigen Weise korrigiert, d. h. wir können beweisen, daß $D(x) [1/(1 - K_N)] G = -i Z_2 \delta$ (entsprechend für π) ist, was für das in [3, 1 b] entwickelte Verfahren nur vermutet wurde und explizit nur in einer hohen, wohl nicht mehr rechenbaren Näherung einzusehen wäre.

Nach dieser kurzen Diskussion des Verfahrens wenden wir uns der Rechnung zu. In der konventionellen Theorie entspricht unserem Prozeß der



sprechenden Beiträge kann man einfach durch $q \rightarrow -q'$ erhalten, da unsere Theorie die Kreuzungs-Symmetrie (*crossing symmetry*) besitzt. Mit dem oben geschilderten Verfahren erhalten wir also eine Integralgleichung für φ von der Form

$$\varphi(x y) = P_{x, \lambda, z} \Pi_{1 y, \gamma \beta}^0 \int K(x y \bar{y} | x' y' \bar{y}') \varphi(x' y' | y') d^4 x' d^4 y'. \quad (149)$$

Wir ersetzen nun, wie es der BORNschen Näherung entspricht, auf der rechten Seite

$$\varphi(x' y' | y') \rightarrow \varphi^0(x' y' | y') = \langle 0 | \psi(x') | N_{p'} \rangle \cdot \langle 0 | \psi(y') \bar{\psi}(y') | \pi_{q'} \rangle. \quad (150)$$

Dabei ist

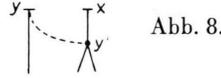
$$\langle 0 | \psi_\alpha(y') \bar{\psi}_\beta(y') | \pi_{q'} \rangle = M_{\alpha\beta} e^{i(q'y')} \quad (151)$$

und $\langle 0 | \psi(x') | N_{p'} \rangle = v^p(p') e^{i(x'p')}$ für einen Protonzustand, (152)

$\langle 0 | \psi(x') | N_{\bar{p}'} \rangle = \bar{v}^n(p') e^{i(x'p')}$ für einen Antineutronzustand

[mit KLEIN-GORDON-Spinoren wie in Gl. (141)].

b) Untersuchung der Struktur des Kernes



Der einfachste Graph ist gegeben durch:
Dazu gehört der Ausdruck

$$\varphi(x y | y) = -i l^2 \int [G(x-y') \gamma_5 \gamma_\mu]_{\alpha\beta} [F_{\rho'\gamma}(y'-y) \varphi^0(y' y | y') + F_{\lambda\gamma}(y'-y) \varphi^0(y y' | y') + F_{\beta\sigma}(y-y') \varphi^0(y' y' | y)] (\gamma_5 \gamma_\mu)_{\rho\sigma'} d^4 y', \quad (153)$$

wobei Glieder, bei denen die φ -Funktionen nicht auf die im Anfang vorhandenen Teilchen bezogen sind (bzw. solche, die 0 sind, wenn sie auf einen Zustand mit einem freien Meson und Nukleon bezogen sind), weggelassen wurden.

Wir finden nach einiger Rechnung

$$\varphi_{p'q'}(x y) = -i l^2 \int P_x G(x-y') [V_{y'}^0 F(y'-y) \Pi_{1y}^0 v(p') - \gamma_5 \gamma_\mu M_{y'}^+ C^{-1} \gamma_\mu^T \gamma_5^T F^T(y-y') \cdot \Pi_{1y}^0 C v^C(p')] \cdot e^{i(y p')} \cdot e^{i(y' q')} d^4 y', \quad (154)$$

wobei wir

$$V = \gamma_5 \gamma_\mu [\text{Spur}(M \gamma_5 \gamma_\mu) - M \gamma_5 \gamma_\mu] \quad (155)$$

und

$$\langle 0 | \psi(x') | N_{p'} \rangle = v(p') e^{i(p' x')}, \quad \langle 0 | \psi^C(x) | N_{p'} \rangle = v^C(p') e^{i(p' x')} \quad (156)$$

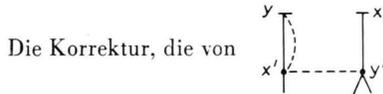
verwendet haben. Nun ist

$$C^{-1} \gamma_\mu^T \gamma_5^T F^T(y-y') \Pi_{1y}^{0T} C = -\gamma_5 \gamma_\mu F(y'-y) \Pi_{1y}^0,$$

und wir finden durch Einsetzen

$$\varphi_{p'q'}(x y) = -i l^2 \int P_x G(x-y') [V_{y'}^0 F(y'-y) \Pi_{1y}^0 v(p') - V_{y'}^+ F(y'-y) \Pi_{1y}^0 v^C(p')] e^{i(p' y)} + e^{i(q' y')} d^4 y'. \quad (157)$$

Der zweite Ausdruck entspricht der Ladungsaustauschstreueung $\pi^+ + N \rightarrow \pi_1^0 + P$, die wir in d) betrachten werden. In diesem Abschnitt wollen wir sie weglassen.



Die Korrektur, die von herrührt, kann genauso gefunden werden. Man findet nach längerer Rechnung mit der Abkürzung³³

$$K_{\pi^0}(x'-y) \Pi_{1y}^0 = i l^2 \gamma_5 \gamma_\mu [-G(x'-y) \Pi_{1y}^0 F(y-x') \gamma_5 \gamma_\mu + \text{Spur} G(x'-y) \Pi_{1y}^0 F(y-x') \gamma_5 \gamma_\mu] \quad (158)$$

für die φ -Funktion an Stelle der Integralgleichung (157)

$$\varphi_{p'q'}(x y) = -i l^2 \int d^4 x' d^4 y' P_x G(x-y') V_{y'}^0 F(y'-x') K_{\pi^0}(x'-y) \Pi_{1y}^0 v(p') e^{i(p' x')} e^{i(q' y')}. \quad (159)$$

Nun leiten wir aus der Eigenwertgleichung für das π -Meson eine Beziehung für K_{π^0} her. Die Eigenwertgleichung lautet [vgl. (119)] in dieser Bezeichnungweise

$$M_x^0 = i l^2 \int d^4 y G(x-y) V_y^0 F(y-x). \quad (160)$$

Daraus bekommt man durch Multiplikation mit $\gamma_5 \gamma_\mu$ nach elementarer Rechnung

$$V_x^0 = \int d^4 y K_{\pi^0}(x-y) V_y^0 \quad (161)$$

oder im Impulsraum

$$K_{\pi^0}(q) V_1(q) = V_1(q) \quad \text{für} \quad q^2 + \kappa_{\pi^0}^2 = 0, \quad (162)$$

$$K_{\pi^0}(q) V_0(q) = V_0(q) \quad \text{für} \quad q^2 + \kappa_{\pi^0}^2 = 0.$$

³³ Eigentlich sollte über zwei G -Linienbilder gemittelt werden. Es zeigt sich jedoch, daß beide Ausdrücke einander gleich sind, weshalb eine Mittelung überflüssig ist.

Man beachte, daß K_{π^0} für beide π^0 derselbe Operator ist, der aber in beiden Fällen zu verschiedenen Eigenfunktionen führt.

Nun betrachten wir noch Korrekturen, die durch das Einsetzen der niedrigsten Nukleonenselbstenergieteile entstehen und untersuchen den Graphen

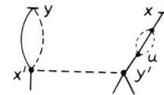


Abb. 10.

Wir bekommen genau wie früher mit dem Selbstenergiekern des Nukleons [vgl. (109)]

$$\tau(x |) = \int K_{N\alpha\beta}(x-u) \tau(u |) d^4 u \quad (163)$$

für die φ -Funktion

$$\varphi_{p'q'}(x, y) = -i l^2 \int d^4x' d^4y' d^4u \left[P_x K_N(x-u) G(u-y') V_y^0 F(y'-x') K_{\pi^0}(x'-y) \Pi_{1y}^0 v(p') \right] e^{i(p'x')} e^{i(q'y')}. \quad (164)$$

Nun haben wir gesehen, wie das Einsetzen von Selbstenergieanteilen vorzunehmen ist und können die Integralgleichung für die φ -Funktion anschreiben, die dem Graphen Abb. 4 zugeordnet ist.

$$\varphi_{p'q'}(x, y) = -i l^2 \int d^4x' d^4y' d^4u \left[P_x \left(\frac{1}{1-K_N} \right)_{xu} G(u-y') V_y^0 F(y'-x') \left(\frac{1}{1-K_{\pi^0}} \right)_{x'y'} \Pi_{1y}^0 v(p') \right] e^{ip'x'+iq'y'}. \quad (165)$$

Dabei ist zu beachten, daß in der Entwicklung von $1/(1-K)$ Faltungen auftreten, z. B. ist

$$\left(\frac{1}{1-K} \right)_{xu} = \delta(x-u) + K_N(x-u) + \int K_N(x-u') K_N(u'-u) d^4u' + \dots$$

Auch auf die (besonders für K_{π^0} komplizierten) Spinorindizes muß geachtet werden. Durch Einsetzen in die Übergangsamplitude finden wir nach Transformation in den Impulsraum

$$A = (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') l^2 \left[\bar{u}(p) [(\gamma p) - i\kappa] P_p \frac{1}{1-K_N(p)} \frac{1}{(\gamma p)} V_q^0 F(p-q') \frac{-\kappa_{\pi^0}^2 - q^2}{1-K_{\pi^0}(-q)} \Pi_{1,+q}^0 v(p') \right]. \quad (166)$$

c) Diskussion der Normierungsfaktoren Z_2 , Z_3 und des Emissionsvertex

Wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, sind wir analog wie bei der Renormierung in der konventionellen Theorie vorgegangen. Außer der Tatsache, daß Z_2 und Z_3 in unserer Theorie endlich sind, bestehen einige Unterschiede in der physikalischen Interpretation dieser Größen. Während in der konventionellen Theorie Z_2 und Z_3 als Wahrscheinlichkeit dafür gedeutet werden kann, das wechselwirkungsfreie Teilchen im Zustand des physikalischen (angezogenen) Teilchens anzutreffen, ist eine solche Interpretation hier nicht so einfach möglich. Insbesondere können die Z -Faktoren infolge der indefiniten Metrik negativ werden.

Wir berechnen nun Z_2 . Aus (115) bzw. (134) findet man mit $\xi = \kappa l/2\pi$

$$1 - K_N^A(p) = 1 + \frac{\xi^4}{16} 24 L \left(-\frac{p^2}{\kappa^2} \right), \quad (167)$$

$$1 - K_N^B(p) = 1 + \frac{\xi^4}{16} \left[6L - \frac{4}{3}M - \frac{i\kappa}{(\gamma p)} \frac{10}{3}N \Sigma_1 \right].$$

Definieren wir nun Z_2 durch

$$Z_2^A = \lim_{(\gamma p) \rightarrow i\kappa} \frac{(\gamma p) - i\kappa}{1 - K_N^A} \frac{1}{(\gamma p)}; \quad (168)$$

$$Z_2^B = \lim_{(\gamma p) \rightarrow i\kappa \Sigma_1} \frac{(\gamma p) - i\kappa \Sigma_1}{1 - K_N^B} \frac{1}{(\gamma p)},$$

so finden wir mit den numerisch bestimmten Werten für die Ableitungen von L, M, N

$$L'(1) = -0,2983; \quad M'(1) = 0,0426; \quad N'(1) = -0,4747$$

und mit $N(1) = 2,306$

$$Z_2^A = -1,045; \quad Z_2^B = +1,950. \quad (169)$$

Das negative Vorzeichen von Z_2^A ist eine Folge der in IV bereits erörterten mangelhaften Konsistenz der untersten Näherung (Auftreten zweier benachbarter Nullstellen) und führt später zu Schwierigkeiten. Im Verfahren B treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Wir erhalten daher für das Nukleon im Falle A

$$\bar{u}(p) [(\gamma p) - i\kappa] \frac{(\gamma p) + i\kappa}{2i\kappa} R \frac{-2Z_2^A}{1 + (p^2/\kappa^2)} \frac{1}{(\gamma p)} = \bar{u}(p) Z_2^A L, \quad (170)$$

und im Falle B

$$\bar{u}(p) [(\gamma p) - i\kappa] \frac{1 + \Sigma_1}{2} R \frac{i\kappa \Sigma_1}{(\gamma p) - i\kappa \Sigma_1} Z_2^B \frac{1}{(\gamma p)} = \bar{u}(p) Z_2^B L.$$

Bei der Berechnung des Mesonkorrekturfaktors Z_3 wird sich herausstellen, daß $K/(1-K_{\pi^0})$ in Wirkung auf π^0 gerade den V^0 -Anteil herausblendet, was auch notwendig ist, damit Symmetrie bezüglich Emission und Absorption des Mesons herrscht.

Wir betrachten zunächst die Näherung A, bemerken aber schon hier, daß diese Näherung wegen der genannten Inkonsistenz nicht zu brauchbaren Resultaten führen wird. Im Fall A kann mit Hilfe der Bedingung

(145) (bzw. richtiger gesagt, aus den Symmetrieeigenschaften des π -Mesons) der Ausdruck Π^0 eindeutig festgelegt werden:

$$\Pi^0 = \frac{1}{4} (M^0)^{-1}. \quad (171)$$

Aus der Definition von M erhält man damit

$$V_1(J) = 2n_1 \frac{(\gamma J)}{\kappa_{\pi_1}}, \quad V_0(J) = -6n_0 \frac{(\gamma J)}{\kappa_{\pi_0}} \gamma_5 \quad (172)$$

und

$$II_1(J) = N_1 V_1(J), \quad II_0(J) = N_0 V_0(J) \quad \text{mit} \quad (173)$$

$$N_1 = -\frac{1}{8 n_1^2}, \quad N_0 = -\frac{1}{24 n_0^2}.$$

Definieren wir nun Z_3 durch

$$\lim_{J^2 + K_{\pi^2} \rightarrow 0} \frac{1 - (J^2 + \kappa_{\pi^2}^2)}{1 - K_{\pi^2}(-J)} II^0(J) = \kappa_{\pi^2}^2 Z_3 II^0(J) \quad (174)$$

$$= \kappa_{\pi^2}^2 Z_3(-N) V^0(-J),$$

so erhalten wir bei Berücksichtigung der aus (128) bzw. (129) folgenden Beziehung

$$(1 - K_{\pi^2}) II_1(J) = (1 - 2 J^2 D + 4 C) II_1(J); \quad (175)$$

$$(1 - K_{\pi^2}) II_0(J) = (1 - 6 J^2 D + 12 C) II_0(J)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Z_{3,1}} &= \left[\lambda \frac{d}{d\lambda} (1 - 2 J^2 D + 4 C) \right]_{\lambda=\lambda_{1,0}} \left(\lambda = -\frac{J^2}{\kappa^2} \right) \\ \frac{1}{Z_{3,0}} &= \left[\lambda \frac{d}{d\lambda} (1 - 6 J^2 D + 12 C) \right]_{\lambda=\lambda_{0,0}} \end{aligned} \right\} (176)$$

und numerisch wird

$$Z_{3,1} = 3,75, \quad Z_{3,0} = 0,828.$$

Im Fall B besteht V_1 und V_0 aus Gliedern

$$V_1(J) = V_1^0(J) + V_1^{\Sigma} = 2 n_1 \frac{(\gamma J)}{\kappa_{\pi_1}} \Sigma_3 + 4 n_1 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} \Sigma_2,$$

$$V_0(J) = V_0^0(J) + V_0^{\Sigma} \quad (177)$$

$$= -10 n_0 \frac{(\gamma J)}{\kappa_{\pi_0}} \gamma_5 - 4 n_0 i b_0 \frac{\kappa_{\pi_0}}{\kappa} \Sigma_1 \gamma_5.$$

Aus der Definition von K_{π^2} Gl. (158) kann man die Beziehungen ableiten

$$K_{\pi^2}(-J) V_1^0(J) = (J^2 D - 2 C) V_1^0(J) - \left(\frac{i J^2 B}{b_1 \kappa \lambda_{1,0}} \right) V_1^{\Sigma}(J), \quad (178 a)$$

$$K_{\pi^2}(-J) V_1^{\Sigma}(J) = 2 i b_1 \kappa \lambda_{1,0} B V_1^0(J) + (2 J^2 D + 8 C) V_1^{\Sigma}(J),$$

$$K_{\pi^2}(-J) V_0^0(J) = 5 (J^2 D - 2 C) V_0^0(J) - \left(\frac{5 i J^2 B}{b_0 \kappa \lambda_{0,0}} \right) V_0^{\Sigma}(J), \quad (178 b)$$

$$K_{\pi^2}(-J) V_0^{\Sigma}(J) = 2 i b_0 \kappa \lambda_{0,0} B V_0^0(J) + (2 J^2 D + 8 C) V_0^{\Sigma}(J).$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man für das Isotriplett nach einigen algebraischen Umformungen

$$\frac{1}{1 - K_{\pi^2}(-J)} V_1^0(J) = \frac{1}{f_1(\lambda)} \left\{ (1 - 2 J^2 D - 8 C) V_1^0(J) - \left(\frac{i J^2 B}{b_1 \kappa \lambda_{1,0}} \right) V_1^{\Sigma}(J) \right\}, \quad (179)$$

$$\frac{1}{1 - K_{\pi^2}(-J)} V_1^{\Sigma}(J) = \frac{1}{f_1(\lambda)} \left\{ 2 i b_1 \kappa \lambda_{1,0} B V_1^0(J) + (1 - J^2 D + 2 C) V_1^{\Sigma}(J) \right\},$$

wo wir zur Abkürzung gesetzt haben

$$f_1(\lambda) = (1 - J^2 D + 2 C) (1 - 2 J^2 D - 8 C) - 2 J^2 B^2$$

mit der Eigenschaft [vgl. Gl. (136)]

$$f_1(\lambda) / \lambda = \lambda_{1,0} = 0.$$

Im Fall B ist die Größe II_1^0 nicht mehr durch die Transformationseigenschaften eindeutig festgelegt, da jede Linearkombination von V_1^0 und V_1^{Σ} diese Eigenschaften besitzt. Wir setzen deshalb an:

$$II_1^0(J) = N_1(\alpha) [V_1^0(J) + \alpha V_1^{\Sigma}(J)], \quad (180)$$

wobei α eine unbekannte Konstante sein soll. Es wird sich später zeigen, daß die Resultate der Rechnung von dieser Konstanten nicht abhängig sind. $N_1(\alpha)$ ist eine Normierungskonstante, die sich mit Hilfe von Gl. (147) zu

$$N_1(\alpha) = -[16 n_1^2 (1 - 2 b_1^2 \alpha \lambda_{1,0})]^{-1}$$

bestimmt. Mit den Beziehungen (179) und (180) kann man nun schreiben:

$$\lim_{J^2 + \kappa_{\pi_1}^2 \rightarrow 0} \frac{-(J^2 + \kappa_{\pi_1}^2)}{1 - K_{\pi^2}(-J)} II_1^0(+J) = \kappa^2 \frac{N_1(\alpha)}{f_1'(\lambda)} \left\{ [(1 - 2 J^2 D - 8 C) + \alpha 2 i b_1 \kappa \lambda_{1,0} B] V_1^0(J) \right.$$

$$\left. + \left[\alpha (1 - J^2 D + 2 C) - \frac{i J^2 B}{b_1 \kappa \lambda_{1,0}} \right] V_1^{\Sigma}(J) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_{1,0}}$$

$$= \kappa^2 \left\{ \frac{N_1(\alpha)}{f_1'(\lambda)} (1 - 2 J^2 D - 8 C) \right\} \Big|_{\lambda=\lambda_{1,0}} (1 - 2 b_1^2 \alpha \lambda_{1,0}) [V_1^0(J_0) - V_1^{\Sigma}(J_0)]$$

$$= \frac{\kappa^2}{16 n_1^2} \left[\frac{1 - 2 J^2 D - 8 C}{f_1'(\lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_{1,0}} V_1(-J_0).$$

Hierbei haben wir benützt, daß für $\lambda = \lambda_{1,0}$ nach Gl. (162) die Gleichungen gelten:

$$1 - 2 J^2 D - 8 C = \frac{i J^2 B}{b_1 \kappa \lambda_{1,0}}$$

$$1 - J^2 D + 2 C = -2 i b_1 \kappa \lambda_{1,0} B$$

und haben auf Grund der J_0 -Abhängigkeit gesetzt:

$$V_1(-J_0) = V_1^0(-J_0) + V_1^{\Sigma}(-J_0)$$

$$= -V_1^0(J_0) + V_1^{\Sigma}(J_0)$$

Wir erkennen nun, daß die rechte Seite der obigen Gleichung nicht mehr von α abhängt und wieder einfach proportional dem Emissions-Vertexoperator $V_1(-J_0)$ ist. Analog zum Fall A können wir also eine Konstante Z_3 definieren:

$$\lim_{J^2 + \kappa_{\pi^0}^2 \rightarrow 0} \frac{-(J^2 + \kappa_{\pi^0}^2)}{1 - K_{\pi^0}(-J)} \Pi_1^0(-J) = \kappa_{\pi^0}^2 Z_{31} \frac{1}{16 n_1^2} V_1(-J_0) \quad \text{oder} \quad Z_{31} = \left[\frac{1 - 2 J^2 D - 8 C}{\lambda f_1'(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_{1,0}}. \quad (181 a)$$

Für das Isosinglett lassen sich obige Rechnungen genauso durchführen. Wir definieren analog:

$$Z_{30} = \left[\frac{1 - 2 J^2 D - 8 C}{\lambda f_0'(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_{0,0}} \quad \text{oder} \quad \lim_{J^2 + \kappa_{\pi^0}^2 \rightarrow 0} \frac{-(J^2 + \kappa_{\pi^0}^2)}{1 - K_{\pi^0}(-J)} \Pi_0^0(-J) = \kappa_{\pi^0}^2 Z_{30} \frac{1}{80 n_0^2} V_0(J_0), \quad (181 b)$$

wobei

$$f_0(\lambda) = (1 - 5 J^2 D + 10 C) (1 - 2 J^2 D - 8 C) - 10 J^2 B^2$$

ist. Numerisch ergibt sich

$$Z_{31} = 7,52, \quad Z_{30} = 0,534. \quad (182)$$

beiden Verfahren A und B sind verständlich, da sich ja auch für die π -Mesonenmasse sehr verschiedene Werte ergeben.

Damit wird die Übergangsamplitude

$$A = (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') \frac{1}{16 n_1^2} \quad (183)$$

Die erheblichen Unterschiede der Z-Faktoren in den $\cdot (l \kappa_{\pi^0})^2 Z_2 Z_{31} \bar{u}(p) L V^0(q') F(p - q') V_1(-q) v(p')$

d) Ladungsaustauschstreueung, Auswahlregeln, Größenordnung der Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten

Berücksichtigt man auch Glieder, die eine Streueung mit Ladungsaustausch beschreiben, so erhalten wir [vgl. (157)]

$$A = (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') \frac{1}{16 n_1^2} (l \kappa_{\pi^0})^2 Z_2 Z_{31} \bar{u}(p) L [V^0(q') F(p - q') V_1(-q) v(p') - V^+(q') F(p - q') V_1(-q) v^C(p')] . \quad (184)$$

Wenn der Projektionsoperator L nach rechts durchgezogen wird, erhält man genau die KLEIN-GORDON-Spinoren für Proton und Neutron

$$v^p(p') = R v(p'), \quad v^n(p') = R v^C(p') .$$

Der Ausdruck beschreibt daher tatsächlich nur die Prozesse

$$\alpha) \quad p + \pi_1^0 \rightarrow p + \pi_1^0, \quad \beta) \quad p + \pi_0^0 \rightarrow p + \pi_1^0, \quad \gamma) \quad n + \pi_1^+ \rightarrow p + \pi_1^0 .$$

Wir erhalten im Fall A

$$A^A = - (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') Z_{31} Z_2 \frac{(\kappa_{\pi^0} l)^2}{2} f \bar{u}^p(p) \frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi^0}} F(p - q') \frac{(\gamma q)}{\kappa_{\pi^0}} v^{(\cdot)}(p'), \quad (185)$$

wobei für die Reaktion

$$\alpha) \quad f = 1, \quad v^{(\cdot)} = v^{(p)}, \quad \beta) \quad f = - \frac{3 n_0}{n_1}, \quad v^{(\cdot)} = v^{(p)}, \quad \gamma) \quad f = + \frac{n}{n_1}, \quad v^{(\cdot)} = v^{(n)} \quad \text{ist.} \quad (186)$$

Man erhält eine vollkommen analoge Formel für $p + \pi_0^0 \rightarrow p + \pi_0^0$ (es ist nur $\kappa_{\pi^0} \rightarrow \kappa_{\pi^0}$, $Z_{31} \rightarrow Z_{30}$, und $f = 3$ zu setzen).

Man sieht zunächst, daß wegen $n/n_1 = \sqrt{2}$ die Kopplungskonstante des π^\pm um diesen Faktor größer als die von π_1^0 ist, wie das in einer ladungsunabhängigen Theorie der Fall sein muß.

Zum Vergleich ziehen wir die in erster Störungsnäherung einer PS-PV-Theorie berechnete Amplitude für die Reaktion $p + \pi^0 \rightarrow p + \pi^0$ heran. Sie hat die Form

$$A' = - (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') F^2 \bar{u}^p(p) \frac{(\gamma q')}{\kappa_\pi} \gamma_5 S_F(p - q') \frac{(\gamma q)}{\kappa_\pi} \gamma_5 u^p(p') . \quad (187)$$

Dabei ist F die Kopplungskonstante, deren experimenteller Wert $F^2/4\pi = 0,08$ ist und $S_F = - \frac{(\gamma q) + i \kappa}{p^2 + \kappa^2}$.

Ein Vergleich von A' und A^A ist wegen des Auftretens eines KLEIN-GORDON-Spinors im letzteren Ausdruck erst nach einigen Umformungen möglich. Zunächst kann zu $(\gamma q')$ und (γq) ein Faktor γ_5 hinzugefügt werden, da $F(p - q')$ keine Massenglieder enthält. Mit (141) erhalten wir nach einigen algebraischen Um-

formungen

$$\bar{u}^p(p) (\gamma q') (\gamma, p - q') (\gamma q) v^p(p') = \frac{1}{2} \bar{u}^p(p) (\gamma q') (\gamma, p - q') (\gamma q) u^p(p') - \frac{1}{2} [(p - q')^2 + \kappa^2] \bar{u}^p(p) \frac{(\gamma, q + q')}{2} \gamma_5 u^p(p').$$

Das zweite Glied kann auch anders geschrieben werden:

$$\bar{u}^p(p) \frac{1}{2} (\gamma, q + q') \gamma_5 u^p(p') = -\bar{u}^p(p) (\gamma, p - q') \gamma_5 u^p(p').$$

Wir erhalten also

$$\bar{u}^p(p) \frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi_1}} F(p - q') \frac{(\gamma q)}{\kappa_{\pi_1}} v^p(p') = \frac{1}{2} \bar{u}^p(p) \left[\frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 F(p - q') \frac{(\gamma q)}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 + \frac{(p - q')^2 + \kappa_N^2}{\kappa_{\pi_1}^2} F(p - q') \gamma_5 \right] u^p(p'). \quad (188)$$

Der erste Term bedeutet eine PV-Kopplung. Der zweite Ausdruck, der nur Beiträge von Zwischenzuständen enthält, die nicht auf der Massenschale liegen, führt zu einer Wechselwirkung, welche die Parität nicht erhält. Das hängt aber, wie schon früher gesagt, mit dem schlechten Näherungsverfahren zusammen (Vernachlässigung der Vertexkorrektur, siehe oben).

Die Übergangsamplitude nimmt die Form an

$$A^\Lambda = - (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') Z_{31} Z_2 \frac{(\kappa_{\pi_1} l)^2}{4} \bar{u}^p(p) \left[\frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 F(p - q') \frac{(\gamma q)}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 + \frac{(p - q')^2 + \kappa^2}{\kappa_{\pi_1}^2} F(p - q') \gamma_5 \right] u^p(p'). \quad (189)$$

Lassen wir den paritätsverletzenden Term weg, so erhalten wir durch Vergleich mit (187)

$$\frac{F_1^2}{4\pi} = Z_{31} Z_2 \frac{(\kappa_{\pi_1} l)^2}{16\pi} = -0,289. \quad (190)$$

In dieser Näherung ergibt sich also eine imaginäre Kopplung, offensichtlich ein unsinniges Resultat. Der Grund dafür ist die mehrfach erwähnte Inkonsistenz der Fermioneneigenwertrechnung A, durch die $1/[1 - K_N(p)]$ zwei Pole hat, so daß der Z-Faktor des Nukleons negativ wird.

Für das Singlett- π^0 erhält man analog

$$A^\Lambda = - (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') Z_{30} Z_2 \frac{3(\kappa_{\pi_0} l)^2}{4} \bar{u}^p(p) \left[\frac{(\gamma q') \gamma_5 F(p - q')}{\kappa_{\pi_0}} \frac{(\gamma q) \gamma_5}{\kappa_{\pi_0}} + \frac{(p - q')^2 + \kappa^2}{\kappa_{\pi_0}^2} F(p - q') \gamma_5 \right] u^p(p'), \quad (191)$$

$$\text{also} \quad \frac{F_0^2}{4\pi} = Z_{30} Z_2 \frac{3(\kappa_{\pi_0} l)^2}{16\pi} = -1,781. \quad (192)$$

Die Kopplung ist ebenfalls imaginär, da die genannte Schwierigkeit ja mit dem Nukleon und nicht mit dem Meson zusammenhängt. Auch das paritätsverletzende Glied tritt auf. Für den Prozeß $p + \pi_0^0 \rightarrow p + \pi_1^0$ und $p + \pi_1^0 \rightarrow p + \pi_0^0$ muß die gleiche Kopplungskonstante resultieren. Dies ist der Fall, wenn wir die noch freien Normierungsfaktoren so wählen, daß

$$\frac{n_0}{n_1} = - \sqrt{\frac{Z_{30} \kappa_{\pi_0}^2}{3 Z_{31} \kappa_{\pi_1}^2}} = -0,478 \quad \text{wird.}$$

Wir wollen nun den Fall B diskutieren, bei dem keine paritätsverletzenden Glieder in der Wechselwirkung vorkommen und die Kopplungskonstante reell wird. Wir betrachten wieder $\pi_1^0 + p \rightarrow \pi_1^0 + p$ als Modellfall. Für (184) brauchen wir [man beachte, daß L nun $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5 \Sigma_3)$ bedeutet und $\bar{u}^p(p) = \bar{u}^p(p) (1 + \Sigma_1)/2$]

$$\begin{aligned} \frac{1 + \Sigma_1}{2} L V_1(q') F(p - q') V_1(-q) &= 4 n_1^2 \frac{1 + \Sigma_1}{2} \frac{1 - \gamma_5 \Sigma_3}{2} \left(\frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi_1}} \Sigma_3 + 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} \Sigma_2 \right) \\ &\cdot F(p - q') \left(\frac{(-\gamma q)}{\kappa_{\pi_1}} \Sigma_3 + 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} \Sigma_2 \right) = -4 n_1^2 \left(\frac{(\gamma q')}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 + 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} i \gamma_5 \right) F(p - q') \Big|_{\Sigma_1=1} \\ &\cdot \left(\frac{(\gamma q)}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 - 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} i \gamma_5 \right) \frac{1 + \Sigma_1}{2} \frac{1 + \gamma_5 \Sigma_3}{2}. \end{aligned} \quad (193)$$

Wenn wir dies in (184) einsetzen, erhalten wir

$$A^B = (2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') Z_{31} Z_2 (\kappa_{\pi_1} l)^2 \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \bar{u}(p) \left(\frac{\gamma q'}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 + 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} i \gamma_5\right) 2 F(p-q') \Big|_{\Sigma_1=1} \left(\frac{\gamma q}{\kappa_{\pi_1}} \gamma_5 - 2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} i \gamma_5\right) \frac{1+\Sigma_1}{2} u(p') \quad (194)$$

Dabei soll $F(p'-q)|_{\Sigma_1=1}$ die Funktion bedeuten, die aus F entsteht, indem Σ_1 durch 1 ersetzt wird. Außer $\frac{1}{2}(1+\Sigma_1)$ tritt keine Σ -Matrix auf. Entsprechend der Bemerkung³¹ bezüglich der u können wir einfach $\frac{1}{2}(1+\Sigma_1)_{ii}=1$ nehmen, wenn wir unter u den üblichen Viererspinor verstehen.

Wir erhalten also nun PV- und PS-Kopplung. Die Kopplungskonstante ist

$$F_1^2/4\pi = (1/32\pi) Z_{31} Z_2 (\kappa_{\pi_1} l)^2 = 0,0158 \quad (195)$$

Für das Singlett erhält man denselben Ausdruck, nur daß $\kappa_{\pi_1} \rightarrow \kappa_{\pi_0}$ durch $b_1 \rightarrow \frac{1}{5} b_0$ zu ersetzen ist und die Kopplungskonstante den Wert

$$\frac{F_0^2}{4\pi} = (5/16\pi) Z_{30} Z_2 (\kappa_{\pi_0} l)^2 = 2,079 \quad (196)$$

besitzt.

Zum Unterschied von der Näherung A ist es wegen des Massenterms in $F(p-q')$ nicht zulässig, γ_5 wegzulassen. Die PS-Beimischung ist sehr klein

$$2 b_1 \frac{\kappa_{\pi_1}}{\kappa} = 0,024; \quad \frac{2}{5} b_0 \frac{\kappa_{\pi_0}}{\kappa} = 0,38 .$$

Die Schwierigkeiten des Falles A treten hier nicht auf; das Verfahren B ist demnach konsistent. Bezüglich der Ladungsaustauschstreueung und der Singlett-Triplett-Streuung unterscheidet sich das Verfahren B nicht von A und braucht daher nicht noch einmal diskutiert zu werden.

Der Wert (195) sollte mit dem experimentellen Wert 0,08 verglichen werden, jedoch sind die numerischen Resultate dieses Abschnittes im Hinblick auf die Vernachlässigung der Vertexkorrektur und die Ungenauigkeit des ganzen Näherungsverfahrens nur als Abschätzung der Größenordnung zu verstehen. Wenn wir die Kopplungskonstante mit der äquivalenten PS-Kopplung vergleichen

$$\frac{G_1^2}{4\pi} = \left(\frac{2\kappa}{\kappa_{\pi_1}}\right)^2 \frac{F_1^2}{4\pi} = 24,7; \quad \frac{G_0^2}{4\pi} = 8,77 ,$$

so ist die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $G_1^2_{\text{exp}}/4\pi \approx 15$ wesentlich besser. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß die mangelhafte Berechnung der π -Mesonenmasse, die in G nicht mehr

explizit auftritt, den Hauptfehler in der Kopplungskonstanten F verursacht.

VI. Wechselwirkung beim β -Zerfall

Nach der Quantenzahlentabelle von Kap. I gehört der β -Zerfall, z. B. der Prozeß $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ zu den (auch im Sinne der starken Wechselwirkung) erlaubten Übergängen. Die Lebensdauern für β -Zerfall müßten also außerordentlich kurz sein ($\sim 10^{-23}$ sec), wenn die Leptonen bereits in der ersten Näherung der vorliegenden Theorie vorkämen. Tatsächlich treten sie in dieser hier behandelten Näherung aber noch nicht in Erscheinung, da ihr Beitrag zur S_F -Funktion wegen ihrer verschwindenden Masse durch den Beitrag des „Geisterdipols“ vollständig kompensiert wird. Die Kleinheit der β -Wechselwirkung beruht also hier wohl auf dem Umstand, daß erst die in höheren Näherungen auftretende Symmetrieverminderung einen schwachen Anteil an Leptonenerzeugung und -vernichtung im Feldoperator $\psi(x)$ bewirkt, nicht aber darauf, daß etwa die für die Wechselwirkung zunächst maßgebende Invariante J_b die β -Übergänge aus Symmetriegründen ausschliesse. Daraus ergibt sich, daß die Symmetrieeigenschaften der β -Wechselwirkung schon aus der Symmetrie der starken Wechselwirkungen, insbesondere der Invariante J_b hergeleitet werden können, obwohl die Existenz des β -Zerfalls eine indirekte Folge der Symmetrieverminderungen ist.

Mathematisch stellt sich dieser Sachverhalt in folgender Weise dar: Wenn man den β -Zerfall in der gleichen Art behandelt wie in Kap. V die Streueung, so kann man etwa von Graphen des Typus Abb. 11 ausgehen. Für die τ -Funktion von 3 Variablen, die die auslaufenden Teilchen charakterisiert, entsteht dabei eine Gleichung der Art

$$(1 - K_s) \tau(xy | z) = K_W \tau(x') . \quad (197)$$

Aus dieser Gleichung wird formal

$$\tau(xy | z) = (1 - K_s)^{-1} K_W \tau(x') , \quad (198)$$

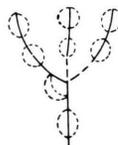


Abb. 11.

und es ist zu untersuchen, welche Struktur der Operator $(1 - K_s)^{-1}$ hat. In einer linearen Fermionentheorie mit mehreren verschiedenen Masseneigenwerten, die etwa durch

$$\prod_l (\gamma_\nu p_\nu + i \kappa_l) \psi(x) = 0 \quad (199)$$

charakterisiert ist, erkennt man sofort, daß der Vakuumerwartungswert $S_F(p)$ im wesentlichen durch

$$S_F(p) = \frac{\text{const}}{\prod_l (\gamma_\nu p_\nu + i \kappa_l)} \quad (200)$$

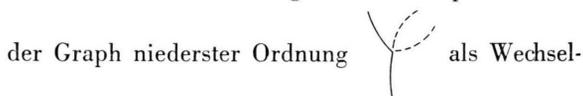
bzw. durch die Partialbruchzerlegung dieses Ausdrucks gegeben ist, also einfach durch das Reziproke des in (199) vor $\psi(x)$ stehenden Differentialausdrucks. Man kann daher auch in der nichtlinearen Theorie annehmen, daß der Ausdruck $(1 - K_s)^{-1}$ sich im wesentlichen ähnlich wie $S_F(p)$ verhält. Tatsächlich zeigt eine Diskussion der für S_F maßgebenden Graphenbilder, daß für S_F eine Integralgleichung der Form

$$[1 - K_s(p)] S_F(p) = \int dp' K_V(p, p') S_F(p')$$

gelten muß, wobei $1 - K_s(p)$ gerade der für die Fermionen charakteristische Integraloperator ist. [$K_V(p, p')$ ist dabei nicht der Operator der rechten Seite von (197) und (198).] Wenn die Funktion S_F die Leptonen nicht enthält, so können also auch keine Leptonen emittiert werden, obwohl die „Störung“ $K_W \cdot \tau(x')$ ihre Erzeugung möglich machen würde. Physikalisch beruht dies darauf, daß die nichtlineare Wechselwirkung die Fortpflanzung von Störungen unmittelbar auf dem Lichtkegel in erster Näherung überhaupt verbietet (Wegfallen der δ - bzw. δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel). Wenn die Symmetrieverminderung in höheren Näherungen eintritt, so entsteht durch sie ein kleiner Leptonenanteil in S_F und in $(1 - K_s)^{-1}$, der dann eine schwache Leptonenemission ermöglicht. Auch wenn man auf der rechten Seite von (197) kompliziertere Graphen berücksichtigt, so ändert sich an diesem Sachverhalt nichts.

Wir wollen im folgenden nur Graphen für K_W in Betracht ziehen, bei denen die beiden auslaufenden Leptonenlinien vom gleichen Punkt ausgehen. Denn Graphen anderer Art müßten mindestens noch eine innere Leptonenlinie enthalten; ihr Beitrag wäre also sehr viel kleiner und kann zunächst vernachlässigt werden.

Von den dann noch zugelassenen Graphen liefert



wirkung einfach die Invariante J_b , die in der konventionellen Schreibweise durch

$$c_s = c_T = c_p = 0; \quad c_V = -c_A \quad (201)$$

dargestellt wird. Die höheren Graphen aber ändern unter Beibehaltung von $c_s = c_T = c_p = 0$ das Verhältnis c_A/c_V ab.

Daß J_b zu den Werten (201) der konventionellen Konstanten gehört, läßt sich leicht in folgender Weise einsehen:

Zunächst gilt

$$(\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = (\bar{\psi}^C \gamma_\mu \gamma_5 \psi^C) (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi), \quad (202)$$

was sich vermöge der FIERZschen Identität umformen läßt in

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}^C \gamma_\mu \gamma_5 \psi^C) (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) & \quad (203) \\ = -\frac{1}{4} \sum_\rho (\bar{\psi} \Gamma_\rho \psi^C) (\bar{\psi}^C \gamma_\mu \gamma_5 \Gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \psi), \end{aligned}$$

wobei über alle Elemente Γ_ρ der DIRAC-Algebra summiert wird. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \Gamma_\rho \psi^C &= \bar{\psi} \Gamma_\rho C^{-1} \bar{\psi}^T \\ &= (\bar{\psi} \Gamma_\rho C^{-1} \bar{\psi}^T)^T = \bar{\psi} C^{-1} C \psi^C, \end{aligned}$$

d. h. es entstehen von Null verschiedene Beiträge nur aus Gliedern, für die gilt:

$$\Gamma_\rho = C^{-1} \Gamma_\rho^T C. \quad (204)$$

Die Elemente $1, \gamma_5, i \gamma_\nu \gamma_5$ erfüllen diese Bedingung, über sie ist also allein zu summieren. Schreibt man unter die Operatoren die Teilchen, deren Entstehen oder Verschwinden sie nach Gln. (49) und (77) bedeuten sollen, so kann man in der Klammer die nach (49) bzw. (77) zugehörigen Projektionsoperatoren R und L einfügen. Die rechte Seite von (203) geht damit über in

$$-\frac{1}{4} \sum_\rho (\bar{\psi} \underset{p}{L} \Gamma_\rho \underset{n}{R} \psi^C) (\bar{\psi}^C \underset{e}{L} \gamma_\mu \gamma_5 \Gamma_\rho \underset{v}{\gamma_\mu \gamma_5} R \psi). \quad (205)$$

Von den Elementen der DIRAC-Algebra bleibt wegen der Bedingung (204) daher nur $\Gamma_\rho = i \gamma_\rho \gamma_5$ übrig und es entsteht

$$\frac{1}{8} [\bar{\psi} \underset{p}{(1 - \gamma_5)} \underset{n}{\gamma_\rho} \psi^C] [\bar{\psi}^C \underset{e}{(1 - \gamma_5)} \underset{v}{\gamma_\rho} \psi], \quad (206)$$

was dem Ansatz (201) entspricht.

Um die allgemeine Form der Wechselwirkung der „angezogenen“ Teilchen im β -Zerfall zu erhalten, müssen wir wieder von Ausdrücken Gl. (84) mit Zusatzbedingungen (85), (86), (87) ausgehen. Unter Benützung der FIERZschen Identität analog zu

Gl. (203) und (204) können wir daraus ableiten, welche DIRAC-Operatoren $\Gamma_{\rho}^{(1)}$ und $\Gamma_{\rho}^{(2)}$ in Ausdrücken der Form

$$L_{\beta} = \int c_{\rho}(p, q, k) \cdot [\bar{\psi}(p + \frac{1}{2}k) \Gamma_{\rho}^{(1)}(p, k) \cdot \psi^C(-p + \frac{1}{2}k)] \cdot [\bar{\psi}^C(q + \frac{1}{2}k) \Gamma_{\rho}^{(2)}(q, k) \cdot \psi(-q + \frac{1}{2}k)]$$

möglich sind, wenn wir die PAULI-GÜRSEY-TOUSCHEK-Symmetrien fordern. Für die für den β -Zerfall maßgeblichen Glieder können wir dies jedoch auch ohne Umrechnung aus Gl. (84) einsehen. Denn wir erkennen, daß im Falle des β -Zerfalls die Operatoren $\Gamma_{\rho}^{(1)}$ und $\Gamma_{\rho}^{(2)}$ selbst wieder Bedingungen der Art Gl. (85) und (87) erfüllen müssen, damit L_{β} hermitesch ist und die Γ_{ρ} von R nach L überführen.

$$L_{\beta} = c_1 (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi^C) (\bar{\psi}^C \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi) + c_2 \left(\bar{\psi} \left(\frac{\gamma_{\nu}}{\kappa} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{\nu}} \right) \gamma_{\mu} \gamma_5 \left(\frac{\gamma_{\sigma}}{\kappa} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{\sigma}} \right) \psi^C \right) (\bar{\psi}^C \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi). \quad (207)$$

Wie man leicht verifiziert, ist $c_1 = \frac{1}{2}(c_V - c_A)$ und $c_2 = \frac{1}{2}(c_V + c_A)$ in der konventionellen Schreibweise. Ist $c_2 = 0$, wie für den Vertex niedrigster Ordnung Gl. (206) (der Faktor $1 - \gamma_5$ ist in dieser Darstellung irrelevant, da $\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi^C = 0$ ist), so folgt daraus $c_V = -c_A$.

Im allgemeinen ist $c_A/c_V = -(c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$. Eine Abschätzung des Verhältnisses c_2/c_1 bzw. c_A/c_V für die angezogenen Teilchen (durch Berücksichtigung der höheren Graphen) ist auf halbempirische Weise von FUBINI und THIRING³⁴ vorgenommen worden und soll hier nicht weiter untersucht werden. Da experimentell das Verhältnis c_A/c_V von -1 verschieden ist, so dürfte auch c_1 von der „nackten“ Kopplungskonstanten verschieden sein. Es besteht deshalb kein Anlaß zu einer These der Unveränderlichkeit dieser Kopplungskonstanten beim „Anziehen“ der Teilchen, besonders, da der τ^+ -Strom $j_{\mu}^+ = (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi^C)$ in der vorliegenden Theorie nicht divergenzfrei ist (vgl. Kap. IV a). Da das μ -Meson in der jetzigen Näherung der Theorie noch nicht auftritt, läßt sich auch noch nicht entscheiden, wie die Ankopplung für dieses anzusetzen ist.

VII. Mathematische Ergänzungen

Bei Diskussionen über die mathematische Struktur der nichtlinearen Spintheorie kehren häufig zwei Argumente wieder, die die mathematische Widerspruchsfreiheit der Theorie in Frage stellen und etwa folgendermaßen formuliert werden können³⁵:

Wegen der Transpositionsbedingung analog zu (204) erhalten wir außerdem für die $\Gamma_{\rho}^{(1)}(p, k)$ und $\Gamma_{\rho}^{(2)}(q, k)$ eine Einschränkung der Art Gl. (86). Daraus folgt aber, daß in $\Gamma_{\rho}^{(1)}(p, k)$ selbst wieder nur die in Gl. (88) angegebenen Terme möglich sind. $\Gamma_{\rho}^{(2)}(q, k)$ enthält entsprechende Glieder, wenn man in (88) p durch q ersetzt.

Beschreibt $\Gamma_{\rho}^{(2)}(q, k)$ den Leptonenvertex, so verschwinden bei strenger Isoinvarianz alle Terme mit $q_{\nu} \gamma_{\nu}$ und $k_{\nu} \gamma_{\nu}$, da Elektronen und Neutrinos masselosen DIRAC-Gleichungen genügen. Geschieht die Ankopplung in einem Punkt, so treten außerdem keine q_{ν} auf. Ist die Impulsübertragung k_{ν} fernerhin klein gegen den Viererimpuls p_{ν} der Nukleonen ($p^2 = -\kappa^2$), so reduziert sich die für den β -Zerfall maßgebende Wechselwirkung auf zwei Glieder:

Wenn behauptet wird, daß der Feldoperator $\psi(x)$ mit einem beliebigen Raumintegral von $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ zur gleichen Zeit antikommutiere, zu verschiedenen Zeiten aber im allgemeinen nicht antikommutiere, so sei diese Behauptung mit der Existenz einer Differentialgleichung nicht verträglich. Denn aus der Anti-Vertauschbarkeit der Feldoperatoren zur gleichen Zeit folge wegen der Differentialgleichung auch die zwischen $\bar{\psi}(x)$ und $\partial\psi(x)/\partial t$ und damit die für alle späteren Zeiten. Außerdem sei es überhaupt zweifelhaft, ob man eine Quantenfeldtheorie durch eine Differentialgleichung definieren könne. Schon das LEE-Modell zeige, daß für die renormierten Operatoren eine Integralgleichung an die Stelle der ursprünglichen Differentialgleichung trete.

Um diese Argumente genauer zu analysieren, soll die Frage der Feldgleichungen am LEE-Modell behandelt und anschließend die Frage der Existenz der δ -Funktionen auf dem Lichtkegel an den klassischen Lösungen einer nichtlinearen Gleichung untersucht werden.

a) Die Bestimmungsgleichungen für den zeitlichen Verlauf der Feldoperatoren

Zu den grundlegenden Axiomen der Quantenfeldtheorie gehört der Satz, daß die Feldoperatoren in einem beliebig kleinen, aber endlichen Zeitintervall Δt genügen sollen, um aus dem Vakuum den ganzen HILBERT-Raum aufzubauen (vgl. HAAG³⁶). Wenn dieses Axiom

³⁴ S. FUBINI u. W. E. THIRING, Phys. Rev. **105**, 1382 [1957].

³⁵ Vgl. z. B. W. PAULI Diskussionsbemerkung: High energy conference at CERN 1958, S. 123.

³⁶ R. HAAG, Phys. Rev. **112**, 669 [1958] und Colloqu. Internationale sur les Problemes Mathem. de la Théorie Quantique des Champs, Lille 1957, herausgeg. von CNSR, Paris 1958.

richtig ist, so muß es in jeder Quantenfeldtheorie möglich sein, eine Bewegungsgleichung für die Feldoperatoren zu konstruieren, die entweder eine Differentialgleichung in der Zeit oder eine Integrodifferentialgleichung ist, in der nur über das beliebig kleine Zeitintervall Δt zeitlich integriert wird.

Das LEE-Modell scheint dieser These zunächst zu widersprechen, da die renormierten Feldgleichungen des LEE-Modells in der bisher benützten Form eine Zeitintegration von $-\infty$ bis t enthalten [l. c. ⁸, S. 544, Gl. (62 a)]. Im folgenden soll aber gezeigt werden, daß auch im LEE-Modell eine Integrodifferentialgleichung der geschilderten Art abgeleitet werden kann. In den Bezeichnungen schließen wir uns genau an die früheren ⁸ an; die folgenden Rechnungen sind also nur unter Benützung der Ergebnisse der früheren Arbeit ⁸ verständlich.

Die unrenormierten Gleichungen [l. c. ⁸, Gl. (53 a) und (53 b)] des LEE-Modells lauten* (unter der Voraussetzung $m_N = 0$):

$$i \frac{\partial \psi_V}{\partial t} = m_V \psi_V - g_0 \pi \sqrt{2} \psi_N a, \quad (208)$$

$$i \frac{\partial \psi_N}{\partial t} = -g_0 \pi \sqrt{2} a^* \psi_V. \quad (209)$$

Aus Gl. (209) entnimmt man:

$$\psi_N(t) = i g_0 \pi \sqrt{2} \int_{t-\Delta t}^t dt' a^*(t') \psi_V(t') + \psi_N(t-\Delta t). \quad (210)$$

Durch Einsetzen in Gl. (208) folgt:

$$i \frac{\partial \psi_V}{\partial t} = m_V \psi_V - 2 i g_0^2 \pi^2 \int_{t-\Delta t}^t a(t) a^*(t') \psi_V(t') dt' \quad (211) \\ - g_0 \pi \sqrt{2} a(t) \psi_N(t-\Delta t).$$

Setzt man nun, ähnlich wie früher ⁸

$$\chi_{\Delta t}(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \right\} e^{iz(t-t')}, \quad (219)$$

so erkennt man, daß die Funktion $\chi_{\Delta t}(t-t')$ außerhalb des Intervalls zwischen $t-\Delta t$ und t verschwindet:

Schließlich erhält man also für die renormierte Wellengleichung:

$$g \int_{t-\Delta t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} dt' \chi_{\Delta t}(t-t') \psi_{Vr}(t') = -2 i \pi^2 g \int_{t-\Delta t}^t dt' [a(t) a^*(t') - s(t-t')] \psi_{Vr}(t') - \pi \sqrt{2} a(t) \psi_N(t-\Delta t). \quad (221)$$

Für die linke Seite dieser Gleichung folgt — unter der Voraussetzung eines glatten Verlaufs von $\psi(t)$ — nach längeren Umformungen von (219) die folgende Gl. (222):

* An m. b. d. K o r r.: Bei dieser Gelegenheit sei ein Rechenfehler verbessert, der in der genannten Arbeit ⁸ stehen geblieben war: Dort tritt in den Gl. (3) und (53 d) ein nichtlokaler Faltungsoperator auf, der die FOURIER-Transformierte von $1/\omega$ sein soll, aber irrtümlich als $\int dx' \frac{e^{-m_\theta |x-x'|}}{|x-x'|}$ angegeben worden war. Der letztere Ausdruck ist jedoch die FOURIER-Transformierte von $1/\omega^2$. Der richtige Faltungsoperator hat die Form $\text{const} \cdot \frac{dx'}{|x-x'|} \frac{d}{d|x-x'|} K_0(m_\theta |x-x'|)$ (K_0 ist die modifizierte HANKEL-Funktion). Für die Schlüsse der Arbeit ergeben sich dadurch keine wesentlichen Änderungen.

Unter Benützung von

$$s(t-t') = \langle 0 | a(t) a^*(t') | 0 \rangle \quad (212)$$

erhält man als den wichtigsten Teil von (211), ähnlich wie früher ⁸, den Ausdruck

$$\frac{1}{g_0^2} \left(i \frac{\partial \psi_V}{\partial t} - m_V \psi_V \right) + 2 i \pi^2 \int_{t-\Delta t}^t s(t-t') \psi_V(t') dt'. \quad (213)$$

Setzt man wieder

$$\psi_V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi(z) e^{-izt}, \quad (214)$$

so wird aus (213)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \frac{z-m_V}{g_0^2} + \int \frac{k^2 dk (1-e^{-i(\omega-z)\Delta t})}{2\omega(\omega-z)} \right\} \chi(z) e^{-izt}. \quad (215)$$

Hier ist ein Zusatz $-i\gamma$ ($\gamma \rightarrow 0$) im Resonanznenner nicht nötig, da an der Stelle $\omega=z$ auch der Zähler verschwindet. Da wir die beiden Terme des Zählers aber getrennt behandeln wollen, ist ein solcher Zusatz doch zweckmäßig, um den Integrationsweg in beiden Integralen festzulegen. Wir schreiben also statt $\omega-z$ wieder $\omega-z-i\gamma$ (s. Arbeit ⁸) und erhalten für den Klammerausdruck (215):

$$\left\{ \right\} = h^+(z) - \int \frac{k^2 dk e^{-i(\omega-z)\Delta t}}{2\omega(\omega-z-i\gamma)} \quad (216)$$

mit

$$h^+(z) = a + b z + z^2 \int \frac{k^2 dk}{2\omega^3(\omega-z-i\gamma)}. \quad (217)$$

Indem man im zweiten Glied in (216) eine ähnliche Zerlegung durchführt wie im ersten, erhält man:

$$\left\{ \right\} = a - \int \frac{k^2 dk}{2\omega^2} e^{-i(\omega-z)\Delta t} + z \left[b - \int \frac{k^2 dk}{2\omega^3} e^{-i(\omega-z)\Delta t} \right] + z^2 \int \frac{k^2 dk (1-e^{-i(\omega-z)\Delta t})}{2\omega^3(\omega-z-i\gamma)}. \quad (218)$$

$$\chi_{\Delta t}(t-t') = 0 \text{ für } t' < t-\Delta t \text{ und für } t' > t. \quad (220)$$

Die beiden ersten Zeilen von (218) geben nämlich Anlaß zu δ - bzw. δ' -Funktionen an den Stellen t oder $t-\Delta t$. Für die letzte Zeile kann (220) aus der Verschiebung der Integrationswege im z -Raum abgeleitet werden, wobei aber zu beachten ist, daß auch hier noch δ - und δ' -Funktionen an den Grenzen übrigbleiben.

$$\begin{aligned}
\int_{t-\Delta t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} dt' \chi_{\Delta t}(t-t') \psi(t') = & a \psi(t) + i b \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} - \left[\psi(t) - \Delta t \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \right] \int \frac{k^2 dk}{2 \omega^2} e^{-i \omega \Delta t} - i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \int \frac{k^2 dk}{2 \omega^3} e^{-i \omega \Delta t} \\
& + i \int_{t-\Delta t}^t dt' \left[\psi(t') - \psi(t) - (t'-t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \right] \int \frac{k^2 dk}{2 \omega} e^{+i \omega (t-t')}. \quad (222)
\end{aligned}$$

Die Integrale über k sind stets als A b e l'sche Grenzwerte gemeint; sie lassen sich durch Zylinderfunktionen darstellen.

Vergleicht man die renormierte Form (221) und (222) der Wellengleichung mit der unrenormierten Gl. (208), so erkennt man, daß das zweite Integral in (222) im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ wie $1/\Delta t$ anwächst, also — wenn man den Divergenzgrad der Integrale über dk vergleicht — dem Glied mit m_V in (208) entspricht. Das dritte Integral verhält sich wie $\ln \Delta t$ und entspricht dem $\partial \psi_V / \partial t$ in (208). Das letzte Integral in (222) schließlich ist regulär bei $\Delta t \rightarrow 0$, weil zwar das Integral über k sich wie $1/(t'-t)^2$ verhält, aber die eckige Klammer bei kleinen $|t'-t|$ wie $(t'-t)^2$ verschwindet.

Damit ist gezeigt, daß die zeitliche Veränderung der renormierten Operatoren tatsächlich durch eine Integrodifferentialgleichung der geschilderten Art dargestellt werden kann; das LEE-Modell kann also nicht als ein Argument gegen das zu Anfang dieses Abschnitts erwähnte Axiom der Quantenfeldtheorie gelten.

Auch in der Quantenelektrodynamik muß es möglich sein, für die renormierten Feldoperatoren Integrodifferentialgleichungen vom Typus der Gln. (221), (222) zu konstruieren. Wahrscheinlich wird es sogar viele mögliche Formen für solche Gleichungen geben, die alle inhaltlich äquivalent sind.

Nach dem genannten Axiom muß es auch möglich sein, einen HAMILTON-Operator (und allgemeiner: die Operatoren für Translation in zeitlicher und räumlicher Richtung, Rotation, Ladung etc.) zu konstruieren unter Benützung nur der zum Zeitintervall zwischen $t-\Delta t$ und t gehörigen Feldoperatoren. Dagegen können solche Transformations-Operatoren nicht mehr allein aus den Feldoperatoren zu einem bestimmten Zeitpunkt aufgebaut werden (vgl. I. c. ⁸, S. 544). Die Konstruktion der Transformations-Operatoren im Falle des LEE-Modells soll hier nicht mehr durchgeführt werden; auch für sie wird es viele verschiedene, aber inhaltlich äquivalente Formen geben.

In einer relativistisch invarianten, der Kausalitätsforderung genügenden Theorie muß die für den zeitlichen Verlauf der Feldoperatoren maßgebende Gleichung entweder eine LORENTZ-invariante Differentialgleichung sein, oder eine ebenfalls LORENTZ-invariante Integrodifferentialgleichung, in der nur über das beliebig kleine, aber endliche Raum-Zeitvolumen $\Delta t \cdot \Delta V$ integriert wird. In der Quantenelektrodynamik muß für die renormierten Feldoperatoren eine Gleichung der letzteren Art konstruiert werden können.

Nachdem klargestellt ist, daß es dann, wenn überhaupt Feldoperatoren existieren, die den üblichen Axiomen der Quantenfeldtheorie genügen, eine Differentialgleichung oder eine Integrodifferentialgleichung

mit dem beliebig kleinen Volumen $\Delta t \cdot \Delta V$ für sie geben muß, kann die Frage aufgeworfen werden, welches Verhalten die Antikommutatoren in der Nähe des Lichtkegels zeigen, die durch eine solche Feldgleichung und die Forderung der Mikrokausalität (Verschwinden des Antikommutators für raumartige Abstände) bestimmt werden.

Hier ist zunächst hervorzuheben, daß die Feldgleichung nichtlinear sein muß, um Wechselwirkung darzustellen, und daß die Nichtlinearität gerade in der Nähe des Lichtkegels den stärksten Einfluß ausüben muß. Dies gilt in gleicher Weise für Differentialgleichungen wie für Integrodifferentialgleichungen der betrachteten Art. In einer linearen Theorie ist der Antikommutator selbst eine Lösung der Differential- bzw. Integrodifferentialgleichung. In einer nichtlinearen Theorie ist dies zwar nicht mehr der Fall, aber man kann Operatoren konstruieren, die dem Antikommutator eng verwandt und Lösungen der Feldgleichung sind, wenn die Feldoperatoren dies sind. Zum Beispiel ist im Falle der nichtlinearen Spinortheorie (1) der Operator

$$\begin{aligned}
\chi_a(x x') = & e^{i [\bar{\psi}_v(x') a_v + \bar{a}_v \psi_v(x')]} \\
& \cdot \psi_a(x) e^{-i [\bar{\psi}_v(x') a_v + \bar{a}_v \psi_v(x')]} \\
\approx & \psi_a(x) - i a_v \{ \psi_a(x) \bar{\psi}_v(x') \} \\
& + i \bar{a}_v \{ \psi_a(x) \psi_v(x') \} + \dots
\end{aligned}$$

(a_v ist ein beliebiger konstanter, mit ψ und ψ' antikommutierender Spinor) als Funktion von x (bei beliebigem x') eine Lösung von (1), wenn $\psi(x)$ eine Lösung von (1) ist.

Zur Vorbereitung des quantentheoretischen Problems ist es daher nützlich, die klassischen Lösungen der Feldgleichung zu studieren, die für raumartige Abstände verschwinden. Insbesondere kann man durch einen ins einzelne gehenden Vergleich einer linearen mit einer nichtlinearen Feldgleichung untersuchen, wie es kommt, daß die lineare Feldgleichung δ - bzw. δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel hervorbringt, während die nichtlineare Gleichung dort schwächere Singularitäten anderer Art erzeugt. Diese Untersuchung soll hier nur für eine nichtlineare Differentialgleichung, nicht für eine Integrodifferentialgleichung der besprochenen Art durchgeführt werden. Doch gibt das renormierte LEE-Modell gerade das Beispiel für eine Theorie, in der eine Integrodifferentialgleichung der geschilderten Art gilt [nämlich Gl. (221)] und in der die δ -funktionsartigen Singularitäten in den Vertauschungsrelationen ebenfalls ausgeschlossen werden. Aus einem solchen Beispiel kann zwar noch nicht gefolgert werden, daß es grundsätzlich keine Integrodifferentialgleichungen geben könnte, die δ -Funktionen auf dem Lichtkegel zulassen. Es müßte dann in einer solchen Theorie wohl die Wechselwirkung

selbst mit $\Delta t \rightarrow 0$ verschwinden. Dies aber ist für die wirklichen Materiewellen nicht zu erwarten, da die Vielfacherzeugung von Elementarteilchen bei hohen Energien beobachtet wird.

Wenn man dies berücksichtigt, kann man also zusammenfassend feststellen, daß es einerseits eine Differentialgleichung oder eine Integrodifferentialgleichung der betrachteten Art für die Feldoperatoren geben muß, daß andererseits wohl weder die eine noch die andere Form δ -Funktionen auf dem Lichtkegel zuläßt. Die Benützung der indefiniten Metrik wird also im einen wie im anderen Fall erzwungen. Der Fall der Differentialgleichung soll nun noch etwas ausführlicher untersucht werden, da sie von den beiden Möglichkeiten jedenfalls die einfachere darstellt.

b) Die „Fortpflanzungsfunktionen“ nichtlinearer Wellengleichungen

Im folgenden soll die Gleichung

$$\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi + l^2 \psi (\bar{\psi} \psi) = 0 \quad (223)$$

ausführlich untersucht werden, da nur für diese Gleichung bisher das Verhalten der klassischen Lösungen genauer studiert worden ist (Z. Naturforsch. **9a**, 292 [1954]). Die Bezeichnungen schließen sich an die eben zitierte Arbeit an.

$$\begin{aligned} c u &= -(y^2 + \frac{3}{2} y \sin 2 y) \sin y - (y + \frac{3}{4} \sin 2 y) (\cos y - 2 y \sin y), \\ c v &= (y^2 + \frac{3}{2} y \sin 2 y) \cos y - (y + \frac{3}{4} \sin 2 y) (\sin y + 2 y \cos y) \end{aligned} \quad (230)$$

angegeben worden, die sich auch – unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $1/c$ – in der Form

$$f = \frac{d}{\sqrt{s}} \cos \left(\frac{d^2}{2s} \ln \frac{s}{s_0} \right), \quad g = \frac{d}{\sqrt{s}} \sin \left(\frac{d^2}{2s} \ln \frac{s}{s_0} \right) \quad (231)$$

schreiben ließ, wobei die Konstante d an die Stelle von c tritt.

Für das Folgende brauchen wir eine Darstellung, die nicht nur in der Umgebung von $s \approx s_0$, sondern im ganzen Gebiet $0 \leq s \leq s_0$ brauchbar ist, sofern nur

$$d^2/s_0 \gg 1. \quad (232)$$

Aus der bisherigen Darstellung ist nicht ersichtlich, ob für Werte von $(s_0 - s)/s_0$ von der Größenordnung 1 das Argument der Winkelfunktionen $(d^2/2s) \ln(s/s_0)$ oder $(d^2/2s_0) \ln(s/s_0)$ oder etwa $(d^2/s_0) - (d^2/s)$ usw. lauten soll, da für $(s_0 - s)/s_0 \ll 1$ diese drei Ausdrücke in der Näherung von (231) miteinander übereinstimmen.

Um diese Frage zu entscheiden, kann man zunächst versuchsweise die Gl. (233) ansetzen:

$$f_1 \approx \frac{3}{8} \frac{\sqrt{s}}{d} [(1 + \alpha) \sin \eta + \sin 3 \eta]; \quad g_1 \approx \frac{3}{8} \frac{\sqrt{s}}{d} [(-1 + \alpha) \cos \eta + \cos 3 \eta]; \quad (236)$$

Es sollen Lösungen erörtert werden, die sich in der Form

$$\psi(x) = [x_\nu \gamma_\nu \chi(s) + \varphi(s)] a \quad (224)$$

mit

$$s = -x_\nu^2$$

schreiben lassen, wobei a ein konstanter Spinor ist; $\chi(s)$ und $\varphi(s)$ sind skalare Funktionen von s .

Die Wellengleichung (223) geht über in die beiden Gleichungen (vgl. l. c. ²):

$$\begin{aligned} 4 \chi + 2 s \chi' + A \varphi (s \chi^2 + \varphi^2) &= 0, \\ -2 \varphi' + A \chi (s \chi^2 + \varphi^2) &= 0, \end{aligned} \quad (225)$$

wobei

$$A = l^2 (a^* \beta a) = l^2 \bar{a} a. \quad (226)$$

In der früheren Arbeit wurde gezeigt, daß alle Lösungen (mit Ausnahme einer besonderen, hier nicht weiter interessierenden Lösung) für kleine Werte von s ein oszillatorisches Verhalten zeigen. Dieses Verhalten soll zunächst noch etwas genauer untersucht werden.

In der Umgebung eines Punktes $s = s_0$ war, unter Benützung der Abkürzungen

$$z = \ln s, \quad y = (c^2/2) (z - z_0), \quad c = \text{const} \quad (227)$$

die Näherungsdarstellung für $|c| \gg 1$:

$$\chi(s) = s^{-1/4} \frac{f(s)}{\sqrt{|A|}}, \quad \varphi(s) = s^{-1/4} \frac{V|A|}{A} g(s), \quad (228)$$

$$f = c \cos y + u, \quad g = c \sin y + v, \quad (229)$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{d}{\sqrt{s}} \cos \left(\frac{d^2}{2s} + \delta \right) + f_1(s), \\ g(s) &= -\frac{d}{\sqrt{s}} \sin \left(\frac{d^2}{2s} + \delta \right) + g_1(s), \end{aligned} \quad (233)$$

wobei δ eine konstante Phase ist und $f_1(s)$ und $g_1(s)$ klein von der Ordnung \sqrt{s}/d sein sollen.

Geht man mit diesem Ansatz in die Gl. (225) ein und setzt

$$\eta = (d^2/2s) + \delta, \quad (234)$$

so folgen für $f_1(\eta)$ und $g_1(\eta)$ unter Vernachlässigung höherer Glieder die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\frac{df_1}{d\eta} - f_1 \sin 2\eta + g_1 (2 - \cos 2\eta) &= -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{s}}{d} \cos \eta, \\ -\frac{dg_1}{d\eta} + g_1 \sin 2\eta - f_1 (2 + \cos 2\eta) &= -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{s}}{d} \sin \eta. \end{aligned} \quad (235)$$

Da wegen $d^2/2s \gg 1$ die Größe η als Funktion von s sehr viel rascher veränderlich ist als \sqrt{s}/d , kann man \sqrt{s}/d als näherungsweise konstant annehmen und erhält als Lösung von (235):

α ist eine Integrationskonstante.

Die Größen $f_1(s)$ und $g_1(s)$ bleiben also tatsächlich im ganzen Gebiet $0 \leq s \leq s_0$ klein von der Ordnung $\sqrt{s/d}$; der Ansatz (233) stellt daher eine im ganzen Gebiet (und nicht nur in der Umgebung $s \approx s_0$) brauchbare Näherung dar.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir über zu der Frage nach dem Verhalten der Fortpflanzungsfunktionen auf dem Lichtkegel. Um den Unterschied zwischen einer linearen und einer nichtlinearen Wellengleichung möglichst deutlich hervortreten zu lassen, führen wir die Rechnungen gleichzeitig für die DIRAC-Gleichung

$$\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi + \kappa \psi = 0 \tag{237}$$

Für positive s gilt dagegen

$$\varphi(s) = \frac{J_1(\kappa \sqrt{s})}{\kappa \sqrt{s}}, \quad \chi(s) = \frac{2}{\kappa} \frac{d\varphi}{ds}.$$

(ein willkürlicher konstanter Faktor ist weggelassen; J_1 bedeutet die BESSEL-Funktion)

Um die Konsequenzen der Differentialgleichungen für die Stelle $s=0$ zu erkennen, integriert man diese Gleichungen von einem sehr kleinen negativen Wert von s über die Stelle $s=0$ hinweg zu einem sehr kleinen positiven Wert s_0 . Man erhält so die Randbedingungen:

$$2 s_0 \chi(s_0) = - \int_{-s_0}^{s_0} (2 \chi + \kappa \varphi) ds,$$

$$\varphi(s_0) = \frac{\kappa}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \chi ds.$$

Durch Einsetzen aus (239) ergibt sich, unter Vernachlässigung von Gliedern, die für hinreichend kleine Werte von s_0 sehr klein gegen die Hauptglieder werden:

$$\int_{-s_0}^{s_0} (2 \chi + \kappa \varphi) ds = 0, \quad \int_{-s_0}^{s_0} \chi ds = \frac{1}{\kappa},$$

also $\chi(s) = \frac{1}{\kappa} \delta(s) + \dots$; $\varphi(s) = -\frac{2}{\kappa^2} \delta(s) + \dots$

und daher schließlich

$$\varphi(s) = -\frac{2}{\kappa^2} \delta(s) + \left(\frac{J_1(\kappa \sqrt{s})}{\kappa \sqrt{s}} \right), \quad \text{für } s > 0,$$

$$\chi(s) = \frac{2}{\kappa} \frac{d\varphi}{ds}.$$

und die Wellengleichung (223) durch. Im folgenden bezieht sich die linke Spalte stets auf die DIRAC-Gleichung (237), die rechte auf die nichtlineare Wellengleichung (223).

Die Ausgangsgleichungen bei Benützung des Ansatzes (224) lauten also:

$$\left. \begin{aligned} 4 \chi + 2 s \chi' + \kappa \varphi = 0, \\ -2 s \varphi' + \kappa \chi = 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4 \chi + 2 s \chi' + A \varphi (s \chi^2 + \varphi^2) = 0, \\ -2 s \varphi' + A \chi (s \chi^2 + \varphi^2) = 0. \end{aligned} \tag{238}$$

Für die Fortpflanzungsfunktionen soll

$$\chi(s) = \varphi(s) = 0 \quad \text{sein für } s < 0.$$

nach (228) und (233):

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= -\frac{d\sqrt{|A|}}{A} s^{-3/4} \sin\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right) + \dots, \\ \chi(s) &= \frac{d}{\sqrt{|A|}} s^{-5/4} \cos\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right) + \dots, \end{aligned} \tag{239}$$

für $\frac{d^2}{2s} \gg 1$.

$$2 s_0 \chi(s_0) = - \int_{-s_0}^{s_0} [2 \chi + A \varphi (s \chi^2 + \varphi^2)] ds,$$

$$\varphi(s_0) = \frac{A}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \chi (s \chi^2 + \varphi^2) ds. \tag{240}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{\sqrt{|A|}} s_0^{-3/4} \cos\left(\frac{d^2}{s_0} + \delta\right) &= - \int_{-s_0}^{s_0} [2 \chi + A \varphi (s \chi^2 + \varphi^2)] ds, \\ -\frac{d\sqrt{|A|}}{A} s_0^{-3/4} \sin\left(\frac{d^2}{s_0} + \delta\right) &= \frac{A}{2} \int_{-s_0}^{s_0} \chi (s \chi^2 + \varphi^2) ds. \end{aligned}$$

Setzt man die Hauptglieder aus (239) in die rechten Seiten ein, so wird

$$\begin{aligned} &\int_{-s_0}^{s_0} [2 \chi + A \varphi (s \chi^2 + \varphi^2)] ds \\ &= \frac{d}{\sqrt{|A|}} \int_{-s_0}^{s_0} \left[2 s^{-3/4} \cos\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right) - d^2 s^{-9/4} \sin\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right) \right] ds \\ &\approx -\frac{2d}{\sqrt{|A|}} s_0^{-1/4} \cos\left(\frac{d^2}{2s_0} + \delta\right) + \text{Glieder,} \end{aligned}$$

die mit $s_0 \rightarrow 0$ verschwinden, sofern das Integral über die oszillierenden Funktionen als ABELScher Grenzwert

Die Randbedingungen (240) erzwingen also das Auftreten der δ - bzw. δ' -Funktion, und zwar gerade mit dem aus der üblichen Theorie bekannten Zahlenfaktor.

Während demnach in der linearen Theorie die δ - bzw. δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel eine unmittelbare Folge der Annahme sind, daß die Differentialgleichungen im Sinne der Randbedingungen (240) auch hier noch erfüllt sein sollen, führt die gleiche Schlußweise bei der nichtlinearen Gleichung zu dem Ergebnis, daß solche δ -Funktionen nicht vorhanden sein dürfen.

Die Benützung der ABELSchen Grenzwerte in den Integralen der nichtlinearen Theorie bedarf allerdings noch einer genaueren Analyse. Der ABELSche Grenzwert ist hier in der Weise definiert, daß dem zunächst nicht konvergenten Integral $\int_0^{s_0} p(s) ds$ [wobei $p(s)$ eine bei $s=0$ stark oszillierende Funktion bedeutet] ein bestimmter Sinn gegeben wird, indem man es etwa durch den limes $\alpha \rightarrow 0$ des konvergenten Integrals

$$\int_0^{s_0} e^{-\alpha/s} p(s) ds$$

ersetzt. Man kann hier auch andere, verwandte Grenzwerte benutzen; z. B. würde der Grenzwert

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{s_0} e^{-\alpha/s^2} p(s) ds \quad \text{oder} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{s_0} \frac{s}{\alpha+s} p(s) ds$$

zum gleichen Ergebnis führen.

Man kann nun, um den Unterschied der linearen und der nichtlinearen Theorie klar herauszuarbeiten, die Differentialgleichung (die im folgenden in der Form $D(s)=0$ abgekürzt werden möge) in drei verschiedenen Formen anschreiben; $q(s)$ sei dabei irgendeine zwischen s_1 und s_2 glatte Funktion:

a) $D(s)=0$; b) $\int_{s_1}^{s_2} q(s) D(s) ds=0$;

c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{s_1}^{s_2} q(s) \frac{s}{\alpha+s} D(s) ds=0$

(s_1 und s_2 sind beliebige Werte). In bezug auf diese drei Formen zeigen die diskutierten Lösungen folgendes Verhalten: Die Gültigkeit der Form a) kann an der Stelle $s=0$ weder in der linearen noch in der nichtlinearen Theorie entschieden werden, da die Differentialquotienten an der kritischen Stelle $s=0$ nicht existieren.

aufgefaßt wird. Die Bedeutung dieses Grenzwertes wird weiter unten noch besprochen werden.

Unter den gleichen Voraussetzungen wird

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \int_0^{s_0} \chi(s \chi^2 + \varphi^2) ds &= \frac{d \sqrt{|A|}}{A} \int_0^{s_0} \frac{d^2}{2} s^{-1/4} \cos\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right) ds \\ &\approx - \frac{d \sqrt{|A|}}{A} s_0^{-3/4} \sin\left(\frac{d^2}{2s} + \delta\right). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (240) sind also bereits ohne zusätzliche δ -Funktionen erfüllt; die Annahme solcher δ -Funktionen würde die Gültigkeit der Randbedingungen zerstören.

Die Form b) gilt in der linearen Theorie, wenn man die übliche Lösung mit den δ - und δ' -Funktionen einsetzt; ihre Gültigkeit in der nichtlinearen Theorie ist dagegen unentscheidbar, weil die Integrale rechts über den Punkt $s=0$ hinweg nicht existieren.

In beiden Theorien gilt die Form c). In der linearen Theorie würde c) allerdings nicht ohne weiteres ausreichen, die δ -funktionsartigen Anteile in der Lösung zu ermitteln, da diese durch den Faktor $s/(\alpha+s)$ unterdrückt werden. In der nichtlinearen Theorie jedoch genügt die Form c), um das Vorhandensein von δ -Funktionen auszuschließen. Denn in der nichtlinearen Theorie würde, wenn φ oder χ δ -Funktionen enthalten, in (240) die dritte Potenz einer δ -Funktion auftreten; diese kann aber durch den Faktor $s/(\alpha+s)$ nicht unterdrückt werden. Definiert man die δ -Funktion z. B. durch

$$\delta(s) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } 0 < s \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so wird

$$\int \frac{s}{s+\alpha} \delta^3(s) ds = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \frac{1}{2 \varepsilon \alpha} \rightarrow \infty.$$

Definiert man statt dessen

$$\delta(s) = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \begin{cases} \frac{1}{2 \varepsilon} & \text{für } -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so wird

$$\int \frac{s}{s+\alpha} \delta^3(s) ds = \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{ds}{\alpha} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) \frac{s}{8 \varepsilon^3} = - \frac{1}{24 \alpha^2}.$$

Auf jeden Fall würde ein Beitrag übrig bleiben, der von Null verschieden und im limes $\alpha \rightarrow 0$ sogar unendlich wäre. Ein solcher Beitrag darf aber nach den vorhergehenden Rechnungen nicht auftreten; die δ -Funktionen müssen daher ausgeschlossen werden.

Es gibt also für jede der beiden Theorien integrierte Formen der Wellengleichung, mit deren Hilfe man der Forderung, die Wellengleichung solle im ganzen Raum gelten, einen eindeutigen Sinn geben kann. Diese integrierten Formen b) bzw. c) sind in den beiden Theorien

zwar nahe verwandt, aber nicht identisch. Die entsprechenden Lösungen enthalten bei der linearen Theorie δ - und δ' -Funktionen auf dem Lichtkegel, in der nichtlinearen Theorie fehlen solche Beiträge.

Es müssen nun noch die Verhältnisse in der Nähe des Punktes $x=y=z=t=0$ untersucht werden. Bekanntlich genügt die SCHWINGERSCHE Funktion Δ , die bei Vorzeichenänderung der Zeit ihr Vorzeichen wechselt, der homogenen Wellengleichung bzw. der entsprechenden Randbedingung, während die in der Zeit gerade Funktion $\bar{\Delta}$ aus einer δ -funktionsartigen Quelle an der

$$\int \varphi(s) dx dy dz = 4\pi \int_0^{t+\varepsilon} r^2 dr \varphi(t^2 - r^2) \underset{(\varepsilon \rightarrow 0)}{=} 2\pi \int_{-\varepsilon'}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \varphi(s) \underset{(\varepsilon' \rightarrow 0)}{=} \quad (241)$$

Gebrauch machen. So entsteht aus (231) bzw. (223):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right) + \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \kappa \varphi &= 0, & \frac{d}{dt} \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right) + A \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \varphi (s \chi^2 + \varphi^2) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \varphi - \kappa t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi &= 0. & \frac{d}{dt} \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \varphi - A t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi (s \chi^2 + \varphi^2) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Integration der ersten der beiden Gleichungen über die Zeit von einem kleinen negativen zu einem kleinen positiven Wert von t folgt:

$$\begin{aligned} \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right)_+ - \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right)_- & \\ = \int_{-\varepsilon}^+ dt \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \kappa \varphi \sqrt{t^2 - s} &= 0. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right)_+ - \left(t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi \right)_- & \\ = A \int_{-\varepsilon}^+ dt \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \varphi (s \chi^2 + \varphi^2) &= 0. \end{aligned} \quad (243)$$

Da $\chi(s)$ den Anteil $-(4/\kappa^3) \delta'(s)$ enthält und

$$t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \delta'(s) = \frac{t}{2|t|}$$

ist, ergibt sich aus (243), daß das Vorzeichen der δ' -Funktion (und damit auch der übrigen Ausdrücke) in Vergangenheit und Zukunft mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen werden muß, wenn die Wellengleichung im Sinne der Randbedingung (243) an der Stelle $x=y=\dots=0$ erfüllt sein soll.

Während in der linearen Theorie nur die Funktionen Δ bzw. S , nicht aber $\bar{\Delta}$ und \bar{S} der homogenen Wellengleichung bzw. der sie ersetzenden Randbedingung genügen, befriedigen also in der nichtlinearen Theorie beide Funktionen (die Δ und $\bar{\Delta}$ entsprechen) die Wellengleichung bzw. die aus ihr folgende Randbedingung ohne ein zusätzliches inhomogenes Quellglied.

In der linearen Theorie ist die Fortpflanzungsfunktion (der *propagator*) mit der Vertauschungsfunktion (dem *commutator*) praktisch identisch. In der nichtlinearen Theorie ist der Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen nicht ganz so eng; aber — wie in

den früheren Arbeiten gezeigt wurde — noch eng genug, um die Annahme plausibel zu machen, daß die beiden Funktionen sich qualitativ ähnlich verhalten. Wenn man diese Annahme macht, so enthalten die hier durchgeführten Rechnungen die Begründung dafür, daß die Vertauschungsfunktionen in der nichtlinearen Theorie keine δ -Funktionen auf dem Lichtkegel enthalten dürfen und daß in den τ -Gleichungssystemen auf der rechten Seite keine Quellterme vom δ -Funktionstypus auftreten können. Dieses Verhalten kann nur im Rahmen einer indefiniten Metrik im HILBERT-Raum vorkommen.

Da $t \int_{-\varepsilon}^{t^2} ds \sqrt{t^2 - s} \chi(s) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$, wie man durch Einsetzen von (239) unmittelbar verifizieren kann, ist Gl. (243) (im Sinne des ABELSchen Grenzwerts) auf jeden Fall erfüllt, unabhängig davon, mit welchem Vorzeichen χ und φ in Vergangenheit und Zukunft genommen werden.