Zur Hardy-Littlewoodschen Behandlung des Goldbachschen Problems.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Georg August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

BRUNO LUCKE

aus Magdeburg.

Göttingen 1926.

Lebenslauf.

Ich wurde am 25. August 1901 in Magdeburg geboren als Sohn des Arztes Dr. med. Robert Lucke und gehörte seitdem stets dem preußischen Staate an. In meiner Heimatstadt besuchte ich die Vorschule und dann das Realgymnasium, das mich Ostern 1919 mit dem Zeugnis der Reife entließ. Im Winter 1919/20 bezog ich die Universität Halle-Wittenberg und widmete mich dort dem Studium der Mathematik und Physik unter Anleitung der Herren Geh. Rat Wangerin, Geh. Rat Gutzmer und Geh. Rat Mie. Die beiden folgenden Halbjahre hörte ich in Jena bei den Herren Geh. Rat Haußner, Prof. Koebe, Prof. Auerbach und Prof. Winkelmann; die Seminarübungen des erstgenannten Herrn gewährten mir reiche Anregung und Freude. Fünf Semester studierte ich dann in Göttingen, wo ich hauptsächlich bei den Herren Geh. Rat Hilbert, Prof. Courant, Prof. Franck und besonders bei meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Landau hörte, unter dessen Leitung ich in die Feinheiten der modernen Analysis eindringen lernte, und dessen Vorlesung auch das Thema für die vorliegende Arbeit lieferte. Für die wiederholten Ratschläge, die er mir bei ihrer Abfassung erteilte, bin ich Herrn Prof. Landau noch zu besonderem Dank verpflichtet. Wirtschaftliche Umstände zwangen mich, in der Zeit von Ende 1923 bis jetzt zu Hause einer Nebenbeschäftigung nachzugehen.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftl. Fakultät.

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1926.
Referent: Prof. Dr. E. Landau.

In der Arbeit vom Jahre 1922 *Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes* [Acta Mathematica, Bd. XLIV (1923), S. 1—70] haben die Herren Hardy und Littlewood *unter der hypothetischen Voraussetzung, daß alle Dirichletschen L-Funktionen in einer Halbebene* $\sigma > \theta$, *wo* $\theta < \frac{3}{4}$ *ist, keine Nullstelle haben*, bewiesen, daß *jede hinreichend große ungerade Zahl sich als Summe dreier ungerader Primzahlen darstellen läßt.* Wie groß eine ungerade Zahl sein muß, um von dem Beweis erfaßt zu werden — das soll hier untersucht werden; und es ist von einer gewissen prinzipiellen Wichtigkeit, für einen Beweis, der asymptotisch ein so bedeutsames Resultat liefert, auch eine sichere zahlenmäßige Grenze dafür anzugeben, von welcher Stelle an er gilt; wenn diese Grenze so scharf, wie es mit den gegenwärtigen Mitteln möglich ist, bestimmt wird. Freilich so klein wird sie nicht ausfallen, daß sie die Behauptung für die vom Beweis ausgeschlossenen Werte nachzurechnen gestattet! Denn es wird im wesentlichen eine Potenz vom Exponenten $\frac{3}{4} - \theta$ verglichen mit dem Quadrat des log; und selbst im Falle $\theta = \frac{1}{2}$, der offenbar das überwiegende theoretische Interesse bietet, und auf den wir uns bei der Zahlenrechnung von vornherein beschränken, ist z. B. die Beziehung $n^{\frac{3}{4}-\theta} > \log^2 n$ zwar für $n \geqq 2{,}15 \,.\, 10^{11}$ erfüllt, aber für $n \geqq 2{,}14 \,.\, 10^{11}$ noch nicht.

Als Grundlage nehmen wir die *'Partitio numerorum'*; III; nur in einem Punkt, der allerdings für die Abschätzung gerade der wesentlichste ist, benutzen wir die Vereinfachung, welche Herr Prof. Landau in der Arbeit *Zur additiven Primzahltheorie* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XLVI (1922), Seite 349—356] gegeben hat. Dadurch werden einerseits gewisse Konstanten, die keine günstige Abschätzung zulassen, vermieden; und andererseits gibt das vereinfachte Verfahren in der Größenordnung der Vergleichsglieder auch kein schlechteres Resultat als das der Herren Hardy und Littlewood. Die Untersuchung, welche dies im einzelnen dartut, soll hier ebenso wenig ausgeführt werden wie die Minimalbetrachtungen, die zum Auffinden der günstigsten Zahlenwerte der im Verlaufe auftretenden Parameter λ, r, a u. a. geführt haben. Im folgenden werden vielmehr diese Zahlenwerte an den betreffenden Stellen sogleich angegeben, und mit ihnen wird alsdann das zuvor ausgesprochene Resultat bewiesen. Es ist immerhin bemerkenswert, daß dieses in einer scharfen numerischen Konstanten bestehen wird — trotz der geringen Kenntnis, die man über die Ordinaten der Wurzeln der ζ-Funktion hat.

Es sei

$$f(x) = \sum_{p > 2} \log p \; x^p,$$

wo p durch alle ungeraden Primzahlen läuft;

$$f^3(x) = \sum_{n=9}^{\infty} \nu(n)\, x^n;$$

nach dem Cauchyschen Satz ist

$$\nu(n) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f^3(x)}{x^{n+1}}\, dx,$$

wo über den Kreis $|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}$ in positivem Sinne integriert werden soll. Es sei $B = \sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n}$. Der Integrationskreis werde mit Hilfe der Medianten der zu $[B]$ gehörigen Fareyreihe, deren 2π fache als Amplituden der Teilpunkte gewählt werden, in Teilbogen zerlegt, deren Anzahl $\sum_{k=1}^{B} \varphi(k)$ ist, und deren jeder genau einen Punkt $e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}\varrho$ im Innern enthält, wo

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i m}{k}}, \quad (m, k) = 1, \quad 0 \leqq m < k \leqq B$$

ist. Dieser Teilbogen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\varrho$ hat die Gestalt:

$$x = \varrho X, \quad X = e^{-y}, \quad y = \frac{\sqrt{\pi}}{n} - i\vartheta, \quad -\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,$$

wo nach bekannten Eigenschaften der Fareyreihe

$$\frac{\pi}{kB} \leqq \vartheta_1 < \frac{2\pi}{kB}, \quad \frac{\pi}{kB} \leqq \vartheta_2 < \frac{2\pi}{kB}.$$

Für $\nu(n)$ erhalten wir so die Darstellung

$$\nu(n) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} \frac{f^3(x)}{x^{n+1}}\, dx.$$

Es sei weiter

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{h^3} \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n}, \quad \text{wo } h = \varphi(k);$$

$$\psi = \psi_\varrho = \frac{\mu(k)}{hy};$$

$$\Phi = \Phi_\varrho = f(x) - \psi.$$

Alsdann ergibt sich

$$|f^3(x) - \psi^3| = |\Phi|\,|f^2(x) + f(x)\psi + \psi^2| \leqq |\Phi|\,\tfrac{3}{2}(|f(x)|^2 + |\psi|^2),$$

$$\left|\int_{\mathfrak{B}} \frac{f^3(x) - \psi^3}{x^{n+1}}\, dx\right| \leqq \int_{\mathfrak{B}} \frac{|f^3(x) - \psi^3|}{|x|^{n+1}}\,|dx| = \int_{\mathfrak{B}} \frac{|f^3(x) - \psi^3|}{|x|^{n+1}}\,|x|\, d\vartheta$$
$$= e^{\sqrt{\pi}} \int_{\mathfrak{B}} |f^3(x) - \psi^3|\, d\vartheta,$$

$$\left|\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} \frac{f^3(x)}{x^{n+1}}\, dx - \sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}}\, dx\right| \leqq e^{\sqrt{\pi}} \sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |f^3(x) - \psi^3|\, d\vartheta$$
$$\leqq \tfrac{3}{2} e^{\sqrt{\pi}} \left\{\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |\Phi|\,|f(x)|^2\, d\vartheta + \sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |\Phi|\,|\psi|^2\, d\vartheta\right\};$$

$$\left|\nu(n) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}}\, dx\right|$$
$$\leqq \frac{3 e^{\sqrt{\pi}}}{4\pi}\left\{\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |f(x)|^2\, d\vartheta + \sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |\psi|^2\, d\vartheta\right\} \underset{|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}}{\text{Max.}} |\Phi|,$$

wo zur Abkürzung $\underset{|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}}{\text{Max.}} |\Phi|$ für $\underset{\varrho}{\text{Max.}}\ \underset{x \text{ auf } \mathfrak{B}_\varrho}{\text{Max.}} |\Phi_\varrho(x)|$ geschrieben ist.

Hierin ist

$$\sum_{\varrho}\int_{\mathfrak{B}} |f(x)|^2\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, d\varphi, \quad \text{wenn } x = |x|\, e^{i\varphi},$$

$$= 2\pi \sum_{p > 2} \log^2 p\, |x|^{2p} = 2\pi \sum_{p > 2} \log^2 p\, e^{-\frac{2\sqrt{\pi}\, p}{n}};$$

$$\int_{\mathfrak{B}} |\psi|^2 \, d\vartheta = 0, \quad \text{wenn } k \text{ nicht quadratfrei;}$$

sonst

$$\int_{\mathfrak{B}} |\psi|^2 \, d\vartheta \leqq \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{2\pi}{kB}}^{\frac{2\pi}{kB}} \frac{d\vartheta}{\frac{\pi}{n^2} + \vartheta^2} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{2\sqrt{\pi}\, n}{kB}}^{\frac{2\sqrt{\pi}\, n}{kB}} \frac{dz}{1+z^2} < \sqrt{\pi}\, \frac{n}{h^2};$$

daher ist

$$(1) \quad \left| \nu(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}} \, dx \right|$$

$$\leqq \frac{3\, e^{\sqrt{\pi}}}{4} \underset{|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}}{\text{Max.}} |\Phi| \left\{ 2 \sum_{p > 2} \log^2 p \; e^{-\frac{2\sqrt{\pi p}}{n}} + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{B}{}' \frac{1}{\varphi(k)} \right\},$$

wo hier wie später die gestrichenen Summen stets über quadratfreie Summationsbuchstaben laufen. Weiter ist

$$\int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}} \, dx = \int_{\vartheta = -\vartheta_1}^{\vartheta = \vartheta_2} \frac{\psi^3}{x^{n+1}} \, dx$$

$$= -\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta_1 i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \vartheta_2 i} \frac{\mu(k)}{h^3 y^3} \frac{dy}{x^n} = \frac{\mu(k)}{h^3} \varrho^{-n} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \vartheta_2 i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta_1 i} \frac{e^{ny}}{y^3} \, dy;$$

und, weil bekanntlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \infty i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \infty i} \frac{e^{ny}}{y^3} \, dy = \frac{n^2}{2},$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \vartheta_2 i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta_1 i} \frac{e^{ny}}{y^3} \, dy - \frac{n^2}{2} \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \infty i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} - \vartheta_2 i} \frac{e^{ny}}{y^3} \, dy \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta_1 i}^{\frac{\sqrt{\pi}}{n} + \infty i} \frac{e^{ny}}{y^3} \, dy \right|$$

$$\leqq \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi} \int_{\vartheta_2}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\left| \frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta i \right|^3} + \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\left| \frac{\sqrt{\pi}}{n} + \vartheta i \right|^3}$$

$$\leqq \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{kB}}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\vartheta^3} = \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3} k^2 B^2,$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}} \, dx - \frac{n^2}{2} \frac{\mu(k)}{h^3} \varrho^{-n} \right| \leqq \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3} k^2 B^2 \frac{\mu^2(k)}{h^3}.$$

Folglich ist

$$(2) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho} \int_{\mathfrak{B}} \frac{\psi^3}{x^{n+1}} \, dx - \frac{n^2}{2} \sum_{k=1}^{B} \frac{\mu(k)}{h^3} \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n} \right| \leqq \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3} B^2 \sum_{k=1}^{B}{}' \left(\frac{k}{\varphi(k)} \right)^2.$$

Schließlich kommt

$$(3) \quad \left| \frac{n^2}{2} \sum_{k=1}^{B} \frac{\mu(k)}{h^3} \sum_{\varrho(k)} \varrho^{-n} - \frac{n^2}{2} S(n) \right| \leqq \frac{n^2}{2} \sum_{k > B}{}' \frac{1}{\varphi(k)^2}.$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$(4) \quad \left| \nu(n) - \frac{n^2}{2} S(n) \right| \leqq \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3} B^2 \sum_{k=1}^{B}{}' \left(\frac{k}{\varphi(k)} \right)^2 + \frac{n^2}{2} \sum_{k > B}{}' \frac{1}{\varphi(k)^2}$$

$$+ \frac{3\, e^{\sqrt{\pi}}}{4} \underset{|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}}{\text{Max.}} |\Phi| \left\{ 2 \sum_{p > 2} \log^2 p \; e^{-\frac{2\sqrt{\pi p}}{n}} + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{B}{}' \frac{1}{\varphi(k)} \right\}.$$

Der Natur der Sache nach ist $\nu(n) \geqq 0$; $S(n)$ ist reell. Daher ergibt sich

$$\nu(n) \geqq \frac{n^2}{2} S(n) - \text{rechte Seite der Ungleichung (4).}$$

Wir werden beweisen, daß — unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung — für ungerade $n > 3{,}6 \cdot 10^{32}$ gilt:

$$(5) \quad \frac{n^2}{2} S(n) - \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{2\pi^3} B^2 \sum_{k=1}^{B}{}' \left(\frac{k}{\varphi(k)} \right)^2 - \frac{n^2}{2} \sum_{k > B}{}' \frac{1}{\varphi(k)^2}$$

$$- \frac{3\, e^{\sqrt{\pi}}}{4} \underset{|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}}{\text{Max.}} |\Phi| \left\{ 2 \sum_{p > 2} \log^2 p \; e^{-\frac{2\sqrt{\pi p}}{n}} + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{B}{}' \frac{1}{\varphi(k)} \right\} > 0.$$

Damit wird das **Ziel dieser Untersuchung** erreicht sein:

Unter der Voraussetzung, daß die auf alle Dirichletschen L-Funktionen verallgemeinerte Riemannsche Vermutung wahr ist, sind alle ungeraden Zahlen $> 3{,}6 \cdot 10^{32}$ als Summe dreier ungerader Primzahlen darstellbar.

Hilfssatz 1. *Für jedes (nicht notwendig ganze) $x > 10^{16}$ ist*

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{[x]}{}' \frac{1}{\varphi(n)} < \log x + C + \frac{12}{\pi^2} + 10^{-5}.$$

Beweis: Für $x \geqq 1$ ist [1])

$$\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{n} \prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{n} \sum_{l|n} \prod_{p|l} \frac{1}{p-1}\ ^{2})$$

$$= \sum_{l=1}^{x}{}' \frac{1}{l} \sum_{\substack{m=1\\(m,l)=1}}^{\frac{x}{l}}{}' \frac{1}{m} \prod_{p|l} \frac{1}{p-1} = \sum_{l=1}^{x}{}' \prod_{p|l} \frac{1}{p(p-1)} \sum_{\substack{m=1\\(m,l)=1}}^{\frac{x}{l}}{}' \frac{1}{m};$$

nun ist

$$\prod_{p|l}\left(1+\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{m \leqq z\\(m,l)=1}}{}' \frac{1}{m} \leqq \sum_{m \leqq lz}{}' \frac{1}{m},$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} \leqq \sum_{l=1}^{x}{}' \prod_{p|l} \frac{1}{p^2-1} \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m}\ ^{3}) < \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right) \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m}$$

$$= \prod_{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m} = \frac{\pi^2}{6} \sum_{m=1}^{x}{}' \frac{1}{m}.$$

---

1) Vgl. Landau: *Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz.* [Nachr. d. Königl. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse, Jahrg. 1900, S. 177—186].

2) Ein Produkt $\prod_{p|l}$ bedeutet 1 für $l = 1$.

3) Es lohnt sich vielleicht, die asymptotische Formel für $\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(n)}$ herzustellen, wenn auch nachher nur die Abschätzung des Textes gebraucht wird. Es ist (vgl. d. obig. Beweis)

$$\sum_{q \leqq x}{}' \frac{1}{q} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{m \leqq \frac{x}{n^2}} \frac{1}{m} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2}\left(\log \frac{x}{n^2} + C\right) + O \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n^2} \frac{n^2}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} (\log x + C - 2 \log n) + O \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{2 \log n - \log x}{n^2} + O \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)}\left(\log x + C - 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right) + O \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Die Verschärfung des O-Gliedes geht am schnellsten mittels der Formel in Landau: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und

Aus der für $s > 1$ gültigen Reihenidentität

$$\sum_{q=1}^{\infty}{}' \frac{1}{q^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

folgt

$$\sum_{q=1}^{x}{}' \frac{1}{q} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} \sum_{m=1}^{\frac{x}{n^2}} \frac{1}{m},$$

Berlin 1909], § 162:

$$Q(x) = \sum_{q \leqq x}{}' 1 = \frac{1}{\zeta(2)} x + o(\sqrt{x}) \text{ und schärfer:}$$

$$\sum_{q \leqq x}{}' \frac{1}{q} = \sum_{n \leqq x} \frac{Q(n) - Q(n-1)}{n} = \sum_{n \leqq x} \frac{Q(n)}{n(n+1)} + \frac{Q(x)}{[x]+1}$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n+1} + \sum_{n \leqq x} o \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{\zeta(2)} + o \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)} \log x + \text{const.} + o \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ und schärfer.}$$

Für $s > 1$ ist nun

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{n}{\varphi(n) \cdot n^s} = \prod_{p}\left(1+\frac{p}{(p-1)p^s}\right) = \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^s}\right) \prod_{p}\left(1+\frac{1}{(p-1)(p^s+1)}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^s},$$

wo $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^s}$ eine Dirichletsche Reihe ist, die für $s > 0$ absolut konvergiert. Daher ist

$$\sum_{n \leqq x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{m \leqq x} \frac{D_m}{m} \sum_{n \leqq \frac{x}{m}}{}' \frac{1}{n} = \frac{1}{\zeta(2)}\left(\log x + C - 2 \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right) \sum_{m \leqq x} \frac{D_m}{m}$$

$$- \frac{1}{\zeta(2)} \sum_{m \leqq x} \frac{D_m \log m}{m} + o \sum_{m \leqq \sqrt{x}} \frac{|D_m|}{m} \sqrt{\frac{m}{x}} + O \sum_{\sqrt{x} < m \leqq x} \frac{|D_m|}{m} \sqrt{\frac{m}{x}};$$

nun ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m} = \prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right) = \zeta(2),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m \log m}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n^s} \sum_{p} \frac{\frac{\log p \; p^s}{(p-1)(p^s+1)^2}}{1+\frac{1}{(p-1)(p^s+1)}},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m \log m}{m} = \zeta(2) \sum_{p} \frac{\log p}{p(p+1)};$$

und hieraus wegen

$$\sum_{m=1}^{z} \frac{1}{m} = \log z + C + \frac{2\vartheta}{z}; \quad -1 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \text{für } z \geqq 1,$$

$$\sum_{q=1}^{x}{}' \frac{1}{q} \leqq \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} (\log x + C - 2\log n) + \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{2}{x}$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} (\log x + C - 2\log n) + C \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{1}{n^2}$$
$$+ \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{2\log n - \log x}{n^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$< \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log x + C - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) \right) + C\left(\frac{1}{x} + \int_{[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{dn}{n^2} \right)$$
$$+ \frac{\log([\sqrt{x}]+1)^2}{([\sqrt{x}]+1)^2} + 2\int_{[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}\, dn + \frac{2}{\sqrt{x}};$$

für $x > e^2$ ist dies

$$< \frac{6}{\pi^2}\left(\log x + C - \frac{12}{\pi^2}\zeta'(2) \right) + C\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \frac{\log x}{x} + 2\frac{1 + \log\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}};$$

und hierin ist

$$-\zeta'(2) = \frac{\log 2}{4} + \frac{\log 3}{9} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < \frac{\log 2}{4} + \frac{\log 3}{9} + \int_3^{\infty} \frac{\log n}{n^2}\, dn$$
$$= \frac{\log 2}{4} + \frac{\log 3}{9} + \frac{1 + \log 3}{3} < 1;$$

daher für $x > e^2$

$$\sum_{q=1}^{x}{}' \frac{1}{q} < \frac{6}{\pi^2}\left(\log x + C + \frac{12}{\pi^2} \right) + \frac{6 + 2\log x}{\sqrt{x}}.$$

Aus $\sum_{n=1}^{x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6} \sum_{q=1}^{x}{}' \frac{1}{q}$ folgt hiermit die Behauptung.

---

und daher

$$\sum_{n \leqq x}{}' \frac{1}{\varphi(n)} = \log x + C - 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2) + o\frac{1}{\sqrt{x}} - \sum_p \frac{\log p}{p(p+1)}$$
$$+ \sum_{m \leqq \sqrt{x}} \frac{|D_m|}{\sqrt{m}} \cdot o\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{(6a)} \qquad = \log x + C + \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} + o\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ und schärfer.}$$

Hilfssatz 2. *Für $x > 0$ (nicht notwendig ganz) ist*

$$\text{(7)} \qquad \sum_{n=1}^{x}{}' \left(\frac{n}{\varphi(n)} \right)^2 < 5{,}7\, x.$$

Beweis:

$$\sum_{n=1}^{x}{}' \left(\frac{n}{\varphi(n)} \right)^2 \leqq \sum_{n=1}^{x} \left(\frac{n}{\varphi(n)} \right)^{2\,1)} = \sum_{n=1}^{x} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2p-1}{(p-1)^2} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{x} \sum_{l|n}{}' \prod_{p|l} \frac{2p-1}{(p-1)^2} = \sum_{l=1}^{x}{}' \left[\frac{x}{l} \right] \prod_{p|l} \frac{2p-1}{(p-1)^2}$$
$$\leqq x \sum_{l=1}^{x}{}' \prod_{p|l} \frac{2p-1}{p(p-1)^2} < x \prod_p \left(1 + \frac{2p-1}{p(p-1)^2} \right)^{2)};$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{2p-1}{p(p-1)^2} \right) < \frac{5}{2} \prod_{p > 2} \left(1 + \frac{2}{(p-1)^2} \right) < \frac{5}{2} e^{2\sum_{p>2} \frac{1}{(p-1)^2}}$$
$$< \frac{5}{2} e^{2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}} = \frac{5}{2} e^{\frac{\pi^2}{12}} < 5{,}7.$$

---

1) Dies genügt für unsere Zwecke.

2) Das selbständige Interesse liegt hier wieder bei der asymptotischen Formel: Für $s > 2$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{n^s}{\varphi(n)^2 n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{p^s}{(p-1)^2 p^s} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s} \right) \prod_p \left(1 + \frac{p(2p-1)}{(p-1)^2(p^s+p)} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{n}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^s},$$

wo $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^s}$ eine Dirichletsche Reihe ist, die für $s > 1$ absolut konvergiert. Daher ist

$$\sum_{n \leqq x}{}' \left(\frac{n}{\varphi(n)} \right)^2 = \sum_{m \leqq x} \frac{D_m}{m} Q\left(\frac{x}{m} \right)$$
$$= \frac{1}{\zeta(2)} x \sum_{m \leqq x} \frac{D_m}{m^2} + o \sum_{m \leqq \sqrt{x}} \frac{|D_m|}{m} \sqrt{\frac{x}{m}} + O \sum_{\sqrt{x} < m \leqq x} \frac{|D_m|}{m} \sqrt{\frac{x}{m}}$$
$$= \frac{1}{\zeta(2)} x \prod_p \left(1 + \frac{2p-1}{(p-1)^2(p+1)} \right) + o(\sqrt{x})$$

$$\text{(7a)} \qquad = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x + o(\sqrt{x}) = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} x + o(\sqrt{x}) \text{ und schärfer,}$$

worin $\frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} = 1{,}94\ldots$ ist.

Hilfssatz 3. *Für $x > 0$ und ganz ist*

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{\varphi(n)^2} < \frac{11{,}4}{x}. \tag{8}$$

Beweis: Wenn $\psi(x) = \sum_{n=1}^{x}{}' \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^2$ gesetzt wird, so kommt nach (7)

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{\varphi(n)^2} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^2}$$

$$= \sum_{n=x+1}^{\infty} \psi(n) \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} - \frac{\psi(x)}{(x+1)^2}{}^{1)} < 5{,}7 \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$$

$$< 5{,}7 \int_x^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}\, dn = 5{,}7 \left\{ -\frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \right\}_x^{\infty} < \frac{11{,}4}{x}.$$

Hilfssatz 4. *Es sei $\chi(n) = \chi_k(n)$ ein Charakter* mod k; *und er gehöre zu K — in dem Sinne, daß der aus χ_k entstehende Charakter χ_K eigentlich ist. Es sei*

$$B(\chi) = \sum_{j=1}^{k} \chi(j) e^{\frac{2\pi i j}{k}}.$$

Dann ist

$$|B(\chi)| = \begin{cases} \mu^2\left(\frac{k}{K}\right)\sqrt{K}, & \textit{falls } \left(K, \frac{k}{K}\right) = 1, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

Vorbemerkungen: 1. Ist $\frac{k}{K} = 1$, d. h. χ_k eigentlich, so ist $|B(\chi)| = \sqrt{K}$. Dieser Spezialfall steht bewiesen *„Handbuch"*, S. 492—494.

---

1) Mit (7a) kommt

$$\sum_{n=x+1}^{\infty}{}' \frac{1}{\varphi(n)^2} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} + o \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^{3/2}(n+1)^2}$$

$$- \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \frac{x}{(x+1)^2} + o \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \left(2 \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{x}\right) + o \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} + o \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$= \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \frac{1}{x} + o \frac{1}{x^{3/2}}. \tag{8a}$$

2. Ist $K = 1$, d. h. χ_k der Hauptcharakter, so ist $|B(\chi)| = \mu^2(k)$. In der Tat ist hier $B(\chi) = \mu(k)$ [1].

Beweis: Es ist, $e^{\frac{2\pi i}{k}} = \varrho$ gesetzt,

$$|B(\chi)|^2 = \sum_j \chi(j)\varrho^j \sum_q \bar{\chi}(q)\varrho^{-q} = \sum_j \chi(j)\varrho^j \sum_n \bar{\chi}(nj)\varrho^{-nj}$$

$$= \sum_n \bar{\chi}(n) \sum_{(j,k)=1} \varrho^{j(1-n)} = \sum_n \bar{\chi}(n) \sum_{\substack{d \mid k \\ d \mid n-1}} d\mu\left(\frac{k}{d}\right){}^{2)}$$

$$= \sum_{d \mid k} d\mu\left(\frac{k}{d}\right) \sum_{n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, d)} \bar{\chi}(n) = k \sum_{d \mid k} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{n \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{d}\right)} \bar{\chi}(n)^{3)}.$$

Wenn χ_k zu K gehört, dann auch $\bar{\chi}_k$.

Im Falle $d \nmid \frac{k}{K}$ ist $\sum_{n \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{d}\right)} \chi(n) = 0$; in der Tat, wäre — $k = dv$ gesetzt — $\sum_{n \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, v)} \chi(n) \neq 0$, so werden wir nachweisen, daß für $(a, k) = 1$ und $a \equiv 1 \pmod v$

$$\chi(a) = 1$$

ist, also doch

$$K \mid v, \; K \,\Big|\, \frac{k}{d}, \; d \,\Big|\, \frac{k}{K}{}^{4)}.$$

Nämlich, für $a = \varkappa v + 1$ und $(a, k) = 1$ sind

$$a, \; a(v+1), \; a(2v+1), \; \ldots, \; a((d-1)v+1)$$

und $1, v+1, 2v+1, \ldots, (d-1)v+1$ einander mod k kongruent; denn, daß $(\varkappa v+1)(\gamma v+1)$, wo $\gamma = 0, 1, \ldots, d-1$, von der Form $av+1$ ist, ist klar; je zwei dieser d Produkte sind aber inkongruent mod k. Also ist

---

1) Summe der primitiven $k$ten Einheitswurzeln. *„Handbuch"*, S. 572—573 und *Partitio numerorum*; III, 3. 21.

2) Summe der $(1-n)$ten Potenzen der primitiven $k$ten E.-W. *Partitio numerorum*; III, 3. 21 (Lemma 11).

3) Die Entwicklung bis hierhin bei Landau: *Zur additiven Primzahltheorie*, Beweis von Satz 3. 2).

4) *„Handbuch"*, S. 484 unten bis 485.

$$\sum_{n\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)} \chi(n) = \sum_{n\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)} \chi(an) = \chi(a) \sum_{n\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)} \chi(n),$$

$$(\chi(a)-1) \sum_{n\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)} \chi(n) = 0,$$

$$\chi(a) = 1.$$

Im Falle $d \mid \frac{k}{K}$ ist $\sum\limits_{n\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)} \chi(n) = \frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)}$; da nämlich $K \mid \frac{k}{d}$, so ist das in der $\sum$ auftretende $\chi(n)$ stets 1 oder 0, und die $\sum$ selbst gleich der Anzahl derjenigen teilerfremden Restklassen mod k, welche $\equiv 1\left(\operatorname{mod}\frac{k}{d}\right)$ sind. Diese Anzahl ist aber $\frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)} = \frac{d}{d'}\varphi(d')$, wo d' der größte Teiler von d ist, für den $\left(\frac{k}{d}, d'\right) = 1$ gilt.

Zusammen kommt also

$$|B(\chi)|^2 = k \sum_{d \mid \frac{k}{K}} \frac{\mu(d)}{d} \frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)};$$

nun ist, wenn n ein quadratfreier Teiler von k ist,

$$\frac{k}{n}\frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)} = k \prod_{\substack{p \mid n \\ p \nmid \frac{k}{n}}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = k \prod_{\substack{p \mid n \\ \left(p,\frac{k}{p}\right)=1}} \left(1-\frac{1}{p}\right) = k \sum_{\substack{\delta \mid n \\ \left(\delta,\frac{k}{\delta}\right)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta},$$

also, falls $\frac{k}{K}$ quadratfrei,

$$|B(\chi)|^2 = \sum_{d \mid \frac{k}{K}} \mu(d)\; k \sum_{\substack{\delta \mid d \\ \left(\delta,\frac{k}{\delta}\right)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \text{ [1]}$$

$$= k \sum_{\substack{\delta \mid \frac{k}{K} \\ \left(\delta,\frac{k}{\delta}\right)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\delta \mid d \mid \frac{k}{K}} \mu(d) = k \sum_{\substack{\delta \mid \frac{k}{K} \\ \left(\delta,\frac{k}{\delta}\right)=1}}' \frac{1}{\delta} \sum_{a \mid \frac{k}{K\delta}} \mu(a)$$

$$= K, \text{ falls } \left(K, \frac{k}{K}\right) = 1, \text{ sonst } = 0;$$

1) Dieser Rechnung liegt eine allgemeine Umkehrformel zugrunde: Ist k fest gegeben, ferner $g(n) = \sum\limits_{d \mid n} \mu(d) f(d)$ für alle quadratfreien $n \mid k$, so ist $f(n) = \sum\limits_{d \mid n} \mu(d) g(d)$ für jedes solche $n(k)$.

falls $\frac{k}{K}$ nicht quadratfrei, ist

$$|B(\chi)|^2 = k \sum_{d \mid \frac{k}{K'}} \frac{\mu(d)}{d} \frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\frac{k}{d}\right)},$$

wo K' so bestimmt ist, daß $\frac{k}{K'}$ quadratfrei ist und jeder Primfaktor von $\frac{k}{K}$ auch in $\frac{k}{K'}$ vorkommt; alsdann ist aber $\left(K', \frac{k}{K'}\right) > 1$ und daher $|B(\chi)|^2 = 0$ [1]).

1) Definieren wir allgemeiner

$$B(\chi) = \sum_{j=1}^{k} \chi(j)\, e^{\frac{2\pi i m}{k} j},$$

so kommt, falls $(m, k) = 1$, also $e^{\frac{2\pi i m}{k}}$ primitive k te Einheitswurzel ist,

$$B(\chi) = \bar{\chi}(m) \sum_{j=1}^{k} \chi(mj)\, e^{\frac{2\pi i m j}{k}},$$

$$|B(\chi)| = \left| \sum_{j=1}^{k} \chi(j)\, e^{\frac{2\pi i j}{k}} \right|.$$

Ist dagegen $(m, k) > 1$, und zwar $e^{\frac{2\pi i m}{k}}$ primitive k' te Einheitswurzel, so ist im Falle $K \nmid k'$ gewiß $B(\chi_k) = 0$; denn der Beweis *„Handbuch"*, § 126 funktioniert auch dann (dort hat K eine andere Bedeutung!). Im Falle $K \mid k'$ ergibt sich, $\frac{k}{k'} = d$, $e^{\frac{2\pi i m}{k}} = \varrho$ gesetzt:

$$\sum_{j=1}^{k} \chi_k(j)\, \varrho^j = \sum_{n=1}^{k'} \sum_{a=0}^{d-1} \chi_k(n + a k')\, \varrho^{n + a k'} = d\, \frac{\varphi(d')}{d'} \sum_{n=1}^{k'} \chi_{k'}(n)\, \varrho^n,$$

wo d' wieder der größte Teiler von d ist, für den gilt $(k', d') = 1$, und wo $\chi_{k'}$ der aus χ_k entstehende Charakter (der ebenfalls zu K gehört), $\sum\limits_{n=1}^{k'} \chi_{k'}(n)\, \varrho^n$ also ein $B(\chi_{k'})$ mit primitivem ϱ ist. Wir haben demnach als Resultat die alle möglichen Fälle umfassende Formel:

$$\text{(9a)} \quad \left| \sum_{j=1}^{k} \chi_k(j)\, e^{\frac{2\pi i m}{k} j} \right| = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{\varphi(k')} \mu^2\left(\frac{k'}{K}\right) \cdot \sqrt{K}, & \text{falls } K \mid k' \text{ und } \left(K, \frac{k'}{K}\right) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hilfssatz 5. *Für* $\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1$, $t \gtreqless 0$ *ist*

$$|\Gamma(\lambda+ti)| \leqq A(\lambda)\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}(|t|+1)^{\lambda-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

wo

$$A(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1-\lambda}(1+\lambda)^{1-\lambda}(1+2\lambda)^{\lambda-\frac{1}{2}}}$$

ist.

Beweis: Es ist für $\sigma > 0$, $t \gtreqless 0$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs}\, s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

$$\frac{1}{|\Gamma(s)|} = e^{C\sigma}(\sigma^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{((n+\sigma)^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}{n} e^{-\frac{\sigma}{n}},$$

$$\log|\Gamma(s)| = -C\sigma - \tfrac{1}{2}\log(\sigma^2+t^2) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\log((n+\sigma)^2+t^2) - \log n - \frac{\sigma}{n}\right),$$

$$\frac{d^2\log|\Gamma(s)|}{d\sigma^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\sigma)^2-t^2}{((n+\sigma)^2+t^2)^2}.$$

Diese Summe vergleichen wir mit dem Integral

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dx = \left\{-\frac{x}{x^2+t^2}\right\}_0^{\infty} = 0 \qquad (t \gtreqless 0).$$

Die Funktion $\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}$ von x ist für $x > 0$ erst wachsend, nachher fallend und erreicht in $x = t\sqrt{3}$ das Maximum $\frac{1}{8t^2}$; daher ist für $\sigma \geqq \frac{3}{2}$ und $t \geqq \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\sigma)^2-t^2}{((n+\sigma)^2+t^2)^2} > \int_{\sigma-1}^{[t\sqrt{3}-\sigma]+\sigma}\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dx + \int_{[t\sqrt{3}-\sigma]+\sigma+1}^{\infty}\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dx$$

$$= \int_{\sigma-1}^{0}\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dx - \int_{[t\sqrt{3}-\sigma]+\sigma}^{[t\sqrt{3}-\sigma]+\sigma+1}\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\,dx$$

$$> \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - \frac{1}{8t^2} = \frac{(8(\sigma-1)-1)t^2-(\sigma-1)^2}{8t^2((\sigma-1)^2+t^2)} > 0;$$

denn

$$(8(\sigma-1)-1)t^2-(\sigma-1)^2 \geqq (8\sigma-9)\frac{\sigma^2}{3} - \sigma^2 + 2\sigma - 1$$

$$= \tfrac{8}{3}\sigma^2(\sigma-\tfrac{3}{2}) + 2\sigma - 1 \geqq 2 > 0;$$

und für $|t| < \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\sigma)^2-t^2}{((n+\sigma)^2+t^2)^2} > 0$, weil alle Glieder > 0 sind. Daher ist für $\sigma \geqq \frac{3}{2}$ die Funktion $\log|\Gamma(s)|$ bei festem $t \gtreqless 0$ eine konvexe Funktion von σ, also speziell auf der Strecke $\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq 2$:

$$\log|\Gamma(s)| \leqq \log|\Gamma(\tfrac{3}{2}+ti)| + \frac{\sigma-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}(\log|\Gamma(2+ti)| - \log|\Gamma(\tfrac{3}{2}+ti)|)$$

$$= (4-2\sigma)\log|\Gamma(\tfrac{3}{2}+ti)| + (2\sigma-3)\log|\Gamma(2+ti)|,$$

$$|\Gamma(s)| \leqq |\Gamma(\tfrac{3}{2}+ti)|^{4-2\sigma}|\Gamma(2+ti)|^{2\sigma-3}.$$

Nun ist

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}+ti)\Gamma(\tfrac{3}{2}-ti) = (\tfrac{1}{2}+ti)(\tfrac{1}{2}-ti)\Gamma(\tfrac{1}{2}+ti)\Gamma(\tfrac{1}{2}-ti)$$

$$= (\tfrac{1}{4}+t^2)\frac{\pi}{\sin\pi(\frac{1}{2}-ti)} = (\tfrac{1}{4}+t^2)\frac{\pi}{\cos\pi ti} = \frac{2\pi(\frac{1}{4}+t^2)}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}},$$

$$\Gamma(2+ti)\Gamma(2-ti) = (1+ti)ti(1-ti)\Gamma(ti)\Gamma(1-ti)$$

$$= (1+t^2)\frac{\pi ti}{\sin\pi ti} = \frac{2\pi t(1+t^2)}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}};$$

daher kommt

$$|\Gamma(s)| \leqq \frac{(2\pi)^{2-\sigma}(\frac{1}{4}+t^2)^{2-\sigma}}{(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{2-\sigma}}\,\frac{(2\pi)^{\sigma-\frac{3}{2}}t^{\sigma-\frac{3}{2}}(1+t^2)^{\sigma-\frac{3}{2}}}{(e^{\pi t}-e^{-\pi t})^{\sigma-\frac{3}{2}}};$$

diese Abschätzung gilt für $t \geqq 0$ und jedes σ des Intervalls $\frac{3}{2} \leqq \sigma \leqq 2$, und liefert für $t \to \infty$ als obere „*Limesfunktion*" sogar die asymptotische Formel für $\Gamma(s)$:

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma-\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir noch $\sigma = 1+\lambda$, so kommt für $\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq 1$, $t \geqq 0$:

$$|\Gamma(\lambda+ti)| \leqq \sqrt{2\pi}\,\frac{t^{\lambda-\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}+t^2)^{1-\lambda}(1+t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(\lambda^2+t^2)^{\frac{1}{2}}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{1-\lambda}(e^{\pi t}-e^{-\pi t})^{\lambda-\frac{1}{2}}}.$$

Wegen

$$\frac{t}{1+t}\,\frac{1}{1-e^{-2\pi t}} \leqq \frac{t}{1+t}\,\frac{1}{1-\frac{1}{1+2\pi t}} \leqq \frac{t}{1+t}\,\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}} = 1$$

ist hierin

$$\frac{t^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(e^{\pi t}-e^{-\pi t})^{\lambda-\frac{1}{2}}} \leqq \frac{(1+t)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{e^{\pi t(\lambda-\frac{1}{2})}};$$

und der Ausdruck

$$\frac{(\frac{1}{4}+t^2)^{1-\lambda}(1+t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(\lambda^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

nimmt seinen größten Wert $A(\lambda)$ (der nur wenig größer als 1 ist) für $t^2 = \frac{1+3\lambda}{2}$ an, nämlich

$$A(\lambda) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1-\lambda}} \frac{1}{(1+\lambda)^{1-\lambda}(1+2\lambda)^{\lambda-\frac{1}{2}}}.$$

Damit ergibt sich:

$$|\Gamma(\lambda+ti)| \leqq \sqrt{2\pi}\, \frac{(1+t)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{e^{\pi t(\lambda-\frac{1}{2})}} \frac{A(\lambda)}{(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{1-\lambda}} \qquad (t \geqq 0),$$

$$|\Gamma(\lambda+ti)| \leqq A(\lambda)\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}(|t|+1)^{\lambda-\frac{1}{2}} \qquad (t \gtreqless 0).$$

Hilfssatz 6. *$L(s,\chi_k)$ habe in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ keine Nullstelle. Es sei $N(s,\chi_k)$ die für $\sigma > 1$ durch*

$$N(s) = N(s,\chi_k) = \sum_p \frac{\chi_k(p)\log p}{p^s}$$

definierte Funktion. Dann ist für $\lambda = 0{,}526$

(11) $$|N(\lambda+ti,\chi_k)| < 752\log k + 752\log(|t|+1) + 10400.$$

Beweis: Es ist für $\sigma > 1$, also für $\sigma = \lambda$

$$N(s,\chi) = -\frac{L'}{L}(s) - \sum_p \frac{\chi(p^2)\log p}{p^s(p^s-\chi(p))},$$

$$|N(\lambda+ti)| \leqq \left|\frac{L'}{L}(\lambda+ti)\right| + \sum_p \frac{\log p}{p^\lambda(p^\lambda-1)}.$$

I. Ist χ_k nicht der Hauptcharakter, so kommt für $\sigma > 0$

$$L(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{R(n)-R(n-1)}{n^s},$$

wenn m ganz ist und $R(x) = \sum_{n=1}^{x} \chi(n)$ gesetzt wird,

$$L(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\chi(n)}{n^s} + s\sum_{n=m+1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{R(u)}{u^{s+1}}\,du - \frac{R(m)}{(m+1)^s};$$

wegen $|R(x)| \leqq \frac{h}{2} < \frac{k}{2}$ 1) folgt hieraus für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$

$$|L(s)| \leqq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} + |s|\frac{k}{2}\int_{m+1}^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma+1}} + \frac{k}{2(m+1)^\sigma},$$

1) Für $R_k(x)$ ist die schärfere Abschätzung $R_k = O(\sqrt{k}\log k)$ bekannt, mit der sich jedoch in unserem Fall keine nennenswerte Verbesserung erzielen ließe.

also für $m = [k(|t|+1)]$

$$|L(s)| \leqq 2\sqrt{k(|t|+1)} + \frac{\sigma+|t|}{2\sigma} \frac{k}{(k(|t|+1))^\sigma} + \frac{k}{2(k(|t|+1))^\sigma}$$

$$\leqq 2\sqrt{k(|t|+1)} + \left(|t|+\frac{1}{2}\right)\frac{k}{\sqrt{k(|t|+1)}} + \frac{k}{2\sqrt{k(|t|+1)}}$$

$$= 3\sqrt{k(|t|+1)}.$$

Die Funktion $\log L(s)$ ist nach Voraussetzung für $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär; und dort ist

$$\Re\log L = \log|L| \leqq \log 3 + \tfrac{1}{2}\log k + \tfrac{1}{2}\log(|t|+1);$$

daher liefert die Carathéodorysche Ungleichung für die erste Derivierte, angewandt auf die Kreise um $\frac{1}{2}+r+ti$ mit den Radien r und $r+\frac{1}{2}-\lambda$, wo $r = 0{,}508$ ist:

$$\left|\frac{L'}{L}(\lambda+ti)\right|$$

$$\leqq \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}\left(\log 3 + \frac{1}{2}\log k + \frac{1}{2}\log(|t|+r+1) - \Re\log L\left(\frac{1}{2}+r+ti\right)\right)$$

$$\leqq \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}\left(\log 3 + \frac{1}{2}\log k + \frac{1}{2}\log(|t|+r+1) + \sum_{p,m}\frac{1}{m}\frac{1}{p^{m(\frac{1}{2}+r)}}\right).$$

II. Ist χ_k der Hauptcharakter, so haben wir

$$\frac{L'}{L}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{p|k}\frac{\log p}{p^s-1},$$

$$\left|\frac{L'}{L}(\lambda+ti)\right| \leqq \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right| + \frac{\log k}{2^\lambda-1}.$$

Nun ist für $\sigma > 1$, m ganz und $\geqq 0$

$$s\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\,du = -\frac{1}{(n+1)^s} + \int_n^{n+1}\frac{du}{u^s},$$

$$-s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\,du = \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^s} - \int_{m+1}^{\infty}\frac{du}{u^s}$$

$$= \zeta(s) - \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1}\frac{1}{(m+1)^{s-1}},$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\,du + \frac{1}{(m+1)^s} + \frac{1}{s-1}\frac{1}{(m+1)^{s-1}};$$

eine Formel, welche auch für $\sigma > 0$, die Stelle $s = 1$ ausgenommen, richtig bleibt; für $m = 0$ liefert sie

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\,du,$$

woraus weiter folgt:

$$|\zeta(s)| > \left|\frac{s}{s-1}\right| - \frac{|s|}{2\sigma} \qquad \text{für } \sigma > 0,\ s \neq 1;$$

denn es ist für $n \geqq 1$

$$\int_n^{n+1}\frac{u-n-\frac{1}{2}}{u^{\sigma+1}}\,du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x+n+\frac{1}{2})^{\sigma+1}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{1}{(x+n+\frac{1}{2})^{\sigma+1}} - \frac{1}{(-x+n+\frac{1}{2})^{\sigma+1}}\right)dx < 0,$$

$$\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{\sigma+1}}\,du < \frac{1}{2}\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{\sigma+1}}.$$

Die obige Formel für $\zeta(s)$ liefert jetzt für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $|t| \geqq a = 0{,}412$

$$|\zeta(s)| \leqq \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{|s|}{2}\int_{m+1}^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma+1}} + \frac{1}{(m+1)^{\sigma}} + \frac{1}{|s-1|}(m+1)^{1-\sigma},$$

also, $m = [|t| + \frac{3}{2}]$ gesetzt:

$$|\zeta(s)| \leqq 1 + 2\left(\sqrt{|t|+\tfrac{3}{2}} - 1\right) + \frac{\sigma+|t|}{2\sigma}\,\frac{1}{(|t|+\frac{3}{2})^{\sigma}} + \frac{1}{(|t|+\frac{3}{2})^{\sigma}} + \frac{1}{a}\sqrt{m+1}$$

$$\leqq 2\sqrt{|t|+\tfrac{3}{2}} + \frac{|t|+\frac{1}{2}}{\sqrt{|t|+\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{|t|+\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a}\sqrt{|t|+\tfrac{5}{2}} - 1 < \left(3+\frac{1}{a}\right)\sqrt{|t|+\tfrac{3}{2}}\ ^{1)}.$$

Daher ist für $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \geqq a$:

$$\log|\zeta(s)| < \log\left(3+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\log\left(|t|+\frac{3}{2}\right);$$

und die Carathéodoryshe Ungleichung liefert ähnlich wie vorhin:

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right| \leqq \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}\left(\log\left(3+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\log\left(|t|+r+\frac{3}{2}\right) + \log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right)\right)$$

$$\text{für } |t| \geqq a + r = 0{,}92.$$

---

1) Für die Lindelöfsche μ-Funktion gilt auf der Strecke $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$ $\mu(\sigma) \leqq \frac{1}{6}$, d. h. es ist in der Halbebene $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ $\zeta(s) = O\left(t^{\frac{1}{6}+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$; und aus $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt sogar $\mu(\sigma) = 0$, d. h. $\zeta(s) = O(t^{\varepsilon})$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2} + \delta$. Aber diese asymptotischen Formeln haben für unseren Zweck, wo eine Abschätzung von $t = 0$ an benötigt wird, keinen Wert.

Auf der Strecke $|t| \leqq 0{,}92$ bedienen wir uns für $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right|$ einer Abschätzung, die nicht von der Hypothese, daß $\zeta(s)$ rechts von $\sigma = \frac{1}{2}$ keine Wurzel habe, Gebrauch macht, sondern die vorhin gegebene Abschätzung von $|\zeta(s)|$ nach unten benutzt: Es ist

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\,du + s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\log u\,du,$$

und daher, solange $2\lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2+t^2} > 0$ ist, wegen $\int_1^{\infty}\frac{\log u}{u^{\sigma+1}}\,du = \frac{1}{\sigma^2}$

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right| < \frac{\dfrac{1}{(1-\lambda)^2+t^2} + \dfrac{1}{2\lambda} + \dfrac{\sqrt{\lambda^2+t^2}}{\lambda^2}}{\dfrac{\sqrt{\lambda^2+t^2}}{\sqrt{(1-\lambda)^2+t^2}} - \dfrac{\sqrt{\lambda^2+t^2}}{2\lambda}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\lambda}{\sqrt{(1-\lambda)^2+t^2}} + \sqrt{(1-\lambda)^2+t^2} + \dfrac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda^2+t^2}\sqrt{(1-\lambda)^2+t^2}}{\sqrt{\lambda^2+t^2}\left(2\lambda-\sqrt{(1-\lambda)^2+t^2}\right)};$$

der Nenner ist auf der Strecke $|t| \leqq 0{,}92$ positiv und nimmt dort wegen

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{\lambda^2+x}\left(2\lambda-\sqrt{(1-\lambda)^2+x}\right)\right\} = -\frac{x+\left(\lambda-\sqrt{(1-\lambda)^2+x}\right)^2}{2\sqrt{\lambda^2+x}\sqrt{(1-\lambda)^2+x}}$$

mit wachsendem $|t|$ ständig ab; daher ist für $|t| \leqq 0{,}92$

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right| < \frac{\dfrac{2\lambda}{1-\lambda} + \sqrt{(1-\lambda)^2+0{,}92^2} + \dfrac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda^2+0{,}92^2}\sqrt{(1-\lambda)^2+0{,}92^2}}{\sqrt{\lambda^2+0{,}92^2}\left(2\lambda-\sqrt{(1-\lambda)^2+0{,}92^2}\right)}$$

$$< \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2};$$

und die vorhin für $|t| \geqq 0{,}92$ gefundene Abschätzung von $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda+ti)\right|$ gilt schon von $|t| = 0$ an; weil ferner $\frac{1}{2^{\lambda}-1} < \frac{r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}$ ist, haben wir somit als Ergebnis von II:

$$\left|\frac{L'}{L}(\lambda+ti)\right| \leqq \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}\left(\frac{1}{2}\log k + \log\left(3+\frac{1}{a}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\log\left(|t|+r+\frac{3}{2}\right) + \log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right)\right).$$

I und II sind vereinigt in der Schlußformel:

$$|N(\lambda+ti)| \leqq \frac{2r}{(\lambda-\frac{1}{2})^2}\left(\frac{1}{2}\log k+\frac{1}{2}\log(|t|+1)+\log\left(3+\frac{1}{a}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\log\left(r+\frac{3}{2}\right)+\log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right)\right)+\sum_p\frac{\log p}{p^\lambda(p^\lambda-1)};$$

hierin ist

$$\log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right) = \log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+r}}\right) < \log\left(1+\int_1^\infty\frac{dn}{n^{\frac{1}{2}+r}}\right)$$
$$= \log\frac{r+\frac{1}{2}}{r-\frac{1}{2}} = \log 126 < 4{,}84;$$

ferner ist für $x>1$

$$\zeta(x) > \int_1^\infty\frac{dn}{n^x} = \frac{1}{x-1},$$
$$-\zeta'(x) < \frac{\log 2}{2^x}+\frac{\log 3}{3^x}+\int_3^\infty\frac{\log n}{n^x}\,dn$$
$$< \frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\int_1^\infty\frac{\log n}{n^x}\,dn < 0{,}72+\frac{1}{(x-1)^2},$$

und daher

$$\sum_p\frac{\log p}{p^\lambda(p^\lambda-1)} = \sum_p\frac{\log p}{p^{2\lambda}-1}+\sum_p\frac{\log p}{p^{3\lambda}-1}+\sum_p\frac{\log p}{(p^{3\lambda}-1)p^\lambda(p^\lambda+1)}$$
$$< -\frac{\zeta'}{\zeta}(2\lambda)-\frac{\zeta'}{\zeta}(3\lambda)-\frac{\zeta'}{\zeta}(5\lambda)$$
$$< \frac{1}{2\lambda-1}+\frac{1}{3\lambda-1}+\frac{1}{5\lambda-1}+0{,}72\,(10\lambda-3) < 24.$$

Setzen wir diese, sowie die Werte $r=0{,}508$, $\lambda=0{,}526$, $a=0{,}412$ ein, so kommt

$$|N(\lambda+ti)|$$
$$< 1504\left(\tfrac{1}{2}\log k+\tfrac{1}{2}\log(|t|+1)+\log 5{,}428+\tfrac{1}{2}\log 2{,}008+4{,}84\right)+24$$
$$< 752\log k+752\log(|t|+1)+10400.$$

Hilfssatz 7. *Für $n \geqq 10^{12}$ ist, wenn die Riemannsche Vermutung wahr ist,*

$$\sum_{p>2}\log^2 p\, e^{-\frac{2\sqrt{\pi p}}{n}} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,n\log n. \tag{12}$$

Beweis: Nach der Mellinschen Integralformel und wegen der absoluten Konvergenz der auftretenden Integrale ist

$$\sum_{p>2}\log^2 p\, e^{-\frac{2\sqrt{\pi p}}{n}} < \sum_{m=1}^{\infty}\log m\,\Lambda(m)\,e^{-\frac{2\sqrt{\pi m}}{n}}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\log m\,\Lambda(m)\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(s)\,m^{-s}\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^s ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\Gamma(s)\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^s\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m\,\Lambda(m)}{m^s}\,ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\Gamma(s)\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^s\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(s)\,ds$$
$$= \frac{n\log n}{2\sqrt{\pi}}-\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\left(C+\log(2\sqrt{\pi})\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{3}{4})}\Gamma(s)\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^s\frac{d^2\log\zeta(s)}{ds^2}\,ds;$$

die Verlegung des Integrationsweges war erlaubt, denn — ähnlich wie im Beweis von Hilfssatz 6 — ist

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(s) = O(\log t) \text{ gleichmäßig für } \sigma \geqq \tfrac{1}{2}+\delta,\ \delta>0 \text{ fest.}$$

Nach einer Formel im Beweis von Hilfssatz 6 ist für $\sigma>\frac{1}{2}$, $|t|\geqq 0{,}412$

$$\log|\zeta(s)| < \tfrac{1}{2}\log(|t|+\tfrac{3}{2})+\log 5{,}428;$$

daher, wenn man die Carathéodorysche Ungleichung für die 2-te Derivierte analog wie dort anwendet, für $\sigma=\frac{3}{4}$, $|t|\geqq 0{,}92$, $r=0{,}508$:

$$\left|\frac{d^2\log\zeta(s)}{ds^2}\right| \leqq \frac{4r}{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})^3}\left(\frac{1}{2}\log\left(|t|+r+\frac{3}{2}\right)+\log 5{,}428+\log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right)\right)$$
$$< 131\left(\frac{1}{2}\log(|t|+1)+\frac{1}{2}\log\left(r+\frac{3}{2}\right)+\log 5{,}428+\log\zeta\left(\frac{1}{2}+r\right)\right)$$
$$< 66\log(|t|+1)+910;$$

und dies bleibt auch richtig für $|t|<0{,}92$; denn dort gilt:

$$\left|\frac{d^2\log\zeta(s)}{ds^2}\right|_{s=\frac{3}{4}+ti} \leqq \left|\frac{\zeta''}{\zeta}\left(\frac{3}{4}+ti\right)\right|+\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{3}{4}+ti\right)\right|^2,$$

und wegen

$$\zeta''(s) = \frac{2}{(s-1)^3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\log u\,du$$
$$-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{u-n}{u^{s+1}}\log^2 u\,du$$

wird dies — $\gamma = \frac{3}{4}$ gesetzt — wenn man noch beachtet, daß

$$\int_1^\infty \frac{\log^2 u}{u^{\sigma+1}}\,du = \frac{2}{\sigma^3},\ \text{also}\ |\zeta''(s)| < \frac{2}{|s-1|^3} + \frac{2}{\sigma^3} + \frac{2|s|}{\sigma^3}:$$

$$\left|\frac{d^2 \log \xi(s)}{ds^2}\right|_{s=\frac{3}{4}+ti}$$

$$< \frac{\frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2+t^2} + \frac{4}{\gamma}\sqrt{(1-\gamma)^2+t^2} + \frac{4}{\gamma^2}\sqrt{\gamma^2+t^2}\sqrt{(1-\gamma)^2+t^2}}{\sqrt{\gamma^2+t^2}\,(2\gamma - \sqrt{(1-\gamma)^2+t^2})}$$

$$+\left(\frac{\frac{2\gamma}{\sqrt{(1-\gamma)^2+t^2}} + \sqrt{(1-\gamma)^2+t^2} + \frac{2}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+t^2}\sqrt{(1-\gamma)^2+t^2}}{\sqrt{\gamma^2+t^2}\,(2\gamma - \sqrt{(1-\gamma)^2+t^2})}\right)^2;$$

der Nenner ist für $|t| \leqq 0{,}92$ wieder positiv und mit wachsendem $|t|$ abnehmend, sodaß wir haben: für $\sigma = \gamma = \frac{3}{4}$, $|t| \leqq 0{,}92$ ist

$$\left|\frac{d^2 \log \xi(s)}{ds^2}\right|$$

$$< \frac{\frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2} + \frac{4}{\gamma}\sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2} + \frac{4}{\gamma^2}\sqrt{\gamma^2+0{,}92^2}\sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2}}{\sqrt{\gamma^2+0{,}92^2}\,(2\gamma - \sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2})}$$

$$+\left(\frac{\frac{2\gamma}{1-\gamma} + \sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2} + \frac{2}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+0{,}92^2}\sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2}}{\sqrt{\gamma^2+0{,}92^2}\,(2\gamma - \sqrt{(1-\gamma)^2+0{,}92^2})}\right)^2 < 910.$$

Es ist

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)^{\frac{1}{4}}\,dt < \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)\,dt$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty e^{-v}\left(v+\frac{\pi}{2}\right)dv = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi} < 1{,}05;$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)^{\frac{1}{4}}\log(t+1)\,dt < \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}\frac{t+1}{e\cdot\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \frac{4}{3e}\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\right) < 0{,}52.$$

Mit diesen Formeln und der Formel (10) ergibt sich nunmehr:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{3}{4})} \Gamma(s)\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^s \frac{d^2 \log \xi(s)}{ds^2}\,ds$$

$$< \frac{1}{2\pi} A\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{4}} 2\int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}t}(t+1)^{\frac{1}{4}}(66\log(t+1)+910)\,dt$$

$$< \left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,A\left(\frac{3}{4}\right)(66\cdot 0{,}52 + 910\cdot 1{,}05);$$

hierin ist $A\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{35}} < 1{,}01$ und daher die rechte Seite $< 800\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Setzt man ein, so folgt:

$$\sum_{p>2} \log^2 p\, e^{-\frac{2\sqrt{\pi}p}{n}} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,n\log n - 1{,}84\frac{n}{2\sqrt{\pi}} + 800\left(\frac{n}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

und da $n^{\frac{1}{4}} > \frac{800}{1{,}84}\sqrt[8]{4\pi}$ für $n \geqq 10^{12}$ ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 8. *Auf dem Kreis* $|x| = e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{n}}$ *ist*

(13) $$|\Phi| < (475\log n + 8770)\,n^{0{,}776}.$$

Beweis:

$$f(x) = \sum_{p>2}\log p\, x^p = \sum_{p\nmid k}\log p\, x^p + \sum_{p|k}\log p\, x^p - \log 2\cdot x^2,$$

$$|\Phi| = |f(x) - \psi| \leqq \left|\sum_{p\nmid k}\log p\, x^p - \psi\right| + \log k + \log 2.$$

$$\sum_{p\nmid k}\log p\, x^p = \sum_{p\nmid k}\log p\, e^{\frac{2\pi i m}{k}p}\, e^{-yp}$$

$$= \sum_{(p,k)=1}\log p\, e^{\frac{2\pi i m}{k}p}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} y^{-s}p^{-s}\,\Gamma(s)\,ds$$

nach der Formel von Mellin (denn $\Re(y) > 0$)

$$= \sum_{\substack{1\leqq j\leqq k\\ (j,k)=1}}\ \sum_{p\equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \log p\, e^{\frac{2\pi i m}{k}j}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} y^{-s}p^{-s}\,\Gamma(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} y^{-s}\,\Gamma(s)\,Z(s)\,ds,$$

$$\text{wo } Z(s) = \sum_j e^{\frac{2\pi i m}{k} j} \sum_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{\log p}{p^s}.$$

$l > 0$ werde so bestimmt, daß $jl \equiv 1 \pmod{k}$. Dann ist

$$\bar{\chi}(j) = \frac{1}{\chi(j)} = \chi(l)$$

und

$$\sum_\chi \bar{\chi}(j) \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s} = \sum_\chi \chi(l) \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s}$$

$$= \sum_p \frac{\log p}{p^s} \sum_\chi \chi(lp) = h \sum_{p \equiv j \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{\log p}{p^s}.$$

Demnach

$$Z(s) = \frac{1}{h} \sum_j e^{\frac{2\pi i m}{k} j} \sum_\chi \bar{\chi}(j) N(s, \chi), \quad \text{wo } N(s,\chi) = \sum_p \frac{\chi(p)\log p}{p^s},$$

$$Z(s) = \frac{1}{h} \sum_\chi N(s,\chi) \sum_j e^{\frac{2\pi i m}{k} j} \bar{\chi}(j)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_\chi N(s,\chi)\chi(m) \sum_j e^{\frac{2\pi i m j}{k}} \bar{\chi}(mj) = \frac{1}{h} \sum_\chi N(s,\chi)\chi(m) B(\bar{\chi}),$$

$$\text{wo } B(\chi) = \sum_{j=1}^{k} e^{\frac{2\pi i}{k} j} \chi(j).$$

$$\sum_{p \nmid k} \log p \, x^p = \frac{1}{h} \sum_\chi \chi(m) B(\bar{\chi}) \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} y^{-s} \Gamma(s) N(s,\chi)\, ds.$$

Die $N(s,\chi)$ sind in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ regulär, ausgenommen das dem Hauptcharakter entsprechende $N(s,\chi)$, das in $s = 1$ einen Pol 1. Ordnung mit dem Residuum 1 hat. Nach der Vorbemerkung 2 zu Hilfssatz 4 ist daher

$$\sum_{p \nmid k} \log p \, x^p = \frac{\mu(k)}{hy} + \frac{1}{h} \sum_\chi \chi(m) B(\bar{\chi}) \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} y^{-s} \Gamma(s) N(s,\chi)\, ds$$

und

$$|\Phi| \leqq \left| \frac{1}{h} \sum_\chi \chi(m) B(\bar{\chi}) \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} y^{-s} \Gamma(s) N(s,\chi)\, ds \right| + \log k + \log 2,$$

wo wir wie früher $\lambda = 0{,}526$ wählen. Nach (9) ist

$$|\Phi| \leqq \frac{\sqrt{k}}{2\pi} \operatorname*{Max.}_{\text{alle } \chi_k} \left| \int_{(\lambda)} y^{-s} \Gamma(s) N(s,\chi_k)\, ds \right| + \log k + \log 2;$$

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{n} - i\vartheta, \quad |\vartheta| < \frac{2\pi}{kB},$$

$$\left| y^{-\lambda - ti} \right| = |y|^{-\lambda} e^{t \operatorname{arc} y}, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - |\operatorname{arc} y| > \sin\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{n|y|};$$

nach (10) ist

$$|\Gamma(\lambda + ti)| \leqq A(\lambda)\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (|t|+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}, \quad A(\lambda) < 1{,}002;$$

nach (11)

$$|N(\lambda + ti)| < 752 \log k + 752 \log(|t|+1) + 10400.$$

$$\left| \int_{(\lambda)} y^{-s} \Gamma(s) N(s,\chi)\, ds \right|$$

$$< A(\lambda)\sqrt{2\pi}(752 \log k + 10400)|y|^{-\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \operatorname{arc} y} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (|t|+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt$$

$$+ A(\lambda)\sqrt{2\pi}\, 752 \, |y|^{-\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \operatorname{arc} y} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (|t|+1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \log(|t|+1)\, dt;$$

hierin ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t \operatorname{arc} y - \frac{\pi}{2}|t|} (|t|+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{t \operatorname{arc} y} + e^{-t \operatorname{arc} y}\right) e^{-\frac{\pi}{2} t} (t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-\delta t} + e^{-\pi t + \delta t}\right)(t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt$$

$$\leqq \int_0^\infty e^{-\delta t} (t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt + \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2} t} (t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, dt,$$

und analog

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t \operatorname{arc} y - \frac{\pi}{2}|t|} (|t|+1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \log(|t|+1)\, dt$$

$$\leqq \int_0^\infty e^{-\delta t} (t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \log(t+1)\, dt + \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2} t} (t+1)^{\lambda - \frac{1}{2}} \log(t+1)\, dt.$$