Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie.[1])

Von HANS ROHRBACH in Göttingen.

Den Grundproblemen der additiven Zahlentheorie ist die Aufgabe gemeinsam, *jedes Element einer gegebenen Menge* $\mathfrak{M}$ *von natürlichen Zahlen als Summe einer beschränkten Anzahl* s *von Elementen einer anderen gegebenen Menge* $\mathfrak{A}$ *natürlicher Zahlen darzustellen.* Hierzu gehören z. B. die Fermatschen Sätze über die Darstellbarkeit der Primzahlen der Form $4x + 1$ als Summe zweier Quadratzahlen oder aller natürlichen Zahlen als Summe von Polygonalzahlen, ferner das Waringsche Problem ($\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, $\mathfrak{A}$ die Menge der k-ten Potenzen, $s = g(k)$) und die Goldbachsche Vermutung ($\mathfrak{M}$ die Menge der geraden Zahlen, $\mathfrak{A}$ die Menge der Primzahlen, $s=2$). Bei dieser weiß man bisher nur, daß ein beschränktes s existiert. Schnirelmann zeigte als erster: Es gibt eine Konstante c derart, daß jedes natürliche $x > 1$ als Summe von höchstens c Primzahlen darstellbar ist.

Die Existenz eines beschränkten s ist bereits gesichert, wenn man weiß, daß sich *alle hinreichend großen* Zahlen von $\mathfrak{M}$ als Summe einer beschränkten Anzahl s^* von Elementen von $\mathfrak{A}$ darstellen lassen. Diese Fragestellung steht gerade bei den beiden letzten der obengenannten Probleme im Vordergrund. Für das Waringsche Problem ist $s^* = G(k)$, und für die Goldbachsche Vermutung gilt nach Vinogradow $s^* \leqq 4$.

Die Untersuchungen, über die ich im folgenden berichten will, beziehen sich auf das zu Anfang formulierte *allgemeine* Darstellungsproblem, alle oder alle hinreichend großen Zahlen von $\mathfrak{M}$ als Summe einer beschränkten Anzahl von Zahlen aus $\mathfrak{A}$ darzustellen sowie auf einige damit zusammenhängende Begriffe, Fragestellungen und Methoden. Das Charakteristische an diesen Untersuchungen besteht darin, daß man von der Art der Zahlen der gegebenen Mengen ganz absieht und nur ihre Verteilung innerhalb der Menge aller natürlichen Zahlen berücksichtigt. Mit anderen Worten: Die zu untersuchenden Mengen natürlicher Zahlen werden *nicht mehr arithmetisch* gegeben durch Festlegung der *Natur* der Elemente als Primzahlen, Quadratzahlen o. a., sondern *nur noch metrisch* charakterisiert durch

---

1) Erweiterte Fassung eines Vortrags auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Bad Kreuznach (1937). Abgeschlossen am 30. Juli 1938.

Angabe der *Anzahl* ihrer Elemente im Verhältnis zur Menge aller natürlichen Zahlen. Als Maß hierfür wird, wenn $A(x)$ für jedes natürliche x die Anzahl der Zahlen $a \leqq x$ von $\mathfrak{A}$ bezeichnet, die untere Grenze der Quotienten $\frac{A(x)}{x}$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ eingeführt; sie heißt die *Dichte* der Menge $\mathfrak{A}$.

Diese Betrachtungsweise hat L. Schnirelmann [29] zum Beweis des oben erwähnten Satzes in die additive Zahlentheorie eingeführt. Aber auch unabhängig von solchen Anwendungsmöglichkeiten sind diese Begriffsbildungen und Hilfsmittel von Bedeutung. Aus ihnen hat sich im Laufe der letzten Jahre ein fest umrissenes Teilgebiet der additiven Zahlentheorie entwickelt mit einer großen Zahl reizvoller Probleme und interessanter Resultate, über die im Zusammenhang zu berichten eine lohnende Aufgabe ist.

Ich gehe zunächst auf die grundlegenden Begriffe der Dichte und der Summe von Mengen natürlicher Zahlen ein, bringe dann Abschätzungen von E. Landau und I. Schur für die Dichte der Summe zweier Mengen und beweise anschließend die beiden Hauptsätze über das Darstellungsproblem. In diesem ersten Teil des Berichts (§§ 1—4) gebe ich die Beweise möglichst vollständig, da es mir darauf ankommt, auch die Methoden zu zeigen; sie gestatten, trotz ihres elementaren Charakters sehr allgemeine Aussagen abzuleiten.

Im zweiten Teil (§§ 5—6) wende ich mich den weiteren Untersuchungen über die Dichte zu, fasse mich aber in bezug auf die Beweise kürzer. Ich bringe hier Abschätzungen von A. Khintchine, A. S. Besicovitch und A. Brauer für die Dichte der Summe von Mengen und gehe dann näher auf das ungelöste Problem dieses Gebietes ein: die Abschätzung der Dichte einer Summe durch die Summe der Einzeldichten.

Alle diese Fragen haben ihre eigentliche Bedeutung für Mengen von positiver Dichte. Es folgt im dritten Teil (§§ 7—8) eine Darstellung der Untersuchungen über Mengen mit verschwindender Dichte, wozu Sätze von P. Erdös, H. Rohrbach und A. Stöhr gehören. Schließlich bringe ich noch eine Zusammenstellung der Dichtewerte für eine Anzahl spezieller Mengen (§ 9).

Darüber hinaus enthält die vorliegende zusammenfassende Darstellung der mit dem neuen Dichtebegriff zusammenhängenden Fragen naturgemäß auch einige neue Ergebnisse. Von diesen will ich hier nur Satz 14 erwähnen.

Im folgenden bedeuten kleine lateinische Buchstaben außer e natürliche Zahlen, große deutsche Buchstaben Mengen von natürlichen Zahlen, insbesondere $\mathfrak{Z}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, $\overline{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge zu $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{Z}$. Ferner ist $A(x)$ für jedes x die Anzahl der Elemente $a \leqq x$ von $\mathfrak{A}$, $A(0) = 0$, $\overline{A}(x)$ die entsprechende Anzahl für $\overline{\mathfrak{A}}$, so daß $A(x) + \overline{A}(x) = x$ ist. Auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Berichts wird durch Nummern in eckigen Klammern hingewiesen.

§ 1. Die Dichte.

1. Unter der *Dichte* $D(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ versteht man die untere Grenze[2]) der Quotienten $\frac{A(x)}{x}$ für $x = 1, 2, 3, \ldots$, in Zeichen

$$D(\mathfrak{A}) = \underline{\text{fin}}\, \frac{A(x)}{x} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Man setze $D(\mathfrak{A}) = \alpha$. Dann besagt (1): Für alle x ist $A(x) \geqq \alpha x$, und ist α_0 eine Zahl mit $A(x) \geqq \alpha_0 x$ für alle x, so ist $\alpha \geqq \alpha_0$. Offenbar gilt $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Es ist $\alpha = 0$ stets dann, wenn $\mathfrak{A}$ nicht die Zahl 1 enthält. *Eine Menge positiver Dichte muß also stets die* 1 *enthalten.* Dies wirkt besonders kraß, wenn $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{Z}$ ohne die 1 ist. Allgemeiner hat die Menge, die aus $\mathfrak{Z}$ durch Weglassung der Zahl n entsteht, die Dichte $1 - \frac{1}{n}$. Diese Abhängigkeit der Dichte vom Anfang der Menge $\mathfrak{A}$ wird zunächst als befremdend empfunden werden, da sie nicht dem infinitesimalen Charakter entspricht, den man bei einem Dichtebegriff erwartet. Demgegenüber hat man jedoch den Vorteil, daß die gewonnenen Ergebnisse für alle natürlichen Zahlen gelten, nicht nur für alle hinreichend großen Zahlen. Ferner liefert die Definition (1) eine weitere Eigenschaft dieser Dichte, die für das Folgende von wesentlicher Bedeutung ist: *Dann und nur dann ist* $\alpha = 1$, *wenn* $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ *ist.*

2. Für eine Berechnung von α beachte man: Ist

$$\alpha_n = \mathrm{Min}\left(\frac{A(1)}{1}, \frac{A(2)}{2}, \ldots, \frac{A(n)}{n}\right),$$

so ist, wie man leicht nachweist, $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$. Ferner ist zuweilen folgende Bemerkung nützlich (vgl. [31]): Man bewerte jedes x mit einem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem x zu $\mathfrak{A}$ gehört oder nicht.

2) Schnirelmann [29] betrachtet eine beliebige untere Schranke $\sigma > 0$ und definiert: $\mathfrak{A}$ hat eine (positive) Dichte $\geqq \sigma$, wenn $\frac{A(x)}{x} \geqq \sigma$ ist für $x = 1, 2, 3, \ldots$. Die obige präzisere Fassung geht auf Landau [19] zurück.

Dadurch erhält man abwechselnd Plus- und Minusfolgen, und der Quotient $\frac{A(x)}{x}$ steigt, solange x eine Plusfolge durchläuft, und fällt, solange x eine Minusfolge durchläuft. Am Ende einer Minusfolge hat er also stets ein Minimum, und man braucht nur die untere Grenze dieser Minima zu bestimmen. Z. B. ergibt sich auf diese Weise für die Menge $\mathfrak{A}$ der Zahlen a, die entweder $\equiv 1 \pmod k$ oder $\equiv l + 1 \pmod k$ sind $(1 \leqq l \leqq k - 1)$, die Dichte $D(\mathfrak{A}) = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{l}, \frac{2}{k}\right)$. Denn die Enden von Minusfolgen liegen bei $x = \nu k$ bzw. $x = l + \nu k$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. An diesen Stellen hat der Quotient $\frac{A(x)}{x}$ die Werte $\frac{2}{k}$ bzw. $\frac{2\nu + 1}{l + \nu k}$, woraus sich entsprechend den Fällen $k < 2l$ und $k \geqq 2l$ die behauptete Dichte ergibt.

Im allgemeinen ist die Berechnung der Dichte einer gegebenen Menge aber nicht leicht und meist nur mit analytischen Hilfsmitteln möglich. Man vergleiche hierzu auch § 9.

3. Ersetzt man in der Definition (1) die untere Grenze durch den limes inferior, so erhält man die Dichte

$$\alpha^* = D^*(\mathfrak{A}) = \varliminf \frac{A(x)}{x} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

die als *Dichte im Großen* oder als *asymptotische Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird. Dieser Dichtebegriff hat infinitesimalen Charakter. Offenbar gilt

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha^* \leqq 1.$$

Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die Menge der positiven geraden Zahlen, so ist

$$\frac{A(x)}{x} = \frac{1}{2} \text{ für } x = 2x' \text{ bzw.} = \frac{x'}{2x' + 1} \text{ für } x = 2x' + 1,$$

also $\alpha^* = \frac{1}{2}$, während $\alpha = 0$ ist, da 1 nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört.

Für die Hauptanwendung (vgl. Nr. 8) interessiert der Fall *positiver* Dichte. Da die Dichte im Großen α^* unter Umständen leichter zu bestimmen ist als die eigentliche Dichte α (vgl. Nr. 4), so ist mitunter folgender Satz nützlich (vgl. [30]):

Satz 1: *Dann und nur dann ist $\alpha > 0$, wenn $\alpha^* > 0$ ist und 1 zu $\mathfrak{A}$ gehört.*

Beweis: Die Bedingungen sind offenbar notwendig. Ist umgekehrt $\alpha^* > 0$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für alle $x > n_0$ stets $\frac{A(x)}{x} \geqq \alpha^* - \varepsilon$ ist. Man wähle $\varepsilon < \alpha^*$. Ferner sei $\mu = \operatorname{Min} \frac{A(x)}{x}$ $(x = 1, 2, \ldots, n_0)$. Dann ist, da 1 zu $\mathfrak{A}$ gehört, $\mu \geqq \frac{1}{n_0} > 0$ und folglich auch $\alpha = \operatorname{Min}(\alpha^* - \varepsilon, \mu) > 0$.

Folgerung: *Ist* $\alpha^* > 0$ *und* 1 *nicht in* $\mathfrak{A}$, *ferner* $\mathfrak{A}'$ *die aus* $\mathfrak{A}$ *und* 1 *bestehende Menge, so ist* $D(\mathfrak{A}') > 0$.

4. Wenn für eine Menge $\mathfrak{A}$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = \delta \tag{3}$$

existiert, so heißt δ die *natürliche Dichte* von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\alpha^* = \delta$, d. h. die Dichte im Großen gleich der natürlichen Dichte. Ist der Grenzwert (3) nicht vorhanden, so bezeichnet man

$$\underline{\lim} \frac{A(x)}{x} = \underline{\delta} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim} \frac{A(x)}{x} = \overline{\delta} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

als *untere* bzw. *obere natürliche Dichte* von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\alpha^* = \underline{\delta}$, also die Dichte im Großen gleich der unteren natürlichen Dichte.

Ist $\mathfrak{A}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, denen eine bestimmte Eigenschaft E zukommt, so daß $\overline{\mathfrak{A}}$ alle und nur die Zahlen enthält, die die Eigenschaft E nicht haben, und hat $\overline{\mathfrak{A}}$ die natürliche Dichte 0, so sagt man: *fast alle* natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft E. Diesen Sachverhalt kann man jetzt auch durch $\alpha^* = 1$ charakterisieren. Hat nämlich $\overline{\mathfrak{A}}$ die natürliche Dichte 0, so folgt aus $A(x) + \overline{A}(x) = x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{A}(x)}{x} = 1,$$

also auch $\alpha^* = 1$. Ist umgekehrt $\alpha^* = \underline{\lim} \frac{A(x)}{x} = 1$, so ist wegen $\frac{A(x)}{x} \leqq 1$ auch $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = 1$, und aus $A(x) + \overline{A}(x) = x$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{A}(x)}{x} = 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = 0.$$

§ 2. Summe, Basis und Ordnung.

5. Sind k Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ von natürlichen Zahlen gegeben, so versteht man unter der *Summe* (vgl. [29])

$$\mathfrak{C} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{A}_\varkappa$$

die Gesamtheit der Zahlen

$$c = \sum_{\varkappa=1}^{k} \varepsilon_\varkappa a_\varkappa \qquad \left(\begin{array}{c} a_\varkappa \subset \mathfrak{A}_\varkappa,\ \varepsilon_\varkappa = 0 \text{ oder } 1, \\ \text{mindestens ein } \varepsilon_\varkappa = 1 \end{array}\right). \tag{4}$$

Die Summenmenge $\mathfrak{C}$ besteht also aus allen Summen von Zahlen der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$, wobei aber in einer solchen Summe aus jeder Menge höchstens ein Element vorkommt; insbesondere enthält $\mathfrak{C}$ alle Zahlen der einzelnen Mengen $\mathfrak{A}_\varkappa$. Diese Addition von Mengen natürlicher Zahlen ist assoziativ und kommutativ.

Sind speziell alle Mengen $\mathfrak{A}_\varkappa$ einander gleich, $\mathfrak{A}_\varkappa = \mathfrak{A}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, so setzt man

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} \mathfrak{A} = k\mathfrak{A}.$$

6. Gibt es für zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ eine natürliche Zahl s mit

$$\mathfrak{M} \leqq s\mathfrak{A}, \tag{5}$$

so heißt $\mathfrak{A}$ eine *Basis*[3]) *endlicher Ordnung für die Menge* $\mathfrak{M}$. Ist h die kleinste Zahl mit $\mathfrak{M} \leqq h\mathfrak{A}$, so heißt h die *Ordnung von* $\mathfrak{A}$ *in bezug auf* $\mathfrak{M}$. Mit anderen Worten: Es läßt sich dann jede Zahl aus $\mathfrak{M}$ als Summe von höchstens h Zahlen aus $\mathfrak{A}$ darstellen, und es gibt Zahlen in $\mathfrak{M}$, die sich nicht mit weniger als h Summanden aus $\mathfrak{A}$ darstellen lassen. Ist speziell $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$, so steht in (5) das Gleichheitszeichen, und die kleinste Zahl h mit $h\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ heißt dann kurz die *Ordnung von* $\mathfrak{A}$. Z. B. hat die Menge der Quadratzahlen die Ordnung 4, aber in bezug auf die Menge der Primzahlen von der Form $4x + 1$ die Ordnung 2. Die Menge der k-ten Potenzen hat die Ordnung $g(k)$, und nach dem Schnirelmannschen Satz ist die Menge der Primzahlen eine Basis endlicher Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen.

7. Ist $\mathfrak{B}$ eine Menge, die alle Elemente von $\mathfrak{M}$ bis auf endlich viele enthält ($\mathfrak{B}$ braucht dabei nicht Teilmenge von $\mathfrak{M}$ zu sein), so schreibe ich, um für diese Aussage einen kurzen Ausdruck zu haben: $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{M}$ [4]). Gibt es dann für eine Menge $\mathfrak{A}$ ein s^* mit der Eigenschaft

$$s^*\mathfrak{A} \sim \mathfrak{M},$$

so heißt $\mathfrak{A}$ eine *Basis von endlicher Ordnung im Großen für die Menge* $\mathfrak{M}$. Ist h^* die kleinste Zahl derart, daß $h^*\mathfrak{A}$ bei passendem m_0 alle Zahlen $m > m_0$ von $\mathfrak{M}$ enthält, so heißt h^* die *Ordnung von* $\mathfrak{A}$ *im Großen in bezug auf* $\mathfrak{M}$. Es läßt sich dann jede hinreichend große Zahl aus $\mathfrak{M}$ als Summe von höchstens h^* Zahlen aus $\mathfrak{A}$ darstellen, aber es gibt immer wieder eine Zahl in $\mathfrak{M}$, die sich nicht mit weniger als h^* Zahlen aus $\mathfrak{A}$ darstellen läßt. Ist speziell $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$, so heißt die (im obigen Sinne) kleinste Zahl h^* mit $h^*\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ kurz die *Ordnung von* $\mathfrak{A}$ *im Großen* oder die *asymptotische Ordnung von* $\mathfrak{A}$. Z. B. hat die Menge der k-ten Potenzen die Ordnung $G(k)$ im Großen, und nach Vinogradow hat die Menge der Primzahlen in bezug auf die Menge der positiven ungeraden Zahlen die Ordnung 3 im Großen.

---

3) Diese Definition weicht von der Schnirelmannschen Basisdefinition [29] etwas ab; sie ist ferner in bezug auf die Ordnung präziser als meine frühere Definition (vgl. [25]).

4) Diese Schreibweise (gelesen etwa: $\mathfrak{B}$ asymptotisch gleich $\mathfrak{M}$) soll also nur abkürzende Bedeutung haben.

8. Der Zusammenhang zwischen Dichte und Ordnung wird nun durch die beiden Hauptsätze gegeben (vgl. [29]), die folgendermaßen lauten:

Hauptsatz I: *Eine Menge natürlicher Zahlen von positiver Dichte besitzt stets eine endliche Ordnung.*

Hauptsatz II: *Eine Menge natürlicher Zahlen von positiver Dichte im Großen hat eine endliche Ordnung im Großen, wenn die Elemente der Menge teilerfremd sind.*

Diese Sätze, deren Beweise ganz elementar zu führen sind (§ 4), zeigen die Bedeutung des neuen Dichtebegriffs. Durch sie wird das allgemeine Darstellungsproblem auf die Berechnung der Dichte der gegebenen Menge $\mathfrak{A}$ zurückgeführt. Die Natur der Elemente spielt dabei keine Rolle. Man braucht sogar nur zu wissen, ob die Dichte von $\mathfrak{A}$ positiv (> 0) ist. Dieser Nachweis ist also die eigentliche Schwierigkeit des Darstellungsproblems.

9. Für Beweis und Anwendung der Hauptsätze ist nun die folgende Frage wesentlich: *Wie verhält sich die Dichte bei der Addition von Mengen?* Trivialerweise ist die Dichte der Summe mindestens so groß wie die Dichte jedes Summanden. Man wird jedoch erwarten, daß sie im allgemeinen größer ist. Die Menge der Primzahlen $\mathfrak{P}$ z. B. hat, da 1 nicht dazugehört, die Dichte 0, ebenso, wie etwa aus dem Primzahlsatz folgt, die aus 1 und $\mathfrak{P}$ bestehende Menge $\mathfrak{P}'$; der Hauptsatz I ist also nicht anwendbar. Man kann aber zeigen (vgl. [29]), daß bereits die Menge $2\,\mathfrak{P}'$ eine positive Dichte besitzt. Durch Anwendung von Hauptsatz I folgt daraus, daß auch $\mathfrak{P}'$ eine endliche Ordnung hat, d. h. der in der Einleitung genannte Schnirelmannsche Satz, da man die etwaigen Einsen einer Darstellung zu Zweien und Dreien zusammenfassen kann.

Abschätzungen für die Dichte einer Summe nach unten sind also für das Darstellungsproblem von großer Bedeutung. Ich unterscheide die Fälle, daß beide Summanden von positiver Dichte sind (§§ 3 und 5), und daß ein Summand positive, der andere verschwindende Dichte besitzt (§ 7). Schließlich werden noch Summen der Dichte 1 betrachtet, deren Summanden die Dichte 0 haben (§ 8).

10. Beiläufig sei erwähnt, daß die entsprechende Frage, wie sich die Ordnung bei der Addition von Mengen verhält, leicht zu entscheiden ist. Ist nämlich h die Ordnung von $\mathfrak{A}$, k die Ordnung von $\mathfrak{B}$, l die Ordnung von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so ist offenbar $l \leqq \text{Min}\,(h, k)$. Es kann aber im allgemeinen *keine* Verkleinerung von l erreicht werden. Es sei z. B. $\mathfrak{A}$ für $n > 1$ die Menge der Zahlen $a \equiv 1, 2, \ldots, n \pmod{n^2}$,

$\mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $b \equiv 1 \pmod{n^2}$. Dann ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $c \equiv 1, 2, \ldots, n+1 \pmod{n^2}$, und man findet: $h = n$, $k = n^2$, $l = n$. Denn es ist $\mathfrak{A} = n\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (n+1)\mathfrak{B}$ und $(n-1)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = (n^2 - 1)\mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, $n(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}$.

11. Bei den hier betrachteten Untersuchungen ist auch ein etwas engerer Summenbegriff für Mengen von natürlichen Zahlen eingeführt worden (vgl. [3]). Danach versteht man unter der *Summe* $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Zahlen

$$c = a + \varepsilon b \qquad (a \subset \mathfrak{A},\ b \subset \mathfrak{B},\ \varepsilon = 0 \text{ oder } 1). \tag{6}$$

Offenbar ist

$$\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \quad D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \leqq D(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}).$$

Jedoch ist diese Summenbildung weder kommutativ noch assoziativ.

§ 3. Abschätzungen für die Dichte einer Summe. I.

12. Ich nenne zunächst einige einfache, aber grundlegende Sätze. Allgemein gilt (vgl. [31]):

Hilfssatz 1: *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, und ist x eine Zahl aus $\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$, so ist für jedes y mit $0 \leqq y < x$*

$$x - y - 1 \geqq A(x - y - 1) + B(x) - B(y). \tag{7}$$

Beweis: Für $y = x - 1$ ist (7) erfüllt, da dann beiderseits 0 steht. Für $y < x - 1$ seien $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die Zahlen $< x - y$ von $\mathfrak{A}$. Dann ist $r = A(x - y - 1)$, und die $r + 1$ Zahlen $x, x - a_1, \ldots, x - a_r$ gehören, weil x nicht in $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ liegt, zu $\overline{\mathfrak{B}}$. Ist ξ eine beliebige dieser Zahlen, so ist ferner $y < \xi \leqq x$. Daher folgt

$$\overline{B}(x) - \overline{B}(y) \geqq A(x - y - 1) + 1,$$

$$x - B(x) - y + B(y) \geqq A(x - y - 1) + 1.$$

Dies ergibt (7).

Wenn x nicht zu $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gehört, liegt x auch nicht in $\mathfrak{A}$, und es ist $A(x-1) = A(x)$. Daher erhält man aus Hilfssatz 1 für $y = 0$:

Hilfssatz 2: *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, und ist x eine Zahl aus $\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$, so gilt*

$$x - 1 \geqq A(x) + B(x). \tag{8}$$

Hieraus folgt leicht (vgl. [29]) der wichtige

Satz 2: *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Mengen mit den Dichten α bzw. β, und ist $\alpha + \beta \geqq 1$, so ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$.*

Beweis: Wäre $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \neq \mathfrak{Z}$, so gäbe es ein x in $\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}$. Für dieses x wäre aber nach (8)

$$x - 1 \geqq A(x) + B(x) \geqq \alpha x + \beta x = (\alpha + \beta) x \geqq x.$$

Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die Menge der abundanten Zahlen (einschließlich der vollkommenen Zahlen), also $\overline{\mathfrak{A}}$ die Menge der defizienten Zahlen, so ist bekanntlich (vgl. [1]) $A(x) < 0{,}47\,x$ für alle x, also $\overline{A}(x) > 0{,}53\,x$ für alle x. Daher ist $\overline{\alpha} = D(\overline{\mathfrak{A}}) \geqq 0{,}53$ und $2\,\overline{\alpha} > 1$, nach Satz 2 also $2\,\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{Z}$. Es läßt sich also jede natürliche Zahl als Summe zweier defizienter Zahlen darstellen.

13. Es ist bemerkenswert, daß sich Satz 2 mit einer kleinen Einschränkung auch auf die Dichte im Großen übertragen läßt. Es gilt nämlich

Satz 2*: *Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Dichten α^* und β^* im Großen und ist $\alpha^* + \beta^* > 1$, so ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$.*

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_1 und ein n_2, so daß $A(x) \geqq (\alpha^* - \varepsilon)\,x$ ist für $x \geqq n_1$ und $B(x) \geqq (\beta^* - \varepsilon)\,x$ ist für $x \geqq n_2$. Man setze $\alpha^* + \beta^* = 1 + 2\,\vartheta$ $(\vartheta > 0)$ und wähle ein $\varepsilon \leqq \vartheta$. Dann gehören alle $x \geqq n_0 = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$ zu $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Anderenfalls wäre nämlich, falls ein $x \geqq n_0$ nicht zu $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gehört, für dieses x nach (8)

$$x - 1 \geqq A(x) + B(x) \geqq (\alpha^* - \varepsilon)\,x + (\beta^* - \varepsilon)\,x \geqq (\alpha^* + \beta^* - 2\,\vartheta)\,x = x.$$

Dagegen genügt die Voraussetzung $\alpha^* + \beta^* \geqq 1$ für die Gültigkeit von Satz 2* nicht mehr. Denn wenn $\mathfrak{A}$ die Menge der positiven geraden Zahlen und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ ist, so ist (vgl. Nr. 3) $\alpha^* = \beta^* = \frac{1}{2}$, aber $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \not\sim \mathfrak{Z}$.

14. Gegeben seien jetzt die Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{C} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ mit den Dichten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und γ. Dann ist trivialerweise $\gamma \geqq \alpha_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Bei der Abschätzung von γ nach unten handelt es sich nun darum, möglichst günstige untere Schranken $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ derart zu bestimmen, daß für jede Wahl der Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ mit den Dichten α_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

$$\gamma \geqq \operatorname{Min}(1, \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \tag{9}$$

ist. Dabei hat man noch zu beachten: Ist $\gamma = 1$, so ist (9) stets erfüllt. Um also für eine Funktion $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ zu beweisen, daß sie eine Schranke im Sinne von (9) darstellt, muß man nur zeigen, daß

$$\gamma \geqq \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \text{für} \quad \gamma < 1 \tag{10}$$

ist. Und ist einmal $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq 1$, so bedeutet (9) und ebenso (10), daß $\gamma = 1$ ist, da γ nicht größer als 1 sein kann.

15. Da die Summenbildung assoziativ ist, beschränkt man sich im allgemeinen auf den Fall $n = 2$ und gewinnt die Abschätzungen für $n > 2$ durch Iteration. Im Falle $n = 2$ werde $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ gesetzt. Dann gelten zunächst die in Satz 3 (vgl. [19], [21]) und Satz 4 (vgl. [31]) formulierten Abschätzungen.

Satz 3: *Für die Mengen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *mit den Dichten* α, β *und* $\gamma < 1$ gilt

$$\gamma \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta. \tag{11}$$

Beweis: Wegen $\gamma < 1$ ist $\alpha < 1$, so daß $\mathfrak{A}$ nicht alle natürlichen Zahlen enthält. Sind a und $a + l + 1$ zwei aufeinanderfolgende Zahlen von $\mathfrak{A}$, so möge das Fehlen der Zahlen $a + 1, a + 2, \ldots, a + l$ für $l \geqq 1$ als eine Lücke von der Länge l in $\mathfrak{A}$ gekennzeichnet werden. Zu jeder Zahl von $\mathfrak{A}$ vor einer Lücke addiere man so weit die ersten Elemente von $\mathfrak{B}$, wie die Summe noch in die Lücke hineinfällt. Auf diese Weise erhält man, einschließlich der Elemente von $\mathfrak{A}$, lauter verschiedene Elemente von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Hat $\mathfrak{A}$ unterhalb x Lücken von den Längen $l_1, l_2, \ldots, l_m$ (wobei, falls x nicht zu $\mathfrak{A}$ gehört, sondern $a_k < x$ das größte Element von $\mathfrak{A}$ unterhalb x ist, $l_m = x - a_k$ zu setzen ist), so ist deren Gesamtlänge $\sum_{\mu=1}^{m} l_\mu = x - A(x)$, und da in einer Lücke von der Länge l_μ sich $B(l_\mu)$ Zahlen von $\mathfrak{B}$ hinzufügen lassen, erhält man also mindestens

$$A(x) + \sum_{\mu=1}^{m} B(l_\mu) \geqq A(x) + \beta \sum_{\mu=1}^{m} l_\mu = A(x) + \beta(x - A(x))$$

verschiedene Zahlen aus $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ unterhalb x. Daher ist für jedes x

$$C(x) \geqq A(x) + \beta(x - A(x)) = A(x)(1 - \beta) + \beta x \geqq (\alpha + \beta - \alpha\beta)\, x,$$

also $\gamma \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta$.

Der Beweis zeigt, daß sogar $D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta$ ist, da man nur Zahlen aus $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ berücksichtigt.

Satz 4: *Für die Mengen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ *mit den Dichten* α, β $(\alpha \leqq \beta)$ *und* $\gamma < 1$ *gilt*

$$\gamma \geqq \frac{\beta}{1 - \alpha}. \tag{12}$$

Beweis: Wegen $\gamma < 1$ ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \neq \mathfrak{Z}$. Die Elemente von $\bar{\mathfrak{C}}$ seien, nach wachsender Größe geordnet, $x_1, x_2, \ldots$, ferner sei $x_0 = 0$. Dann gilt nach (7) für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_\nu - x_{\nu-1} - 1 \geqq B(x_\nu) - B(x_{\nu-1}) + A(x_\nu - x_{\nu-1} - 1).$$

Hieraus folgt durch Summation von $\nu = 1$ bis $\nu = h$, da $A(x) \geqq \alpha x$ auch für $x = 0$ gilt,

$$x_h - h \geqq B(x_h) + \sum_{\nu=1}^{h} A(x_\nu - x_{\nu-1} - 1) \geqq B(x_h) + \alpha(x_h - h).$$

Nun ist $h = \bar{C}(x_h)$, d. h. $x_h - h = C(x_h)$, also gilt für jedes x aus $\bar{\mathfrak{C}}$ (und das genügt nach Nr. 2)

$$C(x) \geqq B(x) + \alpha C(x) \geqq \beta x + \alpha C(x),$$

$$C(x) \geqq \frac{\beta}{1-\alpha} x, \text{ d. h. } \gamma \geqq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Denn mit $\gamma < 1$ ist $\alpha < 1$. Da man nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschen darf, gilt ebenso

$$C(x) \geqq \frac{\alpha}{1-\beta} x, \text{ d. h. } \gamma \geqq \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Für $\alpha < \beta$ ist aber die erste Abschätzung die bessere.

16. Die Abschätzungen (11) und (12) lassen sich leicht auf den Fall $n > 2$ übertragen. Man setze

$$D(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_\nu) = \gamma_\nu \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n), \quad \gamma_n = \gamma.$$

Dann erhält man aus (11) in der Form

$$1 - \gamma_2 \leqq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$$

durch fortgesetztes Anwenden für $\gamma < 1$

$$1 - \gamma \leqq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_n),$$

$$\gamma \geqq 1 - \prod_{\nu=1}^{n} (1 - \alpha_\nu). \tag{13}$$

Die Iteration von (12) in der Form

$$\gamma_2 \geqq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$$

ergibt in analoger Weise für $\gamma < 1$

$$\gamma_3 \geqq \frac{\gamma_2}{1 - \alpha_3} \geqq \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}, \ldots, \gamma_n \geqq \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\cdots(1-\alpha_n)}.$$

Da es auf die Reihenfolge der Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ nicht ankommt, ist also

$$\gamma \geqq \underset{\varkappa = 1, 2, \ldots, n}{\operatorname{Max}} \frac{\alpha_\varkappa (1 - \alpha_\varkappa)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - \alpha_\nu)} = \frac{\alpha_n}{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} (1 - \alpha_\nu)}, \tag{14}$$

wenn $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ ist. Denn dann wird das Maximum für $\alpha_\varkappa = \alpha_n$ angenommen, da $\alpha - \alpha^2$ seinen größten Wert bei $\alpha = \frac{1}{2}$ hat und $\alpha_{n-1} + \alpha_n < 1$ ist wegen $\gamma < 1$ und Satz 2.

§ 4. Beweis der beiden Hauptsätze.

17. Der Wortlaut der Sätze ist in Nr. 8 formuliert. Beim Beweis von I bzw. II schließe ich mich den Darstellungen von Landau [19], [21] bzw. Schur [30] an.

Beweis von I: Ist $\mathfrak{A}$ die gegebene Menge mit $\alpha > 0$ und ist $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, so folgt aus Satz 2, daß $2\,\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ ist, also $\mathfrak{A}$ die Ordnung 1 (für $\alpha = 1$) oder 2 (für $\frac{1}{2} \leqq \alpha < 1$) hat. Es sei also $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und k die kleinste Zahl derart, daß

$$(1-\alpha)^k \leqq \tfrac{1}{2}$$

ist. Dann ist nach (13) für $n = k$ und $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ $\quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$

$$D(k\mathfrak{A}) \geqq 1 - (1-\alpha)^k \geqq \tfrac{1}{2},$$

also $2k\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ nach Satz 2. Die Ordnung h von $\mathfrak{A}$ ist also höchstens $2k$.

Oder man bestimmt die kleinste Zahl l derart, daß

$$(1-\alpha)^{l-1} \leqq \alpha$$

ist. Dann ist $h \leqq l$, da nach (14) für $n = l$ und $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ $\quad (\nu = 1, 2, \ldots, l)$

$$D(l\mathfrak{A}) \geqq \frac{\alpha}{(1-\alpha)^{l-1}} \geqq 1,$$

also $l\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$ ist.

Man kann hier noch zeigen, daß

$$h \leqq 2\left[\frac{1}{\alpha}\right] \tag{15}$$

ist; es ergibt sich jedoch später eine bessere Abschätzung für h (vgl. Nr. 18, 4).

Beweis von II: Ist $\mathfrak{A}$ die gegebene Menge mit $\alpha^* > 0$ und 1 in $\mathfrak{A}$ enthalten, so ist nach Satz 1 auch $\alpha > 0$, also Hauptsatz II auf Grund von Hauptsatz I richtig. Gehört 1 nicht zu $\mathfrak{A}$, so sei $\mathfrak{A}'$ die aus $\mathfrak{A}$ und 1 bestehende Menge. Dann ist $D(\mathfrak{A}') > 0$ (Nr. 3, Folgerung), also $\mathfrak{A}'$ nach Hauptsatz I von endlicher Ordnung h'. Jedes x läßt sich daher als Summe von höchstens h' Zahlen aus $\mathfrak{A}'$, d. h. in der Form

$$x = m \cdot 1 + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_r} \quad (a_{\alpha_\varrho} \subset \mathfrak{A},\ m + r \leqq h')$$

darstellen. Für beliebiges b aus $\mathfrak{A}$ gilt dann

$$x b = m b + a_{\alpha_1} b + a_{\alpha_2} b + \cdots + a_{\alpha_r} b,$$

d. h. xb läßt sich als Summe von $m + br$ Zahlen aus $\mathfrak{A}$ darstellen. Nun ist $m + br \leqq (m + r)\, b \leqq h' b$. Folglich enthält $h' b \mathfrak{A}$ alle Vielfachen von b. Nach Voraussetzung gibt es nun $s \geqq 2$ zueinander teilerfremde Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_s$ in $\mathfrak{A}$. Für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ enthält $h' b_\sigma \mathfrak{A}$ alle Vielfachen von b_σ, also $k\mathfrak{A}$ mit $k = h' \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma$ alle Vielfachsummen $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_s b_s \neq 0$ mit $x_\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$. Bekanntlich läßt sich aber, wenn $(b_1, b_2, \ldots, b_s) = 1$ ist, jede hinreichend große natürliche Zahl als Vielfachsumme der b_σ mit *nichtnegativen* Koeffizienten darstellen. Also ist $k\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$, d. h. $h^* \leqq k$.

Die Voraussetzung der Teilerfremdheit der Zahlen von $\mathfrak{A}$ in Hauptsatz II ist notwendig. Denn *) die Menge der positiven geraden Zahlen hat keine endliche Ordnung im Großen, obgleich für sie $\alpha^* = \frac{1}{2}$ ist.

§ 5. Abschätzungen für die Dichte einer Summe. II.

18. Die tiefstgelegene der bisher bekannten Abschätzungen der Form (10) ist von Khintchine [17] bewiesen worden. Sie lautet:

Satz 5: *Ist α_1 die kleinste unter den Dichten der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $0 < \alpha_1 < \frac{1}{n}$, so gilt für die Dichte γ von $\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu$*

$$\gamma \geqq n\alpha_1. \tag{16}$$

Einige unmittelbare Folgerungen hieraus sind[5]:

1. Ist $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ und $\alpha_r < \frac{1}{n - r + 1}$, wo r eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist, so ist

$$D\Big(\sum_{\nu=r}^{n} \mathfrak{A}_\nu\Big) \geqq (n - r + 1)\,\alpha_r, \tag{17}$$

also auch $\gamma \geqq (n - r + 1)\,\alpha_r$.

2. Ist $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ und gilt für irgendein r aus $1, 2, \ldots, n$ die Ungleichung $(n - r + 1)\,\alpha_r \geqq 1$, so ist

$$\sum_{\nu=r}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{Z}, \tag{18}$$

worin n auch durch die kleinste Zahl m mit $(m + 1 - r)\,\alpha_r \geqq 1$ ersetzt werden darf.

Ist nämlich m $(r < m \leqq n)$ in dieser Weise bestimmt, ist also $(m - r)\,\alpha_r < 1$, so ist nach (17)

$$D\Big(\sum_{\nu=r}^{m-1} \mathfrak{A}_\nu\Big) \geqq (m - r)\,\alpha_r, \quad \text{ferner} \quad D(\mathfrak{A}_m) \geqq \alpha_r,$$

5) Bezeichnungen wie in § 3.

*) kein Beweis!

also $$D\left(\sum_{\nu=r}^{m-1}\mathfrak{A}_\nu\right) + D(\mathfrak{A}_m) \geqq (m - r + 1)\,\alpha_r \geqq 1,$$

folglich $\sum_{\nu=r}^{m}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{Z}$ nach Satz 2.

3. Ist $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ und $\gamma < 1$, so ist

$$\alpha_r < \frac{1}{n+1-r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Anderenfalls wäre nämlich nach (18) $\gamma = 1$.

4. Für eine einzelne Menge $\mathfrak{A}$ folgt: Ist $\alpha > 0$ die Dichte und h die Ordnung von $\mathfrak{A}$, so ist

$$h \leqq \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1. \tag{20}$$

Wird nämlich m durch $m - 1 < \frac{1}{\alpha} \leqq m$ bestimmt, so ist nach (18) für $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$, $r = 1$, $\alpha_1 = \alpha$ offenbar $h \leqq m$; daraus folgt (20). Für Mengen mit einer Dichte zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 ist (20) genau.

19. Die Bedeutung des Satzes 5 geht aus diesen Folgerungen deutlich hervor. Namentlich die Abschätzung (20) — man vergleiche sie mit (15) — stellt eine schöne quantitative Ergänzung zum Hauptsatz I dar. Auf den Beweis des Satzes 5 muß ich hier leider verzichten, da er für diesen Bericht zu umfangreich ist[6]). Ich will aus dem Beweisgang nur die beiden folgenden Sätze hervorheben, die auch an sich von Interesse sind.

Es sei $\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{C}$, ferner seien α, λ, μ reelle Zahlen mit

$$0 < \alpha < \frac{1}{n}, \quad \frac{n-1}{n} \leqq \lambda < 1 - \alpha, \quad 0 \leqq \mu < \alpha$$

und N eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt (vgl. [17]):

Satz 6: *Ist für alle* $x = 1, 2, \ldots, N$

$$A_\nu(x) \geqq \alpha x - \frac{\nu - 1}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$A_n(x) \geqq \alpha x - \lambda,$$

so ist

$$C(N) \geqq n\alpha N - n\lambda + n - 1. \tag{21}$$

---

6) Für $n = 2$ findet man eine Darstellung des Beweises auch in [21].

Satz 7: *Ist für alle* $x = 1, 2, \ldots, N$

$$A_\nu(x) \geqq \alpha x - \frac{\nu - 1}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

$$A_n(x) \geqq (1 - n\alpha) x - n\mu,$$

so ist

$$C(N) \geqq (1 - \alpha) N - \mu. \tag{22}$$

Aus Satz 6 folgt für $\lambda = \frac{n-1}{n}$, daß $C(N) \geqq n\alpha N$ ist, und da für $\alpha = \alpha_1$ die Voraussetzungen von Satz 6 durch die von Satz 5 erfüllt werden und N beliebig groß gewählt werden darf, ergibt sich Satz 5 aus Satz 6. Das Merkwürdige dabei ist, daß es bisher nicht gelungen ist, Satz 5 anders als auf dem Umweg über den komplizierteren und mit schwächeren Voraussetzungen versehenen Satz 6 zu beweisen, und daß man Satz 6 wiederum bisher nicht ohne Satz 7, sondern nur beide gleichzeitig beweisen kann. Beide Sätze sind für $N = 1$ und beliebige Parameterwerte λ, μ richtig. Der Beweis erfolgt durch einen sehr kunstvollen Induktionsschluß, doch kommt man vollständig mit elementaren Hilfsmitteln aus. Eine Abkürzung dieses Induktionsschlusses hat kürzlich P. Scherk [34] angegeben.

20. Wie den Satz 6 kann man auch Satz 7 zur Abschätzung von γ heranziehen. Wendet man ihn für $\mu = 0$, $\alpha = \alpha_1$ bzw. α_2 auf $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ in dieser Reihenfolge bzw. in der Reihenfolge $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_1$ an, so folgt leicht (vgl. [4]):

Satz 8: *Ist* $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ *und*

$$0 < \alpha_1 < \frac{1}{n}, \; \alpha_n \geqq 1 - n\alpha_1 \quad \textit{bzw.} \quad 0 < \alpha_2 < \frac{1}{n}, \; \alpha_1 \geqq 1 - n\alpha_2,$$

so ist

$$\gamma \geqq 1 - \alpha_1 \quad \textit{bzw.} \quad \gamma \geqq 1 - \alpha_2. \tag{23}$$

21. Neben der Abschätzung (16), die unmittelbar für eine beliebige Anzahl n von Mengen gilt, sind noch zwei weitere Abschätzungen für γ zu nennen, die sich wieder auf den Fall $n = 2$ beziehen. Man setze

$$\alpha' = \underline{\mathrm{fin}}\, \frac{A(x)}{x+1}, \quad \beta' = \underline{\mathrm{fin}}\, \frac{B(x)}{x+1} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann gilt (vgl. [3], sowie die Darstellung in [21]):

Satz 9: *Sind $\alpha > 0$, $\beta > 0$ die Dichten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, und ist $\alpha + \beta' < 1$, so ist*

$$D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \beta', \tag{24}$$

also, falls auch $\alpha' + \beta < 1$ ist,

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}(\alpha + \beta', \alpha' + \beta). \tag{25}$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einer Vertiefung der Schlußweise, die zum Beweise von Satz 3 führt. Der kürzlich von H.-H. Ostmann [23] gegebene vermeintliche Beweis von Satz 9 ist nicht richtig.

Die Voraussetzung $\alpha + \beta' < 1$ bzw. $\alpha' + \beta < 1$ bedeutet keine Einschränkung. Denn aus $\alpha + \beta' \geqq 1$ oder $\alpha' + \beta \geqq 1$ folgt $\gamma = 1$ nach Satz 2, da $\alpha \geqq \alpha'$, $\beta \geqq \beta'$ ist. In der Ungleichung (24) kann das Gleichheitszeichen stehen. Das zeigt das Beispiel: Es sei $n \geqq 3$ und $\mathfrak{A}$ die Menge $1, n, n+1, n+2, \ldots$, $\mathfrak{B}$ die Menge $1, n-1, n, n+1, \ldots$. Dann ist $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ die Menge $1, 2, n, n+1, n+2, \ldots$ und $\alpha = \beta' = \frac{1}{n-1}$, $D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) = \frac{2}{n-1}$.

22. Die Abschätzung (25) für γ stellt nicht unmittelbar eine Abschätzung der Form (10) dar, doch kann man eine solche daraus ableiten (vgl. [4]). Hierzu braucht man

Hilfssatz 3: *Ist $\alpha > 0$ und k durch $\frac{1}{k} < \alpha \leqq \frac{1}{k-1}$ bestimmt, so ist $\alpha' \geqq \frac{1}{k}$.*

Setzt man nämlich $x = qk + r$ ($0 \leqq r < k$, q und r abhängig von x), so ist für $q > 0$ und jedes $x \geqq 1$

$$A(x) \geqq \alpha x = \alpha q k + \alpha r > q + \alpha r, \quad \text{d. h.} \quad A(x) \geqq q + 1,$$

und da dies wegen $\alpha > 0$ auch für $q = 0$ gilt, ist stets

$$\frac{A(x)}{x+1} \geqq \frac{q+1}{qk+r+1} \geqq \frac{q+1}{qk+k} = \frac{1}{k}, \quad \text{d. h.} \quad \alpha' \geqq \frac{1}{k}.$$

Aus Satz 9 und Hilfssatz 3 folgt daher (vgl. [4])

Satz 10: *Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Dichten $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und ist $\gamma < 1$, ferner*

$$\frac{1}{k} < \alpha \leqq \frac{1}{k-1}, \quad \frac{1}{l} < \beta \leqq \frac{1}{l-1}, \tag{26}$$

so ist

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}\left(\alpha + \frac{1}{l}, \beta + \frac{1}{k}\right). \tag{27}$$

Nach (26) ist $k - 1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, $l - 1 = \left[\frac{1}{\beta}\right]$; folglich kann man die Abschätzung (27) auch in der Form

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}\left(\alpha + \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\beta}\right]},\ \beta + \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\alpha}\right]}\right) \tag{28}$$

schreiben oder, etwas weniger scharf, in der Form

$$\gamma \geqq \beta + \frac{\alpha}{1+\alpha} \geqq \alpha + \frac{\beta}{1+\beta} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \beta). \tag{29}$$

Durch Iteration erhält man aus (28) und (29) für $n \geqq 2$ Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die Abschätzungen

$$\gamma \geqq \operatorname*{Max}_{\nu = 1, 2, \ldots, n}\left(\alpha_\nu + \sum_{\substack{\mu = 1\\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\alpha_\mu}\right]}\right) \qquad (\alpha_\mu \neq 0,\ \mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

und

$$\gamma \geqq \operatorname*{Max}_{\nu = 1, 2, \ldots, n}\left(\alpha_\nu + \sum_{\substack{\mu = 1\\ \mu \neq \nu}}^{n} \frac{\alpha_\mu}{1+\alpha_\mu}\right). \tag{31}$$

23. Betrachtet man nun für $n = 2$ die fünf unabhängig voneinander gewonnenen Abschätzungen der Form (10) für γ, nämlich (11), (12), (16), (23) und (28), so erhebt sich die Frage, ob man eine davon als beste ansehen kann. Zunächst ist (28) stets besser als (11); das gilt sogar schon von (29). Denn für $0 < \alpha \leqq \beta$ ist

$$\beta + \frac{\alpha}{1+\alpha} = \beta + \alpha - \frac{\alpha^2}{1+\alpha} > \beta + \alpha - \alpha^2 \geqq \beta + \alpha - \alpha\beta.$$

Daher scheidet (11) aus. Vergleicht man aber die vier übrigen Abschätzungen miteinander, so läßt sich zeigen (vgl. [4]), daß es für jede dieser Abschätzungen Wertepaare α, β gibt, für die sie besser ist als die drei anderen Abschätzungen, sogar bei festem $\alpha < \frac{1}{3}$. Man kann also zusammenfassend feststellen:

Für $0 < \alpha \leqq \beta$, $\gamma < 1$ *ist*

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{\beta}{1-\alpha},\ 2\alpha,\ \alpha + \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\beta}\right]},\ \beta + \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\alpha}\right]}\right), \tag{32}$$

und bezeichnet man dieses Maximum mit M, so gilt ferner

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma \geqq \operatorname{Max}(M, 1-\alpha) & \textit{für} & \beta \geqq 1 - 2\alpha, \\ \gamma \geqq \operatorname{Max}(M, 1-\beta) & \textit{für} & \alpha \geqq 1 - 2\beta. \end{array}\right. \tag{33}$$

24. Aus diesen Abschätzungen kann man nun durch Mittelbildung neue Abschätzungen gewinnen. Denn wenn $\gamma \geqq \varphi(\alpha, \beta)$ und $\gamma \geqq \psi(\alpha, \beta)$ ist, so gilt für beliebige reelle Zahlen $\varkappa$, λ mit $\varkappa > 0$, $\lambda > 0$

$$(34) \qquad \gamma \geqq \frac{\varkappa}{\varkappa + \lambda} \varphi(\alpha, \beta) + \frac{\lambda}{\varkappa + \lambda} \psi(\alpha, \beta).$$

So folgt z. B. aus (16) und (29) für $\varkappa = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\lambda = 2$, $\alpha \leqq \beta$

$$(35) \qquad \gamma \geqq \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1+\alpha}} (\alpha + \beta) > \frac{6}{7} (\alpha + \beta),$$

da $\gamma < 1$, nach (19) also $\alpha < \frac{1}{2}$ ist. Wenn auch die so gewonnenen Abschätzungen nicht besser sein können als die, aus denen sie kombiniert sind, so ist es doch häufig von Vorteil, auch derartige Abschätzungen zur Hand zu haben.

25. Ferner kann man, um Abschätzungen für die Dichte einer Summe von $n > 2$ Mengen aufzustellen, statt *eine* für $n = 2$ gültige Abschätzung zu iterieren, auch sukzessive *mehrere* für $n = 2$ gültige Abschätzungen anwenden. Hierbei hat man zu beachten, daß auf Grund der assoziativen Eigenschaft der Summenbildung viele Möglichkeiten zur Kombination vorhanden sind. Man hat dann unter diesen eine möglichst günstige zu wählen.

Aus (32) und (33) kann man natürlich außer den gemäß (34) gewonnenen Abschätzungen auch auf anderen Wegen Abschätzungen von γ durch α, β bzw. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ erhalten. Man vergleiche hierzu [31], wo lineare Abschätzungen von γ durch die α_ν, sowie Abschätzungen von γ mit Hilfe von Produkten der α_ν, sowie Abschätzungen von $\gamma^\varkappa$ durch Potenzen $\alpha_\nu^\varkappa$ abgeleitet sind, und [4], wo diese Resultate z. T. verschärft sind.

26. Für eine direkte Abschätzung der Dichte γ von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ durch die Dichten α, β von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird man Aussagen darüber zu erhalten versuchen, wieviele Summen $a + b$ mit $a \subset \mathfrak{A}$, $b \subset \mathfrak{B}$ bestimmt verschieden ausfallen. Bei dem Beweise von Satz 3 z. B. geschieht dies in der Weise, daß man — anschaulich gesprochen — in die Lücken der einen Menge ($\mathfrak{A}$) den Anfang der anderen Menge ($\mathfrak{B}$), soweit er Platz findet, einfügt und die dadurch entstehenden Elemente $a + b$ abzählt. Eine ähnliche, nur schärfere Methode wird zum Beweis von Satz 9 benutzt. In diesem Zusammenhang sei auf Untersuchungen von N. P. Romanoff [28] hingewiesen, der die gesuchte Anzahl der Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit $f(a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_l \mid x)$ bezeichnet, wo $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_l$ die Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{B}$ sind, und mehrere Mittelbildungen berechnet, die durch Summierung von $f(a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_l \mid x)$ bei bestimmten Summierungsvorschriften für die $a_\varkappa$ bzw. die b_λ entstehen.

27. Zum Schluß sei noch erwähnt, daß keine der für α, β, γ gefundenen Abschätzungen für die asymptotischen Dichten $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ gültig ist. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die Menge der Zahlen $a \equiv 0$ oder $1 \pmod 6$, $\mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $b \equiv 0$ oder $5 \pmod 6$, also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $c \equiv 0$, 1 oder $5 \pmod 6$, so ist $\alpha^* = \beta^* = \frac{1}{3}$, $\gamma^* = \frac{1}{2}$. Dies zeigt, daß (11), (16), (23), (28) und (29) für $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ nicht gelten. Und ist $\mathfrak{A}$ die Menge der Zahlen $a \equiv 0$, 1 oder $2 \pmod 6$, $\mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $b \equiv 0$, 1 oder $5 \pmod 6$, also $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Menge der Zahlen $c \equiv 0, 1, 2, 3$ oder $5 \pmod 6$, so ist $\alpha^* = \beta^* = \frac{1}{2}$, $\gamma^* = \frac{5}{6}$, und man erkennt hieraus, daß auch (12) für $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ nicht richtig zu sein braucht.

§ 6. Das ungelöste Problem.

28. Im Zusammenhang mit der Frage nach möglichst günstigen unteren Schranken (10) für die Dichte einer Summe von n Mengen ist oft die Vermutung ausgesprochen worden, daß

$$D(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n) \geqq D(\mathfrak{A}_1) + D(\mathfrak{A}_2) + \cdots + D(\mathfrak{A}_n) \tag{36}$$

ist. Diese Ungleichung wäre auf Grund der Assoziativität der Summenbildung für ein beliebiges $n \geqq 2$ richtig, falls sie für $n = 2$ gelten würde. In diesem Paragraphen soll auf die mit dieser noch unbewiesenen Vermutung zusammenhängenden Untersuchungen eingegangen werden.

Vorweg sei bemerkt, daß es sich hierbei wesentlich um ein Problem für die eigentliche Dichte (1) handelt. Für die Dichte im Großen (2) gilt die zu (36) analoge Ungleichung sicher nicht, da dies schon für $n = 2$ nicht der Fall ist, wie jedes der beiden in Nr. 27 genannten Beispiele erkennen läßt. Hinsichtlich einer Vermutung über die Dichte im Großen vergleiche man Nr. 34.

29. Der Satz 5 zeigt, daß die Vermutung (36) im Spezialfall $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ (was nicht notwendig $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_n$ bedeutet) richtig ist. Die Vermutung ($n = 2$)

$$\gamma \geqq \alpha + \beta \tag{37}$$

gilt also für $\alpha = \beta$. Wählt man ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gemäß den Bedingungen

(38) $$0 < \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} < \frac{1}{n}, \quad \alpha_n = 1 - n\alpha_1$$

bzw.

(39) $$\frac{1}{n+1} \leqq \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n < \frac{1}{n}, \quad \alpha_1 = 1 - n\alpha_2,$$

so ist nach Satz 8

$$\gamma \geqq 1 - \alpha_1 = (n-1)\alpha_1 + 1 - n\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

bzw.

$$\gamma \geqq 1 - \alpha_2 = (n-1)\alpha_2 + 1 - n\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Die Vermutung (36) ist also auch in den Spezialfällen (38) und (39) richtig, für $n = 2$ also in den Fällen

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \ \beta = 1 - 2\alpha \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{3} \leqq \beta < \frac{1}{2}, \ \alpha = 1 - 2\beta.$$

Läßt man noch $\gamma = 1$ zu, so zeigt Satz 2, daß (37) auch für alle Wertepaare α, β mit $\alpha + \beta = 1$ gilt.

Durch Kombination der angeführten Spezialfälle kann man nun beliebig viel weitere Fälle ableiten, in denen sich die Vermutung (36) als richtig erweist. Ein Beispiel ist: $n = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{5}$, $\alpha_3 = \frac{3}{5}$.

Ein gewisses Analogon zu (37) gibt schließlich der Satz 9, wo β durch die modifizierte Dichte $\beta' \leqq \beta$, aber $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ durch den schwächeren Summenbegriff $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$, also γ durch $D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \leqq \gamma$ ersetzt ist. Auch dieser Satz macht die Richtigkeit von (37), also auch von (36), sehr wahrscheinlich.

30. Im Zusammenhang mit dieser Vermutung interessieren Abschätzungen wie (35), die durch Mittelbildung gemäß (34) zu gewinnen sind und zeigen, wie weit man an die Vermutung (37) herangekommen ist. Man hat allgemein das Problem aufgeworfen (vgl. [31]):

A. Für jedes $n \geqq 2$ soll die größte Zahl μ_n bestimmt werden, für die stets, d. h. bei beliebiger Wahl der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$,

(40) $$\gamma \geqq \mu_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

wird.

Wenn die Vermutung zutrifft, ist $\mu_n = 1$. Nach (35) ist z. B. $\mu_2 > \frac{6}{7} > 0{,}8571$. Die zur Zeit beste Abschätzung für μ_n hat kürzlich A. Brauer [4] erhalten auf Grund von

Satz 11: *Ist* $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ *und* $\gamma < 1$, *so ist*

(41) $$\gamma \geqq \alpha_n + \frac{3}{4}\alpha_{n-1} + \frac{4}{5}\alpha_{n-2} + \cdots + \frac{n+1}{n+2}\alpha_1.$$

Für $n = 2$ ergibt sich dies folgendermaßen: Nach (27) ist $\gamma \geqq \beta + \frac{1}{k}$, wo $\frac{1}{k} < \alpha \leqq \frac{1}{k-1}$ ist. Also ist $1 \geqq (k-1)\alpha$ und

$$\gamma \geqq \beta + \frac{k-1}{k}\alpha \geqq \beta + \frac{3}{4}\alpha$$

für $k \geqq 4$. Dies gilt ferner für $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$. Denn für $\frac{1}{3} < \alpha \leqq \frac{4}{9}$ ist $\gamma \geqq \beta + \frac{1}{3} \geqq \beta + \frac{3}{4}\alpha$, und für $\frac{4}{9} < \alpha < \frac{1}{2}$ ist wegen $\alpha + \beta < 1$[7]) und (16) $\beta + \frac{3}{4}\alpha < 1 - \frac{1}{4}\alpha < 2\alpha \leqq \gamma$.

Da aber $\gamma < 1$ ist, kommen nach (19) nur Werte $\alpha < \frac{1}{2}$ in Betracht; also gilt

(42)
$$\gamma \geqq \beta + \frac{3}{4}\alpha$$

stets für $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ und $\gamma < 1$.

Entsprechend zeigt man für $n > 2$

(43)
$$\gamma \geqq D(\mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n) + \frac{n+1}{n+2}\alpha_1$$

und erhält induktiv die Behauptung (41).

Durch Mittelbildung (34) zwischen (16) und (42) mit den Gewichten $\varkappa = 1$, $\lambda = 8$ folgt nunmehr (vgl. [4]):

(44)
$$\gamma \geqq \frac{8}{9}(\alpha + \beta),$$

also $\mu_2 \geqq \frac{8}{9} > 0{,}8888$. Analog kann man durch Kombination von (16) mit (41) bzw. (43) zeigen:

$$\mu_3 \geqq \frac{120}{139} > 0{,}8633, \quad \mu_n \geqq \frac{2880}{3361} > 0{,}8576 \qquad (n \geqq 4).$$

31. Für kleine Werte von α $\left(\text{nämlich } \alpha < \frac{1}{3}\right)$ ist die in (35) gewonnene Abschätzung

$$\gamma \geqq \frac{1}{1+\varrho}(\alpha + \beta), \quad \varrho = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha},$$

besser als (44), allgemein läßt sich aber (44) mit den zur Zeit bekannten Resultaten nicht verbessern. Das zeigt das Beispiel $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{5}{12}$. In diesem Fall ist $\alpha + \beta = \frac{3}{4}$ und das Maximum der sich aus (32) und (33) ergebenden unteren Schranken für γ gleich

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{9}(\alpha + \beta).$$

7) Dies folgt aus Satz 2 und $\gamma < 1$.

Daher kann auch durch Kombination der Abschätzungen (32) und (33) der Faktor $\frac{8}{9}$ in (44) nicht vergrößert werden. Es muß eine wesentlich neue, bessere Abschätzung für γ zu den bisher bekannten hinzukommen, wenn eine Verbesserung von (44) erzielt werden soll.

32. Nach Satz 2 muß, wenn $\gamma < 1$ sein soll, auch $\alpha + \beta < 1$ sein. Dies gilt für $n > 2$ noch nicht. Aus (40) und $\mu_n \geqq \frac{2880}{3361}$ folgt für $n > 2$ nur:

Soll $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n$ noch nicht die Menge aller natürlichen Zahlen umfassen, so muß

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < \frac{3361}{2880} = 1{,}16701\ldots$$

sein.

33. Neben dem in Nr. 30 genannten Problem A werden (vgl. [31]) noch drei weitere Probleme zur Diskussion gestellt:

B. Bei gegebenem $m = 1, 2, 3, \ldots$ soll für jedes $n > m$ die größte Zahl $\mu_n^{(m)}$ bestimmt werden, für die stets

$$\gamma \geqq \mu_n^{(m)} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)$$

ist.

C. Für jedes n soll die größte ganze Zahl m_n bestimmt werden, für die stets

$$\gamma \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m_n}$$

ist.

D. Bei gegebenem n soll der kleinste Exponent $\varrho_n \geqq 1$ bestimmt werden, für den stets

$$\gamma^{\varrho_n} \geqq \alpha_1^{\varrho_n} + \alpha_2^{\varrho_n} + \cdots + \alpha_n^{\varrho_n}$$

ist.

Wenn die Vermutung (36) zutrifft, ist $\mu_n^{(m)} = \frac{n}{m}$, $m_n = n$, $\varrho_n = 1$. Eine Abschätzung für $\mu_n^{(m)}$ liefert bereits Satz 5. Denn aus $\gamma \geqq n\,\alpha_1$ folgt $\mu_n^{(1)} = n$, und allgemein ist (vgl. (17)) für jedes $m < n$

$$\gamma \geqq D\Big(\sum_{\nu=m}^{n} \mathfrak{A}_\nu\Big) \geqq (n - m + 1)\,\alpha_m \geqq \left(\frac{n}{m} - 1 + \frac{1}{m}\right)(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m),$$

also
$$\mu_n^{(m)} \geqq \frac{n}{m} - 1 + \frac{1}{m}.$$

Es gilt nun (vgl. [31]):

Setzt man $S_h = \sum_{\nu=1}^{h} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, so ist

$$\mu_n^{(m)} \geqq \frac{\sqrt{n}}{S_n - S_{n-m}} > \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-m}}. \tag{45}$$

Ferner ist für genügend großes n $\left(\text{z. B. } n \geqq \frac{3}{4} m^2\right)$ bei festem $m \geqq 3$

$$\mu_n^{(m)} > \frac{n}{m} - \frac{1}{4}.$$

Soll dann der rechte Ausdruck in (45) mindestens gleich 1 sein, so muß $2\sqrt{n-m} \geqq \sqrt{n}$, d. h. $3n \geqq 4m$ sein. Es ist also

$$m_n \geqq \left[\frac{3n}{4}\right].$$

Würde man hier formal nur wenig mehr, nämlich $m_n \geqq \frac{3n}{4}$, beweisen können, so würde sich für $n = 2$

$$m_2 \geqq \frac{3}{2}, \quad \text{d. h.} \quad m_2 = 2,$$

und damit die Vermutung (37), also auch (36), ergeben.

Die Bestimmung von ϱ_n schließlich gehört zu den am Schluß von Nr. 25 erwähnten Abschätzungen von $\gamma^\varkappa$ durch Potenzen $\alpha_\nu^\varkappa$. Es ist

$$\varrho_n \leqq \frac{\log(3+\sqrt{5})}{\log 2} - 1 = 1{,}3886\ldots;$$

insbesondere gilt also stets

$$\gamma^2 \geqq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2.$$

Diese Abschätzung läßt sich jedoch noch verschärfen. Es gilt sogar

$$\gamma^2 \geqq n\alpha_1^2 + (n-1)\alpha_2^2 + \cdots + 2\alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2,$$

wenn wieder $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ vorausgesetzt wird.

34. Bereits in Nr. 28 habe ich darauf hingewiesen, daß die der Vermutung $\gamma \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu$ entsprechende Vermutung für die asymptotischen Dichten γ^* und α_ν^* $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ nicht richtig ist. Man kann jedoch in Analogie zu Problem A (Nr. 30) die folgende Frage aufwerfen:

A*. Man bestimme für jedes $n \geqq 2$ die größte Zahl μ_n^*, für die stets

$$\gamma^* \geqq \mu_n^* (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_n^*)$$

ist.

Diese Formulierung muß jedoch noch durch zwei Annahmen ergänzt werden. Zunächst soll auch hier die Frage nach einer derartigen Abschätzung im Sinne von Nr. 14, d. h. unter der Annahme $\gamma^* < 1$, verstanden werden. Für $n = 2$ ist also $\alpha^* + \beta^* \leqq 1$ vorauszusetzen, da sonst nach Satz 2* die Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ alle hinreichend großen Zahlen enthält, mithin erst recht $\gamma^* = 1$ gilt. Ferner soll jede Menge $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die 1 enthalten. Denn sonst wäre das Problem A* in trivialer Weise mit $\mu_n^* = \frac{1}{n}$ zu beantworten. Stets ist nämlich, falls α_n^* das größte der α_ν^* bezeichnet,

$$\gamma^* \geqq \alpha_n^* \geqq \frac{1}{n}(\alpha_1^* + \alpha_2^* + \cdots + \alpha_n^*),$$

also $\mu_n^* \geqq \frac{1}{n}$. Bedeutet nun $\mathfrak{A}$ für beliebiges $k \geqq n$ die Menge der Zahlen $a \equiv 0 \pmod k$, so ist, wenn $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ gesetzt wird ($\nu = 1, 2 \ldots, n$), jedes $\alpha_\nu^* = \gamma^* = \frac{1}{k}$, und daher $\mu_n^* \leqq \frac{1}{n}$.

Betrachtet man unter den zusätzlichen Annahmen den Fall $n = 2$, d. h. die Ungleichung

$$\gamma^* \geqq \mu_2^* (\alpha^* + \beta^*),$$

so ist, wie das zweite Beispiel in Nr. 27 zeigt, $\mu_2^* \leqq \frac{5}{6}$. Es gilt jedoch mehr. Ist nämlich $\mathfrak{A}$ die Menge der Zahlen $a \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, also $\alpha^* = \beta^* = \frac{1}{2}$, so hat $\mathfrak{C} = 2\mathfrak{A}$ die asymptotische Dichte $\gamma^* = \frac{3}{4}$, d. h. es ist

$$\mu_2^* \leqq \frac{3}{4}.$$

Man darf vielleicht vermuten, daß hier das Gleichheitszeichen gilt. Denn es ist (vgl. [33])

$$\gamma^* \geqq \frac{3}{4}(\alpha^* + \beta^*)$$

richtig für den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ bei beliebigem zulässigen $\mathfrak{A}$. Der (noch nicht bewiesene) etwas allgemeinere Spezialfall $\alpha^* = \beta^*$ wäre als Analogon zum Satz 5 für $n = 2$ anzusehen.

§ 7. Wesentliche Komponenten.

35. Die bisher mitgeteilten Resultate haben ihre eigentliche Bedeutung für Mengen von *positiver* Dichte. Sie werden trivial, wenn eine oder mehrere der betrachteten Mengen die Dichte 0 haben. Aber schon das in Nr. 8 genannte Beispiel der Mengen der Primzahlen zeigt, daß die Frage nach dem Verhalten der Dichte bei der Addition von Mengen auch zu wesentlichen Ergebnissen führen kann, wenn einige oder alle Summanden die Dichte 0 besitzen. Ich beschränke mich bei den hierher gehörenden Untersuchungen[8]) hauptsächlich auf den Fall

---

8) Für die Untersuchungen der Nrn. 35–37 vgl. auch die Darstellung bei Landau [21].

zweier Mengen und nehme zunächst an, daß nur eine der beiden Mengen eine verschwindende Dichte hat. Dann handelt es sich um die Frage:

Gibt es Mengen $\mathfrak{B}$ *mit* $\beta = 0$, *die die Eigenschaft haben, daß für beliebiges* $\mathfrak{A}$ *mit* $0 < \alpha < 1$ *die Dichte* $D(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) > \alpha$ *ist?*

Eine solche Menge $\mathfrak{B}$ heißt eine *wesentliche Komponente* der Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Khintchine [18] hat die Frage nach ihrer Existenz in bejahendem Sinne beantwortet, indem er zeigte, daß die Menge der Quadratzahlen eine wesentliche Komponente darstellt.

36. Dies Resultat sowie die von A. Buchstab [6] und S. Morimoto [22] gegebenen Verschärfungen sind in dem folgenden Satz von Erdös [12] enthalten, nach dem allgemein jede Basis endlicher Ordnung eine wesentliche Komponente ist:

Satz 12: *Hat* $\mathfrak{A}$ *die Dichte* $\alpha > 0$ *und ist* $\mathfrak{B}$ *eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen, so ist*

$$D(\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \frac{\alpha - \alpha^2}{2h}. \tag{46}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, x beliebig, m eine der Zahlen $1, 2, \ldots, x-1$, ferner $A_m(x)$ bzw. $\bar{A}_m(x)$ bei festem m und veränderlichem a aus $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Zahlen $a + m \leqq x$, die zu $\mathfrak{A}$ bzw. $\bar{\mathfrak{A}}$ gehören. Dann ist $A_m(x) + \bar{A}_m(x) = A(x - m)$, also

$$\sum_{m=1}^{x-1} A(x-m) = \sum_{m=1}^{x-1} A_m(x) + \sum_{m=1}^{x-1} \bar{A}_m(x). \tag{47}$$

Nun ist, wenn $a + m = a'$ gesetzt wird, $\sum\limits_{m=1}^{x-1} A_m(x)$ die Anzahl aller Differenzen $a' - a$ der $A(x)$ Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A}$, also

$$\sum_{m=1}^{x-1} A_m(x) = \tfrac{1}{2}\left(A^2(x) - A(x)\right). \tag{48}$$

Ist ferner $R(x)$ die Anzahl der Elemente $a + b \leqq x$ $(a \subset \mathfrak{A}, b \subset \mathfrak{B})$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören, also

$$R(x) = C(x) - A(x),$$

da $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B}$ ist, und $l(m)$ die Minimalanzahl von Summanden in den Darstellungen von m als Summe von Elementen b aus $\mathfrak{B}$, so ist

$l(m) \le i$

$$\bar{A}_m(x) \leqq l(m)\, R(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots, x-1). \tag{49}$$

Bestimmt man nämlich für jedes a aus $\mathfrak{A}$ mit $a + m \subset \bar{\mathfrak{A}}$, $m = b_1 + b_2 + \cdots + b_{l(m)}$ (feste Zerlegung), $a + m \leqq x$, den kleinsten Index i, für den $a + b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$ in $\mathfrak{A}$, aber $a + b_1 + b_2 + \cdots + b_i$

in $\overline{\mathfrak{A}}$ liegt, und faßt alle a, die zu demselben i gehören, in eine Klasse zusammen, so liegen in jeder Klasse höchstens $\overline{A}_{b_i}(x) \leqq R(x)$ Elemente und für i sind höchstens $l(m)$ Werte möglich.

Nach Voraussetzung ist nun $l(m) \leqq h$. Daher folgt aus (47), (48) und (49)

$$(50)\qquad \begin{aligned} \sum_{m=1}^{x-1} A(m) = \sum_{m=1}^{x-1} A(x-m) &\leqq \tfrac{1}{2}(A^2(x) - A(x)) + R(x)\sum_{m=1}^{x-1} l(m), \\ \sum_{m=1}^{x-1} A(m) &\leqq \tfrac{1}{2}(A^2(x) - A(x)) + (C(x) - A(x))\,h\,x, \end{aligned}$$

also
$$\frac{C(x)}{x} \geqq \frac{\sum\limits_{m=1}^{x-1} A(m)}{h\,x^2} + \frac{A(x)}{x} - \frac{A^2(x) - A(x)}{2\,h\,x^2}.$$

Da nun $A(x) \geqq \alpha\, x$ ist, ist $\sum\limits_{m=1}^{x-1} A(m) \geqq \alpha\,\frac{x^2 - x}{2}$, und man erhält

$$(51)\qquad \frac{C(x)}{x} \geqq \frac{\alpha}{2h} + \frac{A(x)}{x} - \frac{A^2(x)}{2\,h\,x^2} \geqq \alpha + \frac{\alpha}{2h} - \frac{\alpha^2}{2h},$$

weil die Funktion $\xi - \frac{\xi^2}{2\,h\,x}$ für $\xi < h\,x$ monoton steigt und

$$\xi = A(x) \leqq x \leqq h\,x$$

ist. Damit ist (46) bewiesen.

37. Die Ungleichungen (50) zeigen, daß statt der Abschätzung $l(m) \leqq h$, die aus der Basiseigenschaft von $\mathfrak{B}$ folgt, die schwächere Forderung

$$(52)\qquad \sum_{m=1}^{x} l(m) \leqq \lambda\, x \text{ für alle } x$$

genügt mit einem von x unabhängigen λ. Denn dann ist auch $\sum\limits_{m=1}^{x-1} l(m) \leqq \lambda\, x$, und man kann in der zweiten der Ungleichungen (50) h durch λ ersetzen. Ferner ist $\lambda \geqq 1$ (man setze $x = 1$ in (52) und beachte $l(1) = 1$), also bleibt auch die Schlußweise bei (51) gültig. Daher gilt (vgl. [21]) in Verallgemeinerung von Satz 12

Satz 13: *Hat* $\mathfrak{A}$ *die Dichte* $\alpha > 0$ *und* $\mathfrak{B}$ *die Eigenschaft, daß sich jedes* m *als Summe von höchstens* $l(m)$ *Elementen aus* $\mathfrak{B}$ *darstellen läßt, wo* $l(m)$ *der Bedingung* (52) *genügt, so ist*

$$(53)\qquad D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \frac{\alpha - \alpha^2}{2\lambda}.$$

Die Verallgemeinerung, die Satz 13 gegenüber Satz 12 enthält, erstreckt sich in zwei Richtungen. Durch Satz 13 wird nämlich einerseits der Bereich der wesentlichen Komponenten vergrößert, andererseits zugleich der Wirkungsgrad jeder Komponente erhöht, da $\lambda \leqq h$ ist. Auch für eine Basis h-ter Ordnung wird also (53) im allgemeinen besser als (46) sein. Ist z. B. $\mathfrak{B}$ die Menge der Quadratzahlen, so ist $h = 4$, und es kann $\lambda = \frac{19}{6}$ gesetzt werden (vgl. [21]). Daher gilt dann für beliebiges $\mathfrak{A}$

$$D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \geqq \alpha + \frac{3}{19}(\alpha - \alpha^2) > \alpha + \frac{\alpha - \alpha^2}{8}.$$

38. Beide Sätze lassen sich nun auf die Dichte und Ordnung im Großen ausdehnen. Ich fasse das Ergebnis für beide Fälle im folgenden Satz zusammen:

Satz 14: *Hat $\mathfrak{A}$ die Dichte im Großen $\alpha^* > 0$ und $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft, daß ein m_0 existiert derart, daß sich jedes $m > m_0$ als Summe von höchstens $l(m)$ Elementen aus $\mathfrak{B}$ darstellen läßt, wo $l(m)$ der Bedingung*

$$\sum_{m=m_0+1}^{x} l(m) \leqq \lambda^* x \text{ für alle } x > m_0 \tag{54}$$

mit einem von x unabhängigen λ^* genügt, so gilt

$$D^*(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) \geqq \alpha^* + \frac{\alpha^* - \alpha^{*2}}{2\lambda^*}. \tag{55}$$

Zwei Spezialfälle dieses Satzes sind bereits bekannt. Er gilt insbesondere dann, wenn $\mathfrak{B}$ eine Basis von endlicher Ordnung h (Spezialfall $\lambda^* = h$, vgl. [33]) bzw. eine Basis von endlicher Ordnung h^* im Großen (Spezialfall $\lambda^* = h^*$, vgl. [30]) für die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Stets ist $\lambda^* \geqq 1$, da nach (54) wegen $l(m) \geqq 1$ die Ungleichung $\lambda^* x \geqq x - m_0$ für alle $x > m_0$ gilt.

Beweis: Da $\alpha^* > 0$ ist, gibt es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < \alpha^*$ ein n_0, so daß $A(x) \geqq (\alpha^* - \varepsilon)\, x$ ist für alle $x \geqq n_0$. Für jedes x (vgl. (47)) ist nun $\bar{A}_m(x) \leqq A(x - m)$. Im folgenden sei $x > \operatorname{Max}(n_0, m_0 + 1)$. Dann ist

$$\sum_{m=1}^{x-1} \bar{A}_m(x) \leqq \sum_{m=1}^{m_0} A(x - m) + \sum_{m=m_0+1}^{x-1} \bar{A}_m(x), \tag{56}$$

und aus (47), (48) und (56), dann (49) und (54) folgt analog wie oben

$$\begin{aligned}\sum_{m=m_0+1}^{x-1} A(x - m) &\leqq \tfrac{1}{2}(A^2(x) - A(x)) + \sum_{m=m_0+1}^{x-1} \bar{A}_m(x) \\ &\leqq \tfrac{1}{2}(A^2(x) - A(x)) + \lambda^* x\,(C(x) - A(x)).\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\sum_{m=m_0+1}^{x-1} A(x-m) \geqq \sum_{m=1}^{x-1} A(x-m) - m_0 x = \sum_{m=1}^{x-1} A(m) - m_0 x$$

$$\geqq \sum_{m=n_0}^{x-1} A(m) - m_0 x$$

$$\geqq (\alpha^* - \varepsilon)\frac{x^2 - x}{2} - (\alpha^* - \varepsilon)\frac{n_0^2 - n_0}{2} - m_0 x.$$

Aus beidem zusammen ergibt sich, wenn man $(\alpha^* - \varepsilon)\frac{n_0^2 - n_0}{2} = \eta$ setzt und durch $\lambda^* x^2$ dividiert,

$$\frac{C(x)}{x} \geqq \frac{A(x)}{x} - \frac{A^2(x)}{2\lambda^* x^2} + \frac{\alpha^* - \varepsilon}{2\lambda^*} - \frac{\eta}{\lambda^* x^2} - \frac{m_0}{\lambda^* x}$$

und hieraus durch denselben Schluß wie bei (51), der wegen $\lambda^* \geqq 1$ zulässig ist,

$$\frac{C(x)}{x} \geqq \alpha^* - \varepsilon - \frac{(\alpha^* - \varepsilon)^2}{2\lambda^*} + \frac{\alpha^* - \varepsilon}{2\lambda^*} - \frac{\eta}{\lambda^* x^2} - \frac{m_0}{\lambda^* x}$$

$$> \alpha^* + \frac{\alpha^*}{2\lambda^*} - \frac{\alpha^{*2}}{2\lambda^*} - \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\lambda^*} + \frac{\eta}{\lambda^* x^2} + \frac{m_0}{\lambda^* x}\right).$$

Bestimmt man nun zu beliebigem $\varepsilon^* > 0$ ein ε (für das die vorstehende Ungleichung gilt) so, daß $\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\lambda^*} < \frac{\varepsilon^*}{2}$ ist, so sind n_0 und η feste Zahlen, und man kann weiter x so groß wählen, daß $\frac{\eta}{\lambda^* x^2} + \frac{m_0}{\lambda^* x} < \frac{\varepsilon^*}{2}$ ist. Es ist also

$$\frac{C(x)}{x} > \alpha^* + \frac{\alpha^*}{2\lambda^*} - \frac{\alpha^{*2}}{2\lambda^*} - \varepsilon^*$$

für alle hinreichend großen x. Daraus folgt (55).

39. In Verallgemeinerung von Satz 13 hat soeben A. Brauer [5] eine weitere Verschärfung des Wirkungsgrades einer wesentlichen Komponente bewiesen. Er zeigt, daß man unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 13 die Ungleichung (53) durch

$$D(\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}) > \alpha + \frac{\alpha - \alpha^{\frac{3}{2}}}{\lambda}$$

ersetzen darf. Dies ist schärfer als (53), da für $\alpha < 1$

$$1 - \sqrt{\alpha} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{(1-\sqrt{\alpha})^2}{2} > \frac{1-\alpha}{2}$$

ist.

§ 8. Minimalbasen.

40. Der Gedankengang der §§ 1—6 ist, kurz zusammengefaßt, der folgende: Die Menge $\mathfrak{A}$, die eine Basis für die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zahlen sein soll, ist gegeben und die Ordnung h von $\mathfrak{A}$ bzw. die Ordnung im Großen h^* von $\mathfrak{A}$ gesucht. Insbesondere interessiert, ob h und h^* endlich sind. Um dies zu entscheiden, genügt es, die Dichte bzw. die Dichte im Großen von $\mathfrak{A}$ oder einem endlichen Vielfachen von $\mathfrak{A}$ als positiv nachzuweisen. Hierdurch wird man dann auf die Aufgabe geführt, die Dichte einer Summe durch die Summe der Einzeldichten abzuschätzen.

Man hat nun auch die hierzu umgekehrte Fragestellung untersucht, daß die Ordnung h einer Basis für $\mathfrak{Z}$ oder für eine Teilmenge $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{Z}$ vorgeschrieben und eine Menge $\mathfrak{A}$ gesucht wird, die eine Basis h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$ mit möglichst wenig Elementen ist (vgl. [25]). Letzteres ist für endliches $\mathfrak{M}$ klar; für unendliches $\mathfrak{M}$ ist es so zu verstehen, daß für keine andere Basis h-ter Ordnung $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{M}$

$$B(x) \leqq A(x) \text{ für alle hinreichend großen } x$$

ist. $\mathfrak{A}$ heißt dann kurz eine *Minimalbasis h-ter Ordnung für* $\mathfrak{M}$. Die eben genannte Aufgabe lautet dann: *Man bestimme zu vorgegebenem h eine Minimalbasis h-ter Ordnung für* $\mathfrak{M}$.

41. Diese Frage ist noch keineswegs gelöst. Es liegen vorerst nur einige Teilresultate vor. Ich betrachte zunächst den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}$. Man wird erwarten, daß eine Minimalbasis die Dichte 0 hat. Das ist auch richtig, und daher gehören diese Untersuchungen zu dem Fall der Addition von Mengen der Dichte 0, unter Beschränkung auf lauter gleiche Summanden, aber unter der Verschärfung, daß die Summe die Dichte 1 besitzen soll. Es sei zunächst ein einfaches Beispiel für den Extremfall gezeigt, daß ($h = 2$) *die Summe zweier Mengen der Dichte* 0 *die Dichte* 1 *haben kann*, also alle natürlichen Zahlen umfaßt.

Ist $\mathfrak{Q}$ die Menge der Quadratzahlen, so ist bekanntlich $4\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}$ und die Dichte (sogar die natürliche Dichte) von $\mathfrak{Q}$ gleich 0, da $Q(x) \leqq \sqrt{x}$ ist für alle x. Es hat aber auch $2\mathfrak{Q}$ noch die Dichte 0, so daß $2\mathfrak{Q}$ eine Menge der verlangten Art ist. Man berechne die Dichte von $2\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$ etwa folgendermaßen:

Von den natürlichen Zahlen sind *nicht* als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar genau alle durch eine Primzahl $p \equiv -1 \pmod 4$ in ungerader Potenz teilbaren Zahlen. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die ersten

n Primzahlen $\equiv -1 \pmod 4$. Wäre $\alpha = D(\mathfrak{A}) > 0$, so wähle man erst n und danach x so groß, daß

$$(57)\qquad \begin{cases} \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_\nu} + \frac{1}{p_\nu^2}\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 - \left(\frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{p_\nu^2}\right)\right\} < \frac{\alpha}{2}, \\ 3^n < \frac{\alpha}{2} x \end{cases}$$

ist. Nun gilt für die Anzahl $N(x)$ der natürlichen Zahlen $\leqq x$, die durch mindestens eins der p_ν teilbar sind, ohne zugleich durch p_ν^2 teilbar zu sein,

$$N(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{x}{p_\nu}\right] - \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\leqq\nu}}^{n}\left[\frac{x}{p_\mu p_\nu}\right] + - \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{1\leqq\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r\leqq n}\left[\frac{x}{p_{\mu_1} p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_r}}\right] + \cdots,$$

wo die Summation über die verschiedenen Glieder $\left[\frac{x}{p_{\mu_1} p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_r}}\right]$ zu erstrecken ist, bei denen keine Primzahl p_{μ_ϱ} in höherer als in der zweiten Potenz vorkommt. Daher ist, mit Rücksicht auf die $3^n - 1$ eckigen Klammern in dem Ausdruck für $N(x)$,

$$(58)\qquad A(x) \leqq x - N(x) < x \prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_\nu} + \frac{1}{p_\nu^2}\right) + 3^n,$$

und aus (57) und (58) würde folgen, daß für genügend großes x

$$A(x) < x \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} x = \alpha x$$

wäre, während $A(x) \geqq \alpha x$ ist für alle x. Folglich hat $\mathfrak{A} = 2\mathfrak{Q}$ die Dichte 0.

42. Die Konstruktion einer Minimalbasis h-ter Ordnung für $\mathfrak{Z}$ ist bisher nicht gelungen. Man kennt jedoch ziemlich genaue Abschätzungen für die Anzahl der Elemente $\leqq x$ einer solchen Minimalbasis (vgl. [25], [32], [24]). Mit Rücksicht auf die bei diesen Untersuchungen benutzten Zifferndarstellungen ist es zweckmäßig, zur Menge der natürlichen Zahlen und zu den Basiselementen die Zahl 0 hinzuzunehmen. *Die jetzt betrachteten Mengen sind also Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen.* Die Definition der Summe bleibt erhalten; man braucht nur in (4) den Zusatz: mindestens ein $\varepsilon_x = 1$, zu streichen. Die Dichte einer Menge $\mathfrak{A}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen ist durch $D(\mathfrak{A}) = \underline{\text{fin}}\, \frac{A'(x)}{x}$ $(x = 1, 2, 3, \ldots)$ zu definieren, wo $A'(x)$ die Anzahl der positiven Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Die Mengen dieses Paragraphen haben die Dichte 0. Mit $A(x)$ wird wieder die Anzahl der Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A}$ bezeichnet (also einschl. 0). Es gilt nun (vgl. [32])

Satz 15: *Ist $\mathfrak{A}$ eine Minimalbasis h-ter Ordnung $(h \geqq 2)$ für $\mathfrak{Z}$, so ist*

$$A(x) < 2h\sqrt[h]{x}. \tag{59}$$

Beweis: Man konstruiere folgendermaßen eine Basis h-ter Ordnung $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{Z}$: Es sei $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, h)$ die Menge aller im Ziffernsystem mit der Grundzahl 2^h geschriebenen nichtnegativen Zahlen, die nur die Ziffern 0 oder $2^{\nu-1}$ aufweisen, und $\mathfrak{B}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(h)}$. Da jede Zahl c mit $0 \leqq c \leqq 2^h - 1$ in der Form[9])

$$c = \sum_{\nu=1}^{h} b^{(\nu)} \quad \text{mit} \quad b^{(\nu)} \subset \mathfrak{B}^{(\nu)} \tag{60}$$

darstellbar ist, so gilt, falls $z = \sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho 2^{h\varrho}$ eine beliebige Zahl aus $\mathfrak{Z}$, dargestellt im Ziffernsystem mit der Grundzahl 2^h, ist und c_ϱ nach (60) dargestellt wird,

$$z = \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\nu=1}^{h} b_\varrho^{(\nu)} 2^{h\varrho} = \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho^{(\nu)} 2^{h\varrho} \qquad (b_\varrho^{(\nu)} \subset \mathfrak{B}^{(\nu)}).$$

Hier ist aber die innere Summe eine Zahl aus $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ und daher z als Summe von h Zahlen aus $\mathfrak{B}$ dargestellt. Da allgemein weniger als h Zahlen von $\mathfrak{B}$ nicht ausreichen, ist also $\mathfrak{B}$ eine Basis h-ter Ordnung für $\mathfrak{Z}$.

Die Mengen $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ haben paarweise nur die Zahl 0 gemeinsam. Folglich ist

$$B(x) = \sum_{\nu=1}^{h} B^{(\nu)}(x) - h + 1. \tag{61}$$

Bestimmt man nun die Zahl s so, daß

$$2^{hs} \leqq x \leqq 2^{h(s+1)} - 1 \tag{62}$$

ist, so folgt unter Benutzung von (61)

$$\frac{B(x)}{\sqrt[h]{x}} \leqq \frac{B(2^{h(s+1)} - 1)}{\sqrt[h]{2^{hs}}} = \frac{h\, 2^{s+1} - h + 1}{2^s} < 2h,$$

also

$$B(x) < 2h\sqrt[h]{x}. \tag{63}$$

Diese Abschätzung gilt also erst recht für die Anzahl $A(x)$ einer Minimalbasis $\mathfrak{A}$ der Ordnung h.

---

9) Darstellung als Summe von Zweierpotenzen!

Dieselbe Basis $\mathfrak{B}$ wird auch in [24] angegeben; die Abschätzung lautet dort:

$$B(x) < \frac{1}{1-2^{-\frac{1}{h}}}\sqrt[h]{x} < 2h\sqrt[h]{x}. \tag{64}$$

Man kann jedoch durch eine Verfeinerung der Intervalleinteilung (62) die Abschätzung (63) zu

$$B(x) < \sigma\sqrt[h]{2}h\sqrt[h]{x} \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{2}{e\log 2} < 1{,}062$$

verschärfen (vgl. [32]), was besser ist als (64).

43. Ob aber $\mathfrak{B}$ schon eine Minimalbasis für $\mathfrak{Z}$ darstellt, ist nicht entschieden. Für einen endlichen Abschnitt von $\mathfrak{Z}$, wo die Frage nach einer Minimalbasis noch etwas genauer untersucht ist (vgl. [25]), läßt sich jedenfalls ein besseres Resultat erzielen. Man wähle m beliebig und bezeichne mit $\mathfrak{M}$ die Menge der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m$. Eine Basis h-ter Ordnung für $\mathfrak{M}$ heißt dann auch eine Basis h-ter Ordnung für m. Es gilt nun:

Satz 16: *Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_h$ beliebige natürliche Zahlen. Werden dann $d_1, d_2, \ldots, d_{h+1}$ durch*

$$d_1 = 1,\; d_\nu = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots + (x_{\nu-1}+1)\,d_{\nu-1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, h+1) \tag{65}$$

definiert, so bildet die Menge $\mathfrak{S}_h$ mit den Elementen

$$\begin{array}{l}
0, d_1, 2d_1, \ldots, x_1 d_1,\\
x_1 d_1 + d_2, x_1 d_1 + 2d_2, \ldots, x_1 d_1 + x_2 d_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{\nu=1}^{h-2} x_\nu d_\nu + d_{h-1}, \sum_{\nu=1}^{h-2} x_\nu d_\nu + 2d_{h-1}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu,\\
\sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu + d_h, \sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu + 2d_h, \ldots, \sum_{\nu=1}^{h} x_\nu d_\nu
\end{array}$$

eine Basis h-ter Ordnung mit $1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_h$ Elementen für die Zahl

$$x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots + (x_h + 1)\,d_h - 1 = d_{h+1} - 1. \tag{66}$$

Beweis: Für $h = 1$ ist die Behauptung richtig; denn die erste Zeile von $\mathfrak{S}_h$ ist eine Basis erster Ordnung für $d_2 - 1 = x_1$. Es sei schon bewiesen, daß $\mathfrak{S}_{h-1}$, d. h. die ersten $h-1$ Zeilen von $\mathfrak{S}_h$, eine Basis $(h-1)$-ter Ordnung für $d_h - 1$ ist. Da $\mathfrak{S}_{h-1}$ in $\mathfrak{S}_h$ enthalten ist und 0 zu $\mathfrak{S}_h$ gehört, hat man nur zu zeigen, daß sich alle ganzen

Zahlen von d_h bis $d_{h+1} - 1$ als Summe von h Zahlen aus $\mathfrak{S}_h$ darstellen lassen. Jede dieser Zahlen ist nun von der Form

$$s = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h + r$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots, x_h;\ 0 \leqq r \leqq d_h - 1).$$

Hiervon ist aber $x_1 d_1 + x_2 d_2 + \cdots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h$ eine Zahl aus $\mathfrak{S}_h$. Ferner läßt sich r, da $0 \leqq r \leqq d_h - 1$ ist, nach Induktionsvoraussetzung als Summe von $h - 1$ (und allgemein auch nicht mit weniger) Zahlen aus $\mathfrak{S}_{h-1}$ darstellen. Folglich ist s eine Summe von h (und allgemein auch nicht von weniger) Zahlen aus $\mathfrak{S}_h$, weil $\mathfrak{S}_{h-1}$ Teilmenge von $\mathfrak{S}_h$ ist.

Satz 17: *Es sei $\mathfrak{A}$ eine Minimalbasis h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) für die Zahl m. Dann gilt für die Anzahl $A(m)$ der Basiselemente*

$$A(m) < h \sqrt[h]{m}. \tag{67}$$

Beweis: Man setze $A(m) = k$. Dann ist für $k \leqq h$ nichts zu beweisen. Für $k > h$ sei $n_h(k)$ die größte ganze Zahl derart, daß sich alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n_h(k)$ durch eine Basis h-ter Ordnung von k Elementen darstellen lassen. Wählt man dann in (65) $x_1, x_2, \ldots, x_h$ so, daß $1 + \sum_{\nu=1}^{h} x_\nu = k$ ist, so ist, da $\mathfrak{S}_h$ eine Basis h-ter Ordnung für $d_{h+1} - 1$ ist, nach (66)

$$n_h(k) \geqq d_{h+1} - 1 \geqq (x_{h+1} + 1) d_h \geqq \prod_{\nu=1}^{h} (x_\nu + 1),$$

letzteres, weil nach (65) $d_\nu \geqq (x_{\nu-1} + 1) d_{\nu-1}$ für $\nu = 2, 3, \ldots, h$ und $d_1 = 1$ ist. Setzt man nun $x_2 = x_3 = \cdots = x_h = \left[\frac{k}{h}\right]$, $x_1 + 1 = \left[\frac{k}{h}\right] + r$, wo r aus

$$h\left[\frac{k}{h}\right] + r = k \tag{68}$$

zu bestimmen ist, so ergibt sich

$$n_h(k) \geqq \left(\left[\frac{k}{h}\right] + 1\right)^{h-1} \left(\left[\frac{k}{h}\right] + r\right) > \left(\frac{k}{h}\right)^h. \tag{69}$$

Da nun $\mathfrak{A}$ eine Minimalbasis h-ter Ordnung für m von k Elementen ist, folgt unter Berücksichtigung der ersten Ungleichung (69)

$$n_h(k) \geqq m > n_h(k-1) \geqq \left(\left[\frac{k-1}{h}\right] + 1\right)^{h-1} \left(\left[\frac{k-1}{h}\right] + r'\right), \tag{70}$$

wo r', entsprechend zu (68), durch

$$h\left[\frac{k-1}{h}\right]+r'=k-1$$

bestimmt ist. Setzt man

$$\left[\frac{k-1}{h}\right]=\frac{k-1}{h}-\sigma,$$

so ist $0 \leqq \sigma \leqq \frac{h-1}{h}$, und man erhält aus (70) für $r' \neq 0$

$$m>\left(\left[\frac{k-1}{h}\right]+1\right)^h=\left(\frac{k}{h}+1-\frac{1}{h}-\sigma\right)^h \geqq \left(\frac{k}{h}\right)^h$$

und für $r'=0$

$$m>\left(\frac{k-1}{h}+1\right)^{h-1}\frac{k-1}{h} \geqq \left(\frac{k}{h}\right)^{h-2}\left(\frac{k-1}{h}+1\right)\frac{k-1}{h}$$

$$=\frac{k^{h-2}}{h^h}\left(k^2+(h-2)k-h+1\right).$$

Hieraus folgt, da $k>h\geqq 2$ ist,

$$m>\left(\frac{k}{h}\right)^h \quad \text{für} \quad h \geqq 3,$$

d. h. (67), da $A(m)=k$ ist.

Für $h=2$ wird der Nachweis von (67) durch eine besondere Untersuchung erbracht (vgl. [25]).

44. Zum Schluß sei bemerkt, daß die Abschätzungen (59) und (67) bereits die richtige Größenordnung liefern. Es gilt nämlich:

Ist $\mathfrak{A}$ eine Minimalbasis h-ter Ordnung für $\mathfrak{Z}$, so ist

$$A(x)=O(\sqrt[h]{x}).$$

Hierfür ist wegen (59) nur noch zu beweisen, daß es eine Konstante $\varkappa>0$ gibt, so daß für hinreichend großes x

$$A(x)>\varkappa\sqrt[h]{x} \tag{71}$$

ist. Da zur Darstellung eines Elements $\leqq x$ von $\mathfrak{Z}$ als Summe von h Elementen aus $\mathfrak{A}$ nur Elemente $\leqq x$ von $\mathfrak{A}$ benutzt werden können, genügt es, (71) für einen endlichen Abschnitt von $\mathfrak{Z}$ zu zeigen, etwa für die Menge $\mathfrak{M}$ der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m$. Es wird also behauptet:

Ist m beliebig, h fest und $A(m)$ die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis h-ter Ordnung für m, so ist

$$A(m)=O(\sqrt[h]{m}).$$

Hierfür ist wegen (67) nur noch die Existenz einer Konstanten $\varkappa'>0$ mit $A(m)>\varkappa'\sqrt[h]{m}$ für hinreichend großes m nachzuweisen.

Mit $A(m)$ Elementen kann man nun

$$C = \binom{A(m) + h - 1}{h}$$

Summen zu je h (unter Zulassung gleicher) Summanden bilden. Um dadurch alle nichtnegativen Zahlen $\leqq m$ darzustellen, muß $C > m$, also erst recht

$$\frac{(A(m) + h - 1)^h}{h!} > m$$

sein. Hieraus folgt aber für $m > (h-1)^h$

$$A(m) > (\sqrt[h]{h!} - 1)\sqrt[h]{m} = \varkappa' \sqrt[h]{m} \qquad (\varkappa' > 0).$$

§ 9. Ergebnisse über die Dichte spezieller Mengen.

45. In diesem letzten Paragraphen gebe ich einige spezielle Mengen natürlicher Zahlen an, über deren Dichte etwas bekannt ist, ohne daß diese Zusammenstellung Anspruch auf Vollständigkeit erheben soll. Ich berücksichtige nur neuere Ergebnisse, beschränke mich aber nicht auf die Dichten α und α^*, sondern betrachte auch die natürlichen Dichten $\underline{\delta}$, δ und $\bar{\delta}$[10]), da hieraus mittels der Beziehung

$$0 \leqq \alpha \leqq \alpha^* = \underline{\delta} \leqq \delta \leqq \bar{\delta} \leqq 1$$

mitunter Rückschlüsse auf α und α^* möglich sind. Insbesondere ist ja $\alpha^* = \delta$, wenn δ existiert. Jede Menge mit $\alpha > 0$ bzw. $\alpha^* > 0$ stellt dann ein Beispiel für Hauptsatz I bzw. Hauptsatz II dar, wenn in diesem Fall noch die Bedingung der Teilerfremdheit erfüllt ist.

46. Für die Menge $\mathfrak{P}$ der Primzahlen ist $\delta = 0$, also auch für die Menge $\mathfrak{P}'$, die aus 1 und $\mathfrak{P}$ besteht. Für die Menge $\mathfrak{A} = 2\mathfrak{P}'$ ist $\alpha > 0$ (vgl. [29]).

Für die Menge $\mathfrak{K}$ der k-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen ($k > 1$) ist $\delta = 0$. Für die Menge $\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{K}$ ist $\alpha > 0$ (vgl. [27]) und $\alpha^* = 1$ (vgl. [9]).

Für die Menge $\mathfrak{L}$ aller nichtnegativen Potenzen einer festen Zahl $l > 1$ ist $\delta = 0$. Für die Menge $\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{L}$ ist $\alpha > 0$ (vgl. [27]), genauer $\alpha \geqq \frac{1}{\varkappa \log l}$ ($\varkappa$ Konstante) (vgl. [20]).

Für die Menge der (positiven) Zahlen $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$ (p_i Primzahlen) ist $\alpha > 0$ (vgl. [15]), ebenso für jede der Mengen $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2$, $\sum_{i=1}^{4} p_i^3 - \sum_{i=1}^{4} q_i^3$, $\sum_{i=1}^{2^k} \varepsilon_i p_i^k$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, p_i, q_i Primzahlen) (vgl. [15]).

10) Bezeichnungen wie in § 1.

47. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, für die a_i durch kein a_j mit $j \neq i$ teilbar ist $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist $\underline{\delta} = 0$, $\bar{\delta} < \frac{1}{2}$ (vgl. [2] und [11]).

Es seien $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ natürliche Zahlen. Die Menge der Zahlen, die durch m_1 teilbar sind, hat die natürliche Dichte $\delta_1 = \frac{1}{m_1}$, die Menge derjenigen, die durch m_ν, aber durch keine der Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_{\nu-1}$ teilbar sind $(\nu = 2, 3, \ldots)$, hat die natürliche Dichte

$$\delta_\nu = \frac{1}{m_\nu} - \sum_{\mu<\nu} \frac{1}{\{m_\mu, m_\nu\}} + \sum_{\lambda<\mu<\nu} \frac{1}{\{m_\lambda, m_\mu, m_\nu\}} - + \cdots, \tag{72}$$

wo die geschweiften Klammern das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bezeichnen.

Die Menge der Zahlen, die durch keine von n festen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ teilbar sind, hat die natürliche Dichte

$$\delta = 1 - \sum_{\varkappa} \frac{1}{m_\varkappa} + \sum_{\varkappa<\lambda} \frac{1}{\{m_\varkappa, m_\lambda\}} - \sum_{\varkappa<\lambda<\mu} \frac{1}{\{m_\varkappa, m_\lambda, m_\mu\}} + - \cdots + \frac{(-1)^n}{\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}}.$$

Es ist (vgl. [16] und [26])

$$\delta \geqq \prod_{\varkappa=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_\varkappa}\right).$$

Es sei $\sigma_0(n)$ die Anzahl der Teiler von n. Für die Menge der Zahlen n mit $\sigma_0(n) < \sigma_0(n+1)$ ist $\delta = \frac{1}{2}$ (vgl. [14]).

Es sei $\sigma_1(n)$ die Summe der Teiler von n. Für die Menge der abundanten Zahlen $(\sigma_1(n) \geqq 2n)$ gilt $0{,}241 < \underline{\delta} \leqq \bar{\delta} < 0{,}332$ (vgl. [1]). Allgemeiner ist für die Menge der $\varkappa$-fach abundanten Zahlen $(\sigma_1(n) \geqq \varkappa n,\ \varkappa \geqq 1)$ δ für alle $\varkappa$ vorhanden und eine stetige Funktion von $\varkappa$ (vgl. [8], [7] und [10]). Genauer ist $\delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu$, wo δ_ν nach (72) mittels der primitiven $\varkappa$-fach abundanten Zahlen gebildet ist (vgl. [8]).

Es sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, die den Bedingungen $f(n) \geqq 0$ und $f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2)$ für $(n_1, n_2) = 1$ genügt, und λ eine gegebene Konstante. Dann existiert für die Menge der Zahlen n mit $f(n) \geqq \lambda$ die natürliche Dichte (vgl. [13]). Für $f(n) = \log \frac{\sigma_1(n)}{n}$ und $\lambda = \log \varkappa$ ergibt sich als Spezialfall die Menge der $\varkappa$-fach abundanten Zahlen.

Literaturverzeichnis.

1. F. Behrend, Über numeri abundantes. I., II., Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss. 1932, S. 322—328; 1933, S. 280—293.
2. F. Behrend, On sequences of numbers not divisible one by another, Journ. of the London Math. Soc. **10** (1935), S. 42—44.
3. A. S. Besicovitch, On the density of the sum of two sequences of integers, Journ. of the London Math. Soc. **10** (1935), S. 246—248.
4. A. Brauer, Über die Dichte der Summe von Mengen positiver ganzer Zahlen. I, Annals of Mathematics **39** (1938), S. 322—340.
5. A. Brauer, Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist, Math. Zeitschrift **44** (1938), S. 212—232.
6. A. Buchstab, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, Recueil math. de la soc. math. Moscou **40** (1933), S. 190—195.
7. S. Chowla, On abundant numbers, Journ. of the Indian Math. Soc. (N. S.) **1** (1934), S. 41—44.
8. H. Davenport, Über numeri abundantes, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1933, S. 830—837.
9. H. Davenport — H. Heilbronn, Note on a result in the additive theory of numbers, Proceedings of the London Math. Soc. (2) **43** (1937), S. 142—151.
10. P. Erdös, On the density of the abundant numbers, Journ. of the London Math. Soc. **9** (1934), S. 278—282.
11. P. Erdös, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, Journ. of the London Math. Soc. **10** (1935), S. 126—128.
12. P. Erdös, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta arithmetica **1** (1936), S. 197—200.
13. P. Erdös, On the density of some sequences of numbers. I., II., Journ. of the London Math. Soc. **10** (1935), S. 120—125; **12** (1937), S. 7—11.
14. P. Erdös, On a problem of Chowla and some related problems, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. **32** (1936), S. 530—540.
15. P. Erdös, On the easier Waring problem for powers of primes. I., Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. **33** (1937), S. 6—12.
16. H. Heilbronn, On an inequality in the elementary theory of numbers, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. **33** (1937), S. 207—209.
17. A. Khintchine, Zur additiven Zahlentheorie, Recueil math. de la soc. math. Moscou **39** (1932), Heft 3, S. 27—34.
18. A. Khintchine, Über ein metrisches Problem der additiven Zahlentheorie, Recueil math. de la soc. math. Moscou **40** (1933), S. 180—189.
19. E. Landau, Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz, Nachrichten d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1930, S. 255—276.
20. E. Landau, Verschärfung eines Romanoffschen Satzes, Acta arithmetica **1** (1936), S. 43—61.
21. E. Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Tract **35** (1937), Kap. 2—4.
22. S. Morimoto, Über einen Satz von Khintchine für eine Summenfolge, Tohoku Math. Journal **43** (1937), S. 1—3.
23. H.-H. Ostmann, Beweis eines Satzes von A. S. Besicovitch über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen, Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 319—320.