Eine Aufgabe, betreffend die Theorie der cubischen Reste

Journal für die reine und angewandte Mathematik 23, 285-286 (1842)

Wenn p eine Primzahl von der Form $3n+1$ ist, und g eine primitive Wurzel derselben, so kann die Reihe $1, g, g^2, g^3, \dots, g^{p-2}$ in drei verschiedene Reihen geordnet werden, nämlich $1, g^3, g^6, \dots, g^{p-4}$, ferner $g, g^4, g^7, \dots, g^{p-3}$ und $g^2, g^5, g^8, \dots, g^{p-2}$. Die Reste der ersten Reihe für den Modul p sind die cubischen Reste, von denen wir einen beliebigen mit α bezeichnen; die Reste der zweiten und dritten Reihe, welche wir resp. mit β und γ bezeichnen, sind die cubischen Nichtreste. Wenn nun α, β und γ die angegebene Bedeutung haben, so sind, wie *Gauß* gezeigt hat, folgende drei Reihen:

$$z_1 = \sum_0^{p-1} \cos \frac{2\alpha k^3 \pi}{p}, \quad z_2 = \sum_0^{p-1} \cos \frac{2\beta k^3 \pi}{p}, \quad z_3 = \sum_0^{p-1} \cos \frac{2\gamma k^3 \pi}{p}$$

die drei Wurzeln von folgender cubischen Gleichung:

$$x^3 = 2px + pt,$$

wo t durch die in ganzen Zahlen aufzulösende Gleichung $4p = t^2 + 27u^2$ und durch die Bedingung, daß es positiv oder negativ zu nehmen sei, je nachdem es die Form $3h+1$ oder $3h-1$ hat, vollständig bestimmt ist. Die drei Reihen z_1, z_2, z_3 spielen in der Theorie der cubischen Reste eine sehr wichtige Rolle, sind aber durch diese cubische Gleichung noch nicht genau bestimmt, da es ganz unentschieden bleibt, welche der drei Wurzeln dieser Gleichung einer jeden dieser Reihen gleich ist; mit dieser Unbestimmtheit sind daher auch alle Resultate behaftet, welche man mit Hilfe dieser Reihen über cubische Reste gewinnt. Ich habe nun die Aufgabe, diese Unbestimmtheit aufzuheben, allerdings in einem gewissen Sinne gelöst, aber die Lösung genügt nicht recht, weil sie die Kenntnifs der Summe aller cubischen Reste, welche kleiner sind als $\frac{1}{3}p$, und eben so die Kenntnifs der Summen der beiden verschiedenen Arten von Nichtresten voraussetzt. Aus diesen berechneten Summen habe ich denn auch

die Werthe der drei Reihen x_1, x_2, x_3 für alle Primzahlen von der Form $3n+1$, unter 400, vollständig bestimmt und will die Resultate hier mittheilen, damit vielleicht ein Anderer durch Induction das allgemeine Gesetz finden könne, welches mir noch verborgen geblieben ist.

Zunächst bemerke ich, dafs, da t in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$ liegt, die drei Wurzeln der cubischen Gleichung stets in folgenden drei Intervallen enthalten sein müssen: die eine in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$, eine der andern in den Grenzen $-\sqrt{p}$ und $+\sqrt{p}$ und die dritte in den Grenzen $+\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$. Ferner bemerke ich, dafs, wenn eine der drei Reihen vollständig bestimmt ist, die Bestimmung der beiden anderen keine Schwierigkeiten weiter hat, da diese sich rational durch jene ausdrücken lassen; daher bestimme ich hier nur die Reihe $x_1 = \sum_k^{p-1} \cos \frac{2\alpha k^3 \pi}{p}$, in welcher auch $\alpha = 1$ genommen werden kann. Diese Reihe aber liegt nach meiner Berechnung

- 1) in den Grenzen $-2\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$ für die Primzahlen
97, 139, 151, 199, 211, 331;
- 2) in den Grenzen $-\sqrt{p}$ und $+\sqrt{p}$ für die Primzahlen
13, 19, 37, 61, 109, 157, 193, 241, 283, 367, 373, 379, 397;
- 3) in den Grenzen $+\sqrt{p}$ und $+2\sqrt{p}$ für die Primzahlen
7, 31, 43, 67, 73, 79, 103, 127, 163, 181, 223, 229, 271, 277,
307, 313, 337, 349.

Es käme nun darauf an, zu suchen, welche Eigenthümlichkeiten jede dieser drei Reihen habe, die keine Primzahl der beiden anderen Reihen theilte. Die lineäre Form der Primzahlen scheint hierbei keine Bedeutung zu haben, wohl aber die quadratische Form $4p = t^2 + 27u^2$; vielleicht auch die Form $p = r^2 + 3s^2$. Da ich aber auch aus diesen kein Gesetz entdecken konnte, so nahm ich meine Zuflucht zu den Zahlen, welchen $\beta^{\frac{p-1}{3}}$ und $\gamma^{\frac{p-1}{3}}$ congruent sind, aber mit eben so wenig Erfolg; auch ob gewisse Zahlen, namentlich 2 und 3 cubische Reste sind, oder nicht, entschied hierbei nichts. Jedenfalls scheint das Gesetz etwas tief zu liegen, genauer Nachforschungen aber wohl werth zu sein.