Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN

UNTER MITWIRKUNG
VON
LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COURANT, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR V. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON

DAVID HILBERT IN GÖTTINGEN — ALBERT EINSTEIN IN BERLIN
OTTO BLUMENTHAL IN AACHEN — CONSTANTIN CARATHÉODORY IN MÜNCHEN.

Sonderabdruck aus Band 95, Heft 1.

Kornel Lanczos
Über tensorielle Integralgleichungen.

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Über tensorielle Integralgleichungen.

Von

Kornel Lanczos in Frankfurt a. M.

In der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie treten vektorielle, sowie tensorielle Differentialgleichungen auf, die einem Gebiet von nichteuklidischer metrischer Struktur angehören. Es ist die Tatsache von großem Interesse, daß die Behandlung solcher tensorieller Differentialgleichungen, insofern sie linear sind, mit Leichtigkeit der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen untergeordnet werden kann. Man bekommt auch hier die Lösung in Form eines Integrals, welches den gesuchten Tensor quellenmäßig aus der gegebenen Verteilung der Quellen darstellt. Es tritt dabei statt der Greenschen Funktion ein „Greenscher Tensor“ auf. Die integrale Form der Darstellung legt unmittelbar die Einführung einer Art von Integralgleichungen nahe, in denen statt einer skalaren Funktion eine tensorielle Funktion gesucht wird, und in denen auch der Kern tensoriell von zwei Punkten des Gebietes abhängt. Eine solche Tensorintegralgleichung eines allgemeinen Riemannschen Raumes läßt sich vorerst auf eine Tensorintegralgleichung eines euklidischen Raumes reduzieren. Die so gewonnene Integralgleichung kann dann durch Erweiterung des Gebietes auf eine einzige skalare Fredholmsche Integralgleichung zurückgeführt werden.

Eine wichtige und zugleich typische vektorielle Differentialgleichung verknüpft das elektromagnetische Vektorpotential Φ_i mit dem Vektor der Stromdichte ϱ_i. Die Feldgleichungen für das Vektorpotential lauten bekanntlich:

$$\Delta \Phi_i = -\varrho_i. \tag{1}$$

Unter Δ ist dabei eine skalare Operation zu verstehen, die explizite geschrieben folgendermaßen aussieht:

$$\Delta = g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}. \tag{2}$$

Wir haben hier ein Symbol „ϑ“ eingeführt, wodurch eine „tensorielle Differentiation“ angedeutet werden soll. Die Anlehnung an das gewöhnliche Differentiationszeichen ∂ ist tatsächlich berechtigt, da auch für die tensorielle Differentiation die gewöhnlichen Operationsregeln gelten, mit Ausnahme der Vertauschung der Reihenfolge zweier Differentiationen, die hier nicht gestattet ist. Wir haben an ihrer Stelle vielmehr die Regel:

$$\frac{\vartheta^2 \Phi_i}{\vartheta x_k \vartheta x_l} = \frac{\vartheta^2 \Phi_i}{\vartheta x_l \vartheta x_k} + \Phi^\sigma R_{\sigma i k l}, \tag{3}$$

wo R_{ikmn} den Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor bedeutet. Für die tensorielle Differentiation besteht auch die große Bequemlichkeit, daß der Maßtensor selber wie eine Konstante zu behandeln ist, da seine Ableitung identisch verschwindet. Wir können also g_{ik} nach Belieben vor oder hinter das Differentiationszeichen bringen.

Die Methode, eine tensorielle Differentialgleichung (1) zu integrieren, beruht darauf, daß wir durch Multiplikation mit einem Hilfstensor von ebenso hoher Ordnung wie der unbekannte Tensor eine Invariante bilden. Wir wollen das Prinzip an einer vektoriellen Differentialgleichung klar machen, es läßt sich aber unverändert auf Tensoren beliebig hoher Ordnung übertragen. Bilden wir den invarianten Ausdruck:

$$S = \psi^s \Delta \Phi_s - \Phi^s \Delta \psi_s, \tag{4}$$

so können wir durch partielle Integration leicht eine Umformung vornehmen, welche zur Möglichkeit führt, die Gaußsche Integraltransformation anzuwenden. Es ist nämlich:

$$\psi^s \Delta \Phi_s = \frac{\vartheta}{\vartheta x_s}\left(\psi^p \frac{\vartheta \Phi_p}{\vartheta x_r} g^{rs}\right) - \frac{\vartheta \psi^p}{\vartheta x_s} \frac{\vartheta \Phi_p}{\vartheta x_r} g^{rs}, \tag{5}$$

und da im zweiten Glied Φ und ψ eine ganz symmetrische Rolle spielen, fällt dieses Glied bei der Differenzenbildung heraus.

Diesem Umstand ist es zu verdanken, daß die Invariante S sich als Divergenz eines Vektors darstellen läßt:

$$S = \frac{\vartheta \lambda^s}{\vartheta x_s} = \operatorname{div} \lambda, \tag{6}$$

wobei dieser Vektor λ_i folgendermaßen definiert ist:

$$\lambda_i = \psi^s \frac{\vartheta \Phi_s}{\vartheta x_i} - \Phi^s \frac{\vartheta \psi_s}{\vartheta x_i}. \tag{7}$$

Genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir die Vektoren Φ_i und ψ_i durch Tensoren beliebig hoher Ordnung $\Phi_{ik\ldots}$ und $\psi_{ik\ldots}$ ersetzt denken.

Auf die Divergenz eines Vektors kann aber auch in der Riemannschen Geometrie der Gaußsche Satz ohne weiteres angewandt werden im Sinne folgender Gleichung:

$$\int \operatorname{div} \lambda \, dv = -\int \lambda_s \nu^s \, df, \tag{8}$$

wo dv das Volumelement des Gebietes, df das Flächenelement der Umrandung bedeutet, und ν_i die nach innen weisende Normale.

Wir sind dadurch in die Lage gesetzt, die Methoden der Potentialtheorie aus dem Euklidischen in das Nichteuklidische und vom skalaren Fall auf den tensoriellen zu übertragen. Insbesondere bekommt die grundlegende „Greensche Formel“ jetzt folgende Fassung:

$$\int (\psi^s \Delta \Phi_s - \Phi^s \Delta \psi_s) \, dv = -\int \left(\psi^s \frac{\vartheta \Phi_s}{\vartheta \nu} - \Phi^s \frac{\vartheta \psi_s}{\vartheta \nu}\right) df. \tag{9}$$

Es bedeutet hierbei die „Differentiation nach der Normale“: $\frac{\vartheta}{\vartheta \nu}$ folgende skalare Operation:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta \nu} = \nu^s \frac{\vartheta}{\vartheta x_s}. \tag{10}$$

Den Hilfstensor ψ_i, den wir eingeführt haben[1]), bauen wir zu einem „Greenschen Tensor“ aus, der die Rolle der Greenschen Funktion zu übernehmen hat. Wir schreiben diesem Tensor folgende Bedingungen vor: Er soll am Rande des Gebietes verschwinden. Er soll, mit Ausnahme eines einzigen Punktes σ, überall regulär sein und die homogene Gleichung:

$$\Delta \psi_i = 0 \tag{11}$$

erfüllen. Im singulären Punkt σ sollen die einzelnen Komponenten des Tensors, abgesehen von je einem konstanten Faktor, den wir gleich noch näher festsetzen werden, so unendlich werden, wie $\frac{1}{r^{n-2}}$, wenn wir uns in einem n-dimensionalen Raum befinden, und wenn r die unendlich kleine Entfernung von σ bezeichnet[2]).

[1]) Der eine Index von Φ_i und ψ_i in Gleichung (9) und folgenden Gleichungen kann durch eine beliebige Gruppe $i, k \ldots$ ersetzt gedacht werden. Wir sprechen darum lieber gleich allgemein von einem „Tensor“, als von einem „Vektor“.

[2]) Wir denken hier an ein positiv-definites Linienelement. Auf den Charakter des Greenschen Tensors bei einem hyperbolischen Linienelement, wie dieser Fall für die Relativitätstheorie von besonderer Bedeutung ist, wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen. Siehe diesbezüglich meine Arbeit: Zum Problem der unendlich schwachen Felder in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Zeitschr. f. Physik, **31**, (1925), S. 131—132.

Legen wir um diesen singulären Punkt eine unendlich kleine Kugel, so wird offenbar das über die Oberfläche dieser Kugel erstreckte Integral:

$$-\int \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} df \tag{12}$$

einem endlichen Grenzwert zustreben. Diesen Tensor wollen wir als den „Poltensor" des Greenschen Tensors bezeichnen. Der Greensche Tensor ist erst dann eindeutig festgelegt, wenn wir auch noch über diesen Tensor verfügt haben. Wir machen nun folgende Vorschrift. Alle kontravarianten Komponenten des Poltensors seien gleich Null, mit Ausnahme einer einzigen, die gleich 1 sein soll.

Handelt es sich insbesondere um den „Pol*vektor*" p_i des Greenschen *Vektors* ψ_i, so können wir unsere Vorschrift in invarianter Schreibweise folgendermaßen fassen:

$$p^i = \eta^i_m,$$

wenn wir mit η^k_i den gemischten Einheitstensor bezeichnen. Tatsächlich sind jetzt alle Komponenten 0, mit Ausnahme einer einzigen: $i = m$, die $= 1$ ist. Wir erkennen, daß unser Polvektor nicht mehr bloß von dem einen Index i abhängt, sondern auch noch von dem Index m. Wir können m alle Werte durchlaufen lassen und zu jedem Wert gehört je eine Funktion ψ_i. Die Gesamtheit aller dieser Funktionen bezeichnen wir zusammengefaßt als „Greenschen Vektor".

Unser Polvektor ist hierdurch zu einem Tensor zweiter Ordnung geworden, dessen kovariante Komponenten etwa in der Form:

$$p_{im} = g_{im} \tag{13}$$

geschrieben werden können. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, daß auch der Greensche Vektor selber schließlich zu einem Tensor zweiter Ordnung würde. Der Index m gehört *nur* zu dem Punkt σ, wo die Funktion ihre Singularität besitzt. Andererseits gehört der Index i *nur* zu dem laufenden Punkt s. Der Greensche Vektor ist also eine Funktion, deren Wert von *zwei* Punkten des Gebietes abhängt: dem laufenden Punkt s und dem festen Punkt σ, und zwar ist ihre Abhängigkeit von *beiden* Punkten eine *vektorielle*. Wir wollen diese Abhängigkeit durch folgende Bezeichnung des Greenschen Vektors veranschaulichen:

$$G_i(s, \sigma)_m. \tag{14}$$

Die Indizes i und m sind dabei gewissermaßen als zur Klammer gehörig zu betrachten; i gehört zum Punkt s, m zum Punkt σ. Transformiert man im Punkt s, so transformieren sich die Komponenten von G kovariant in i, während m als eine Konstante zu betrachten ist. Transformiert man umgekehrt im Punkt σ, so transformieren sich die Komponenten m kovariant, während i unverändert bleibt [3]).

Ganz ähnlich, wie beim Greenschen Vektor, führen wir den Poltensor des allgemeinen Greenschen Tensors ein, indem wir setzen:

$$p_{ik\ldots mn\ldots} = g_{ik}\, g_{mn\ldots} \tag{13'}$$

und bezeichnen dementsprechend den Greenschen Tensor durch:

$$G_{ik\ldots}(s\sigma)_{mn\ldots}. \tag{14'}$$

Eine fundamentale Eigenschaft des Greenschen Tensors erkennen wir, wenn wir die Gleichung (9) auf zwei Greensche Tensoren anwenden, deren fester Punkt einerseits σ, andrerseits etwa s sei. Die linke Seite verschwindet dann identisch, während die Integration rechter Hand nur auf zwei die beiden Punkte σ bzw. s umgebende, unendlich kleine Kugeln auszudehnen ist. Wir erhalten folgende Gleichung:

$$G_r(s, \sigma)_m\, p^r_i = G_r(\sigma, s)_i\, p^r_m, \tag{15}$$

was aber, unter Berücksichtigung unserer Vorschrift (13) für den Poltensor, folgendes bedeutet:

$$G_i(s, \sigma)_m = G_m(\sigma, s)_i. \tag{16}$$

Fester Punkt und variabler Punkt sind also miteinander vertauschbar, wobei auch die zugehörigen Indizes links und rechts vertauscht werden müssen.

---

[3]) Dieses charakteristische Verhalten des Greenschen Vektors in bezug auf allgemeine Koordinatentransformationen wird verwischt, wenn wir uns auf ein rein euklidisches Gebiet beschränken und daselbst nur rechtwinklige Koordinaten und ihre linearen Transformationen ins Auge fassen. Dann transformiert sich das ganze Gebiet gleichmäßig. Nehmen wir aber in den beiden Punkten s und σ dieselbe Transformation vor, so transformiert sich der Greensche Vektor *scheinbar*, wie ein Tensor zweiten Grades. Für euklidische Gebiete hat — wir mir nach Schluß meiner Arbeit bekannt wurde — bereits Hilbert in seinen grundlegenden Abhandlungen über Integralgleichungen (zusammengefaßt erschienen unter dem Titel: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1912, Teubner)) den Begriff des Greenschen Tensors eingeführt zur Lösung von Systemen simultaner Differentialgleichungen. Er wählt als Beispiel ein vektorielles System und erhält die Lösung mit Hilfe eines „Greenschen Tensors" (unter „Tensor" ist hier, wie üblich, insbesondere ein Tensor zweiten Grades gemeint). Daß es sich hierbei eigentlich um einen Greenschen *Vektor* handelt, der von *zwei* Punkten des Gebietes vektoriell abhängt, was eine Scheidung der beiden Indizes in einen linken und einen rechten von der Klammer notwendig macht, wird erst bei der hier entwickelten tensoranalytischen Einführung des Greenschen Tensors deutlich.

Im allgemeinen Fall findet man ganz analog die Gleichung:

$$G_{ik\ldots}(s,\sigma)_{mn\ldots} = G_{mn\ldots}(\sigma,s)_{ik\ldots}. \tag{16'}$$

So überträgt sich die „Symmetrieeigenschaft“ der Greenschen Funktion auf den tensoriellen Fall.

Mit Hilfe des Greenschen Vektors läßt sich ohne weiteres die Aufgabe lösen, das Vektorpotential Φ_i aus gegebener Stromdichteverteilung ϱ_i und gegebenen Randwerten von Φ_i zu bestimmen. Setzen wir an Stelle des Hilfsvektors ψ_i den Greenschen Vektor in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir die Lösung in folgender Form:

$$\Phi_i(s) = \int G_i(s,\sigma)_m \varrho^m(\sigma)\,dv + \int \frac{\partial G_i(s,\sigma_f)_m}{\partial \nu} \Phi^m(\sigma_f)\,df. \tag{17}$$

Sind insbesondere die Randwerte 0 vorgeschrieben, so wird das Vektorpotential aus der Stromdichte allein quellenmäßig dargestellt.

Die integrale Form der Darstellung im Sinne der Gleichung (17) führt unmittelbar zur Aufstellung einer Art von Integralgleichungen, die wir als „Tensorintegralgleichungen“ bezeichnen können. Es sei ein Vektor φ als Funktion des Ortes s gesucht, der folgender Gleichung genügen soll:

$$\varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s,\sigma)_m \varphi^m(\sigma)\,d\sigma = f_i(s) \tag{18}$$

(an Stelle von dv als Volumelement ist das hier zweckmäßigere $d\sigma$ gesetzt). Der eine Index i wie auch m kann in dieser Gleichung und ebenso in allen folgenden als Repräsentant einer beliebigen Gruppe von mehreren (natürlich ihrer Anzahl nach für i und m gleichen) Indizes betrachtet werden, wodurch wir tensorielle Integralgleichungen beliebig hoher Ordnung bilden können. Wir wollen darum den Ausdruck „Vektor“ vorteilhafter durch den allgemeineren „Tensor“ ersetzen.

Der Kern unserer Integralgleichung $K_i(s,\sigma)_m$ ist jetzt eine Funktion vom Typus des Greenschen Tensors. Er hängt von zwei Punkten s und σ des Gebietes ab, und zwar von beiden Punkten tensoriell, was durch Anhängen der Indizes links und rechts von der Klammer angedeutet ist. Wir erkennen ohne weiteres die invariante Eigenschaft dieses Gleichungssystems gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. Bei einer Transformation im laufenden Punkt σ bleiben die Gleichungen jede für sich invariant, infolge der Summation über den Index m. Bei einer Transformation im festen Punkt s transformieren sich beide Seiten des Gleichungssystems kovariant in i.

Auf eine solche Integralgleichung stoßen wir z. B. bei dem Problem der „unendlich schwachen Zusatzfelder“ in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Denken wir uns irgendein gegebenes metrisches Feld, das etwa durch das Gravitationsfeld der kosmischen Massenverteilung erzeugt sei. Dieses selbst für längere Zeiträume als stationär betrachtbare Feld bildet den makroskopischen Grundstock der Weltgeometrie. Über dieses Grundfeld überlagern sich aber die rasch veränderlichen Felder der uns umgebenden Körper, die das gegebene Feld unendlich schwach modifizieren. Wir fragen, wie groß ist die unendlich schwache Änderung des Maßtensors $\delta g_{ik} = \gamma_{ik}$, die durch das Hinzufügen einer unendlich schwachen Materie, deren Tensor etwa durch τ_{ik} gegeben sei, hervorgerufen wird. Durch Variation der Einsteinschen Gravitationsgleichungen gelangen wir zu folgenden Feldgleichungen des Problems[4]):

$$\Delta\gamma_{ik} - P_{ikmn}\gamma^{mn} = 2\left(\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\tau\right). \tag{19}$$

Dabei wird der Tensor vierter Ordnung P_{ikmn} folgendermaßen durch den Krümmungstensor bestimmt:

$$P_{ikmn} = R_{imkn} + R_{kmin}. \tag{20}$$

Er ist symmetrisch im ersten, wie auch im zweiten Indexpaar und bleibt auch unverändert, wenn man die beiden Indexpaare miteinander vertauscht. Es muß außerdem bemerkt werden, daß diese Gleichung nur in einem bestimmten, dem Problem angepaßten Koordinatensystem gilt, welches nämlich so gewählt ist, daß folgende Bedingung erfüllt sei:

$$\frac{\partial \gamma_i^s}{\partial x_s} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0. \tag{21}$$

Wir erkennen, daß die Lösung dieser Gleichung auf eine Integralgleichung führt, wenn der Greensche Tensor $G_{ik}(s,\sigma)_{mn}$ für den Ausdruck $\Delta\gamma_{ik}$ bekannt ist. Der Kern dieser Integralgleichung ist folgendermaßen aufgebaut:

$$K_{ik}(s,\sigma)_{mn} = G_{ik}(s,\sigma)_{pq} P^{pq}{}_{mn}(\sigma). \tag{22}$$

Der Parameter λ ist $= -1$, und die Quellenfunktion $f_{ik}(s)$ berechnet sich bei verschwindenden Randwerten von γ_{ik} aus folgendem Integral:

$$f_{ik}(s) = -\int G_{ik}(s,\sigma)_{mn} \varrho^{mn}(\sigma), \tag{23}$$

wo wir

$$\varrho_{ik} = 2\left(\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\tau\right) \tag{24}$$

gesetzt haben.

Die Lösung einer allgemeinen tensoriellen Integralgleichung von der Form (18) läßt sich in zwei Etappen auf die Lösung einer gewöhnlichen Fredholmschen Integralgleichung zurückführen.

[4]) Siehe ausführlicher in meiner oben zitierten Arbeit.

Vorerst kann die nichteuklidische Beschaffenheit des Maßtensors aus der Gleichung vollständig eliminiert werden. Wir machen dabei von der Möglichkeit Gebrauch, die Tensorkomponenten nach Belieben linear zu transformieren. Wohl ist es nicht möglich, den Maßtensor durch eine ***endliche*** Transformation der Koordinaten überall auf die euklidische Form zu bringen. Bei den Transformationsformeln für die Tensorkomponenten kommt es aber nicht auf die Transformation der x_i selbst, sondern allein auf die Transformation der *Differentiale* dx_i an. Und man kann tatsächlich durch eine lineare Transformation dieser Differentiale:

$$(25) \qquad dx_i = \alpha_{is} d\xi_s,$$

die sogar so gewählt werden kann, daß sie im ganzen Gebiet stetig bleiben soll, das Linienelement ***überall*** auf die euklidische Form $ds^2 = \sum_{(s)} (d\xi_s)^2$ bringen. Die nichteuklidische Beschaffenheit dieses Linienelementes tut sich jetzt darin kund, daß die $d\xi_i$ keine exakten Differentiale mehr sind. Da aber in unseren Formeln keine Differentiationen vorkommen, ist das im gegebenen Falle offenbar belanglos. So übertragen wir also unsere Tensorintegralgleichung aus dem Riemannschen Raum in einen *rein euklidischen* Raum und zwar nur dadurch, daß wir für die Komponenten von $f_i(s)$, $\varphi_i(s)$ und $K_i(s, \sigma)_m$ neue, aus den alten durch lineare Transformation hervorgegangene Werte vorschreiben. Als rechtwinklige Koordinaten des euklidischen Abbildungsraumes können wir die alten x_i-Koordinaten unverändert beibehalten, wenn nur die Abbildung volumentreu ist. Dazu ist die Bedingung $g = 1$ im ursprünglichen Gebiet erforderlich, was durch eine endliche Transformation der x_i noch vor der Orthogonalisierung der dx_i mit Leichtigkeit zu erreichen ist[5]).

---

[5]) Anmerkung bei der Korrektur. Die hier ausgeführte Transformation auf Euklidizität als erste Etappe in der Reduktion auf die skalare Form ist prinzipiell nicht erforderlich. Die tensorielle Integralgleichung (18) läßt sich auch in folgender Form ansetzen:

$$(18\text{a}) \qquad \varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s, \sigma)^m \varphi_m(\sigma)\, d\sigma = f_i(s).$$

Wir können von hier aus unmittelbar zur Definition der Gleichung (28) vorschreiten, ganz wie im Text nachfolgend angegeben, wobei nur bei der Definition des erweiterten Kernes $K(\bar{s}, \bar{\sigma})$ der Ausdruck $K_i(s, \sigma)^m$ an Stelle von $K_i(s, \sigma)_m$ zu treten hat. Bei dieser unsymmetrischen Lage der beiden Indizes links und rechts von der Klammer würde aber im Fall eines symmetrischen Kernes die Symmetrieeigenschaft verloren gehen. Denn aus der Gleichung (30) folgt:

$$K_i(s, \sigma)^m = K^m(\sigma, s)_i$$

und *nicht* $= K_m(\sigma, s)^i$. Der Sinn der Zwischentransformation auf die Form (26) ist also in der *Symmetrisierung eines symmetrisierbaren Kernes* zu erblicken. Auf diesen Umstand hat mich Herr Professor Hellinger freundlichst aufmerksam gemacht.

Im euklidischen Gebiet brauchen wir nun zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten nicht mehr zu unterscheiden und können unsere Integralgleichung daher auch so schreiben:

$$(26) \qquad \varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s, \sigma)_m \varphi_m(\sigma)\, d\sigma = f_i(s).$$

Wir haben einerseits über das ganze Gebiet zu integrieren, andererseits über den Index m zu summieren. Offenbar kann aber auch eine Summation als Spezialfall einer Integration betrachtet werden, nämlich wenn wir über eine Treppenkurve zu integrieren haben, deren Stufenlänge $= 1$ ist. Auf diesem Gedanken fußend, können wir unser Gebiet derart *erweitern*, daß Summation und Integration über das ursprüngliche Gebiet zu einer einfachen Integration über das erweiterte Gebiet wird.

Wir denken uns unsern n-dimensionalen euklidischen Raum zu einem $n+1$-dimensionalen ergänzt, indem wir zu den früheren rechtwinkligen Koordinaten x_i noch eine neue, etwa u, hinzunehmen. Dieses u soll nur zwischen 0 und n variieren. Ein Punkt $\bar{s}$ des erweiterten Gebietes hängt also außer von den n Koordinaten des Punktes s auch noch von dem Wert von u ab, was wir so andeuten wollen:

$$(27) \qquad (\bar{s}) = (s, u).$$

Diesem Punkt schreiben wir nun folgenden Funktionswert $\varphi(\bar{s})$ zu. Wenn die u-Koordinate von $\bar{s} = (s, u)$ zwischen die ganzen Zahlen $i-1$ und i fällt, soll $\varphi(\bar{s})$ dauernd $= \varphi_i(s)$ sein. Ebenso definieren wir eine Funktion $f_i(s)$. Schließlich definieren wir eine Kernfunktion $K(\bar{s}, \bar{\sigma})$ derart, daß dieselbe $= K_i(s, \sigma)_m$ sein soll, wenn die u-Koordinate von s zwischen die ganzen Zahlen $i-1$ und i, die u-Koordinate von σ zwischen die ganzen Zahlen $m-1$ und m fällt.

Wir erkennen mit Leichtigkeit, daß unsere vektorielle Integralgleichung (26) in dem erweiterten Gebiet auf folgende *skalare* Fredholmsche Integralgleichung zurückgeht:

$$(28) \qquad \varphi(\bar{s}) - \lambda \int K(\bar{s}, \bar{\sigma})\, \varphi(\bar{\sigma})\, d\sigma = f(\bar{s}).$$

Haben wir es mit Tensoren höherer Ordnung zu tun, so können wir offenbar auf jeden einzelnen Index genau dasselbe Verfahren anwenden, und wir gelangen zu einem Gebiet von $n + m$ Dimensionen, wenn es sich insbesondere um Tensoren m-ter Ordnung handelt.

Wir kommen also zu folgendem Resultat:

Eine allgemeine tensorielle Integralgleichung m-ter Ordnung in einem n-dimensionalen Riemannschen Raume ist äquivalent einer einzigen skalaren Fredholmschen Integralgleichung in einem $n + m$-dimensionalen euklidischen Raume.

Allerdings sind Kernfunktion, Quellenfunktion und auch die gesuchte Funktion im erweiterten Gebiet unstetig geworden. Wir können aber zwischen die einzelnen Treppenstufen in einer beliebig kleinen Umgebung $\pm\varepsilon$ der Unstetigkeitsstellen einen linearen Anstieg mit endlich bleibender Tangente dazwischenschalten und den Kern wie auch die Quellenfunktion auf diese Weise stetig machen. Wir erkennen dann leicht, daß die zu den so modifizierten Funktionen gehörende nunmehr ebenfalls stetig gewordene $\varphi(\bar{s})$-Funktion, die durch die Integralgleichung (28) definiert wird, nur beliebig wenig von unserem $\varphi_i(s)$ abweicht, abgesehen von einer beliebig kleinen Umgebung $\pm\varepsilon$ um die ganzzahligen Unstetigkeitsstellen herum. Die Unstetigkeiten unserer Integralgleichung können also mit beliebiger Annäherung aufgehoben werden.

Indem wir nun die bekannten Sätze der Integralgleichungstheorie auf unsere Integralgleichung (28) anwenden, und die spezielle Natur der in ihr vorkommenden Funktionen berücksichtigen, können wir jedem Satz der skalaren Integralgleichungen einen korrespondierenden Satz für tensorielle Integralgleichungen zur Seite stellen. So lautet z. B. das „Lösungstheorem" für eine tensorielle Integralgleichung folgendermaßen:

Zu jedem $K_i(s,\sigma)_m$ einer tensoriellen Integralgleichung gehört ein lösender Kern $\mathsf{K}_i(s,\sigma)_m$, mit dessen Hilfe der gesuchte Tensor $\varphi_i(s)$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\varphi_i(s) = f_i(s) + \lambda \int \mathsf{K}_i(s,\sigma)_m f^m(\sigma)\, d\sigma. \tag{29}$$

Auch die besonders wichtigen Sätze, die insbesondere für symmetrische Kerne gelten, lassen sich mit Leichtigkeit übertragen. Die Symmetriebedingung eines Kerns:

$$K(\bar{s},\bar{\sigma}) = K(\bar{\sigma},\bar{s})$$

erhält in unserem Fall folgende Gestalt:

$$K_i(s,\sigma)_m = K_m(\sigma,s)_i. \tag{30}$$

Das ist gerade diejenige Reziprozität in bezug auf festen und variablen Punkt, die wir beim Greenschen Tensor als dessen Symmetrieeigenschaft kennen gelernt haben. Der Greensche Tensor ist also ein *symmetrischer Kern.*

Die zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ_μ und λ_ν gehörenden Eigenfunktionen $\overset{(\mu)}{\varphi}_i(s)$ und $\overset{(\nu)}{\varphi}_i(s)$ eines symmetrischen Kerns sind zueinander orthogonal. Das bedeutet jetzt folgende Integralrelation:

$$\int \overset{(\mu)}{\varphi}{}^m(s)\, \overset{(\nu)}{\varphi}_m(s)\, ds = 0, \tag{31}$$

während für die Normierung der Eigenfunktionen die Gleichung:

$$\int \overset{(\mu)}{\varphi}{}^m(s)\, \overset{(\mu)}{\varphi}_m(s)\, ds = 1 \tag{32}$$

vorgeschrieben ist.

Ein symmetrischer Kern kann nach seinen Eigenfunktionen in folgende unendliche Reihe entwickelt werden (Bilinearformel) — vorausgesetzt, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert:

$$K_i(s,\sigma)_m = \sum_{(\nu)} \frac{\overset{(\nu)}{\varphi}_i(s)\, \overset{(\nu)}{\varphi}_m(\sigma)}{\lambda_\nu}. \tag{33}$$

Eine analoge Entwicklung gilt für den zu ihm gehörenden lösenden Kern:

$$\mathsf{K}_i(s,\sigma)_m = \sum_{(\nu)} \frac{\overset{(\nu)}{\varphi}_i(s)\, \overset{(\nu)}{\varphi}_m(s)}{\lambda - \lambda_\nu}. \tag{34}$$

Es kann auch ein beliebiger, mit Hilfe eines symmetrischen Kerns quellenmäßig darstellbarer Tensor $f_i(s)$ in eine nach Eigenfunktionen des Kerns fortlaufende unendliche Reihe entwickelt werden:

$$f_i(s) = \sum_{(\nu)} \alpha_\nu \overset{(\nu)}{\varphi}_i(s), \tag{35}$$

wobei die α_ν bloße Zahlen sind. Insbesondere läßt sich ein beliebiger, zweimal differenzierbarer Tensor, der am Rande des Gebietes verschwindet, nach den Eigenfunktionen eines Greenschen Tensors entwickeln.

In allen diesen für beliebige Riemannsche Räume geltenden Formeln kann der eine Index i, wie auch m, als Repräsentant einer Gruppe von beliebig vielen Indizes (für beide von gleicher Anzahl) aufgefaßt werden.

Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik, November 1924.

(Eingegangen 9. 12. 24.)

95. Band. 1. Heft.

Inhalt: