

Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen

mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete
Gemeinsam mit W. Blaschke, Hamburg, M. Born, Göttingen, G. Runge, Göttingen

Herausgegeben von
R. Courant, Göttingen.

Die neuesten Bände:

Band XVIII:

Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. Von A. S. Eddington, M. A., M.Sc., F.R.S., Plumian Professor of Astronomy and experimental Philosophy in the University of Cambridge, Autorisierte, mit Zusätzen und Ergänzungen versehene Übersetzung von Dr. Alexander Ostrowski, Privatdozent an der Universität Göttingen, und Professor Dr. Harry Schmidt, Dozent am Friedrichs-Polytechnikum Göttingen, mit einem Anhang: Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip von Albert Einstein. 391 Seiten. 1929. 18 Goldmark; gebunden 19,50 Goldmark.
Aus dem Inhalt: Einleitung. Elemente der Theorie. Der Tensoralkal. Das Gravitationsgesetz. Relativistische Mechanik. Die Krümmung des raumzeitlichen Kontinuum. Elektrizität. Die Wellenmechanik. I. Teil: Die Wellenmechanik. II. Teil: Die verallgemeinerte Theorie. Note: Die neue Einsteinsche Theorie. Anhang von Albert Einstein: Eddingtons Theorie und Hamiltonsches Prinzip.

Band XIX

Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis von G. Polya, Thl. Professor an der Eidgen. Techn. Hochschule Zurich, und G. Szegő, Privatdozent an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Erster Band: Rechen — Integralrechnung — Funktionenlehre. 332 Seiten. 1925. 15 Goldmark; gebunden 16,50 Goldmark.
Inhaltsübersicht: Erster Abschnitt: Unerledigte Reihen und Folgen. I. Kapitel: Das Rechnen mit Potenzreihen. II. Kapitel: Reihenrechenformeln. III. Kapitel: Die Struktur reeller Folgen und Reihen. IV. Kapitel: Vermischte Aufgaben. Zweiter Abschnitt: Integralrechnung. I. Kapitel: Das Integral als Grenzwert von Rechtecksummen. II. Kapitel: Umformungen. III. Kapitel: Einiges über reelle Funktionen. IV. Kapitel: Verschiedene Arten der Gleichverteilung. V. Kapitel: Funktionen großer Zahlen. Dritter Abschnitt: Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Allgemeiner Teil. I. Kapitel: Komplexe Zahlen und Zahlenfolgen. II. Kapitel: Abbildungen und Vektorfelder. III. Kapitel: Geometrischen über den Funktionsverlauf. IV. Kapitel: Cauchy'scher Integralsatz. Prinzip vom Argument. V. Kapitel: Folgen analytischer Funktionen. VI. Kapitel: Das Prinzip vom Maximum.

Band XX:

Zweiter Band: Funktionentheorie — Nullstellen — Polynome — Determinanten — Zahlentheorie. 417 Seiten. 1925. 18 Goldmark; gebunden 19,50 Goldmark.
Vierter Abschnitt: Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Spezieller Teil. I. Kapitel: Maximalprinzip und Zentralindex. Maximalprinzip und Nullstellenzahl. II. Kapitel: Solobliche Abbildungen. III. Kapitel: Vermischte Aufgaben. — Fünfter Abschnitt: Die Lage der Nullstellen. I. Kapitel: Der Satz von Rolle und die Regel von Descartes. II. Kapitel: Geometrisches über die Nullstellen von Polynomen. III. Kapitel: Vermischte Aufgaben. — Sechster Abschnitt: Polynome und trigonometrische Polynome. — Siebenter Abschnitt: Determinanten und quadratische Formen. — Achter Abschnitt: Zahlentheorie. I. Kapitel: Zahlentheoretische Funktionen. II. Kapitel: Ganzzahlige Polynome und ganzzwertige Funktionen. III. Kapitel: Zahlentheoretisches über Potenzreihen. IV. Kapitel: Einiges über algebraische ganze Zahlen. V. Kapitel: Vermischte Aufgaben. — Neunter Abschnitt: Anhang. Einige geometrische Aufgaben.

Band XXI:

Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Von A. Schoenflies, ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M. 314 Seiten mit 85 Textfiguren. 1926. 15 Goldmark; gebunden 16,50 Goldmark.
Aus dem Inhalt: Einleitende Betrachtungen. Die Punktkoordinaten. Die Kurvengleichung. Allgemeine Formeln für Parallelkoordinaten. Die gerade Linie. Linienkoordinaten und Dualität. Doppelverhältnis und projektive Beziehung. Homogene Koordinaten. Der Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades. Kollinearität und reziproke Verwandtschaft. Räumliche Punktkoordinaten. Allgemeine Formeln und Sätze für räumliche Parallelkoordinaten. Ebene und Gerade in Punktkoordinaten. Die räumliche Dualität. Die Flächen der zweiten Ordnung. Anhang.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

HERAUSGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

UNTER MITTWIRKUNG

VON

LUDWIG BIBBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COTHAN, WALTER V. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR V. KÁRMÁN, ARNOID SOMMERFELD

GEBENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT ALBERT EINSTEIN
IN GÖTTINGEN IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL CONSTANTIN CARATHÉODORY
IN AACHEN IN MÜNCHEN.

Sonderabdruck aus Band 95, Heft 1.

Kornel Lanczos

Über tensorielle Integralgleichungen.



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1925

AN UNSERE MITARBEITER!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen“ sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation $60\frac{0}{10}$ des Gestehungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *willing druckfertig* und *gut lesbar* sein (Schreibmaschine).

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an Herrn Blumenthal zu schicken, der dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung des annehmenden Redakteurs und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit eine *Führer-korrektur* und eine *Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Die MATHEMATISCHEN ANNALEN

erscheinen in Heften, von denen je vier einen Band von etwa 20 Bogen bilden. Sie sind durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung haben Anspruch auf einen Vorzugspreis.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung. Geschäftsführender Redakteur ist

O. Blumenthal, Aachen, Bütscherstraße 38.

Alle Korrektursendungen sind an ihn zu richten.

Für die „Mathematischen Annalen“ bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

- I. Bieberbach, Berlin-Schmargendorf, Martenbaderstraße 9,
- O. Blumenthal, Aachen, Bütscherstraße 38,
- H. Bohr, Kopenhagen, St. Hans Torv 32,
- L. E. J. Bronwer, Laren (Nordholland),
- C. Carathéodory, München, Raushstraße 8,
- B. Courant, Göttingen, Nikolausbergerweg 5,
- W. v. Dyck, München, Hildegardestraße 5,
- A. Einstein, Berlin-Wilmersdorf, Haberlandstraße 5,
- D. Hilbert, Göttingen, Wilhelm-Weber-Straße 29,
- O. Hölder, Leipzig, Schenkendorffstraße 8,
- Th. v. Kármán, Aachen, Nizzaallee 41,
- F. Klein, Göttingen, Wilhelm-Weber-Straße 3,
- C. Neumann, Leipzig, Querstraße 10—12,
- A. Sommerfeld, München, Leopoldstraße 87.

Über tensorielle Integralgleichungen.

Von
Kornel Lanczos in Frankfurt a. M.

In der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie treten vektorielle, sowie tensorielle Differentialgleichungen auf, die einem Gebiet von nicht-euklidischer metrischer Struktur angehören. Es ist die Tatsache von großem Interesse, daß die Behandlung solcher tensorieller Differentialgleichungen, insofern sie linear sind, mit Leichtigkeit der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen untergeordnet werden kann. Man bekommt auch hier die Lösung in Form eines Integrals, welches den gesuchten Tensor quellenmäßig aus der gegebenen Verteilung der Quellen darstellt. Es tritt dabei statt der Greenschen Funktion ein „Greenscher Tensor“ auf. Die integrale Form der Darstellung legt unmittelbar die Einführung einer Art von Integralgleichungen nahe, in denen statt einer skalaren Funktion eine tensorielle Funktion gesucht wird, und in denen auch der Kern tensoriell von zwei Punkten des Gebietes abhängt. Eine solche Tensorintegralgleichung eines allgemeinen Riemannschen Raumes läßt sich vorerst auf eine Tensorintegralgleichung eines euklidischen Raumes reduzieren. Die so gewonnene Integralgleichung kann dann durch Erweiterung des Gebietes auf eine einzige skalare Fredholmische Integralgleichung zurückgeführt werden.

Eine wichtige und zugleich typische vektorielle Differentialgleichung verknüpft das elektromagnetische Vektorpotential Φ_i mit dem Vektor der Stromdichte q_i . Die Feldgleichungen für das Vektorpotential lauten bekanntlich:

$$(1) \quad \Delta \Phi_i = -q_i.$$

Unter Δ ist dabei eine skalare Operation zu verstehen, die explizite geschrieben folgendermaßen aussieht:

$$(2) \quad \Delta = g^{rs} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s}.$$

Wir haben hier ein Symbol „ ∂ “ eingeführt, wodurch eine „tensorielle Differentiation“ angedeutet werden soll. Die Anlehnung an das gewöhnliche Differentiationszeichen ∂ ist tatsächlich berechtigt, da auch für die tensorielle Differentiation die gewöhnlichen Operationsregeln gelten, mit Ausnahme der Vertauschung der Reihenfolge zweier Differentiationen, die hier nicht gestattet ist. Wir haben an ihrer Stelle vielmehr die Regel:

$$(3) \quad \frac{\partial^s \Phi_i}{\partial x_s \partial x_i} = \frac{\partial^s \Phi_i}{\partial x_i \partial x_s} + \Phi^a R_{aikk},$$

wo R_{ikwa} den Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor bedeutet. Für die tensorielle Differentiation besteht auch die große Bequemlichkeit, daß der Maßtensor selber wie eine Konstante zu behandeln ist, da seine Ableitung identisch verschwindet. Wir können also g_{ik} nach Belieben vor oder hinter das Differentiationszeichen bringen.

Die Methode, eine tensorielle Differentialgleichung (1) zu integrieren, beruht darauf, daß wir durch Multiplikation mit einem Hilfstensor von ebenso hoher Ordnung wie der unbekannt Tensor eine Invariante bilden. Wir wollen das Prinzip an einer vektoriellen Differentialgleichung klar machen, es läßt sich aber unverändert auf Tensoren beliebig hoher Ordnung übertragen. Bilden wir den invarianten Ausdruck:

$$(4) \quad S = \psi^s \Delta \Phi_s - \Phi^s \Delta \psi_s,$$

so können wir durch partielle Integration leicht eine Umformung vornehmen, welche zur Möglichkeit führt, die Gaußsche Integraltransformation anzuwenden. Es ist nämlich:

$$(5) \quad \psi^s \Delta \Phi_s = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\psi^p \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_s} g^{rs} \right) - \frac{\partial \psi^p}{\partial x_s} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_s} g^{rs},$$

und da im zweiten Glied Φ und ψ eine ganz symmetrische Rolle spielen, fällt dieses Glied bei der Differenzbildung heraus.

Diesem Umstand ist es zu verdanken, daß die Invariante S sich als Divergenz eines Vektors darstellen läßt:

$$(6) \quad S = \frac{\partial \lambda^s}{\partial x_s} = \text{div } \lambda,$$

wobei dieser Vektor λ_i folgendermaßen definiert ist:

$$(7) \quad \lambda_i = \psi^s \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_i} - \Phi^s \frac{\partial \psi_s}{\partial x_i}.$$

Genau dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir die Vektoren Φ_i und ψ_i durch Tensoren beliebig hoher Ordnung $\Phi_{ik\dots}$ und $\psi_{ik\dots}$ ersetzt denken.

Auf die Divergenz eines Vektors kann aber auch in der Riemannschen Geometrie der Gaußsche Satz ohne weiteres angewandt werden im Sinne folgender Gleichung:

$$(8) \quad \int \text{div } \lambda d\sigma = - \int \lambda_s \nu^s df,$$

wo $d\sigma$ das Volumenelement des Gebietes, df das Flächenelement der Umrandung bedeutet, und ν_i die nach innen weisende Normale.

Wir sind dadurch in die Lage gesetzt, die Methoden der Potentialtheorie aus dem Euklidischen in das Nichteuklidische und vom skalaren Fall auf den tensoriellen zu übertragen. Insbesondere bekommt die grundlegende „Greensche Formel“ jetzt folgende Fassung:

$$(9) \quad \int (\psi^s \Delta \Phi_s - \Phi^s \Delta \psi_s) d\sigma = - \int (\psi^s \frac{\partial \Phi_s}{\partial \nu^p} - \Phi^s \frac{\partial \psi_s}{\partial \nu^p}) df.$$

Es bedeutet hierbei die „Differentiation nach der Normale“: $\frac{\partial}{\partial \nu}$ folgende skalare Operation:

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} = \nu^s \frac{\partial}{\partial x_s}.$$

Den Hilfstensor ψ_i , den wir eingeführt haben¹⁾, bauen wir zu einem „Greenschen Tensor“ aus, der die Rolle der Greenschen Funktion zu übernehmen hat. Wir schreiben diesem Tensor folgende Bedingungen vor: Er soll am Rande des Gebietes verschwinden. Er soll, mit Ausnahme eines einzigen Punktes σ , überall regulär sein und die homogene Gleichung:

$$(11) \quad \Delta \psi_i = 0$$

erfüllen. Im singulären Punkt σ sollen die einzelnen Komponenten des Tensors, abgesehen von je einem konstanten Faktor, den wir gleich noch näher festsetzen werden, so unendlich werden, wie $\frac{1}{r^{n-2}}$, wenn wir uns in einem n -dimensionalen Raum befinden, und wenn r die unendlich kleine Entfernung von σ bezeichnet²⁾.

¹⁾ Der eine Index von Φ_i und ψ_i in Gleichung (9) und folgenden Gleichungen kann durch eine beliebige Gruppe $i, k \dots$ ersetzt gedacht werden. Wir sprechen darum lieber gleich allgemein von einem „Tensor“, als von einem „Vektor“.

²⁾ Wir denken hier an ein positiv-definites Linienelement. Auf den Charakter des Greenschen Tensors bei einem hyperbolischen Linienelement, wie dieser Fall für die Relativitätstheorie von besonderer Bedeutung ist, wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen. Siehe diesbezüglich meine Arbeit: Zum Problem der unendlich schwachen Felder in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Zeitschr. f. Physik, 31, (1925), S. 181—182.

Legen wir um diesen singulären Punkt eine unendlich kleine Kugel, so wird offenbar das über die Oberfläche dieser Kugel erstreckte Integral:

$$(12) \quad - \int \frac{\partial \psi_i}{\partial s^r} d\mathcal{F}$$

einem endlichen Grenzwert zustreben. Diesen Tensor wollen wir als den „Poltenor“ des Greenschen Tensors bezeichnen. Der Greensche Tensor ist erst dann eindeutig festgelegt, wenn wir auch noch über diesen Tensor verfügt haben. Wir machen nun folgende Vorschrift. Alle kontravarianten Komponenten des Poltensors seien gleich Null, mit Ausnahme einer einzigen, die gleich 1 sein soll.

Handelt es sich insbesondere um den „Polvektor“ p_i des Greenschen Vektors ψ_i , so können wir unsere Vorschrift in invarianter Schreibweise folgendermaßen fassen:

$$p^i = \eta_m^i,$$

wenn wir mit η_i^k den gemischten Einheitstensor bezeichnen. Tatsächlich sind jetzt alle Komponenten 0, mit Ausnahme einer einzigen: $i = m$, die = 1 ist. Wir erkennen, daß unser Polvektor nicht mehr bloß von dem einen Index i abhängt, sondern auch noch von dem Index m . Wir können m alle Werte durchlaufen lassen und zu jedem Wert gehört je eine Funktion ψ_i . Die Gesamtheit aller dieser Funktionen bezeichnen wir zusammengefaßt als „Greenschen Vektor“.

Unser Polvektor ist hierdurch zu einem Tensor zweiter Ordnung geworden, dessen kovariante Komponenten etwa in der Form:

$$(13) \quad p_{im} = g_{im}$$

beschrieben werden können. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, daß auch der Greensche Vektor selber schließlich zu einem Tensor zweiter Ordnung würde. Der Index m gehört *nur* zu dem Punkt σ , wo die Funktion ihre Singularität besitzt. Andererseits gehört der Index i *nur* zu dem laufenden Punkt s . Der Greensche Vektor ist also eine Funktion, deren Wert von *zwei* Punkten des Gebietes abhängt: dem laufenden Punkt s und dem festen Punkt σ , und zwar ist ihre Abhängigkeit von *beiden* Punkten eine *vektorielle*. Wir wollen diese Abhängigkeit durch folgende Bezeichnung des Greenschen Vektors veranschaulichen:

$$(14) \quad G_i(s, \sigma)_m.$$

Die Indizes i und m sind dabei gewissermaßen als zur Klammer gehörig zu betrachten; i gehört zum Punkt s , m zum Punkt σ . Transformiert man im Punkt s , so transformieren sich die Komponenten von G kovariant

in i , während m als eine Konstante zu betrachten ist. Transformiert man umgekehrt im Punkt σ , so transformieren sich die Komponenten m kovariant, während i unverändert bleibt³⁾.

Ganz ähnlich, wie beim Greenschen Vektor, führen wir den Poltenor des allgemeinen Greenschen Tensors ein, indem wir setzen:

$$(13') \quad p_{i_1 \dots m_1 n_1 \dots} = g_{i_1 \dots m_1 n_1 \dots}$$

und bezeichnen dementsprechend den Greenschen Tensor durch:

$$(14') \quad G_{i_1 \dots (s \sigma) m_1 n_1 \dots}$$

Eine fundamentale Eigenschaft des Greenschen Tensors erkennen wir, wenn wir die Gleichung (9) auf zwei Greensche Tensoren anwenden, deren fester Punkt einerseits σ , andererseits etwa s sei. Die linke Seite verschwindet dann identisch, während die Integration rechter Hand nur auf zwei die beiden Punkte σ bzw. s umgebende, unendlich kleine Kugeln auszu dehnen ist. Wir erhalten folgende Gleichung:

$$(15) \quad G_i(s, \sigma)_m p^i = G_r(\sigma, s)_i p_m^r,$$

was aber, unter Berücksichtigung unserer Vorschrift (13) für den Poltenor, folgendes bedeutet:

$$(16) \quad G_i(s, \sigma)_m = G_m(\sigma, s)_i.$$

Fester Punkt und variabler Punkt sind also miteinander vertauschbar, wobei auch die zugehörigen Indizes links und rechts vertauscht werden müssen.

³⁾ Dieses charakteristische Verhalten des Greenschen Vektors in bezug auf allgemeine Koordinatentransformationen wird verwischt, wenn wir uns auf ein rein euklidisches Gebiet beschränken und daselbst nur rechtwinklige Koordinaten und ihre linearen Transformationen ins Auge fassen. Dann transformiert sich das ganze Gebiet gleichmäßig. Nehmen wir aber in den beiden Punkten s und σ dieselbe Transformation vor, so transformiert sich der Greensche Vektor *scheinbar*, wie ein Tensor zweiten Grades. Für euklidische Gebiete hat — wir mir nach Schluß meiner Arbeit bekannt wurde — bereits Hilbert in seinen grundlegenden Abhandlungen über Integralgleichungen (zusammengefaßt erschienen unter dem Titel: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1912, Teubner)) den Begriff des Greenschen Tensors eingeführt zur Lösung von Systemen sinnvoller Differentialgleichungen. Er wählt als Beispiel ein vektorielles System und erhält die Lösung mit Hilfe eines „Greenschen Tensors“ (unter „Tensor“ ist hier, wie üblich, insbesondere ein Tensor zweiten Grades gemeint). Daß es sich hierbei eigentlich um einen Greenschen Vektor handelt, der von zwei Punkten des Gebietes vektoriell abhängt, was eine Scheidung der beiden Indizes in einen linken und einen rechten von der Klammer notwendig macht, wird erst bei der hier entwickelten tensoranalytischen Einführung des Greenschen Tensors deutlich.

Im allgemeinen Fall findet man ganz analog die Gleichung:

$$(16') \quad G_{ik\dots(s, \sigma)_{mn\dots}} = G_{m\dots(n, \sigma)_{ik\dots}}$$

So überträgt sich die „Symmetrieeigenschaft“ der Greenschen Funktion auf den tensoriellen Fall.

Mit Hilfe des Greenschen Vektors läßt sich ohne weiteres die Aufgabe lösen, das Vektorpotential Φ_i aus gegebener Stromdichteverteilung q_i und gegebenen Randwerten von Φ_i zu bestimmen. Setzen wir an Stelle des Hilfsvektors ψ_i den Greenschen Vektor in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir die Lösung in folgender Form:

$$(17) \quad \Phi_i(s) = \int G_i(s, \sigma)_{mn} q^m(\sigma) d\sigma + \int \frac{\partial G_i(s, \sigma)_{mn}}{\partial x^p} \Phi^m(\sigma) df.$$

Sind insbesondere die Randwerte 0 vorgeschrieben, so wird das Vektorpotential aus der Stromdichte allein quellennmäßig dargestellt.

Die integrale Form der Darstellung im Sinne der Gleichung (17) führt unmittelbar zur Aufstellung einer Art von Integralgleichungen, die wir als „Tensorintegralgleichungen“ bezeichnen können. Es sei ein Vektor φ als Funktion des Ortes s gesucht, der folgender Gleichung genügen soll:

$$(18) \quad \varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s, \sigma)_{mn} \varphi^m(\sigma) d\sigma = f_i(s)$$

(an Stelle von $d\sigma$ als Volumenelement ist das hier zweckmäßigere $d\sigma$ gesetzt). Der eine Index i wie auch m kann in dieser Gleichung und ebenso in allen folgenden als Repräsentant einer beliebigen Gruppe von mehreren (natürlich ihrer Anzahl nach für i und m gleichen) Indizes betrachtet werden, wodurch wir tensorielle Integralgleichungen beliebig hoher Ordnung bilden können. Wir wollen darum den Ausdruck „Vektor“ vorzuziehender durch den allgemeineren „Tensor“ ersetzen.

Der Kern unserer Integralgleichung $K_i(s, \sigma)_{mn}$ ist jetzt eine Funktion vom Typus des Greenschen Tensors. Er hängt von zwei Punkten s und σ des Gebietes ab, und zwar von beiden Punkten tensoriell, was durch Anhängen der Indizes links und rechts von der Klammer angedeutet ist. Wir erkennen ohne weiteres die invariante Eigenschaft dieses Gleichungssystems gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. Bei einer Transformation im laufenden Punkt σ bleiben die Gleichungen jede für sich invariant, infolge der Summation über den Index m . Bei einer Transformation im festen Punkt s transformieren sich beide Seiten des Gleichungssystems kovariant in i .

Auf eine solche Integralgleichung stoßen wir z. B. bei dem Problem der „unendlich schwachen Zusatzfelder“ in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Denken wir uns irgendein gegebenes metrisches Feld, das etwa

durch das Gravitationsfeld der kosmischen Massenverteilung erzeugt sei. Dieses selbst für längere Zeiträume als stationär betrachtbare Feld bildet den makroskopischen Grundstock der Weltgeometrie. Über dieses Grundfeld überlagern sich aber die rasch veränderlichen Felder der uns umgebenden Körper, die das gegebene Feld unendlich schwach modifizieren. Wir fragen, wie groß ist die unendlich schwache Änderung des Maßtensors $\delta g_{ik} = \gamma_{ik}$, die durch das Hinzufügen einer unendlich schwachen Materie, deren Tensor etwa durch τ_{ik} gegeben sei, hervorgerufen wird. Durch Variation der Einsteinschen Gravitationsgleichungen gelangen wir zu folgenden Feldgleichungen des Problems⁴⁾:

$$(19) \quad \Delta \gamma_{ik} - P_{ikmn} \gamma^{mn} = 2(\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \tau).$$

Dabei wird der Tensor vierter Ordnung P_{ikmn} folgendermaßen durch den Krümmungstensor bestimmt:

$$(20) \quad P_{ikmn} = R_{ikmn} + R_{kmn i}.$$

Er ist symmetrisch im ersten, wie auch im zweiten Indexpaar und bleibt auch unverändert, wenn man die beiden Indexpaare miteinander vertauscht. Es muß außerdem bemerkt werden, daß diese Gleichung nur in einem bestimmten, dem Problem angepaßten Koordinatensystem gilt, welches nämlich so gewählt ist, daß folgende Bedingung erfüllt sei:

$$(21) \quad \frac{\partial \gamma_i^i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = 0.$$

Wir erkennen, daß die Lösung dieser Gleichung auf eine Integralgleichung führt, wenn der Greensche Tensor $G_{ik}(s, \sigma)_{mn}$ für den Ausdruck $\Delta \gamma_{ik}$ bekannt ist. Der Kern dieser Integralgleichung ist folgendermaßen aufgebaut:

$$(22) \quad K_{ik}(s, \sigma)_{mn} = G_{ik}(s, \sigma)_{pq} P^{pq}_{mn}(\sigma).$$

Der Parameter λ ist -1 , und die Quellfunktion $f_{ik}(s)$ berechnet sich bei verschwindenden Randwerten von γ_{ik} aus folgendem Integral:

$$(23) \quad f_{ik}(s) = - \int G_{ik}(s, \sigma)_{mn} q^{mn}(\sigma),$$

wo wir

$$(24) \quad q_{ik} = 2(\tau_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \tau)$$

gesetzt haben.

Die Lösung einer allgemeinen tensoriellen Integralgleichung von der Form (18) läßt sich in zwei Etappen auf die Lösung einer gewöhnlichen Fredholmischen Integralgleichung zurückführen.

⁴⁾ Siehe ausführlicher in meiner oben zitierten Arbeit.

Vorerst kann die nichteuklidische Beschaffenheit des Maßbensors aus der Gleichung vollständig eliminiert werden. Wir machen dabei von der Möglichkeit Gebrauch, die Tensorkomponenten nach Belieben linear zu transformieren. Wohl ist es nicht möglich, den Maßbensor durch eine *enbliche* Transformation der Koordinaten überall auf die euklidische Form zu bringen. Bei den Transformationsformeln für die Tensorkomponenten kommt es aber nicht auf die Transformation der x_i selbst, sondern allein auf die Transformation der *Differentialiale* dx_i an. Und man kann tatsächlich durch eine lineare Transformation dieser Differentialiale:

$$(25) \quad dx_i = a_{ij} d\bar{x}_j,$$

die sogar so gewählt werden kann, daß sie im ganzen Gebiet stetig bleiben soll, das Linienelement *überall* auf die euklidische Form $ds^2 = \sum_{(i)} (d\bar{x}_i)^2$ bringen. Die nichteuklidische Beschaffenheit dieses Linienelementes tut sich jetzt darin kund, daß die $d\bar{x}_i$ keine exakten Differentialiale mehr sind. Da aber in unseren Formeln keine Differentiationen vorkommen, ist das im gegebenen Falle offenbar belanglos. So übertragen wir also unsere Tensorintegralgleichung aus dem Riemannschen Raum in einen *rein euklidischen* Raum und zwar nur dadurch, daß wir für die Komponenten von $f_i(s)$, $\varphi_i(s)$ und $K_i(s, \sigma)$ neue, aus den alten durch lineare Transformation hervorgegangene Werte vorschreiben. Als rechtwinklige Koordinaten des euklidischen Abbildungsraumes können wir die alten x_i -Koordinaten unverändert beibehalten, wenn nur die Abbildung volumentreu ist. Dazu ist die Bedingung $g = 1$ im ursprünglichen Gebiet erforderlich, was durch eine endliche Transformation der x_i noch vor der Orthogonalisierung der dx_i mit Leichtigkeit zu erreichen ist⁹⁾.

⁹⁾ Anmerkung bei der Korrektur. Die hier angeführte Transformation auf Euklidizität als erste Etappe in der Reduktion auf die skalare Form ist prinzipiell nicht erforderlich. Die tensorielle Integralgleichung (18) läßt sich auch in folgender Form ansetzen:

$$(18a) \quad \varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s, \sigma)^m \varphi_m(\sigma) d\sigma = f_i(s).$$

Wir können von hier aus unmittelbar zur Definition der Gleichung (28) vorschreiten, ganz wie im Text nachfolgend angegeben, wobei nur bei der Definition des erweiterten Kernes $K(\bar{s}, \bar{\sigma})$ der Ausdruck $K_i(s, \sigma)^m$ an Stelle von $K_i(s, \sigma)^m$ zu treten hat. Bei dieser unsymmetrischen Lage der beiden Indizes links und rechts von der Klammer würde aber im Fall eines symmetrischen Kernes die Symmetrieeigenschaft verloren gehen. Denn aus der Gleichung (30) folgt:

$$K_i(s, \sigma)^m = K^m(\sigma, s)_i$$

und *nicht* $= K_m(\sigma, s)_i$. Der Sinn der Zwischentransformation auf die Form (26) ist also in der *Symmetrisierung eines symmetrischen Kernes* zu erblicken. Auf diesen Umstand hat mich Herr Professor Hellinger freundlichst aufmerksam gemacht.

Im euklidischen Gebiet brauchen wir nun zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten nicht mehr zu unterscheiden und können unsere Integralgleichung daher auch so schreiben:

$$(26) \quad \varphi_i(s) - \lambda \int K_i(s, \sigma)^m \varphi_m(\sigma) d\sigma = f_i(s).$$

Wir haben einerseits über das ganze Gebiet zu integrieren, andererseits über den Index m zu summieren. Offenbar kann aber auch eine Summation als Spezialfall einer Integration betrachtet werden, nämlich wenn wir über eine Treppenkurve zu integrieren haben, deren Stufenlänge $= 1$ ist. Auf diesem Gedanken fußend, können wir unser Gebiet derart *erweitern*, daß Summation und Integration über das ursprüngliche Gebiet zu einer einfachen Integration über das erweiterte Gebiet wird.

Wir denken uns unsern n -dimensionalen euklidischen Raum zu einem $n+1$ -dimensionalen ergänzt, indem wir zu den früheren rechtwinkligen Koordinaten x_i noch eine neue, etwa u , hinzunehmen. Dieses u soll nur zwischen 0 und n variieren. Ein Punkt \bar{s} des erweiterten Gebietes hängt also außer von den n Koordinaten des Punktes s auch noch von dem Wert von u ab, was wir so andeuten wollen:

$$(27) \quad (\bar{s}) = (s, u).$$

Diesem Punkt schreiben wir nun folgenden Funktionswert $\varphi(\bar{s})$ zu. Wenn die u -Koordinate von $\bar{s} = (s, u)$ zwischen die ganzen Zahlen $i-1$ und i fällt, soll $\varphi(\bar{s})$ dauernd $= \varphi_i(s)$ sein. Ebenso definieren wir eine Funktion $f_i(s)$. Schließlich definieren wir eine Kernfunktion $K(\bar{s}, \bar{\sigma})$ derart, daß dieselbe $= K_i(s, \sigma)^m$ sein soll, wenn die u -Koordinate von s zwischen die ganzen Zahlen $i-1$ und i , die u -Koordinate von σ zwischen die ganzen Zahlen $m-1$ und m fällt.

Wir erkennen mit Leichtigkeit, daß unsere vektorielle Integralgleichung (26) in dem erweiterten Gebiet auf folgende *skalare* Fredholm'sche Integralgleichung zurückgeht:

$$(28) \quad \varphi(s) - \lambda \int K(\bar{s}, \bar{\sigma}) \varphi(\bar{\sigma}) d\sigma = f(\bar{s}).$$

Haben wir es mit Tensoren höherer Ordnung zu tun, so können wir offenbar auf jeden einzelnen Index genau dasselbe Verfahren anwenden, und wir gelangen zu einem Gebiet von $n+m$ Dimensionen, wenn es sich insbesondere um Tensoren m -ter Ordnung handelt.

Wir kommen also zu folgendem Resultat:

Eine allgemeine tensorielle Integralgleichung m -ter Ordnung in einem n -dimensionalen Riemannschen Raume ist äquivalent einer einzigen skalaren Fredholm'schen Integralgleichung in einem $n+m$ -dimensionalen euklidischen Raume.

Allerdings sind Kernfunktion, Quellenfunktion und auch die gesuchte Funktion im erweiterten Gebiet unstetig geworden. Wir können aber zwischen die einzelnen Treppenstufen in einer beliebig kleinen Umgebung $\pm \epsilon$ der Unstetigkeitsstellen einen linearen Anstieg mit endlich bleibender Tangente dazwischenschalten und den Kern wie auch die Quellenfunktion auf diese Weise stetig machen. Wir erkennen dann leicht, daß die zu den so modifizierten Funktionen gehörende nunmehr ebenfalls stetig gewordene $\varphi(\bar{s})$ -Funktion, die durch die Integralgleichung (28) definiert wird, nur beliebig wenig von unserem $\varphi_i(s)$ abweicht, abgesehen von einer beliebig kleinen Umgebung $\pm \epsilon$ um die ganzzahligen Unstetigkeitsstellen herum. Die Unstetigkeiten unserer Integralgleichung können also mit beliebiger Annäherung aufgehoben werden.

Indem wir nun die bekannten Sätze der Integralgleichungstheorie auf unsere Integralgleichung (28) anwenden, und die spezielle Natur der in ihr vorkommenden Funktionen berücksichtigen, können wir jedem Satz der skalaren Integralgleichungen einen korrespondierenden Satz für tensorielle Integralgleichungen zur Seite stellen. So lautet z. B. das „Lösungstheorem“ für eine tensorielle Integralgleichung folgendermaßen:

Zu jedem $K_i(s, \sigma)_m$ einer tensoriellen Integralgleichung gehört ein lösender Kern $K_i(s, \sigma)_m$, mit dessen Hilfe der gesuchte Tensor $\varphi_i(s)$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$(29) \quad \varphi_i(s) = f_i(s) + \lambda \int K_i(s, \sigma)_m f^m(\sigma) d\sigma.$$

Auch die besonders wichtigen Sätze, die insbesondere für symmetrische Kerne gelten, lassen sich mit Leichtigkeit übertragen. Die Symmetriebedingung eines Kerns:

$$K(\bar{s}, \bar{\sigma}) = K(\bar{\sigma}, \bar{s})$$

erhält in unserem Fall folgende Gestalt:

$$(30) \quad K_i(s, \sigma)_m = K_m(\sigma, s)_i.$$

Das ist gerade diejenige Reziprozität in bezug auf festen und variablen Punkt, die wir beim Greenschen Tensor als dessen Symmetrieeigenschaft kennen gelernt haben. Der Greensche Tensor ist also ein *symmetrischer Kern*.

Die zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ_μ und λ_ν gehörenden Eigenfunktionen $\varphi_\mu(s)$ und $\varphi_\nu(s)$ eines symmetrischen Kerns sind zueinander orthogonal. Das bedeutet jetzt folgende Integralrelation:

$$(31) \quad \int \varphi_\mu^m(s) \varphi_\nu^m(s) ds = 0,$$

während für die Normierung der Eigenfunktionen die Gleichung:

$$(32) \quad \int \varphi_m^{(i)}(s) \varphi_m^{(i)}(s) ds = 1$$

vorgeschrieben ist.

Ein symmetrischer Kern kann nach seinen Eigenfunktionen in folgende unendliche Reihe entwickelt werden (Bilinearformel) — vorausgesetzt, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert:

$$(33) \quad K_i(s, \sigma)_m = \sum_{(i)} \frac{\varphi_i^{(i)}(s) \varphi_m^{(i)}(\sigma)}{\lambda_i}.$$

Eine analoge Entwicklung gilt für den zu ihm gehörenden lösenden Kern:

$$(34) \quad K_i(s, \sigma)_m = \sum_{(i)} \frac{\varphi_i^{(i)}(s) \varphi_m^{(i)}(\sigma)}{\lambda - \lambda_i}.$$

Es kann auch ein beliebiger, mit Hilfe eines symmetrischen Kerns quellenmäßig darstellbarer Tensor $f_i(s)$ in eine nach Eigenfunktionen des Kerns fortlaufende unendliche Reihe entwickelt werden:

$$(35) \quad f_i(s) = \sum_{(i)} \alpha_i \varphi_i^{(i)}(s),$$

wobei die α_i bloße Zahlen sind. Insbesondere läßt sich ein beliebiger, zweimal differenzierbarer Tensor, der am Rande des Gebietes verschwindet, nach den Eigenfunktionen eines Greenschen Tensors entwickeln.

In allen diesen für beliebige Riemannsche Räume geltenden Formeln kann der eine Index i , wie auch m , als Repräsentant einer Gruppe von beliebig vielen Indizes (für beide von gleicher Anzahl) aufgefaßt werden.

Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik, November 1924.

(Eingegangen 9. 12. 24.)

	Seite
Felix Klein [†] . Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen	2
Walffisz, A., Über zwei Gitterpunktprobleme	69
Dörge, K., Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz	84
Perron, O., Über Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Differentialgleichungen	98
Hammerstein, A., Über die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen linearer Integralgleichungen II	102
Rogosinski, W., Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen	110
König, D. und Stephan Valkó, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen	135
Tichonoff, A., Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn	139
Lanczos, K., Über tensorielle Integralgleichungen	143
Mandelstam, L. und J. Tamm. Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitätstheorie	154

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Felix Klein Gesammelte mathematische Abhandlungen

in 3 Bänden:

Band I:

Liniengeometrie — Grundlegung der Geometrie — Zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) 624 Seiten mit einem Bildnis. 1921. Unveränderter Neudruck 1925. 25 Goldmark

Band II:

Anschauliche Geometrie, Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie. Zur mathematischen Physik. Herausgegeben von R. Fricke und H. Vermeil. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) 720 Seiten mit 185 Textfiguren. 1922. Unveränderter Neudruck 1925. 25 Goldmark

Band III:

Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen. Anhang: Verschiedene Verzeichnisse. Herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bessel-Hagen. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) 783 Seiten und 36 Anhangseiten mit 138 Textfiguren. 1923. 30 Goldmark