

## Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

GEORG PÓLYA in Zürich.

1. Herr Borel\*) hat im Jahre 1894 folgenden Satz bewiesen:  
Die analytische Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

sei im Kreise  $|x| \leq 1$  eindeutig und, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Polen, regulär. Wenn die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt  $x = 0$  ganze rationale Zahlen sind, so ist  $f(x)$  eine rationale Funktion.

Ich habe vor kurzem\*\*) folgenden Satz bewiesen: wenn  $g(\rho)$  eine ganze transzendente Funktion ist, so können nicht alle Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  der Entwicklung

$$g\left(\frac{1}{x-c}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ganze rationale Zahlen sein. — Die Funktion  $g\left(\frac{1}{x-c}\right)$  hat in der ganzen Ebene den einzigen singulären Punkt  $x = c$ ; da dieser aber ein wesentlich singulärer Punkt ist, so ist dieser letzte Satz nicht im ersten enthalten.

Ich werde nun in der vorliegenden Abhandlung einen Satz beweisen, der beide erwähnten Resultate umfaßt, nämlich den folgenden

Satz I. *Es sei  $R > 1$ . Die analytische Funktion*

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

*sei im Kreise  $|x| \leq R$  eindeutig, und, abgesehen von einer endlichen Anzahl von singulären Stellen, regulär. Wenn die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt  $x = 0$  ganze rationale Zahlen sind, so ist  $f(x)$  eine rationale Funktion.*

\*) Borel, Sur une application d'un théorème de M. Hadamard. Bulletin des sciences mathématiques, 2<sup>te</sup> Folge, Bd. 18, S. 22—25.

\*\*) Pólya, Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. d. C. M. di Palermo, Bd. 40, S. 1—16.

Dieser Satz enthält den erwähnten Satz von Borel. Denn unter den Bedingungen des Borelschen Satzes ist, nach den allgemeinen Prinzipien der Funktionentheorie, die Existenz eines Kreises  $|x| \leq R$  ( $R > 1$ ) gesichert, in welchem die Funktion  $f(x)$  eindeutig ist und keine anderen Singularitäten besitzt, als im Kreise  $|x| \leq 1$ ; er geht aber über den Borelschen Satz hinaus, weil er über die Natur der singulären Punkte im Kreise  $|x| \leq R$  nichts voraussetzt, so daß insbesondere dieser Kreis auch isolierte wesentlich singuläre Stellen enthalten könnte. Hierdurch wird zwar der Beweis des Satzes I bedeutend komplizierter, als der des Borelschen Satzes, seine Konsequenzen sind aber auch viel mannigfaltiger.

Ich werde den Beweis in den §§ 2—6, die erwähnten Konsequenzen in den §§ 7—9 entwickeln. Ich schicke nur eine ganz spezielle Folgerung voraus, um das Interesse für den Satz I zu erwecken. Es seien

$$Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x), R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)$$

beliebige rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten (d. h. sowohl der Zähler als auch der Nenner sollen rationale Koeffizienten besitzen), sie seien nur den Bedingungen

$$Q_j(x) \not\equiv 0, \quad R_j(0) = 0, \quad R_j(x) \equiv R_k(x) \\ (j, k = 1, 2, \dots, n; j \geq k)$$

unterworfen. Die Funktion

$$Q_1(x) e^{R_1(x)} + Q_2(x) e^{R_2(x)} + \dots + Q_n(x) e^{R_n(x)}$$

ist eindeutig, sie hat nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte, und sie kann sich nie auf eine rationale Funktion reduzieren\*). Ihre Potenzreihenentwicklung um den Punkt  $x = 0$  wird bei jeder Wahl von  $Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n$  nur rationale Koeffizienten enthalten, aber diese Koeffizienten können, kraft des Satzes I, bei keiner Wahl von  $Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n$  sämtlich ganze Zahlen sein.

2. Ich kann ohne Beschränkung voraussetzen, daß die Funktion  $f(x)$  an der Kreisperipherie  $|x| = R$  keinen singulären Punkt hat. Denn wäre das der Fall, so könnte ich den Kreis  $|x| \leq R$  durch einen passend gewählten kleineren konzentrischen Kreis ersetzen, der sowohl die Voraussetzung des Satzes I, wie auch die neu auferlegte Bedingung erfüllen würde.

---

\*) Nach einer leichten Umformung ist der Beweis ebenso (durch vollständige Induktion und Differenzieren) zu führen, wie im geläufigen Falle, wo  $Q_j$  Polynome und  $R_j$  Polynome ersten Grades sind. Vgl. z. B. Picard, *Traité d'Analyse*, Bd. III, S. 427.

Die Funktion  $f(x)$  soll im Kreise  $|x| \leq R$   $s$  singuläre Punkte haben, die mit

$$\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_s}$$

bezeichnet werden mögen. Nach dem eben Gesagten ist

$$\frac{1}{|c_\nu|} < R \quad (\nu = 1, 2, \dots, s).$$

Die Funktion  $f(x)$  ist in der Umgebung des Punktes  $c_\nu^{-1}$  eindeutig und kann daher in eine Laurentsche Reihe entwickelt werden, deren Hauptteil mit

$$G_\nu \left( \frac{1}{c_\nu x - 1} \right)$$

bezeichnet werden soll.  $G_\nu(z)$  ist eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion der Variablen  $z$ , je nach der Art der Singularität im Punkte  $x = c_\nu^{-1}$ , und es kann

$$(2) \quad G_\nu(0) = 0$$

vorausgesetzt werden.

Die Funktion

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^s G_\nu \left( \frac{1}{c_\nu x - 1} \right) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots$$

ist im Kreise  $|x| \leq R$  eindeutig und regulär. Folglich ist der Konvergenzradius der rechts stehenden Potenzreihe größer als  $R$  und so kann die Ungleichung

$$(3) \quad |b_n| R^n < 1$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von  $n$  unrichtig sein.

Man wähle eine positive Zahl  $r$  ( $r > 0$ ), die sämtlichen Ungleichungen

$$(4) \quad r < \frac{1}{|c_\nu|}$$

genügt. Der Konvergenzradius der Potenzreihe (1) ist größer als  $r$ , und daher ist die Ungleichung

$$(5) \quad |a_n| r^n < 1$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von  $n$  nicht erfüllt.

Es kann gewiß

$$(6) \quad r < 1$$

angenommen werden, aber man wird auch zu dieser Annahme genötigt, wenn man Trivialitäten ausweichen will. Denn ist (6) nicht erfüllt, so muß die Potenzreihe (1) wegen (5) und wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten  $a_n$  sich auf ein Polynom reduzieren.

3. Mein Beweis stützt sich wesentlich auf den folgenden wichtigen Satz des Herrn Wigert\*):

*Dafür, daß die durch die Potenzreihenentwicklung*

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots + D_n x^n + \dots = H\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

*definierte Funktion  $H(z)$  eine ganze Funktion der Variablen  $z$  mit der Eigenschaft*

$$H(0) = 0$$

*sei, ist notwendig und hinreichend, daß eine ganze Funktion*

$$h(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_k z^k + \dots$$

*existiere, die folgende drei Eigenschaften besitzt:*

$$h(0) = D_0, \quad h(1) = D_1, \quad h(2) = D_2, \quad \dots, \quad h(n) = D_n, \quad \dots,$$

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k |d_k|^{\frac{1}{k}} = 0,$$

$$(8) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg |h(re^{i\vartheta})|}{r} \leq 0$$

*gleichmäßig für  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ .*

*Jede der beiden ganzen Funktionen  $H(z)$  und  $h(z)$  ist durch die andere eindeutig bestimmt, und sie sind entweder beide rational oder beide transzendent.*

Von den beiden Bedingungen (7) und (8) genügt es übrigens immer nur die eine zu verifizieren, denn sie sind äquivalent.

Auf Grund des Wigertschen Satzes läßt sich eine ganze Funktion

$$g_\nu(z) = d_{\nu,0} + d_{\nu,1} z + d_{\nu,2} z^2 + \dots + d_{\nu,k} z^k + \dots$$

bestimmen, so daß

$$G_\nu\left(\frac{1}{c_\nu x - 1}\right) = g_\nu(0) + g_\nu(1)c_\nu x + \dots + g_\nu(n)c_\nu^n x^n + \dots$$

gesetzt werden kann. Da  $\nu$  nur einer endlichen Anzahl Werte fähig ist, kann die Bedingung (7) auch so ausgesprochen werden: bei vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ist die Ungleichung

$$(9) \quad |d_{\nu,k}| < \frac{\varepsilon^k}{k!} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s)$$

höchstens für eine endliche Anzahl Werte von  $k$  unrichtig.

Ich führe die ganze Funktion

$$g(z) = g_1(z)c_1^z + g_2(z)c_2^z + \dots + g_s(z)c_s^z$$

\*) Wigert, Sur les fonctions entières, Oefversigt af K. Vetenskapakademiens Förhandlingar, Stockholm (1900), S. 1001—1011.

ein. Mit dieser neuen Bezeichnung läßt sich die Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{v=1}^s G_v \left( \frac{1}{c_v x - 1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (g(n) + b_n) x^n \end{aligned}$$

schreiben.

4. Ich definiere die Zahlen  $C_{m,0}, C_{m,1}, \dots, C_{m,m_s}$  durch die in  $x$  identische Gleichung

$$(10) \quad \begin{aligned} C_{m,0} + C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 + \dots + C_{m,m_s}x^{m_s} \\ \equiv (1 - c_1x)^m (1 - c_2x)^m \dots (1 - c_sx)^m. \end{aligned}$$

Es ist also

$$C_{m,0} = 1, \dots, C_{m,m_s} = (-1)^{m_s} c_1^m c_2^m \dots c_s^m.$$

Die Funktion  $h(t)$  sei für  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  irgendwie erklärt. Ich setze\*)

$$\begin{aligned} \square^m h(t) &= \sum_{\mu=0}^{m_s} C_{m,\mu} h(t + ms - \mu) \\ &= h(t + ms) + C_{m,1} h(t + ms - 1) + \dots + C_{m,m_s} h(t). \end{aligned}$$

Sind  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  zwei beliebige Funktionen, so ist

$$\square^m (h_1(t) + h_2(t)) = \square^m h_1(t) + \square^m h_2(t).$$

Ich will den Wert von  $\square^m h(t)$  für gewisse spezielle Funktionen  $h(t)$  berechnen bzw. abschätzen. Ich betrachte zuerst  $\square^m P(t) c_v^t$ , wo

$$P(t) \equiv u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + u_{m-1} t^{m-1}$$

ein beliebiges Polynom bedeutet, dessen Grad  $\leq m - 1$  ist. Man kann und zwar nur auf eine Weise  $m$  Konstanten  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}$  bestimmen, so daß identisch in  $t$

$$P(t) \equiv v_0 + v_1 \frac{t+1}{1} + v_2 \frac{t+1}{1} \frac{t+2}{2} + \dots + v_{m-1} \frac{t+1}{1} \dots \frac{t+m-1}{m-1}$$

\*) Das Symbol  $\square^m$  hat die Eigenschaft

$$\square^m (\square^n h(t)) = \square^{m+n} h(t).$$

Ist  $s=1, c_1=1$  so ist in gewöhnlicher Bezeichnung

$$\square^m h(t) = \Delta^m h(t).$$

Vgl. übrigens Encyclopädie, Bd. I, Teil 2, S. 933—937.

wird. Wenn die rationale Funktion

$$\begin{aligned} & \frac{v_0}{1 - c_v x} + \frac{v_1}{(1 - c_v x)^2} + \cdots + \frac{v_{m-1}}{(1 - c_v x)^m} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( v_0 + v_1 \frac{t+1}{1} + \cdots + v_{m-1} \frac{t+1}{1} \frac{t+2}{2} \cdots \frac{t+m-1}{m-1} \right) c_v^t x^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} P(t) c_v^t x^t \end{aligned}$$

mit dem Polynom (10) multipliziert wird, so wird daraus ein Polynom vom Grade  $ms - 1$ . Daher verschwindet in der Produktenreihe der Koeffizient von  $x^{t+ms}$  für  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  d. h. es wird

$$(11) \quad \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} P(t+ms-\mu) c_v^{t+ms-\mu} = \square^m P(t) c_v^t = 0.$$

Die Gleichung (11) ist also unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Grad des Polynoms  $P(t) \leq m - 1$  ist. Ist der Grad  $\geq m$ , so ist das Resultat viel komplizierter, und so will ich mich mit der Abschätzung von  $\square^m t^k c_v^t$  für beliebige  $k$  begnügen. Es ist

$$\begin{aligned} \square^m t^k c_v^t &= \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} (t+ms-\mu)^k c_v^{t+ms-\mu}, \\ |\square^m t^k c_v^t| &\leq \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| (t+ms-\mu)^k |c_v|^{t+ms-\mu}, \\ &\leq (t+ms)^k |c_v|^t \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| |c_v|^{ms-\mu}, \\ &\leq (t+ms)^k |c_v|^t (|c_v| + |c_1|)^m (|c_v| + |c_2|)^m \cdots (|c_v| + |c_s|)^m \end{aligned}$$

mit Berücksichtigung von (10), nach der geläufigen Majorantenmethode. Endlich kommt mit Rücksicht auf (4)

$$(12) \quad |\square^m t^k c_v^t| < (t+ms)^k \left(\frac{1}{r}\right)^t \left(\frac{2}{r}\right)^{ms}.$$

Die gewonnene Ungleichung (12) ist für jeden Wert von  $k$  richtig, aber nur für  $k \geq m$  von Interesse.

Ich will nun zur Abschätzung von  $\square^m g(t)$  schreiten. Es ist

$$\begin{aligned}\square^m g(t) &= \sum_{\nu=1}^s \square^m g_{\nu}(t) c_{\nu}^t = \sum_{\nu=1}^s \sum_{k=0}^{\infty} d_{\nu,k} \square^m t^k c_{\nu}^t \\ &= \sum_{\nu=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} d_{\nu,k} \square^m t^k c_{\nu}^t\end{aligned}$$

mit Benutzung der Gleichung (11). Mit Benutzung der Ungleichung (12) erhält man

$$\begin{aligned}|\square^m g(t)| &\leq \sum_{\nu=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} |d_{\nu,k}| |\square^m t^k c_{\nu}^t| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^s \sum_{k=m}^{\infty} |d_{\nu,k}| (t+ms)^k \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} 2^{ms}.\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Ungleichung (9) gelangt man zur Ungleichung

$$|\square^m g(t)| < 2^{ms} \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} s \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} (t+ms)^k,$$

die nicht immer richtig zu sein braucht, aber bei festem positivem  $\varepsilon$  nur für eine endliche Anzahl Werte von  $m$  falsch sein kann. Ist  $\varepsilon < 1$ , so gelangt man weiter zu der Ungleichung

$$|\square^m g(t)| < s 2^{ms} \left(\frac{1}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(t+ms)^k}{k!},$$

$$(13) \quad |\square^m g(t)| < s 2^{ms} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m.$$

Ich will noch

$$\square^m b_t = \sum_{\mu=0}^{ms} C_{m,\mu} b_{t+ms-\mu}$$

abschätzen. Durch Anwendung von (3) erhält man

$$\begin{aligned}|\square^m b_t| &\leq \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| \left(\frac{1}{R}\right)^{t+ms-\mu} = \left(\frac{1}{R}\right)^t \sum_{\mu=0}^{ms} |C_{m,\mu}| \left(\frac{1}{R}\right)^{ms-\mu} \\ &\leq \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + |c_1|\right)^m \left(\frac{1}{R} + |c_2|\right)^m \cdots \left(\frac{1}{R} + |c_s|\right)^m\end{aligned}$$

mit Benutzung der Formel (10) und der schon einmal angewandten

Majorantenmethode. Mit Benutzung von (4) gelangt man endlich zu der Ungleichung

$$(14) \quad |\square^m b_i| < \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{m_s},$$

die höchstens für eine endliche Anzahl Werte von  $t$  nicht erfüllt ist.

5. Ob die Potenzreihe (1) eine rationale Funktion darstellt oder nicht, wird durch die Betrachtung der rekurrenten Determinanten

$$(15) \quad A_n^{(r)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & \cdots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix} = |a_{n+i+k}| \quad (i, k=0, 1, 2, \dots, r-1)$$

entschieden. Die Zahlen  $A_n^{(r)}$  sind sämtlich rational und ganz.

Ich will insbesondere die Determinanten  $A_n^{(n)}$  und  $A_n^{(n+1)}$  betrachten, und sie mit Hilfe des Symbols  $\square^m$  umformen. Es sei ein gewisser positiver echter Bruch  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) fest gewählt. Ich setze

$$m = \left[ \alpha \frac{n}{s} \right].$$

Die so bestimmte ganze Zahl  $m$  tritt in den nun folgenden Formeln (16) (17) auf, die man durch Addition von Kolonnen erhält (die ersten  $m$ s Kolonnen bleiben ungeändert):

$$(16) \quad A_n^{(n)} = \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+ms-1} & \square^m a_n & \square^m a_{n+1} & \cdots & \square^m a_{2n-ms-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & \cdots & a_{2n+ms-2} & \square^m a_{2n-1} & \square^m a_{2n} & \cdots & \square^m a_{3n-ms-2} \end{vmatrix},$$

$$(17) \quad A_n^{(n+1)} = \begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+ms-1} & \square^m a_n & \square^m a_{n+1} & \cdots & \square^m a_{2n-ms} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n} & \cdots & a_{2n+ms-1} & \square^m a_{2n} & \square^m a_{2n+1} & \cdots & \square^m a_{3n-ms} \end{vmatrix}.$$

Alle bisher gewonnenen Formeln und Ungleichungen werden nun zur Abschätzung der Determinanten (16) (17) vereinigt.

Wir müssen insbesondere  $\square^m a_i$  für

$$(18) \quad n \leq t \leq 3n - ms$$

abschätzen. Dabei muß beachtet werden, daß  $m$  mit  $n$  ins Unendliche wächst. Es ist genauer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \frac{\alpha}{s},$$

so daß etwa die Ungleichung

$$(19) \quad \frac{\alpha}{2s} < \frac{m}{n} < \frac{2\alpha}{s}$$



nur für endlich viele Werte von  $n$  falsch sein kann. Ich behaupte, daß eine positive Zahl  $\varepsilon$  existiert, die für alle Werte  $n, m, t$ , die den Bedingungen (18) (19) genügen, die Ungleichung

$$(20) \quad s2^{ms} \left(\frac{e}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m < \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}$$

erfüllt. In der Tat, die Ungleichung (20) fordert das Bestehen von

$$\varepsilon < \left\{ \frac{r}{2e} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \right\}^s \frac{1}{s^m} \left(\frac{r}{eR}\right)^{\frac{t}{m}}.$$

Gemäß (19) ist  $m > 0$ , also  $m \geq 1$ , und nach (18) (19) ist

$$\frac{t}{m} < \frac{3n}{m} < \frac{6s}{\alpha}.$$

Wird also

$$\varepsilon \leq \left\{ \frac{r}{2e} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \right\}^s \frac{1}{s} \left(\frac{r}{eR}\right)^{\frac{6s}{\alpha}}, \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

gewählt, so wird (20) sicherlich erfüllt.

Unter Beachtung von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m = \infty$$

erhält man durch Zusammenschluß von (13), (14), (20), daß die Ungleichung

$$(21) \quad \begin{aligned} |\square^m a_t| &\leq |\square^m g(t)| + |\square^m b_t| < s2^{ms} \left(\frac{e}{r}\right)^{t+ms} \varepsilon^m + \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}, \\ |\square^m a_t| &< 2 \left(\frac{1}{R}\right)^t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms} \\ &(t = n, n+1, n+2, \dots, 3n-ms) \end{aligned}$$

nur für endlich viele Werte von  $n$  falsch sein kann.

Die rechte Seite von (21) nimmt mit wachsendem  $t$  ab. Es bleibt daher irgend ein Element, das den letzten  $n - ms$  Kolonnen der Determinante (16) oder den letzten  $n + 1 - ms$  Kolonnen der Determinante (17) entnommen ist, dem absoluten Betrage nach unter der Schranke

$$2 \left(\frac{1}{R}\right)^n \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)^{ms}.$$

Nach (5) ist

$$|a_t| < \left(\frac{1}{r}\right)^t.$$

Hier nimmt die rechte Seite mit wachsendem  $t$  zu, und daher bleibt irgend ein Element, das den  $ms$  ersten Kolonnen von (16) oder von (17) angehört, absolut genommen unter der Schranke

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{2n+ms-1}.$$

Dies alles ist höchstens für endlich viele Werte von  $n$  ungültig. In demselben Sinne soll die aus dem eben Gesagten folgende Ungleichung

$$|A_n^{(n)}| < n! \left\{ \left( \frac{1}{r} \right)^{2n+ms-1} \right\}^{ms} \left\{ 2 \left( \frac{1}{R} \right)^n \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{ms} \right\}^{n-ms}$$

verstanden werden. Umsomehr ist

$$|A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} < n^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{n}} \frac{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\frac{ms}{n} \frac{n-ms}{n}}}{r^{\frac{2n+ms}{n}} n^{\frac{ms}{n}} R^{\frac{n-ms}{n}}}$$

also

$$\overline{\lim}_{n=\infty} |A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} \leq \frac{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\alpha(1-\alpha)}}{r^{(2+\alpha)\alpha} R^{1-\alpha}}.$$

Letzteres findet also für jeden positiven echten Bruch  $\alpha$  statt. Daher ist

$$(22) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} |A_n^{(n)}|^{\frac{1}{n^2}} \leq \lim_{\alpha=0} \frac{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)^{\alpha(1-\alpha)}}{r^{(2+\alpha)\alpha} R^{1-\alpha}} = \frac{1}{R} < 1.$$

Durch die nämlichen Überlegungen wird auch

$$(23) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} |A_n^{(n+1)}|^{\frac{1}{n^2}} \leq \frac{1}{R} < 1$$

geschlossen.

Die Zahlen  $A_n^{(n)}, A_n^{(n+1)}$  sind rationale ganze Zahlen, und die einzige rationale ganze Zahl, deren absoluter Betrag  $< 1$  ist, ist die Zahl 0. Daher können von den unendlich vielen Determinanten

$$A_0^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_{n-1}^{(n)}, A_n^{(n+1)}, \dots, \\ A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, \dots, A_n^{(n)}, \dots$$

auf Grund von (22), (23), nur endlich viele von 0 verschieden sein.

Aus diesem Resultat folgt der Satz I durch algebraische Überlegungen.

6. Die Kriterien, die entscheiden, ob eine Potenzreihe eine rationale Funktion darstellt oder nicht, werden, wie gesagt, mit Hilfe der rekurrenten Determinanten (15) ausgedrückt.

Hilfssatz I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

eine rationale Funktion darstellt, deren Nenner höchstens vom Grade  $r - 1$  ist, lautet so: unter den Determinanten

$$A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \dots, A_n^{(r)}, \dots$$

sind nur endlich viele von Null verschieden.

Daß die besagte Bedingung notwendig ist, ist leicht ersichtlich. Daß sie auch hinreicht, hat Herr Borel a. a. O. gezeigt, und zum Beweise seines eingangs zitierten Satzes verwendet.

Es können verschiedene Kriterien gebildet werden, die auf den Grad des Nenners keine Rücksicht nehmen. Das für meinen Zweck geeignete Kriterium wird ausgedrückt durch den

Hilfssatz II. *Dafür, daß die Potenzreihe*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

eine rationale Funktion darstelle, ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend: unter den Determinanten

$$A_0^{(1)}, A_1^{(2)}, \dots, A_{n-1}^{(n)}, \dots, \\ A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, \dots, A_n^{(n)}, \dots$$

gibt es nur endlich viele von Null verschiedene.

Es ist leicht und zum Beweise des Satzes I unnötig zu zeigen, daß die Bedingung des Hilfssatzes II notwendig ist. Daß sie hinreicht, wird so geschlossen: nach Voraussetzung gibt es eine Zahl  $r$ , so daß

$$A_{r-1}^{(r)} = A_r^{(r+1)} = \dots = A_{r-1+\nu}^{(r+\nu)} = \dots = 0, \\ A_r^{(r)} = A_{r+1}^{(r+1)} = \dots = A_{r+\nu}^{(r+\nu)} = \dots = 0$$

ist. Ich nehme an, daß die Relation

$$(24) \quad A_{n-1}^{(r)} = A_n^{(r+1)} = \dots = A_{n-1+\nu}^{(r+\nu)} = A_{n+\nu}^{(r+\nu+1)} = \dots = 0, \\ A_n^{(r)} = A_{n+1}^{(r+1)} = \dots = A_{n+\nu}^{(r+\nu)} = \dots = 0$$

für einen bestimmten Wert  $n \geq r$  erfüllt ist. Für  $n = r$  ist dies gewiß der Fall. Die bekannte Identität

$$A_{n+\nu}^{(r+\nu)} A_{n+\nu+2}^{(r+\nu)} - (A_{n+\nu+1}^{(r+\nu)})^2 = A_{n+\nu}^{(r+\nu+1)} A_{n+\nu+2}^{(r+\nu-1)}$$

reduziert sich nach der Annahme (24) auf

$$- (A_{n+1+\nu}^{(r+\nu)})^2 = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

womit (24) für  $n + 1$  anstatt für  $n$ , also für unbestimmtes  $n$  bewiesen ist. Es ist insbesondere

$$A_{r-1}^{(r)} = A_r^{(r)} = \dots = A_{n-1}^{(r)} = A_n^{(r)} = \dots = 0,$$

womit der Hilfssatz II auf den vorangehenden Hilfssatz des Herrn Borel zurückgeführt ist.

Der Hilfssatz II ist das letzte Glied in der Schlußkette, durch welche wir den Satz I begründet haben.

7. Es ist leicht aus dem Satz I einen Satz über Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten abzuleiten. Ich schicke eine Definition voraus. Ich sage von der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

mit rationalen Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , daß sie der „Eisensteinschen Bedingung“ genügt, wenn eine natürliche ganze Zahl  $m (m \geq 1)$  existiert, so daß sämtliche Zahlen  $a_1 m, a_2 m^2, a_3 m^3, \dots$  d. h. sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(mx) - a_0 = a_1 m x + a_2 m^2 x^2 + \dots$$

ganze Zahlen sind. Es besteht nun der

**Satz II.** *Die singulären Punkte der eindeutigen Funktion  $f(x)$  sollen keinen im Endlichen liegenden Häufungspunkt haben, und die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

*sollen rationale Zahlen sein.*

*Die Funktion  $f(x)$  ist rational, wenn ihre Potenzreihe der Eisensteinschen Bedingung genügt, und sie ist transzendent, wenn ihre Potenzreihe der Eisensteinschen Bedingung nicht genügt.*

Mit anderen Worten, die Eisensteinsche Bedingung liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß eine Funktion  $f(x)$  der besagten Art rational sei. Daß dieses Kriterium hinreicht, folgt unmittelbar aus unserem Satz I. Daß es notwendig ist, folgt als trivialer Spezialfall aus einem bekannten Eisensteinschen Satze\*).

**Satz III.** *Die Funktion  $f(x)$  sei in ihrem ganzen Existenzbereiche eindeutig. Die Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklung um den Punkt  $x=0$  seien rationale ganze Zahlen (oder allgemeiner, sie seien rational und der Eisensteinschen Bedingung unterworfen). Wenn  $f(x)$  nicht rational ist, so hat die Menge ihrer singulären Punkte wenigstens zwei Häufungspunkte.*

Es genügt den Fall zu betrachten, daß die Entwicklung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

nur ganzzahlige Koeffizienten enthält. Entgegen der Behauptung sei angenommen, daß  $a$  die einzige Häufungsstelle der singulären Punkte der

\*) Heine, Der Eisensteinsche Satz über Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen, Crelles Journ. Bd. 45, S. 285—382.

transzendenten Funktion  $f(x)$  ist. Da die Koeffizienten der Entwicklung von  $f(x)$  um  $x = 0$  reell sind, muß die Menge der singulären Punkte von  $f(x)$  die reelle Achse zur Symmetrieachse haben, und da  $a$  die einzige Häufungsstelle dieser Menge ist, muß  $a$  auf der reellen Achse liegen. Es ist übrigens  $a \geq 0$ , denn  $f(x)$  ist, nach Annahme, für  $x = 0$  regulär. Auch  $a = \infty$  ist durch Satz II ausgeschlossen.

Wie auch die rationale ganze Zahl  $n$  gewählt sei, die Entwicklung der Funktion

$$(25) \quad f\left(\frac{x}{1+nx}\right) = a_0 + a_1 \frac{x}{1+nx} + a_2 \left(\frac{x}{1+nx}\right)^2 + \dots$$

um den Punkt  $x = 0$  hat ersichtlicherweise nur ganzzahlige Koeffizienten. Die Funktion (25) ist übrigens eindeutig, und ihre singulären Punkte haben den einzigen Häufungspunkt  $b$ , wo

$$\frac{b}{1+nb} = a$$

also

$$b = \frac{a}{1-na} = \frac{1}{\frac{1}{a} - n}.$$

Wählt man

$$n = \left[ \frac{1}{a} \right],$$

so wird eventuell  $b = \infty$ , auf alle Fälle wird  $|b| > 1$ , und die eindeutige Funktion (25), die nur ganzzahlige Koeffizienten hat, wird im Kreise  $|x| \leq 1$  nur endlich viele singuläre Stellen haben. Darum muß, kraft des Satzes I, die Funktion (25) rational sein, in offenbarem Widerspruch zu der Annahme, daß  $f(x)$  transzendent ist. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn man die Richtigkeit des Satzes III zugibt.

8. Werfen wir einen Blick auf den Stand der sich aufdrängenden Frage: welche Arten von analytischen Funktionen können durch Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden, und welche nicht?

Durch Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten können dargestellt werden:

1) Rationale oder algebraische Funktionen, z. B.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

2) Eindeutige Funktionen, die über einen Kreis hinaus nicht fortsetzbar sind, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

oder auch Funktionen, die eine singuläre Linie von anderer Gestalt besitzen, z. B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_s x^s} \right)^{n!},$$

wo  $a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s$  irgend welche rationale ganze Zahlen sind. (Man beachte, daß unter dieser Bedingung die Entwicklung um  $x = 0$  wirklich nur ganze Koeffizienten hat.)

3) Unendlich vieldeutige Funktionen ohne singuläre Linie. So hat z. B. die Funktion

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-16x^2u^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 x^{2n}$$

die vier Verzweigungspunkte  $x = 0, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \infty$  unendlich hoher Ordnung und sonst keinen singulären Punkt.

Die in den Sätzen I und III erwähnten Funktionenklassen einerseits, und die eben unter 1), 2), 3) aufgezählten Funktionenklassen andererseits erschöpfen noch lange nicht alle Möglichkeiten, und so bleibt der Untersuchung noch ein weites Feld offen\*).

Insbesondere wäre es wünschenswert zu entscheiden, ob folgender Satz richtig ist oder falsch:

„Wenn eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten den Konvergenzradius 1 hat, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist die dargestellte Funktion rational, oder sie ist über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar\*\*).“

Es sei ausdrücklich bemerkt: ich behaupte den eben ausgesprochenen Satz nicht, auch sein Gegenteil nicht, ich will nur durch seine Formulierung die Aufmerksamkeit auf ein reizvolles Untersuchungsgebiet lenken.

9. Ich will noch eine letzte Anwendung des Satzes I mitteilen, die einen etwas verschiedenen Charakter hat, als die unter Nr. 7 erwähnten. Ich schicke voraus den folgenden, von Herrn Fatou herrührenden arithmetischen

\*) In einer gleichzeitig erscheinenden Arbeit, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, Crelles Journal, beweise ich durch arithmetische Schlüsse, daß das Integral einer rationalen Funktion, wenn es transzendent ausfällt, nicht in eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten entwickelt werden kann.

\*\*\*) Diese Fragestellung ist nahegelegt durch die Arbeit des Herrn Fatou, Sur les séries entières à coefficients entiers, C. R. Bd. 138 (1904, 1. Sem.), S. 342—344.

Hilfssatz III. *Die beiden Polynome  $P(x)$  und  $Q(x)$  sollen ganze rationale Koeffizienten, keine gemeinsame Wurzel und keinen gemeinsamen ganzzahligen Zahlenfaktor besitzen (außer  $\pm 1$ ). Wenn sämtliche Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  der Reihe*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

*ganze Zahlen sind, so ist*

$$Q(0) = \pm 1.$$

Herr Fatou hat seinen Satz a. a. O. ohne Beweis ausgesprochen. Ich teile einen von Herrn Hurwitz herrührenden einfachen Beweis mit.

Die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit rationalen ganzen Koeffizienten heißt „primitiv“, wenn die Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  außer  $\pm 1$  keinen allen gemeinsamen Teiler besitzen. Die geläufige klassische Schlußweise liefert den Satz: *Das Produkt zweier primitiven Potenzreihen ist wieder eine primitive Potenzreihe.*

Die (abbrechende) Potenzreihe

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s$$

ist primitiv. Denn sollte  $t$  ( $t > 1$ ) ein Teiler von allen Zahlen  $b_0, b_1, \dots, b_s$  sein, so müßte  $t$  wegen

$$P(x) = t \left( \frac{b_0}{t} + \frac{b_1}{t} x + \dots + \frac{b_s}{t} x^s \right) (a_0 + a_1 x + \dots)$$

in allen Koeffizienten von  $P(x)$  aufgehen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist.

Auf Grund der Voraussetzung existieren zwei Polynome  $p(x)$  und  $q(x)$  mit ganzzahligen Koeffizienten, so daß

$$p(x)P(x) + q(x)Q(x) = m,$$

wo  $m$  eine rationale ganze Zahl  $\geq 1$  ist. Die Potenzreihe

$$\begin{aligned} q(x) + p(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \\ &= p(x) \frac{P(x)}{Q(x)} + q(x) \\ &= \frac{m}{Q(x)} \end{aligned}$$

hat ganzzahlige Koeffizienten. Die Potenzreihe

$$m = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_s x^s) (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

ist nicht primitiv, wenn  $m > 1$ . Der erste Faktor rechts ist aber sicherlich primitiv, und daher kann im Falle  $m > 1$  der zweite Faktor nicht

primitiv sein. Auf alle Fälle müssen sämtliche Zahlen  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  durch  $m$  teilbar sein. Aus

$$1 = (b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s) \left( \frac{c_0}{m} + \frac{c_1}{m} x + \frac{c_1}{m} x^2 + \dots \right)$$

ergibt sich

$$1 = b_0 \frac{c_0}{m};$$

also ist  $b_0$  ein Faktor von 1 w. z. b. w.

Ich beweise nun den

**Satz IV.** Die ganzen Funktionen  $g_1(z), g_2(z), \dots, g_s(z)$  ( $g_v(z) \not\equiv 0$ ) sollen der Bedingung

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log |g_v(r e^{i\vartheta})|}{r} \leq 0$$

gleichmäßig für  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  genügen, und die Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_s$  sollen alle voneinander und von 0 verschieden sein.

Wenn die ganze Funktion

$$g(z) = g_1(z)c_1^z + g_2(z)c_2^z + \dots + g_s(z)c_s^z$$

für  $z = 0, 1, 2, 3, \dots$  ganze rationale Zahlenwerte annimmt, so sind die Funktionen  $g_1(z), g_2(z), \dots, g_s(z)$  ganze rationale Funktionen und die Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_s$  ganze algebraische Zahlen.

Nach dem schon benutzten Satze des Herrn Wigert ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_v(n) \cdot c_v^n x^n = G_v \left( \frac{1}{c_v x - 1} \right),$$

wo  $G_v(z)$  eine ganze Funktion von  $z$  ist, und zwar eine rationale oder eine transzendente, je nachdem  $g_v(z)$  rational oder transzendent ist.

Die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n = G_1 \left( \frac{1}{c_1 x - 1} \right) + G_2 \left( \frac{1}{c_2 x - 1} \right) + \dots + G_s \left( \frac{1}{c_s x - 1} \right) = f(x)$$

ist eindeutig, sie hat die  $s$  singulären Stellen  $c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots, c_s^{-1}$ , und zwar ist die Stelle  $c_v^{-1}$  ein Pol oder eine wesentliche singuläre Stelle der Funktion  $f(x)$ , je nachdem  $G_v(z)$  rational oder transzendent, also je nachdem  $g_v(z)$  rational oder transzendent ist.

Die Funktion  $f(x)$  ist aber rational, kraft des Satzes I, denn ihre Entwicklungskoeffizienten  $g(0), g(1), g(2), \dots$  sind sämtlich ganze Zahlen. Sämtliche singulären Stellen von  $f(x)$  sind Pole, und daher sind sämtliche ganze Funktionen  $g_v(z)$  Polynome, was zuerst z. b. w.



$f(x)$  ist der Quotient zweier Polynome  $P(x)$  und  $Q(x)$

$$g(0) + g(1)x + g(2)x^2 + \dots = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Bei Berücksichtigung des Hilfssatzes I findet man leicht, daß die Koeffizienten von  $Q(x)$ , und folglich auch die von  $P(x)$  als rational angenommen werden können. Richtig gekürzt, erfüllen somit die Polynome  $P(x)$  und  $Q(x)$  alle Bedingungen des Hilfssatzes III, es ist also

$$Q(0) = \pm 1.$$

Die Pole von  $f(x)$ , d. h. die Zahlen  $c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots, c_s^{-1}$  sind die Wurzeln des Polynoms  $Q(x)$ , daher sind die Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_s$  Wurzeln der Gleichung

$$x^s Q\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

deren höchster Koeffizient  $\pm 1$ , und deren übrige Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, was an zweiter Stelle z. b. w.

Für andere Fragestellungen betreffend „ganze ganzwertige Funktionen“ vgl. die zu Beginn zitierte Arbeit des Verfassers.

Zürich, den 13. Oktober 1915.

---