Über gemeinsame separabel-quadratische Zerfällungskörper von Quaternionenalgebren

Von *Peter Draxl*, Bielefeld

Vorgelegt von Herrn M. Kneser in der Sitzung vom 4. Juli 1975

Ist k ein kommutativer Körper, dann wollen wir unter einer *k-Quaternionenalgebra* wie üblich eine einfache vierdimensionale k-Algebra mit Zentrum k verstehen (vgl. etwa M. Deuring [3]). Ziel dieser Note ist der Beweis von folgendem

Satz. *Ist das Tensorprodukt zweier k-Quaternionenalgebren kein Schiefkörper, so besitzen diese einen gemeinsamen, über k separabel-quadratischen Zerfällungskörper.*

Ist die Charakteristik von k ungleich zwei, so ist der Satz bekannt (A. Pfister [5], S. 124, Zusatz). Im allgemeinen Fall ist meines Wissens bislang nur die Existenz eines gemeinsamen quadratischen Zerfällungskörpers unter den gegebenen Voraussetzungen bekannt (A. A. Albert [1]), was im Falle char $k \neq 2$ selbstverständlich ausreicht.

Folglich genügt es, fortan char $k = 2$ vorauszusetzen. Bevor nun der Satz in diesem verbleibenden Fall in § 2 bewiesen wird, werden in § 1 einige Tatsachen über k-Quaternionenalgebren bei char $k = 2$ zusammengestellt, die ich teilweise in der in § 2 benötigten Form in der Literatur nicht finden konnte. In § 3 werden dann als eine mögliche Anwendung obigen Satzes diejenigen Körper der Charakteristik zwei axiomatisch gekennzeichnet, welche bis auf Äquivalenz genau eine reguläre, quaternäre, anisotrope quadratische Form gestatten; dabei stellt sich heraus, daß die Verhältnisse völlig den schon bekannten (A. Fröhlich [4]) im Falle char $k \neq 2$ entsprechen.

Der hier in § 2 gegebene Beweis des Satzes ist übrigens eine Verfeinerung des Albertschen Beweises, der rein algebrentheoretisch verläuft. Es erscheint einleuchtend, daß sich auch der die Theorie der quadratischen Formen wesentlich benutzende Pfistersche Beweis übertragen läßt, wenn man gewisse neuere Ergebnisse dieser Theorie auf den bislang in diesem Zusammenhang vernachlässigten Fall der Charakteristik zwei übertrüge.

Nach wie vor unentschieden bleibt die Frage, ob im Falle eines nicht-vollkommenen Körpers k mit char $k = 2$ unter den Voraussetzungen des Satzes auch die Existenz eines gemeinsamen über k inseparabel-quadratischen Zerfällungskörpers folgt; der Fall eines vollkommenen Körpers der Charakteristik zwei ist insofern uninteressant, als dann gar keine k-Quaternionenschiefkörper existieren (vgl. § 1).

§ 1. Quaternionenalgebren bei Charakteristik zwei

Wir fixieren einen kommutativen Körper k mit char $k = 2$; dann ist die Zuordnung $\varkappa \mapsto \varkappa^2 + \varkappa$ ein Endomorphismus der additiven Gruppe von k, der mit $\wp$ und dessen Bild mit $\wp k$ bezeichnet werden möge.

Ist $\alpha \in k$ und T eine Unbestimmte, so ist die kommutative zweidimensionale k-Algebra

$$k_\alpha := k[T]/(T^2 + T + \alpha)$$

bis auf Isomorphie nur von der Nebenklasse von α (mod $\wp k$) abhängig und genau für $\alpha \not\equiv 0$ (mod $\wp k$) ein Körper. Die Zuordnung $T \mapsto T + 1$ induziert dabei auf k_α einen involutorischen k-Algebra-Automorphismus $^-$. Ist schließlich t das Bild von T in k_α, so hat man

$$k_\alpha = k \oplus kt \textit{ mit der Rechenregel } t^2 = t + \alpha.$$

Nun definieren wir zu $\beta \in k^*$ und $\alpha \in k$ eine vierdimensionale k-Algebra durch

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] := k_\alpha \oplus k_\alpha \mathfrak{e} \textit{ mit den Rechenregeln}$$
$$\mathfrak{e}^2 = \beta \textit{ und } \mathfrak{e} a = \bar{a} \mathfrak{e} \textit{ für alle } a \in k_\alpha,$$

welche (*mod* 2) graduiert ist. Setzt man die Involution $^-$ von k_α durch die Identität von $k_\alpha \mathfrak{e}$ auf die ganze Algebra fort, so ist dadurch ein k-Algebra-Antiautomorphismus $^\sim$ definiert, wie eine kurze Rechnung sofort zeigt; es ist also

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \bar{a} + b\mathfrak{e}, \textit{ falls } \mathfrak{x} = a + b\mathfrak{e} \textit{ mit } a, b \in k_\alpha.$$

Bezeichnet dabei

$$\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]^0 := \left\{\mathfrak{x} \in \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] : \tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}\right\}$$

den Raum der unter $^\sim$ invarianten Elemente, so berechnet man

(1) $$\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}, \textit{ genau wenn } \mathfrak{x} \in k \oplus k_\alpha \mathfrak{e}, \textit{ genau wenn } \mathfrak{x}^2 \in k.$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{e}_1 := \mathfrak{e}, \ \mathfrak{e}_2 := \mathfrak{e}t \textit{ und } \mathfrak{e}_3 := \beta^{-1}\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 = t,$$

dann sind die Vektoren $1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ über k linear unabhängig und es gilt

(2) $$\mathfrak{e}_1^2 = \beta, \ \mathfrak{e}_2^2 = \beta\alpha \textit{ und } \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1 = \beta,$$

wodurch die Multiplikation in unserer Algebra vollständig beschrieben ist. Ist jetzt $\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \wp k)$, etwa $\alpha = \gamma^2 + \gamma$, so erfüllen die beiden Matrices

$$\mathfrak{e}_1 := \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & \beta(\gamma+1) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls die Regeln (2), d. h. man hat in diesem Falle $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] \cong M_2(k)$. Ist hingegen $\alpha \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \wp k)$, so hat man (in der Schreibweise von M. Deuring [3], S. 64ff.) $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] \cong (\beta, k_\alpha, -)$, d. h. unsere Algebra ist eine zyklische Algebra. Damit ist in jedem Falle $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$ eine k-Quaternionenalgebra im eingangs der Note definierten Sinne. Umgekehrt weiß man aus der Theorie der Algebren, daß jede k-Quaternionenalgebra vom oben eingeführten Typus ist, denn ist sie von $M_2(k)$ verschieden, so ist sie nach dem Satz von Wedderburn ein Schiefkörper, besitzt folglich einen über k separabel-quadratischen kommutativen Teilkörper k_α für geeignetes α, und ist letztlich wegen des Satzes von Skolem und Noether von der gewünschten Gestalt.

Der zuletzt ausgesprochene Sachverhalt liefert u. a.:

(3) *Ist* $\alpha' \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, \wp k)$ *und* $k_{\alpha'} \subset \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$, *so gibt es ein* $\beta' \in k^*$ *mit* $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] \cong \left(\frac{\beta', \alpha'}{k}\right]$.

Bezeichnet im folgenden $(\beta, \alpha]$ die Klasse von $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$ in der Brauergruppe $Br(k)$ von k, so gelten für das Symbol $(.,.]$ gewisse Rechenregeln, die sich wie folgt zusammenfassen lassen (wir schreiben $Br(k)$ additiv):

(4) *Durch die Zuordnung* $(\beta, \alpha) \mapsto (\beta, \alpha]$ *ist eine Z-bilineare Abbildung* $k^*/k^{*2} \times k/\wp k \to Br(k)$ *wohldefiniert.*

Lezteres ist entweder evident, bzw. folgt aus den Eigenschaften zyklischer Algebren (vgl. [3], ibid.), bzw. folgt z.B. aus H. L. Schmid [6], S. 98 oder auch J.-P. Serre [7], ch. XIV, § 5, Proposition 11 (dort jeweils der Fall $p = 2$); Serres $[\alpha, \beta)$ ist übrigens mit unserem $(\beta, \alpha]$ identisch.

Wesentlich für § 2 ist schließlich der folgende

Hilfssatz. *Ist* $\mathfrak{A}$ *k-Quaternionenschiefkörper und* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{A}$ *derart, daß* $k(\mathfrak{c})/k$ *inseparabel-quadratisch ist, so kann man ein* $r \in \mathfrak{A}$ *mit* $r^2 + r \in k$ *so wählen, daß wahlweise gilt: entweder*

(A) $$\mathfrak{c} + \mathfrak{c}r + r\mathfrak{c} \in k^*$$

oder

(B) $$\mathfrak{c} + \mathfrak{c}r + r\mathfrak{c} = 0.$$

Zum Beweis nehmen wir $\mathfrak{A} = \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$ an und schreiben $\mathfrak{c} = \lambda + a\mathfrak{e}$ mit $\lambda \in k$ und $a \in k_\alpha^*$ (vgl. dazu (1) und die Voraussetzungen über $\mathfrak{c}$). Der Ansatz $r = t + x\mathfrak{e}$ mit zunächst noch unbekanntem $x \in k_\alpha$ und $t^2 + t = \alpha$ liefert dann

$$r^2 + r = (t + x\mathfrak{e})(\bar{t} + x\mathfrak{e}) = \alpha + x\bar{x}\beta \in k.$$

Außerdem berechnet man mühelos

$\mathfrak{c} + \mathfrak{c}r + r\mathfrak{c} = \lambda + \beta \operatorname{Sp}(x\bar{a})$, *wo* Sp *die Spur der separablen Körpererweiterung* k_α/k *bedeutet.*

Wegen $a, \beta \neq 0$ sowie der Surjektivität obiger Spur kann damit durch geeignete Wahl von x wahlweise (A) resp. (B) erzwungen werden.

Aus der Variante (B) des Hilfssatzes folgert man unmittelbar das nachstehende Gegenstück zu (3):

(5) *Ist* $\beta' \not\equiv 1 \pmod{k^{*2}}$ *und* $k(\sqrt{\beta'}) \subset \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$, *so gibt es ein* $\alpha' \in k$ *mit* $\left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right] \cong \left(\frac{\beta', \alpha'}{k}\right]$.

§ 2. Der Beweis des Satzes

Es seien $\mathfrak{A} = \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$, $\mathfrak{A}' = \left(\frac{\beta', \alpha'}{k}\right]$ die beiden gegebenen Algebren; wir dürfen $(\beta, \alpha]$, $(\beta', \alpha'] \neq 0$ annehmen (ansonsten ist die Behauptung trivial). Wir setzen

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{A}' \otimes_k k_\alpha$$

und können dabei voraussetzen, daß $\mathfrak{D}$ Schiefkörper ist, denn sonst wäre schon k_α ein separabel-quadratischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}'$ und gleichzeitig als maximal kommutativer Teilkörper auch ein solcher von $\mathfrak{A}$, folglich der gesuchte Körper. Es folgt

(6) $\mathfrak{A}' \otimes_k \mathfrak{A} \cong \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}\mathfrak{e}$ *mit den Rechenregeln* $\mathfrak{e}^2 = \beta$ *und* $\mathfrak{e}\mathfrak{d} = \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{e}$ *für alle* $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$, *wobei* $^-$ *die Fortsetzung der gleichnamigen Involution von* k_α *auf* $\mathfrak{D}$ *vermöge der Identität von* $\mathfrak{A}'$ *ist.*

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}' \otimes_k \mathfrak{A}$ kein Schiefkörper, besitzt also einen nicht-trivialen Nullteiler $\mathfrak{x}$. Nach geeigneter Linksmultiplikation mit einem Element aus $\mathfrak{D}^*$ kann wegen (6)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \textit{ mit } \mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$$

angenommen werden, denn $\mathfrak{x}$ darf ja als nicht-trivialer Nullteiler nicht schon in $\mathfrak{D}$ liegen. Wegen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}' \oplus \mathfrak{A}'t \textit{ mit der Rechenregel } t^2 = t + \alpha$$

hat man folglich

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t, \textit{ also } \bar{\mathfrak{d}} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\bar{t},$$

zusammenfassend damit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}t + \mathfrak{e} \textit{ mit } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}'. \tag{7}$$

Mit $\mathfrak{x}$ ist auch $(\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{e})\mathfrak{x}$ ein Nullteiler, und zwar wegen

$$(\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{e})\mathfrak{x} = (\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{e})(\mathfrak{d} + \mathfrak{e}) = \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d} + \beta \in \mathfrak{D}$$

ein solcher in $\mathfrak{D}$; folglich ist letzterer Nullteiler gleich null und man hat

$$\beta = \bar{\mathfrak{d}}\mathfrak{d} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\bar{t})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t) = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2\alpha + (\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a})t,$$

also nach Koeffizientenvergleich

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \tag{8}$$

$$\beta = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2\alpha. \tag{9}$$

Ferner hat man

$$\mathfrak{a} \notin k \textit{ oder } \mathfrak{b} \notin k, \tag{10}$$

denn wären beide Elemente in k, so wäre wegen (9) β eine Norm der Körpererweiterung k_α/k und damit $(\beta, k_\alpha, ^-) \cong M_2(k)$ (vgl. wiederum [3], ibid.), entgegen der Voraussetzung $(\beta, \alpha] \neq 0$. Wegen (8) und (10) ist demnach

$$K := k(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{A}'$$

ein über k quadratischer Körper, und zwar ein gemeinsamer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, denn als maximal kommutativer Teilkörper von $\mathfrak{A}'$ zerfällt K die Algebra $\mathfrak{A}'$ und wegen (9) ist β Norm der Körpererweiterung K_α/K (man darf natürlich ohne Einschränkung $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\wp K}$ annehmen), d. h. es gilt wie beim Beweis von (10): $\mathfrak{A} \otimes_k K \cong (\beta, K_\alpha, ^-) \cong M_2(K)$.

Bis hierher haben wir den Albertschen Beweis aus [1] im Falle char $k = 2$ in unserer Sprechweise nachvollzogen. Startet man nun mit irgendeinem Nullteiler $\mathfrak{x}$ der Gestalt (7), so braucht die aus obigem Prozeß resultierende Körpererweiterung K/k nicht separabel auszufallen. In diesem Zusammenhang gilt nun:

(11) *K/k ist genau dann separabel, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in (7) über k linear unabhängig sind.*

Zum Beweis von (11) unterscheiden wir Fälle:

Fall 1. $\mathfrak{b} \in k$: dann ist wegen (9) die Separabilität von K/k mit $\mathfrak{b} \neq 0$ äquivalent, was wegen (10) genau auf (11) hinausläuft.

Fall 2. $\mathfrak{b} \notin k$: dann ist $K = k(\mathfrak{b})$, also

$$\mathfrak{a} = \lambda + \mu\mathfrak{b} \textit{ mit } \lambda, \mu \in k.$$

Einsetzen in (9) liefert

$$\beta = (\lambda + \mu\mathfrak{b})^2 + (\lambda + \mu\mathfrak{b})\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2\alpha = \lambda^2 + \lambda\mathfrak{b} + (\alpha + \wp\mu)\mathfrak{b}^2.$$

Also ist hier die Separabilität von K/k mit $\lambda \neq 0$ äquivalent, was wiederum genau (11) bedeutet.

Nun ist aber mit $\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{t} \in \mathfrak{D}^*$ auch

$$\text{(12)} \qquad \bar{\mathfrak{t}}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{t}}^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)\mathfrak{t} + \mathfrak{e} = \mathfrak{a}_t + \mathfrak{b}_t t + \mathfrak{e} \quad \textit{mit} \ \mathfrak{a}_t, \mathfrak{b}_t \in \mathfrak{A}'$$

ein Nullteiler in $\mathfrak{A}' \otimes_k \mathfrak{A}$ von der Gestalt (7), so daß es für den Beweis unseres Satzes genügt, z.B. folgendes zu zeigen:

(13) *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in (7) über k linear abhängig, dann existiert ein $\mathfrak{t} \in \mathfrak{D}^*$ derart, daß $\mathfrak{a}_t, \mathfrak{b}_t$ in (12) über k linear unabhängig sind.*

Zum Beweis von (13) seien also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ über k linear abhängig. Wir machen den Ansatz

$\mathfrak{t} = r + (t + \varrho)$ *mit noch zu bestimmenden* $r \in \mathfrak{A}'$ *und* $\varrho \in k$, *insbesondere* $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} + 1$.

Es folgt

$$\text{(14)} \qquad 0 \neq \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}} = \bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{t} = (r^2 + r) + (\alpha + \wp\varrho).$$

Hat man also allgemein

$$\bar{\mathfrak{t}}^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)\mathfrak{t} = \mathfrak{a}'_t + \mathfrak{b}'_t(t + \varrho) \quad \textit{mit} \ \mathfrak{a}'_t, \mathfrak{b}'_t \in \mathfrak{A}',$$

so folgt nach kurzer Rechnung

$$\text{(15)} \qquad \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{b}'_t = \mathfrak{t}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)\mathfrak{t} + \overline{\mathfrak{t}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)\mathfrak{t}},$$

resp.

$$\text{(16)} \qquad \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{a}'_t = \mathfrak{t}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)(\bar{t} + \varrho)\mathfrak{t} + \overline{\mathfrak{t}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}t)(\bar{t} + \varrho)\mathfrak{t}}.$$

Liegt jetzt Fall 1 vor, d. h. $\mathfrak{b} = 0$ und $k(\mathfrak{a})/k$ inseparabel-quadratisch (vgl. (10) und (11)), so setzen wir $\varrho = 0$ und erhalten so

$$\mathfrak{t}\mathfrak{a}\mathfrak{t} = (r + t)\,\mathfrak{a}(r + t) = (r\mathfrak{a}r + \mathfrak{a}\alpha) + (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}r + r\mathfrak{a})t;$$

wählt man nun $r \in \mathfrak{A}'$ gemäß Variante (A) des Hilfssatzes in § 1 (man setze dort $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$), dann erhält man wegen (14) und (15) aus letzterem

$$\mathfrak{b}_t = \mathfrak{b}'_t = (r^2 + r + \alpha)^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}r + r\mathfrak{a}) \in k^*,$$

d. h. $\mathfrak{a}_t, \mathfrak{b}_t$ sind wegen (10) über k linear unabhängig. Liegt hingegen Fall 2 vor, d. h. $\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{b}$ mit $\mu \in k$ und $k(\mathfrak{b})/k$ inseparabel-quadratisch (vgl. (10) und

(11)), so setzen wir $\varrho = \mu$ und erhalten jetzt

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}\mathfrak{b}(t+\mu)(\bar{t}+\mu)\mathfrak{t} &= \mathfrak{t}\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{t}(\alpha+\wp\mu) = (r+t+\mu)\,\mathfrak{b}(r+t+\mu)(\alpha+\wp\mu) \\ &= (r\bar{\mathfrak{b}}r + \mathfrak{b}(\alpha+\wp\mu)) + (\mathfrak{b}+\bar{\mathfrak{b}}r + r\bar{\mathfrak{b}})(\alpha+\wp\mu)(t+\mu); \end{aligned}$$

wählt man auch hier wiederum $r \in \mathfrak{A}'$ gemäß Variante (A) des Hilfssatzes in § 1 (man setze $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$), so ergeben (14) und (16)

$$\mathfrak{a}_t' = (r^2 + r + \alpha + \mu)^{-1}(\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}}r + r\bar{\mathfrak{b}})(\alpha + \wp\mu) \in k^*,$$

d. h. $\mathfrak{a}_t', \mathfrak{b}_t'$ sind über k linear unabhängig und folglich auch $\mathfrak{a}_t = \mathfrak{a}_t' + \mu\mathfrak{b}_t'$ und $\mathfrak{b}_t = \mathfrak{b}_t'$.

Damit ist (13) in beiden Fällen gezeigt und somit der Satz vollständig bewiesen.

§ 3. Hilbertkörper der Charakteristik zwei

Wie bisher sei k ein kommutativer Körper mit char $k = 2$. Wir behaupten zunächst:

Lemma. *Folgende vier Aussagen sind äquivalent:*

(17) $\left\{\begin{array}{l}\text{(i) } \textit{es gibt eine separablel-quadratische Erweiterung von } k \\ \textit{und} \\ \text{(ii) } \textit{jede solche Erweiterung hat den Normindex zwei;}\end{array}\right.$

(18) $\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } k \neq \wp k, \\ \text{(b) } \textit{zu } \alpha \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \wp k) \textit{ existiert } \beta \in k^* \textit{ mit } (\beta, \alpha] \neq 0 \\ \textit{und} \\ \text{(c) } \textit{aus } (\beta, \alpha] \neq 0 \neq (\beta', \alpha] \textit{ folgt } (\beta, \alpha] = (\beta', \alpha];\end{array}\right.$

(19) $\left\{\begin{array}{l}\textit{zusätzlich zu } \text{(a), (b) } \textit{und } \text{(c) } \textit{aus } \text{(18) } \textit{gelte noch:} \\ \text{(d) } \textit{aus } (\beta, \alpha] \neq 0 \neq (\beta, \alpha'] \textit{ folgt } (\beta, \alpha] = (\beta, \alpha'];\end{array}\right.$

(20) $\left\{\begin{array}{l}\text{(I) } \textit{es gibt bis auf Isomorphie genau einen } k\textit{-Quaternionenschiefkörper} \\ \textit{und} \\ \text{(II) } \textit{dieser wird von jeder separabel-quadratischen Erweiterung von } k \\ \quad \textit{zerfällt.}\end{array}\right.$

Erfüllt k eine der vier äquivalenten Bedingungen des Lemmas, so nennen wir k in Anlehnung an A. Fröhlich [4], S. 583, einen *Hilbertkörper* (nimmt man z.B. (17) zur Definition, so ist der Begriff Hilbertkörper bei beliebiger Charakteristik erklärt und fällt für char $k \neq 2$ mit der oben zitierten Definition in [4] zusammen).

Zum Beweis des Lemmas beachten wir vorab, daß (17-i) trivialerweise mit (18-a) äquivalent ist; zieht man jetzt wiederum die Theorie der zyklischen Algebren zu Rate (M. Deuring [3], ibid.), dann bedeutet (18-b), daß der

Normindex jeder separabel-quadratischen Erweiterung von k mindestens zwei ist, während (18-c) besagt, daß der in Frage stehende Index jeweils höchstens zwei beträgt. Folglich sind (17) und (18) äquivalent.

Zur Äquivalenz von (18) und (19) genügt es zu zeigen, daß (d) aus (c) gefolgert werden kann. Da jeder über k quadratische Zerfällungskörper einer k-Quaternionenalgebra in diese eingebettet werden kann, gibt es wegen $(\beta, \alpha] + (\beta, \alpha'] = (\beta, \alpha + \alpha']$ (vgl. (4)) mit unserem Satz in Verbindung mit (3) Elemente $\alpha'', \gamma, \gamma' \in k$ mit

$$(\beta, \alpha] = (\gamma, \alpha''] \textit{ und } (\beta, \alpha'] = (\gamma', \alpha''].$$

Hieraus folgt (d) mittels (c) sofort.

Um schließlich die Äquivalenz von (19) und (20) einzusehen, beachten wir zunächst, daß aus (20-I) trivialerweise (a), (c) und (d) in (19) folgt; ferner folgt (19-b) aus (20) unter Benutzung von (3), wenn man erneut bedenkt, daß jeder über k quadratische Zerfällungskörper einer k-Quaternionenalgebra in diese einbettbar ist. Umgekehrt folgt (20-I) aus (19), denn wegen (a) und (b) gibt es wenigstens einen Quaternionenschiefkörper über k. Es bleibt zu zeigen, daß es bis auf dazu isomorphe keine weiteren solche gibt. Sei dazu $(\beta, \alpha] \neq 0 \neq (\beta', \alpha']$; ist dann $(\beta, \alpha'] \neq 0$, so folgt aus (d) $(\beta, \alpha] = (\beta, \alpha']$ und damit $(\beta, \alpha] = (\beta', \alpha']$ wegen (c); ist $(\beta', \alpha] \neq 0$, so kommt man durch einen völlig analogen Schluß zur selben Folgerung; es braucht also nur noch der Fall $(\beta, \alpha'] = (\beta', \alpha] = 0$ betrachtet zu werden: in dieser Situation folgt mit (4)

$$(\beta, \alpha + \alpha'] = (\beta, \alpha] \neq 0 \neq (\beta', \alpha'] = (\beta', \alpha + \alpha'],$$

also mit (c) wie gewünscht $(\beta, \alpha] = (\beta', \alpha']$. Endlich bleibt noch (20-II) aus (19) zu folgern. Sei dazu $\mathfrak{A}$ ein k-Quaternionenschiefkörper; schreibt man den separabel-quadratischen Erweiterungskörper von k in der Form k_α mit geeignetem $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\wp k}$, dann gibt es mit (19-b) ein $\beta \in k^*$ mit $\mathfrak{A} \cong \left(\frac{\beta, \alpha}{k}\right]$, d. h. k_α ist Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

Es erscheint angebracht, noch einmal zu betonen, daß unser Satz benötigt wurde, um aus den äquivalenten Bedingungen (17) und (18) die scheinbar stärkeren Bedingungen (19) resp. (20) zu folgern. Im Falle char $k \neq 2$ tritt an der entsprechenden Stelle (siehe [4], S. 586) diese Schwierigkeit nicht auf, da dort die Symmetrie des klassischen Hilbertsymbols zur Verfügung steht. Unser Vorgehen indessen zeigt, daß auch im klassischen Fall die Symmetrie nicht ausgenutzt zu werden braucht.

Aus dem Lemma zieht man nun leicht die üblichen Schlußfolgerungen über quadratische Formen über Hilbertkörpern. Man kann dabei wie A. Fröhlich in [4] vorgehen, muß allerdings die üblichen Modifikationen der Theorie bei Charakteristik zwei gemäß C. Arf [2] vornehmen. Das Fröhlichsche Theorem ([4], S. 583) gilt also auch ohne die Voraussetzung char $k \neq 2$.

Literatur

[1] A. A. Albert, Tensor Products of Quaternion Algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972) 65—66.

[2] C. Arf, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. J. reine u. angew. Math. 183 (1941) 148—167.

[3] M. Deuring, Algebren (2. Auflage). Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York (1968).

[4] A. Fröhlich, Quadratic Forms „à la" Local Theory. Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967) 579—586.

[5] A. Pfister, Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Inv. math. 1 (1966) 116—132.

[6] H. L. Schmid, Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper. Math. Z. 40 (1936) 94—109.

[7] J.-P. Serre, Corps locaux. Hermann. Paris (1962).