

## Article

Ueber die Fareyreihe und die Riemannsche Vermutung  
Landau, E.

in: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu  
Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse | Nachrichten  
von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,  
Mathematisch-Physikalische Klasse - 1932  
6 Page(s) (347 - 352)



## Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

## Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

## Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

[Email: info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Über die Fareyreihe und die Riemannsche Vermutung.

Von

**Edmund Landau.**

Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juli 1932.

Es sei  $\mu(n)$  die MÖBIUSSCHE,  $\varphi(n)$  die EULERSCHE,  $\zeta(s)$  die RIEMANNSCHE Funktion,  $N > 0$  und ganz,

$$A = \sum_{n=1}^N \varphi(n);$$

$r_1, r_2, \dots, r_A$  die wachsend geordneten reduzierten Brüche (FAREYreihe) mit positivem Nenner  $\leq N$  auf der Strecke  $0 < \xi \leq 1$ ;

$$r_\nu - \frac{\nu}{A} = \delta_\nu,$$

$$M(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n),$$

also (da  $\mu(n)$  bekanntlich die Summe der primitiven  $n$ ten Einheitswurzeln ist)

$$M(N) = \sum_{n=1}^N \mu(n) = \sum_{\nu=1}^A e^{2\pi i r_\nu} = \sum_{\nu=1}^A \cos 2\pi r_\nu.$$

Seit 20 Jahren weiß man durch Herrn LITTLEWOOD<sup>1)</sup>: Die RIEMANNSCHE Vermutung

$$(1) \quad \zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \frac{1}{2}$$

ist äquivalent<sup>2)</sup> der (wegen des  $\cos$ ) transzendenten Eigenschaft der FAREYreihe

$$(2) \quad M(N) = \sum_{\nu=1}^A \cos 2\pi r_\nu = O(N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0^3).$$

1) *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan  $R(s) > \frac{1}{2}$*  [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLIV (1912), S. 263—266].

2) Ich nenne zwei Aussagen äquivalent, wenn sie entweder beide richtig oder beide falsch sind.

3) Jede Relation mit  $\varepsilon$  ist im folgenden für alle  $\varepsilon > 0$  gemeint.

Seit 8 Jahren weiß man durch Herrn FRANEL<sup>4)</sup>: (1) ist der arithmetischen Eigenschaft der FAREYreihe

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^A \delta_{\nu}^2 = O(N^{-1+\varepsilon})$$

äquivalent. Ich<sup>5)</sup> fügte hinzu: (1) ist jeder der Relationen

$$(4) \quad \sum_{\nu=1}^A |\delta_{\nu}| = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

und

$$(5) \quad \sum_{\nu=1}^A e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} \delta_{\nu} = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

äquivalent.

Heute werde ich zeigen: (1) ist der Relation

$$(6) \quad \max_{1 \leq B \leq A} \left| \sum_{\nu=1}^B \delta_{\nu} \right| = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

äquivalent.

Ich werde dies in § 1 rasch aus den alten Hilfssätzen von Herrn FRANEL und mir beweisen. In § 2 werde ich einen wesentlich<sup>6)</sup> kürzeren direkten Beweis angeben, der die meisten Hilfsätze der alten Beweise von

$$(1) \sim (3) \sim (4) \sim (5)$$

und diese Tatsachen selbst benutzt. Ich verwende in § 2

$$(1) \sim (2);$$

die triviale Formel

$$(7) \quad \sum_{n \leq y} M\left(\frac{y}{n}\right) = 1 \text{ für } y \geq 1;$$

4) *Les suites de Farey et le problème des nombres premiers* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1924, Mathematisch-Physikalische Klasse, S. 198—201]. Vgl. meine *Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel* [ebenda, S. 202—206] und die zusammenfassende Darstellung in meinen *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1927), Bd. II, Teil 7, Kap. 13, S. 167—177.

5) L. c.

6) Es fallen (in der Numerierung meiner *Vorlesungen*) fort: die Sätze 483, 484, 488, 489, 491, 492. Ich beweise die Sätze 485—487 nachher aufs Neue (mit den alten Mitteln), um in § 2 nichts aus den in Fußnote 4) genannten Quellen als bekannt vorauszusetzen.

die klassische Formel

$$(8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N)}{N^2} > 0;$$

in beiden Paragraphen benutze ich die aus dem ABELschen <sup>7)</sup> Lemma und

$$\delta_\nu = -\delta_{A-\nu} \text{ für } 1 \leq \nu < A, \quad \delta_A = 0$$

fließende Abschätzung <sup>8)</sup>

$$(9) \quad \left| \sum_{\nu=1}^A e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} \delta_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=1}^A \delta_\nu \sin \frac{2\pi \nu}{A} \right| \leq P_1 \max_{1 \leq B \leq A} \left| \sum_{\nu=1}^B \delta_\nu \right|.$$

### § 1.

Beweis von (1)  $\sim$  (6).

1) Aus (1) folgt (4), also (6) wegen

$$\left| \sum_{\nu=1}^B \delta_\nu \right| \leq \sum_{\nu=1}^A |\delta_\nu|.$$

2) Aus (6) folgt (5) wegen (9); aus (5) folgt (1).

### § 2.

Direkter Beweis von (1)  $\sim$  (6).

**Satz 1:** *Ist*

$$f(x) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

$$g(x) \text{ die Anzahl der } r_\nu \leq x,$$

$$G(x) = g(x) - Ax + \frac{1}{2},$$

so ist für  $0 \leq x \leq 1$

$$G(x) = - \sum_{a=1}^N f(ax) M\left(\frac{N}{a}\right).$$

**Beweis:** Für  $0 \leq x \leq 1$  ist

$$(10) \quad g(x) = \sum_{a=1}^N [ax] M\left(\frac{N}{a}\right).$$

Denn für  $x = 0$  sind beide Seiten 0; beide sind streckenweise

<sup>7)</sup> Satz 140 meiner *Vorlesungen*, Bd. I, S. 88–89.

<sup>8)</sup> Alle  $P$  in dieser Arbeit bedeuten positive Weltkonstanten; alle  $P(\varepsilon)$  positive, nur von  $\varepsilon$  abhängige Zahlen.

konstant und springen nur beim Eingang in ein  $r_v$ ; bei  $r_v = \frac{b}{q}$ ,  $(b, q) = 1$ ,  $0 < b \leq q \leq N$ , ist der Zuwachs links 1, rechts nach (7)

$$\sum_{\substack{a=1 \\ q/a}}^N M\left(\frac{N}{a}\right) = \sum_{n \leq \frac{N}{q}} M\left(\frac{N}{n}\right) = 1.$$

(10) mit  $x = 1$  gibt

$$A = \sum_{a=1}^N a M\left(\frac{N}{a}\right).$$

Nach (7) ist

$$1 = \sum_{a=1}^N M\left(\frac{N}{a}\right),$$

also

$$G(x) = \sum_{a=1}^N ([ax] - ax + \frac{1}{2}) M\left(\frac{N}{a}\right) = - \sum_{a=1}^N f(ax) M\left(\frac{N}{a}\right).$$

**Satz 2:**<sup>9)</sup>

$$\text{Max}_{1 \leq \nu \leq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

9) Beim Beweise benutze ich nur die triviale Abschätzung

$$|M(x)| \leq x \text{ für } x \geq 1.$$

Schon Satz 2 ist unnütz scharf;  $O(N^{-\frac{3}{4} + \varepsilon})$  würde genügen. Übrigens ergibt sich z. B. aus meinem alten Satz

$$(11) \quad M(x) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

die schärfere Abschätzung

$$(12) \quad \text{Max}_{1 \leq \nu \leq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

(unverbesserliche Größenordnung wegen

$$\delta_1 = \frac{1}{N} - \frac{1}{A} = \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

In der Tat folgt aus dem obigen Text

$$\text{Max}_{1 \leq \nu \leq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{1}{N^2}\right) + O\left(\frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^N \left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right|\right) = O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq a \leq \frac{N}{e^2}} \left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right|\right),$$

und da  $u \log^2 \frac{N}{u}$  für  $0 < u \leq \frac{N}{e^2}$  monoton steigt, ist nach (11) für  $N > e^2$

**Beweis:** Nach Satz 1 mit  $x = r_v$  ist

$$\begin{aligned} |-A\delta_v + \frac{1}{2}| &= |\nu - Ar_v + \frac{1}{2}| = |G(r_v)| \leq \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \left| M\left(\frac{N}{a}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{N}{a} \\ &= O(N \log N), \end{aligned}$$

woraus nach (8) die Behauptung folgt.

**Satz 3:**<sup>10)</sup>

$$M(N) = 2\pi i \sum_{\nu=1}^A e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} \delta_\nu + O(N^{\frac{1}{2} + \epsilon}).$$

**Beweis:** Für  $-1 \leq x \leq 1$  ist

$$(13) \quad |e^{2\pi xi} - 1 - 2\pi xi| \leq P_4 x^2.$$

Für  $N > 1$  ist (wegen  $A \leq N^2$ ) nach (13) und Satz 2

$$\begin{aligned} \left| M(N) - 2\pi i \sum_{\nu=1}^A e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} \delta_\nu \right| &= \left| \sum_{\nu=1}^A e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} (e^{2\pi i \delta_\nu} - 1 - 2\pi i \delta_\nu) \right| \\ &\leq P_4 \sum_{\nu=1}^A \delta_\nu^2 = O(\log^2 N). \end{aligned}$$

**Hauptsatz 1:** Aus (6) folgt (1).

**Beweis:** Aus (6) folgt (5) wegen (9); aus (5) folgt (2) nach Satz 3; aus (2) folgt (1).

**Hauptsatz 2:** Aus (1) folgt (6).

**Beweis:** Aus (1) folgt (2). Für  $1 \leq B \leq A$  ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^B \delta_\nu + \frac{B^2}{2A} + \frac{B}{2A} &= \sum_{\nu=1}^B r_\nu = \sum_{\nu=1}^B (\nu - (\nu - 1)) r_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{B-1} \nu (r_\nu - r_{\nu+1}) + B r_B = - \sum_{\nu=1}^{B-1} \nu \int_{r_\nu}^{r_{\nu+1}} dx + B r_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq a \leq \frac{N}{e^2}} \left| M\left(\frac{N}{a}\right) \right| &\leq \sum_{1 \leq a \leq \frac{N}{e^2}} P_2 \frac{N}{a \log^2 \frac{N}{a}} < P_2 N \int_0^{\frac{N}{e^2}} \frac{du}{u \log^2 \frac{N}{u}} \\ &= P_2 N \int_{e^2}^{\infty} \frac{dv}{v \log^2 v} = P_3 N. \end{aligned}$$

10) Aus dem obigen Text und (12) folgt natürlich, daß  $O(N^{\frac{1}{2} + \epsilon})$  durch  $O(1)$  ersetzt werden kann; aber ich brauche das nicht.

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{r_B} g(x) dx + Br_B = - \int_0^{r_B} G(x) dx - A \frac{r_B^2}{2} + \frac{r_B}{2} + Br_B, \\
(14) \quad \sum_{\nu=1}^B \delta_\nu &= - \int_0^{r_B} G(x) dx - \frac{A}{2} \delta_B^2 + \frac{1}{2} \delta_B.
\end{aligned}$$

Hierin ist nach Satz 1

$$\int_0^{r_B} G(x) dx = - \sum_{a=1}^N M\left(\frac{N}{a}\right) \int_0^{r_B} f(ax) dx = - \sum_{a=1}^N M\left(\frac{N}{a}\right) \frac{1}{a} \int_0^{ar_B} f(y) dy;$$

nun ist

$$\left| \int_0^\omega f(y) dy \right| \leq \frac{1}{8} \text{ für } \omega > 0$$

und nach (2)

$$|M(x)| < P_5(\varepsilon) x^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \text{ für } x \geq 1,$$

also

$$(15) \quad \left| \int_0^{r_B} G(x) dx \right| < P_5(\varepsilon) \sum_{a=1}^\infty \frac{N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}}{a^{\frac{3}{2} + \varepsilon}} = P_6(\varepsilon) N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Aus (14), (15) und Satz 2 folgt (wegen  $A \leq N^2$ )

$$\left| \sum_{\nu=1}^B \delta_\nu \right| < P_7(\varepsilon) N^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$