I.
Mathematik.
28

Über die Fareyreihe und die Riemannsche Vermutung.

Von

Edmund Landau.

Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juli 1932.

Es sei $\mu(n)$ die Möbiussche, $\varphi(n)$ die Eulersche, $\zeta(s)$ die Riemannsche Funktion, $N > 0$ und ganz,

$$A = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n);$$

$r_1, r_2, \ldots, r_A$ die wachsend geordneten reduzierten Brüche (Fareyreihe) mit positivem Nenner $\leqq N$ auf der Strecke $0 < \xi \leqq 1$;

$$r_\nu - \frac{\nu}{A} = \delta_\nu,$$

$$M(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} \mu(n),$$

also (da $\mu(n)$ bekanntlich die Summe der primitiven $n$ten Einheitswurzeln ist)

$$M(N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(n) = \sum_{\nu=1}^{A} e^{2\pi i r_\nu} = \sum_{\nu=1}^{A} \cos 2\pi r_\nu .$$

Seit 20 Jahren weiß man durch Herrn Littlewood[1]): Die Riemannsche Vermutung

(1) $$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \tfrac{1}{2}$$

ist äquivalent[2]) der (wegen des cos) transzendenten Eigenschaft der Fareyreihe

(2) $$M(N) = \sum_{\nu=1}^{A} \cos 2\pi r_\nu = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0\text{[3]).}$$

---

1) *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLIV (1912), S. 263—266].

2) Ich nenne zwei Aussagen äquivalent, wenn sie entweder beide richtig oder beide falsch sind.

3) Jede Relation mit ε ist im folgenden für alle $\varepsilon > 0$ gemeint.

Seit 8 Jahren weiß man durch Herrn FRANEL[4]): (1) ist der arithmetischen Eigenschaft der FAREYreihe

$$\sum_{\nu=1}^{A} \delta_\nu^2 = O(N^{-1+\varepsilon}) \tag{3}$$

äquivalent. Ich[5]) fügte hinzu: (1) ist jeder der Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{A} |\delta_\nu| = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{4}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{A} e^{\frac{2\pi i\nu}{A}} \delta_\nu = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{5}$$

äquivalent.

Heute werde ich zeigen: (1) ist der Relation

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq B \leqq A} \left| \sum_{\nu=1}^{B} \delta_\nu \right| = O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{6}$$

äquivalent.

Ich werde dies in § 1 rasch aus den alten Hilfssätzen von Herrn FRANEL und mir beweisen. In § 2 werde ich einen wesentlich[6]) kürzeren direkten Beweis angeben, der die meisten Hilfssätze der alten Beweise von

$$(1) \sim (3) \sim (4) \sim (5)$$

und diese Tatsachen selbst nicht benutzt. Ich verwende in § 2

$$(1) \sim (2);$$

die triviale Formel

$$\sum_{n \leqq y} M\left(\frac{y}{n}\right) = 1 \quad \text{für } y \geqq 1; \tag{7}$$

4) *Les suites de Farey et le problème des nombres premiers* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1924, Mathematisch-Physikalische Klasse, S. 198—201]. Vgl. meine *Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel* [ebenda, S. 202—206] und die zusammenfassende Darstellung in meinen *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1927), Bd. II, Teil 7, Kap. 13, S. 167—177.

5) L. c.

6) Es fallen (in der Numerierung meiner *Vorlesungen*) fort: die Sätze 483, 484, 488, 489, 491, 492. Ich beweise die Sätze 485—487 nachher aufs Neue (mit den alten Mitteln), um in § 2 nichts aus den in Fußnote 4) genannten Quellen als bekannt vorauszusetzen.

die klassische Formel

$$\lim_{N=\infty} \frac{A(N)}{N^2} > 0; \tag{8}$$

in beiden Paragraphen benutze ich die aus dem ABELschen[7]) Lemma und

$$\delta_\nu = -\delta_{A-\nu} \text{ für } 1 \leqq \nu < A, \quad \delta_A = 0$$

fließende Abschätzung[8])

$$\left| \sum_{\nu=1}^{A} e^{\frac{2\pi i \nu}{A}} \delta_\nu \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{A} \delta_\nu \sin \frac{2\pi\nu}{A} \right| \leqq P_1 \operatorname*{Max}_{1 \leqq B \leqq A} \left| \sum_{\nu=1}^{B} \delta_\nu \right|. \tag{9}$$

§ 1.

Beweis von (1) ∼ (6).

1) Aus (1) folgt (4), also (6) wegen

$$\left| \sum_{\nu=1}^{B} \delta_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{A} |\delta_\nu|.$$

2) Aus (6) folgt (5) wegen (9); aus (5) folgt (1).

§ 2.

Direkter Beweis von (1) ∼ (6).

Satz 1: *Ist*

$$f(x) = x - [x] - \tfrac{1}{2},$$

$$g(x) \textit{ die Anzahl der } r_\nu \leqq x,$$

$$G(x) = g(x) - Ax + \tfrac{1}{2},$$

so ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$G(x) = -\sum_{a=1}^{N} f(ax)\, M\left(\frac{N}{a}\right).$$

Beweis: Für $0 \leqq x \leqq 1$ ist

$$g(x) = \sum_{a=1}^{N} [ax]\, M\left(\frac{N}{a}\right). \tag{10}$$

Denn für $x = 0$ sind beide Seiten 0; beide sind streckenweise

7) Satz 140 meiner *Vorlesungen*, Bd. I, S. 88—89.

8) Alle P in dieser Arbeit bedeuten positive Weltkonstanten; alle $P(\varepsilon)$ positive, nur von ε abhängige Zahlen.

konstant und springen nur beim Eingang in ein r_ν; bei $r_\nu = \frac{b}{q}$, $(b, q) = 1$, $0 < b \leqq q \leqq N$, ist der Zuwachs links 1, rechts nach (7)

$$\sum_{\substack{a=1\\ q/a}}^{N} M\left(\frac{N}{a}\right) = \sum_{n \leqq \frac{N}{q}} M\left(\frac{\frac{N}{q}}{n}\right) = 1.$$

(10) mit $x = 1$ gibt

$$A = \sum_{a=1}^{N} a\, M\left(\frac{N}{a}\right).$$

Nach (7) ist

$$1 = \sum_{a=1}^{N} M\left(\frac{N}{a}\right),$$

also

$$G(x) = \sum_{a=1}^{N} ([ax] - ax + \tfrac{1}{2})\, M\left(\frac{N}{a}\right) = -\sum_{a=1}^{N} f(ax)\, M\left(\frac{N}{a}\right).$$

Satz 2:[9])

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

9) Beim Beweise benutze ich nur die triviale Abschätzung

$$|M(x)| \leqq x \text{ für } x \geqq 1.$$

Schon Satz 2 ist unnütz scharf; $O(N^{-\frac{3}{4}+\varepsilon})$ würde genügen. Übrigens ergibt sich z. B. aus meinem alten Satz

$$M(x) = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \tag{11}$$

die schärfere Abschätzung

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{1}{N}\right) \tag{12}$$

(unverbesserliche Größenordnung wegen

$$\delta_1 = \frac{1}{N} - \frac{1}{A} = \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\Big).$$

In der Tat folgt aus dem obigen Text

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq A} |\delta_\nu| = O\left(\frac{1}{N^2}\right) + O\left(\frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^{N} \left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right|\right) = O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2} \sum_{1 \leqq a \leqq \frac{N}{e^2}} \left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right|\right),$$

und da $u \log^2 \frac{N}{u}$ für $0 < u \leqq \frac{N}{e^2}$ monoton steigt, ist nach (11) für $N > e^2$

Beweis: Nach Satz 1 mit $x = r_\nu$ ist

$$|-A\delta_\nu+\tfrac{1}{2}| = |\nu - A r_\nu + \tfrac{1}{2}| = |G(r_\nu)| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right| \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\frac{N}{a}$$
$$= O(N\log N),$$

woraus nach (8) die Behauptung folgt.

Satz 3: [10])

$$M(N) = 2\pi i\sum_{\nu=1}^{A} e^{\frac{2\pi i\nu}{A}}\delta_\nu + O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Beweis: Für $-1 \leqq x \leqq 1$ ist

$$(13) \qquad |e^{2\pi x i} - 1 - 2\pi x i| \leqq P_4 x^2.$$

Für $N > 1$ ist (wegen $A \leqq N^2$) nach (13) und Satz 2

$$\left|M(N) - 2\pi i\sum_{\nu=1}^{A} e^{\frac{2\pi i\nu}{A}}\delta_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{A} e^{\frac{2\pi i\nu}{A}}\left(e^{2\pi i\delta_\nu} - 1 - 2\pi i\delta_\nu\right)\right|$$
$$\leqq P_4\sum_{\nu=1}^{A}\delta_\nu^2 = O(\log^2 N).$$

Hauptsatz 1: *Aus* (6) *folgt* (1).

Beweis: Aus (6) folgt (5) wegen (9); aus (5) folgt (2) nach Satz 3; aus (2) folgt (1).

Hauptsatz 2: *Aus* (1) *folgt* (6).

Beweis: Aus (1) folgt (2). Für $1 \leqq B \leqq A$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{B}\delta_\nu + \frac{B^2}{2A} + \frac{B}{2A} = \sum_{\nu=1}^{B} r_\nu = \sum_{\nu=1}^{B}(\nu - (\nu-1))\,r_\nu$$
$$= \sum_{\nu=1}^{B-1}\nu(r_\nu - r_{\nu+1}) + B r_B = -\sum_{\nu=1}^{B-1}\nu\int_{r_\nu}^{r_{\nu+1}} dx + B r_B$$

$$\sum_{1\leqq a\leqq\frac{N}{e^2}}\left|M\left(\frac{N}{a}\right)\right| \leqq \sum_{1\leqq a\leqq\frac{N}{e^2}} P_2\frac{N}{a\log^2\frac{N}{a}} < P_2 N\int_0^{\frac{N}{e^2}}\frac{du}{u\log^2\frac{N}{u}}$$
$$= P_2 N\int_{e^2}^{\infty}\frac{dv}{v\log^2 v} = P_3 N.$$

10) Aus dem obigen Text und (12) folgt natürlich, daß $O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ durch $O(1)$ ersetzt werden kann; aber ich brauche das nicht.

$$= -\int_0^{r_B} g(x)\,dx + Br_B = -\int_0^{r_B} G(x)\,dx - A\frac{r_B^2}{2} + \frac{r_B}{2} + Br_B,$$

$$\sum_{\nu=1}^{B} \delta_\nu = -\int_0^{r_B} G(x)\,dx - \frac{A}{2}\delta_B^2 + \tfrac{1}{2}\delta_B. \tag{14}$$

Hierin ist nach Satz 1

$$\int_0^{r_B} G(x)dx = -\sum_{a=1}^{N} M\left(\frac{N}{a}\right)\int_0^{r_B} f(ax)dx = -\sum_{a=1}^{N} M\left(\frac{N}{a}\right)\frac{1}{a}\int_0^{ar_B} f(y)\,dy;$$

nun ist

$$\left|\int_0^{\omega} f(y)\,dy\right| \leqq \tfrac{1}{8} \text{ für } \omega > 0$$

und nach (2)

$$|M(x)| < P_5(\varepsilon)\,x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \text{für } x \geqq 1,$$

also

$$\left|\int_0^{r_B} G(x)\,dx\right| < P_5(\varepsilon)\sum_{a=1}^{\infty} \frac{N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{a^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} = P_6(\varepsilon)\,N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{15}$$

Aus (14), (15) und Satz 2 folgt (wegen $A \leqq N^2$)

$$\left|\sum_{\nu=1}^{B} \delta_\nu\right| < P_7(\varepsilon)\,N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$