Über eine trigonometrische Summe.

Von

Edmund Landau.

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1928.

Satz: *Es sei* $m > 1$, α_1 *reell*, $0 < \Theta \leqq \alpha_2 - \alpha_1 \leqq \alpha_3 - \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_m - \alpha_{m-1} \leqq 1 - \Theta$, $\lambda_n = e^{2\pi i \alpha_n}$, $S = \left|\sum_{n=1}^{m} \lambda_n\right|$. *Dann ist*

1) $$S \leqq \operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2};$$

2) *für* $\Theta = \frac{1}{2}$ *und für jeden positiven Bruch* $\Theta < \frac{1}{2}$ *mit ungeradem Zähler und ungeradem Nenner bei passendem Beispiel*

$$S = \operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2};$$

3) *für jedes andere* Θ *mit* $0 < \Theta < \frac{1}{2}$ *stets*

$$S < \operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2};$$

4) *für jedes* Θ *mit* $0 < \Theta \leqq \frac{1}{2}$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *bei passendem Beispiel*

$$S > \operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2} - \varepsilon.$$

Vorbemerkungen: 1) Die Existenz einer nur von Θ abhängigen oberen Schranke für S hat zuerst Herr van der Corput bewiesen.

2) Nach dem eben ausgesprochenen Satz ist $\operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2}$ die „wahre Schranke".

3) Herr Kusmin hat die ältere Schranke

(1) $$S < \frac{\mathsf{A}}{\Theta},$$

wo die Konstante $\mathsf{A} = 4$ und etwas weniger war, zu $\frac{1}{\Theta}$ verschärft und hat zuerst auf elementarem Wege eine Schranke $\frac{\mathsf{A}}{\Theta}$ gefunden.

4) Herr KUSMIN hat nicht bemerkt, daß $\mathsf{A} = \frac{2}{\pi}$ brauchbar ist; in der Tat ist

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi\Theta}{2} < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\Theta}.$$

$\left(\text{Seine Endformel lautet } S < \frac{2}{\sin \pi\Theta}.\right)$

5) Daß kein $\mathsf{A} < \frac{2}{\pi}$ brauchbar ist, hat Herr KUSMIN bemerkt.

6) Für die Anwendung auf GAUSSsche Summen (ich benutze die Bezeichnungen meiner vorangehenden Abhandlung) ist mein $\frac{2}{\pi}$ zu gut, Herrn KUSMINS 1 bequem, aber jedes A ausreichend. Die Zahl q sei dauernd > 0 und durch 4 teilbar. Vor allem bemerke ich, daß es genügt, $x > -\sqrt{q}$ für große q zu zeigen. Nicht etwa, weil man endlich viele q durchrechnen kann; sondern aus folgendem Grunde. Ist für $q > \omega$

$$S_q = (1+i)\sqrt{q}$$

schon bewiesen, so wähle man eine Primzahl $p > \omega$. Alsdann ist für $q \leqq \omega$ nach klassischen Formeln, z. B. auf S. 167 des Bd. 1 meiner *Vorlesungen über Zahlentheorie*, (man beachte $p > 2$, $4/p^2 q$, $(p^2, q) = 1$, $p^2 q > \omega$)

$$(1+i)p\sqrt{q} = S_{p^2 q} = \varphi(1, p^2 q) = \varphi(q, p^2)\,\varphi(p^2, q) = p S_q.$$

Es sei $\tau > 0$ beliebig. Für $q \geqq 16\tau^2$ ist $\tau\sqrt{q} \leqq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}$, mit $\Theta = \frac{2\tau}{\sqrt{q}}$ ferner $0 < \Theta \leqq \frac{1}{2}$. Ich zerlege jetzt so:

$$x = 4 \sum_{0 \leqq n < \tau\sqrt{q}} \sin\frac{2\pi n^2}{q} + 2 \sum_{\tau\sqrt{q} \leqq n \leqq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}} \sin\frac{2\pi n^2}{q}.$$

Hierin ist nach (1) (falls die zweite Summe mindestens zwei Glieder hat) bzw. trivialerweise (falls sie nur ein Glied hat; man beachte $1 < 2\mathsf{A}$)

$$\sum_{\tau\sqrt{q} \leqq n \leqq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}} \sin\frac{2\pi n^2}{q} > -\frac{\mathsf{A}\sqrt{q}}{2\tau}.$$

Ferner ist

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{0 \leqq n < \tau\sqrt{q}} \sin\frac{2\pi n^2}{q} = \int_0^\tau \sin 2\pi y^2\, dy.$$

Daher ist (q läuft durch Multipla von 4)

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} \geqq 4 \int_0^{\tau} \sin 2\pi y^2\, dy - \frac{A}{\tau}.$$

$\tau \to \infty$ gibt

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} \geqq 4 \int_0^{\infty} \sin 2\pi y^2\, dy = 1.$$

Übrigens hätte

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} > -1$$

genügt, und hierfür reicht z. B. $\tau = A$, da bekanntlich für jedes $A > 0$

$$\int_0^{A} \sin 2\pi y^2\, dy > 0$$

ist.

Beweis: 1) In der Fußnote meiner vorangehenden Arbeit rechne man am Schluß

$$= \frac{1+\cos\beta_2}{2\sin\beta_2} + \frac{1-\cos\beta_m}{2\sin\beta_m} \leqq \frac{1+\cos\pi\Theta}{\sin\pi\Theta} = \operatorname{cotg}\frac{\pi\Theta}{2}.$$

2) Für $\Theta = \frac{1}{2}$ ist das Beispiel

$$|1 + e^{\pi i} + e^{2\pi i}| = 1.$$

Für $0 < \Theta = \dfrac{2g+1}{2h+1} < \dfrac{1}{2}$ ($g \geqq 0$ ganz, $h \geqq 1$ ganz) ist das Beispiel

$$\left| \sum_{k=0}^{h-1} e^{2\pi i k\Theta} + e^{2\pi i h\Theta} \sum_{k=0}^{h} e^{2\pi i k(1-\Theta)} \right| = \left| \sum_{k=0}^{h-1} e^{2\pi i k\Theta} + \sum_{k=0}^{h} e^{2\pi i k\Theta} \right|$$

$$= \left| \frac{1 - e^{2\pi i h\Theta} + 1 - e^{2\pi i(h+1)\Theta}}{1 - e^{2\pi i\Theta}} \right| = \left| \frac{1 + e^{-\pi i\Theta} + 1 + e^{\pi i\Theta}}{1 - e^{2\pi i\Theta}} \right|$$

$$= \frac{1+\cos\pi\Theta}{\sin\pi\Theta}.$$

3) Ist $0 < \Theta < \frac{1}{2}$ und

$$S = \frac{1+\cos\pi\Theta}{\sin\pi\Theta},$$

so muß nach der Entstehung der Abschätzung mit $\leqq$ sein: Erstens $\beta_2 = \pi\Theta$, zweitens $m \geqq 3$, drittens nicht jede der Zahlen $\beta_3 - \beta_2, \ldots, \beta_m - \beta_{m-1}$ Null. Es sei zuerst $\beta_{h+2} - \beta_{h+1} > 0$ $(h > 0)$.

Dann ist $\beta_2 = \cdots = \beta_{h+1} = \pi\Theta$; und da nun $\lambda_1 \frac{ie^{-\beta_2 i}}{2\sin\beta_2}$ und $-\frac{i}{2}\lambda_{h+1}(\operatorname{cotg}\beta_{h+1} - \operatorname{cotg}\beta_{h+2})$ auf demselben Halbstrahl von 0 nach ∞ liegen müssen, ist

$$\lambda_1 e^{-\pi\Theta i} = -\lambda_{h+1} = -\lambda_1 e^{2h\pi i\Theta},$$

$$e^{(2h+1)\pi\Theta i} = -1,$$

$$(2h+1)\Theta \text{ ganz und ungerade.}$$

4) Es sei $0 < \Theta < \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$. Man wähle Θ_0 als Bruch mit ungeradem Zähler und ungeradem Nenner so, daß $\Theta < \Theta_0 < \frac{1}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{\pi\Theta_0}{2} > \operatorname{cotg}\frac{\pi\Theta}{2} - \varepsilon$ ist. Das obige zu Θ_0 gehörige Beispiel mit $S = \operatorname{cotg}\frac{\pi\Theta_0}{2}$ genügt den Bedingungen $m > 1$, α_1 reell, $\Theta \leqq \alpha_2 - \alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_m - \alpha_{m-1} \leqq 1 - \Theta$, $S > \operatorname{cotg}\frac{\pi\Theta}{2} - \varepsilon$.