

## Article

Ueber eine trigonometrische Summe

Landau, E.

in: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse | Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse - 1928 | Periodical issue - 1

4 Page(s) (21 - 24)



## Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

## Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

## Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

[Email: info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

# Über eine trigonometrische Summe.

Von

**Edmund Landau.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1928.

**Satz:** Es sei  $m > 1$ ,  $\alpha_1$  reell,  $0 < \Theta \leq \alpha_2 - \alpha_1 \leq \alpha_3 - \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m - \alpha_{m-1} \leq 1 - \Theta$ ,  $\lambda_n = e^{2\pi i \alpha_n}$ ,  $S = \left| \sum_{n=1}^m \lambda_n \right|$ . Dann ist

$$1) \quad S \leq \cotg \frac{\pi \Theta}{2};$$

2) für  $\Theta = \frac{1}{2}$  und für jeden positiven Bruch  $\Theta < \frac{1}{2}$  mit ungeradem Zähler und ungeradem Nenner bei passendem Beispiel

$$S = \cotg \frac{\pi \Theta}{2};$$

3) für jedes andere  $\Theta$  mit  $0 < \Theta < \frac{1}{2}$  stets

$$S < \cotg \frac{\pi \Theta}{2};$$

4) für jedes  $\Theta$  mit  $0 < \Theta \leq \frac{1}{2}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  bei passendem Beispiel

$$S > \cotg \frac{\pi \Theta}{2} - \varepsilon.$$

**Vorbemerkungen:** 1) Die Existenz einer nur von  $\Theta$  abhängigen oberen Schranke für  $S$  hat zuerst Herr VAN DER CORPUT bewiesen.

2) Nach dem eben ausgesprochenen Satz ist  $\cotg \frac{\pi \Theta}{2}$  die „wahre Schranke“.

3) Herr KUSMIN hat die ältere Schranke

$$(1) \quad S < \frac{A}{\Theta},$$

wo die Konstante  $A = 4$  und etwas weniger war, zu  $\frac{1}{\Theta}$  verschärft und hat zuerst auf elementarem Wege eine Schranke  $\frac{A}{\Theta}$  gefunden.

4) Herr KUSMIN hat nicht bemerkt, daß  $A = \frac{2}{\pi}$  brauchbar ist; in der Tat ist

$$\cotg \frac{\pi \Theta}{2} < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\Theta}.$$

(Seine Endformel lautet  $S < \frac{2}{\sin \pi \Theta}$ .)

5) Daß kein  $A < \frac{2}{\pi}$  brauchbar ist, hat Herr KUSMIN bemerkt.

6) Für die Anwendung auf GAUSSsche Summen (ich benutze die Bezeichnungen meiner vorangehenden Abhandlung) ist mein  $\frac{2}{\pi}$  zu gut, Herrn KUSMINS 1 bequem, aber jedes  $A$  ausreichend. Die Zahl  $q$  sei dauernd  $> 0$  und durch 4 teilbar. Vor allem bemerke ich, daß es genügt,  $x > -\sqrt{q}$  für große  $q$  zu zeigen. Nicht etwa, weil man endlich viele  $q$  durchrechnen kann; sondern aus folgendem Grunde. Ist für  $q > \omega$

$$S_q = (1+i)\sqrt{q}$$

schon bewiesen, so wähle man eine Primzahl  $p > \omega$ . Alsdann ist für  $q \leq \omega$  nach klassischen Formeln, z. B. auf S. 167 des Bd. 1 meiner *Vorlesungen über Zahlentheorie*, (man beachte  $p > 2$ ,  $4/p^2 q$ ,  $(p^2, q) = 1$ ,  $p^2 q > \omega$ )

$$(1+i)p\sqrt{q} = S_{p^2 q} = \varphi(1, p^2 q) = \varphi(q, p^2) \varphi(p^2, q) = p S_q.$$

Es sei  $\tau > 0$  beliebig. Für  $q \geq 16\tau^2$  ist  $\tau\sqrt{q} \leq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}$ , mit  $\Theta = \frac{2\tau}{\sqrt{q}}$  ferner  $0 < \Theta \leq \frac{1}{2}$ . Ich zerlege jetzt so:

$$x = 4 \sum_{0 \leq n < \tau\sqrt{q}} \frac{\sin \frac{2\pi n^2}{q}}{q} + 2 \sum_{\tau\sqrt{q} \leq n \leq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}} \frac{\sin \frac{2\pi n^2}{q}}{q}.$$

Hierin ist nach (1) (falls die zweite Summe mindestens zwei Glieder hat) bzw. trivialerweise (falls sie nur ein Glied hat; man beachte  $1 < 2A$ )

$$\sum_{\tau\sqrt{q} \leq n \leq \frac{q}{2} - \tau\sqrt{q}} \frac{\sin \frac{2\pi n^2}{q}}{q} > -\frac{A\sqrt{q}}{2\tau}.$$

Ferner ist

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{0 \leq n < \tau\sqrt{q}} \frac{\sin \frac{2\pi n^2}{q}}{q} = \int_0^\tau \sin 2\pi y^2 dy.$$

Daher ist ( $q$  läuft durch Multipla von 4)

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} \geq 4 \int_0^\tau \sin 2\pi y^2 dy - \frac{A}{\tau}.$$

$\tau \rightarrow \infty$  gibt

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} \geq 4 \int_0^\infty \sin 2\pi y^2 dy = 1.$$

Übrigens hätte

$$\lim_{q=\infty} \frac{x}{\sqrt{q}} > -1$$

genügt, und hierfür reicht z. B.  $\tau = A$ , da bekanntlich für jedes  $A > 0$

$$\int_0^A \sin 2\pi y^2 dy > 0$$

ist.

**Beweis:** 1) In der Fußnote meiner vorangehenden Arbeit rechne man am Schluß

$$= \frac{1 + \cos \beta_2}{2 \sin \beta_2} + \frac{1 - \cos \beta_m}{2 \sin \beta_m} \leq \frac{1 + \cos \pi \Theta}{\sin \pi \Theta} = \cotg \frac{\pi \Theta}{2}.$$

2) Für  $\Theta = \frac{1}{2}$  ist das Beispiel

$$|1 + e^{\pi i} + e^{2\pi i}| = 1.$$

Für  $0 < \Theta = \frac{2g+1}{2h+1} < \frac{1}{2}$  ( $g \geq 0$  ganz,  $h \geq 1$  ganz) ist das Beispiel

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{h-1} e^{2\pi i k \Theta} + e^{2\pi i h \Theta} \sum_{k=0}^h e^{2\pi i k(1-\Theta)} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{h-1} e^{2\pi i k \Theta} + \sum_{k=0}^h e^{2\pi i k \Theta} \right| \\ &= \left| \frac{1 - e^{2\pi i h \Theta} + 1 - e^{2\pi i (h+1)\Theta}}{1 - e^{2\pi i \Theta}} \right| = \left| \frac{1 + e^{-\pi i \Theta} + 1 + e^{\pi i \Theta}}{1 - e^{2\pi i \Theta}} \right| \\ &= \frac{1 + \cos \pi \Theta}{\sin \pi \Theta}. \end{aligned}$$

3) Ist  $0 < \Theta < \frac{1}{2}$  und

$$S = \frac{1 + \cos \pi \Theta}{\sin \pi \Theta},$$

so muß nach der Entstehung der Abschätzung mit  $\leq$  sein: Erstens  $\beta_2 = \pi \Theta$ , zweitens  $m \geq 3$ , drittens nicht jede der Zahlen  $\beta_3 - \beta_2, \dots, \beta_m - \beta_{m-1}$  Null. Es sei zuerst  $\beta_{h+2} - \beta_{h+1} > 0$  ( $h > 0$ ).

Dann ist  $\beta_2 = \dots = \beta_{h+1} = \pi\theta$ ; und da nun  $\lambda_1 \frac{ie^{-\beta_2 i}}{2 \sin \beta_2}$  und  $-\frac{i}{2} \lambda_{h+1} (\cotg \beta_{h+1} - \cotg \beta_{h+2})$  auf demselben Halbstrahl von 0 nach  $\infty$  liegen müssen, ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 e^{-\pi\theta i} &= -\lambda_{h+1} = -\lambda_1 e^{2h\pi i\theta}, \\ e^{(2h+1)\pi\theta i} &= -1, \\ (2h+1)\theta &\text{ ganz und ungerade.} \end{aligned}$$

4) Es sei  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Man wähle  $\theta_0$  als Bruch mit ungeradem Zähler und ungeradem Nenner so, daß  $\theta < \theta_0 < \frac{1}{2}$ ,  $\cotg \frac{\pi\theta_0}{2} > \cotg \frac{\pi\theta}{2} - \varepsilon$  ist. Das obige zu  $\theta_0$  gehörige Beispiel mit  $S = \cotg \frac{\pi\theta_0}{2}$  genügt den Bedingungen  $m > 1$ ,  $\alpha_1$  reell,  $\theta \leq \alpha_2 - \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m - \alpha_{m-1} \leq 1 - \theta$ ,  $S > \cotg \frac{\pi\theta}{2} - \varepsilon$ .