Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Bernhard Riemann

[Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Bernhard Riemann

[Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.]*

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkürlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. In zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkürlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe.

1.

Die von *Fourier* so genannten trigonometrischen Reihen, d. h. die Reihen von der Form

$$\begin{aligned} &a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ +&\tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \end{aligned}$$

*Diese Abhandlung ist im Jahre 1854 von dem Verfasser behufs seiner Habilitation an der Universität zu Göttingen der philosophischen Facultät eingereicht. Wiewohl der Verfasser ihre Veröffentlichung, wie es scheint, nicht beabsichtigt hat, so wird doch die hiermit erfolgende Herausgabe derselben in gänzlich ungeänderter Form sowohl durch das hohe Interesse des Gegenstandes an sich als durch die in ihr niedergelegte Behandlungsweise der wichtigsten Principien der Infinitesimal-Analysis wohl hinlänglich gerechtfertigt erscheinen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

spielen in demjenigen Theile der Mathematik, wo ganz willkürliche Functionen vorkommen, eine bedeutende Rolle; ja, es lässt sich mit Grund behaupten, dass die wesentlichsten Fortschritte in diesem für die Physik so wichtigen Theile der Mathematik von der klareren Einsicht in die Natur dieser Reihen abhängig gewesen sind. Schon gleich bei den ersten mathematischen Untersuchungen, die auf die Betrachtung willkürlicher Functionen führten, kam die Frage zur Sprache, ob sich eine solche ganz willkürliche Function durch eine Reihe von obiger Form ausdrücken lasse.

Es geschah dies in der Mitte des vorigen Jahrhunderts bei Gelegenheit der Untersuchungen über die schwingenden Saiten, mit welchen sich damals die berühmtesten Mathematiker beschäftigten. Ihre Ansichten über unsern Gegenstand lassen sich nicht wohl darstellen, ohne auf dieses Problem einzugehen.

Unter gewissen Voraussetzungen, die in der Wirklichkeit näherungsweise zutreffen, wird bekanntlich die Form einer gespannten in einer Ebene schwingenden Saite, wenn x die Entfernung eines unbestimmten ihre Punkte von ihrem Anfangspunkte, y seine Entfernung aus der Ruhelage zur Zeit t bedeutet, durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

bestimmt, wo α von t und bei einer überall gleich dicken Saite von x unabhängig ist.

Der erste, welcher eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gab, war *d'Alembert*.

Er zeigte[1], dass jede Function von x und t, welche für y gesetzt, die Gleichung zu einer identischen macht, in der Form

$$f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

enthalten sein müsse, wie sich dies durch Einführung der unabhängig veränderlichen Grössen $x + \alpha t$, $x - \alpha t$ anstatt x, t ergiebt, wodurch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{in} \quad 4\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial(x+\alpha t)}}{\partial(x-\alpha t)}$$

übergeht.

Ausser dieser partiellen Differentialgleichung, welche sich aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ergiebt, muss nun y noch die Bedingung erfüllen,

[1] Mémoires de l'académie de Berlin. 1747. pag. 214.

in den Befestigungspunkten der Saite stets $= 0$ zu sein; man hat also, wenn in dem einen dieser Punkte $x = 0$, in dem anderen $x = l$ ist,

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \quad f(l + \alpha t) = -\varphi(l - \alpha t)$$

und folglich

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi(l - (l + z)) = f(2l + z),$$

$$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x).$$

Nachdem *d'Alembert* dies für die allgemeine Lösung des Problems geleistet hatte, beschäftigt er sich in einer Fortsetzung[2] seiner Abhandlung mit der Gleichung $f(z) = f(2l + z)$; d. h. er sucht analytische Ausdrücke, welche unverändert bleiben, wenn z um $2l$ wächst.

Es war ein wesentliches Verdienst *Euler*'s, der im folgenden Jahrgange der Berliner Abhandlungen[3] eine neue Darstellung dieser *d'Alembert*'schen Arbeiten gab, dass er das Wesen der Bedingungen, welchen die Function $f(z)$ genügen muss, richtiger erkannte. Er bemerkte, dass der Natur des Problems nach die Bewegung der Saite vollständig bestimmt sei, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Form der Saite und die Geschwindigkeit jedes Punktes $\left(\text{also } y \text{ und } \dfrac{\partial y}{\partial t}\right)$ gegeben seien, und zeigte, dass sich, wenn man diese beiden Functionen sich durch willkürlich gezogene Curven bestimmt denkt, daraus stets durch eine einfache geometrische Construction die *d'Alembert*'sche Function $f(z)$ finden lässt. In der That, nimmt man an, dass für

$$t = 0, \quad y = g(x) \quad und \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h(x)$$

sei, so erhält man für die Werthe von x zwischen 0 und l

$$f(x) - f(-x) = g(x), \quad f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha} \int h(x)\, dx$$

und folglich die Function $f(z)$ zwischen $-l$ und l; hieraus aber ergiebt sich ihr Werth für jeden andern Werth von z vermittelst der Gleichung

$$f(z) = f(2l + z).$$

Dies ist in abstracten, aber jetzt allgemein geläufigen Begriffen dargestellt, die *Euler*'sche Bestimmung der Function $f(z)$.

[2] Ibid. pag. 220.

[3] Mémoires de l'académie de Berlin. 1748. pag. 69.

Gegen diese Ausdehnung seiner Methode durch *Euler* verwahrte sich indess *d'Alembert* sofort[4], weil seine Methode nothwendig voraussetze, dass y sich in t und x analytisch ausdrücken lasse.

Ehe eine Antwort *Euler*'s hierauf erfolgte, erschien eine dritte von diesen beiden ganz verschiedene Behandlung dieses Gegenstandes von Daniel *Bernoulli*[5]. Schon vor *d'Alembert* hatte *Taylor*[6] gesehen, dass $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und zugleich y für $x = 0$ und für $x = l$ stets gleich 0 sei, wenn man $y = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\alpha t}{l}$ und hierin für n eine ganze Zahl setze. Er erklärte hieraus die physikalische Thatsache, dass eine Saite ausser ihrem Grundtone auch den Grundton einer $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ so langen (übrigens ebenso beschaffenen) Saite geben könne, und hielt seine particuläre Lösung für allgemein, d. h. er glaubte die Schwingung der Saite würde stets, wenn die ganze Zahl n der Höhe des Tons gemäss bestimmt würde, wenigstens sehr nahe durch die Gleichung ausgedrückt. Die Beobachtung, dass eine Saite ihre verschiedenen Töne gleichzeitig geben könne, führte nun *Bernoulli* zu der Bermerkung, dass die Saite (der Theorie nach) auch der Gleichung

$$y = \sum a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\alpha}{l}(t - \beta_n)$$

gemäss schwingen könne, und weil sich aus dieser Gleichung alle beobachteten Modificationen der Erscheinung erklären liessen, so hielt er sie für die allgemeinste[7]. Um diese Ansicht zu stützen, untersuchte er die Schwingungen eines masselosen gespannten Fadens, der in einzelnen Punkten mit endlichen Massen beschwert ist, und zeigte, dass die Schwingungen desselben stets in eine der Zahl der Punkte gleiche Anzahl von solchen Schwingungen zerlegt werden kann, deren jede für alle Massen gleich lange dauert.

Diese Arbeiten *Bernoulli*'s veranlassten einen neuen Aufsatz *Euler*'s, welcher unmittelbar nach ihnen unter den Abhandlungen der Berliner Akademie abgedruckt ist[8]. Er hält darin *d'Alembert* gegenüber fest[9], dass die Function $f(z)$ eine zwischen den Grenzen $-l$ und l ganz willkürliche sein könne, und bemerkt[10], dass *Bernoulli*'s Lösung (welche er schon früher als eine beson-

[4] Mémoires de l'académie de Berlin. 1750. pag. 358. En effet on ne peut ce me semble exprimer y analytiquement d'une manière plus générale, qu'en la supposant une fonction de t et de x. Mais dans cette supposition on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermés dans une seule et même équation.

[5] Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. p. 147.

[6] Taylor de methodo incrementorum.

[7] l. c. p. 157. art. XIII.

[8] Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. p. 196.

[9] l. c. p. 214.

[10] l. c. art. III–X.

dere aufgestellt hatte) dann allgemein sei und zwar nur dann allgemein sei, wenn die Reihe

$$a_1 \sin \frac{x\pi}{l} + a_2 \sin \frac{2x\pi}{l} + \cdots$$
$$+\tfrac{1}{2}b_0 + b_1 \cos \frac{x\pi}{l} + b_2 \cos \frac{2x\pi}{l} + \cdots$$

für die Abscisse x die Ordinate einer zwischen den Abscissen 0 und l ganz willkürlichen Curve darstellen könne. Nun wurde es damals von Niemand bezweifelt, dass alle Umformungen, welche man mit einem analytischen Ausdrucke—er sei endlich oder unendlich—vornehmen könne, für jedwede Werthe der unbestimmten Grössen gültig seien oder doch nur in ganz speciellen Fällen unanwendbar würden. Es schien daher unmöglich, eine algebraische Curve oder überhaupt eine analytisch gegebene nicht periodische Curve durch obigen Ausdruck darzustellen, und *Euler* glaubte daher, die Frage gegen *Bernoulli* entscheiden zu müssen.

Der Streit zwischen *Euler* und *d'Alembert* was indess noch immer unerledigt. Dies veranlasste einen jungen, damals noch wenig bekannten Mathematiker, *Lagrange*, die Lösung der Aufgabe auf einem ganz neuen Wege zu versuchen, auf welchem er zu *Euler*'s Resultaten gelangte. Er unternahm es[11], die Schwingungen eines masselosen Fadens zu bestimmen, welcher mit einer endlichen unbestimmten Anzahl gleich grosser Massen in gleich grossen Abständen beschwert ist, und untersuchte dann, wie sich diese Schwingungen ändern, wenn die Anzahl der Massen in's Unendliche wächst. Mit welcher Gewandtheit, mit welchem Aufwande analytischer Kunstgriffe er aber auch den ersten Theil dieser Untersuchung durchführte, so liess der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen doch viel zu wünschen übrig, so dass *d'Alembert* in einer Schrift, welche er an die Spitze seiner opuscules mathématiques stellte, fortfahren konnte, *seiner* Lösung den Ruhm der Grössten Allgemeinheit zu vindiciren. Die Ansichten der damaligen berühmten Mathematiker waren und blieben daher in dieser Sache getheilt; den auch in spätern Arbeiten behielt jeder in Wesentlichen seinen Standpunkt bei.

Um also schliesslich ihre bei Gelegenheit dieses Problems entwickelten Ansichten über die willkürlichen Functionen und über die Darstellbarkeit derselben durch eine trigonometrische Reihe zusammenzustellen, so hatte *Euler* zuerst diese Functionen in die Analysis eingeführt und, auf geometrische Anschauung gestützt, die Infinitesimalrechnung auf sie angewandt. *Lagrange*[12] hielt *Euler*'s Resultate (seine geometrische Construction des Schwingungsverlaufs) für richtig; aber ihm genügte die *Euler*'sche geometrische Behandlung

[11] Miscellanea Taurinensia. Tom I. Recherches sur la nature et la propagation du son.
[12] Miscellanea Taurinensia. Tom. II. Pars math. pag. 18.

dieser Functionen nicht. *D'Alembert* [13] dagegen ging auf die *Euler*'sche Auffassungsweise der Differentialgleichung ein und beschränkte sich, die Richtigkeit seiner Resultate anzufechten, weil man bei ganz willkürlichen Functionen nicht wissen könne, ob ihre Differentialquotienten stetig seien. Was die *Bernoulli*'sche Lösung betraf, so kamen alle drei darin überein, sie nicht für allgemein zu halten; aber während *d'Alembert*[14], um *Bernoulli*'s Lösung für minder allgemein, als die seinige, erklären zu können, behaupten musste, dass auch eine analytisch gegebene periodische Function sich nicht immer durch eine trigonometrische Reihe darstellen lasse, glaubte *Lagrange*[15] diese Möglichkeit beweisen zu können.

2.

Fast fünfzig Jahre vergingen, ohne dass in der Frage über die analytische Darstellbarkeit willkürlicher Functionen ein wesentlicher Fortschritt gemacht wurde. Da warf eine Bemerkung *Fourier*'s ein neues Licht auf diesen Gegenstand; eine neue Epoche in der Entwicklung dieses Theils der Mathematik begann, die sich bald auch äusserlich in grossartigen Erweiterungen der mathematischen Physik kund that. *Fourier* bemerkte, dass in der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \begin{cases} \qquad\qquad a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ +\frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots \end{cases}$$

die Coefficienten sich durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

bestimmen lassen. Er sah, dass diese Bestimmungsweise auch anwendbar bleibe, wenn die Function $f(x)$ ganz willkürlich gegeben sei; er setzte für $f(x)$ eine so genannte discontinuirliche Function (die Ordinate einer gebrochenen Linie für die Abscisse x) und erhielt so eine Reihe, welche in der That stets den Werth der Function gab.

Als *Fourier* in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegte[16], (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, dass eine ganz willkürlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken lasse, war diese Behauptung dem greisen *Lagrange* so unerwartet, dass er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es

[13] Opuscules mathématiques p. d'Alembert. Tome premier. 1761. pag. 16. art. VII–XX.
[14] Opuscules mathématiques. Tome I. pag. 42. art. XXIV.
[15] Misc. Taur. Tom. III. Pars math. pag. 221. art. XXV.
[16] Bulletin des sciences p. la soc. philomatique. Tome I. p. 112.

soll[17] sich hierüber noch ein Schriftstück im Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist[18] *Poisson* überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkürlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in *Lagrange's* Arbeiten über die schwingenden Saiten, wo sich diese Darstellungsweise finden soll. Um diese Behauptung, die sich nur aus der bekannten Rivalität zwischen *Fourier* und *Poisson* erklären lässt[19], zu widerlegen, sehen wir uns genöthigt, noch einmal auf die Abhandlung *Lagrange*'s zurückzukommen; denn über jenen Vorgang in der Akademie findet sich nichts veröffentlicht.

Man findet in der That an der von *Poisson* citirten Stelle[20] die Formel:

$$
\begin{aligned}
„y \;=\; & 2\int Y \sin X\pi\, dx \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi\, dx \times \sin 2x\pi \\
& +2\int Y \sin 3X\pi\, dx \times \sin 3x\pi + \text{etc.} + 2\int Y \sin nX\pi\, dx \times \sin nx\pi,
\end{aligned}
$$

de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonée qui répond à l'abscisse X."

Diese Formel sieht nun allerdings ganz so aus wie die *Fourier*'sche Reihe, so dass bei flüchtiger Ansicht eine Verwechselung leicht möglich ist; aber dieser Schein rührt bloss daher, weil *Lagrange* das Zeichen $\int dX$ anwandte, wo er heute das Zeichen $\sum \Delta X$ angewandt haben würde. Sie giebt die Lösung der Aufgabe, die endliche Sinusreihe

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \cdots + a_n \sin nx\pi$$

so zu bestimmen, dass sie für die Werthe

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$$

von x, welche *Lagrange* unbestimmt durch X bezeichnet, gegebene Werthe erhält. Hätte *Lagrange* in dieser Formel n unendlich gross werden lassen, so wäre er allerdings zu dem *Fourier*'schen Resultat gelangt. Wenn man aber seine Abhandlung durchliest, so sieht man, dass er weit davon entfernt ist zu glauben, eine ganz willkürliche Function lasse sich wirklich durch eine unendliche Sinusreihe darstellen. Er hatte vielmehr die ganze Arbeit gerade unternommen, weil er glaubte, diese willkürlichen Functionen liessen sich nicht durch eine Formel ausdrücken, und von der trigonometrischen Reihe

[17] Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Professor Dirichlet.

[18] Unter Andern in dem verbreitenen Traité de méchanique Nro. 323. p. 638.

[19] Der Bericht im bulletin des sciences über die von Fourier der Akademie vorgelegte Abhandlung ist von Poisson.

[20] Misc. Taur. Tom. III. Pas math. pag. 261.

glaubte er, dass sie jede analytisch gegebene periodische Function darstellen könne. Freilich erscheint es uns jetzt kaum denkbar, dass *Lagrange* von seiner Summenformel nicht zur *Fourier*'schen Reihe gelangt sein sollte; aber dies erklärt sich daraus, dass durch den Streit zwischen *Euler* und *d'Alembert* sich bei ihm in Voraus eine bestimmte Ansicht über den einzuschlagenden Weg gebildet hatte. Er glaubte das Schwingungsproblem für eine unbestimmte endliche Anzahl von Massen erst vollständig absolviren zu müssen, bevor er seine Grenzbetrachtungen anwandte. Diese erfordern eine ziemlich ausgedehnte Untersuchung[21], welche unnöthig war, wenn er die *Fourier*'sche Reihe kannte.

Durch *Fourier* was nun zwar die Natur der trigonometrischen Reihen vollkommen richtig erkannt[22]; sie wurden seitdem in der mathematischen Physik zur Darstellung willkürlicher Functionen vielfach angewandt, und in jedem einzelnen Falle überzeugte man sich leicht, dass die *Fourier*'sche Reihe wirklich gegen den Werth der Function convergire; aber es dauerte lange, ehe dieser wichtige Satz allgemein bewiesen wurde.

Der Beweis, welchen *Cauchy* in einer der Pariser Akademie am 27. Febr. 1826 vorgelesenen Abhandlung gab[23], ist unzureichend, wie *Dirichlet* gezeigt hat[24]. *Cauchy* setzt voraus, dass, wenn man in der willkürlich gegebenen periodischen Function $f(x)$ für x ein complexes Argument $x + yi$ setzt, diese Function für jeden Werth von y endlich sei. Dies findet aber *nur* Statt, wenn die Function gleich einer constanten Grösse ist. Man sieht indess leicht, dass diese Voraussetzung für die ferneren Schlüsse nicht nothwendig ist. Es reicht hin, wenn eine Function $\phi(x + yi)$ vorhanden ist, welche für alle positiven Werthe von y endlich ist und deren reeller Theil für $y = 0$ der gegebenen periodischen Function $f(x)$ gleich wird. Will man diesen Satz, der in der That richtig ist[25], voraussetzen, so führt allerdings der von *Cauchy* eingeschlagene Weg zum Ziele, wie umgekehrt dieser Satz sich aus der *Fourier*'schen Reihe ableiten lässt.

3.

Erst in Januar 1829 erschien im Journal von *Crelle*[26] eine Abhandlung von *Dirichlet*, worin für Functionen, die durchgehends eine Integration zulassen und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, die Frage ihrer Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen in aller Strenge entschieden

[21] Misc. Taur. Tom. III. Pars math. S. 251.
[22] Bulletin d. sc. Tom. I. p. 115. Les coefficients $a, a', a'', \dots$, étant ainsi déterminés etc.
[23] Mémoires de l'ac. d. sc. de Paris. Tom. VI. p. 603.
[24] Crelle Journal für die Mathematik. Bd. IV. p. 157 & 158.
[25] Der Beweis findet sich in der Inauguraldissertation des Verfassers.
[26] Bd. IV. p. 157.

wurde.

Die Erkenntniss des zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weges ergab sich ihm aus der Einsicht, dass die unendliche Reihen in zwei wesentlich verschiedene Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämmtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht. In den ersteren können die Glieder beliebig versetzt werden, der Werth der letzteren dagegen ist von der Ordnung der Glieder abhängig. In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

die negativen durch

$$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots,$$

so ist klar, dass sowohl $\sum a$, als $\sum b$ unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber *eine* unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren.

Nur auf die Reihen erster Klasse sind die Gesetze endlicher Summen anwendbar; nur sie können wirklich als Inbegriff ihrer Glieder betrachtet werden, die Reihen der zweiten Klasse nicht; ein Umstand, welcher von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts übersehen wurde, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil die Reihen, welche nach steigenden Potenzen einer veränderlichen Grösse fortschreiten, allgemein zu reden (d. h. einzelne Werthe dieser Grösse ausgenommen), zur ersten Klasse gehören.

Die *Fourier*'sche Reihe gehört nun offenbar nicht nothwendig zur ersten Klasse; ihre Convergenz konnte also gar nicht, wie *Cauchy* vergeblich[27] versucht hatte, aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder abnehmen, abgeleitet werden. Es musste vielmehr gezeigt werden, dass die endliche Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\sin x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha\sin 2x + \cdots$$

[27]Dirichlet in Crelle's Journal. Bd. IV. pag. 158. Quoi qu'il en soit de cette première observation,... à mesure que n croît.

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha \sin nx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha\cos x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha\, d\alpha\cos 2x + \cdots$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha\cos nx,$$

oder, was dasselbe ist, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}\, d\alpha$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, dem Werthe $f(x)$ unendlich annähert.

Dirichlet stützt diesen Beweis auf die beiden Sätze:

1) Wenn $0 < c \leqq \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int\limits_{0}^{c} \varphi(\beta)\dfrac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth $\dfrac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2) wenn $0 < b < c \leqq \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int\limits_{b}^{c} \varphi(\beta)\dfrac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\, d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth 0,

vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(\beta)$ zwischen den Grenzen dieser Integrale entweder immer abnimmt, oder immer zunimmt.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze lässt sich, wenn die Function f nicht unendlich oft vom Zunehmen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Zunehmen übergeht, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}\, d\alpha$$

offenbar in eine *endliche* Anzahl von Gliedern zerlegen, von denen eins[28] gegen $\frac{1}{2}f(x+0)$, ein anderes gegen $\frac{1}{2}f(x-0)$, die übrigen aber gegen 0 convergiren, wenn n ins Unendliche wächst.

[28]Es ist nicht schwer zu beweisen, dass der Werth einer Function f, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, stets, sowohl wenn der Argumentwerth abnehmend, als wenn er zunehmend gleich x wird, entweder festen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ (nach Dirichlet's Bezeichnung in Dove's Repertorium der Physik. Bd. 1. pag. 170) sich nähern, oder unendlich gross werden müsse.

Hieraus folgt, dass durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholende Function darstellbar ist, welche

1) durchgehends eine Integration zulässt,

2) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und

3) wo ihr Werth sich sprungweise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt.

Eine Function, welche die ersten beiden Eigenschaften hat, die dritte aber nicht, kann durch eine trigonometrische Reihe offenbar nicht dargestellt werden; denn die trigonometrische Reihe, die sie ausser den Unstetigkeiten darstellt, würde in den Unstetigkeitspunkten selbst von ihr abweichen. Ob und wann aber eine Function, welche die ersten beiden Bedingungen nicht erfüllt, durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, bleibt durch diese Untersuchung unentschieden.

Durch die Arbeit *Dirichlet*'s ward einer grossen Menge wichtiger analytischer Untersuchungen eine feste Grundlage gegeben. Es war ihm gelungen, indem er den Punkt, wo *Euler* irrte, in volles Licht brachte, eine Frage zu erledigen, die so viele ausgezeichnete Mathematiker seit mehr als siebzig Jahren (seit dem Jahre 1753) beschäftigt hatte. In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war sie vollkommen erledigt, denn so gross auch unsere Unwissenheit darüber ist, wie sich die Kräfte und Zustände der Materie nach Ort und Zeit um Unendlichkleinen ändern, so können wir doch sicher annehmen, dass die Functionen, auf welche sich die *Dirichlet*'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen.

Dessenungeachtet scheinen diese von *Dirichlet* unerledigten Fälle aus einem zweifachen Grunde Beachtung zu verdienen.

Erstlich steht, wie *Dirichlet* selbst am Schluss seiner Abhandlung bemerkt, dieser Gegenstand mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung und kann dazu dienen, diese Principien zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen. In dieser Beziehung hat die Behandlung desselben ein unmittelbares Interesse.

Zweitens aber ist die Anwendbarkeit der *Fourier*'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt; sie ist jetzt auch in einem Gebiet der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Functionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe *Dirichlet* nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.

Am Schlusse seiner Abhandlung verspricht freilich *Dirichlet*, später auf diese Fälle zurückzukommen, aber dieses Versprechen ist bis jetzt unerfüllt geblieben. Auch die Arbeiten von *Dirksen* und *Bessel* über die Cosinus- und Sinusreihen leisten diese Ergänzung nicht; sie stehen vielmehr der *Dirichlet*'schen an Strenge und Allgemeinheit nach. Der mit ihr fast ganz gleichzeitige Aufsatz *Dirksen*'s[29], welcher offenbar ohne Kenntniss derselben geschrieben ist, schlägt zwar im Allgemeinen einen richtigen Weg ein, enthält aber im Einzelnen einige Ungenauigkeiten. Denn abgesehen davon, dass er in einem speciellen Falle[30] für die Summe der Reihe ein falsches Resultat findet, stützt er sich in einer Nebenbetrachtung auf eine nur in besonderen Fällen mögliche Reihenentwicklung[31], so dass sein Beweis nur für Functionen mit überall endlichen ersten Differentialquotienten vollständig ist. *Bessel*[32] sucht den *Dirichlet*'schen Beweis zu vereinfachen. Aber die Aenderungen in diesem Beweise gewähren keine wesentliche Vereinfachung in den Schlüssen, sondern dienen höchstens dazu, ihn in geläufigere Begriffe zu kleiden, während seine Strenge und Allgemeinheit beträchtlich darunter leidet.

Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheoreme *Dirichlet*'s zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die *Fourier*'sche Coefficientenbestimmung nicht anwendbar. Der im Folgenden, wo diese Frage ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function untersucht werden soll, eingeschlagene Weg ist hierdurch, wie man sehen wird, bedingt; ein so directer Weg, wie der *Dirichlet*'s, ist der Natur der Sache nach nicht möglich.

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots,$ $b - x_{n-1}$ durch δ_n

[29] Crelle's Journal. Bd. IV. p. 170.

[30] l. c. Formel 22.

[31] l. c. Art. 3.

[32] Schumacher. Astronomische Nachrichten. Nro. 374 (Bd. 16. p. 229)

und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$\begin{aligned} S &= \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3) + \cdots \\ &\quad + \delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n) \end{aligned}$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ keine Bedeutung. Man hat jedoch in mehreren Fällen versucht, diesem Zeichen auch dann eine Bedeutung beizulegen, und unter diesen Erweiterungen des Begriffs eines bestimmten Integrals ist *eine* von allen Mathematikern angenommen. Wenn nämlich die Function $f(x)$ bei Annaherung des Arguments an einen einzelnen Werth c in dem Intervalle (a, b) unendlich gross wird, so kann offenbar die Summe S, welchen Grad von Kleinheit man auch den δ vorschreiben möge, jeden beliebigen Werth erhalten; sie hat also keinen Grenzwerth, und $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ würde nach dem Obigen keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann

$$\int\limits_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$$

sich, wenn α_1 und α_2 unendlich klein werden, einer festen Grenze nähert, so versteht man unter $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ diesen Grenzerth.

Andere Festsetzungen von *Cauchy* über den Begriff des bestimmten Integrales in den Fällen, wo es dem Grundbegriffe nach ein solches nicht giebt, mögen für einzelne Klassen von Untersuchungen zweckmässig sein; sie sind indess nicht allgemein eingeführt und dazu, schon wegen ihrer grossen Willkürlichkeit, wohl kaum geeignet.

5.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Wir betrachten zunächst den Integralbegriff im engern Sinne, d. h. wir setzen voraus, dass die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1, d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1, zwischen x_1 und x_2 durch $D_2 \ldots$, zwischen x_{n-1} und b durch D_n, so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an, dass, so lange sämmtliche δ kleiner als d bleiben, der grösste Werth, den diese Summe erhalten kann, Δ sei; Δ wird alsdann eine Function von d sein, welche mit d immer abnimmt und mit dieser Grösse unendlich klein wird. Ist nun die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als σ sind, $= s$, so wird der Beitrag dieser Intervalle zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ offenbar $\geqq \sigma s$. Man hat daher

$$\sigma s \overline{\overline{<}} \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \overline{\overline{<}} \Delta, \text{ folglich } s \overline{\overline{<}} \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\dfrac{\Delta}{\sigma}$ kann nun, wenn σ gegeben ist, immer durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden; dasselbe gilt daher von s, und es ergiebt sich also:

Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ, sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

Denn diejenigen Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, liefern zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ einen Beitrag, kleiner als s, multiplicirt in die grösste Schwankung der Function zwischen a und b, welche (n. V.) endlich ist; die übrigen Intervalle einen Beitrag $< \sigma(b - a)$. Offenbar kann man nun erst σ beliebig klein annehmen und dann immer noch die Grösse der Intervalle (n. V.) so bestimmen, dass auch s beliebig klein wird, wodurch der Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ jede beliebige Kleinheit gegeben, und folglich der Werth der Summe S in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann.

Wir haben also Bedingungen gefunden, welche nothwendig und hinreichend sind, damit die Summe S bei unendlichem Abnehmen der Grössen δ convergire und also im engern Sinne von einem Integrale der Function $f(x)$ zwischen a und b die Rede sein könne.

Wird nun der Integralbegriff wie oben erweitert, so ist offenbar, damit die Integration durchgehends möglich sei, die letzte der beiden gefundenen Bedingungen auch dann noch nothwendig; an die Stelle der Bedingung, dass die Function immer endlich sei, aber tritt die Bedingung, dass die Function *nur* bei Annäherung des Arguments an *einzelne* Werthe unendlich werde, und dass sich ein bestimmter Grenzwerth ergebe, wenn die Grenzen der Integration diesen Werthen unendlich genähert werden.

6.

Nachdem wir die Bedingungen für die Möglichkeit eines bestimmten Integrals im Allgemeinen d. h. ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der zu integrirenden Function, untersucht haben, soll nun diese Untersuchung in besondern Fällen theils angewandt, theils weiter ausgeführt werden, und zwar zunächst für die Functionen, welche zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft unstetig sind.

Da diese Functionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmte Beispiele auszugehen. Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null, ferner durch n eine ganze, durch p eine ungerade Zahl und bilde alsdann die Reihe

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn};$$

so convergirt, wie leicht zu sehen, diese Reihe für jeden Werth von x; ihr Werth nähert sich, sowohl, wenn der Argumentwerth stetig abnehmend, als wenn er stetig zunehmend gleich x wird, stets einem festen Grenzwerth, und zwar ist, wenn $x = \dfrac{p}{2n}$ (wo p, n relative Primzahlen)

$$\begin{aligned} f(x+0) &= f(x) - \frac{1}{2nn}(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \cdots) = f(x) - \frac{\pi\pi}{16nn}, \\ f(x-0) &= f(x) + \frac{1}{2nn}(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \cdots) = f(x) + \frac{\pi\pi}{16nn}, \end{aligned}$$

sonst aber überall $f(x+0) = f(x)$, $f(x-0) = f(x)$.

Diese Function ist also für jeden rationalen Werth von x, der in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ein Bruch mit geradem Nenner ist, unstetig, also zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft, so jedoch, dass die Zahl der Sprünge, welche grösser als eine gegebene Grösse sind, immer endlich ist. Sie lässt durchgehends eine Integration zu. In der That genügen hierzu neben ihrer Endlichkeit die beiden Eigenschaften, dass sie für jeden Werth von x beiderseits einen Grenzwerth $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hat, und dass die Zahl der Sprünge, welche grösser oder gleich einer gegebenen Grösse σ sind, stets endlich ist. Denn wenden wir unsere obige Untersuchung an, so lässt sich offenbar in Folge dieser beiden Umstände d stets so klein annehmen, dass in sämmtlichen Intervallen, welche diese Sprünge nicht enthalten, die Schwankungen kleiner als σ sind, und dass die Gesammtgrösse der Intervalle, welche diese Sprünge enthalten, beliebig klein wird.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Functionen, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima haben (zu welchen übrigens die eben betrachtete nicht gehört), wo sie nicht unendlich werden, stets diese beiden Eigenschaften besitzen und daher allenthalben, wo sie nicht unendlich werden, eine Integration zulassen, wie sich auch leicht direct zeigen lässt.

Um jetzt den Fall, wo die zu integrirende Function $f(x)$ für einen einzelnen Werth unendlich gross wird, näher in Betracht zu ziehen, nehmen wir an, dass dies für $x=0$ stattfinde, so dass bei abnehmendem positiven x ihr Werth zuletzt über jede gegebene Grenze wächst.

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $xf(x)$ bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze a an, nicht fortwährend grösser als eine endliche Grösse c bleiben könne. Denn dann wäre

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

also grösser als $c\left(\log\frac{1}{x}-\log\frac{1}{a}\right)$, welche Grösse mit abnehmendem x zuletzt in's Unendliche wächst. Es muss also $xf(x)$, wenn diese Function nicht in der Nähe von $x=0$ unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig mit x unendlich klein werden, damit $f(x)$ einer Integration fähig sein könne. Wenn andererseits

$$f(x)x^\alpha = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d(x^{1-\alpha})}$$

bei einem Werth von $\alpha<1$ mit x unendlich klein wird, so ist klar, dass das Integral bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergirt.

Ebenso findet man, dass im Falle der Convergenz des Integrals die Functionen

$$f(x)x\log\frac{1}{x} \quad = \quad \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},$$

$$
\begin{aligned}
f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} &= \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\log\dfrac{1}{x}}\cdots,\\
f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^{n}\frac{1}{x} &= \frac{f(x)\,dx}{-d\log^{1+n}\dfrac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

nicht bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze an fortwährend grösser als eine endliche Grösse bleiben können, und also, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, mit x unendlich klein werden müssen; dass dagegen das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire, sobald

$$
f(x)x\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^{n}\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{-d\left(\log^{n}\dfrac{1}{x}\right)^{1-\alpha}}
$$

für $\alpha > 1$ mit x unendlich klein wird.

Hat aber die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima, so lässt sich über die Ordnung ihres Unendlichwerdens nichts bestimmen. In der That, nehmen wir an, die Function sei ihrem absoluten Werthe nach, wovon die Ordnung des Unendlichwerdens allein abhängt, gegeben, so wird man immer durch geeignete Bestimmung des Zeichens bewirken können, dass das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire. Als Beispiel einer solchen Function, welche unendlich wird und zwar so, dass ihre Ordnung (die Ordnung von $\frac{1}{x}$ als Einheit genommen) unendlich gross ist, mag die Function

$$
\frac{d\left(x\cos e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\sin e^{\frac{1}{x}}
$$

dienen.

Das möge über diesen im Grunde in ein anderes Gebiet gehörigen Gegenstand genügen; wir gehen jetzt an unsere eigentliche Aufgabe, eine allgemeine Untersuchung über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Untersuchung der Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function.

7.

Die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand hatten den Zweck, die *Fourier*'sche Reihe für die in der Natur vorkommenden Fälle zu beweisen; es konnte daher der Beweis für eine ganz willkürlich angenommene Function begonnen, und später der Gang der Function behufs des Beweises willkürlichen Beschränkungen unterworfen werden, wenn sie nur jenen Zweck nicht beeinträchtigten. Für unsern Zweck darf darselbe nur den zur Darstellbarkeit der Function nothwendigen Bedingungen unterworfen werden; es müssen daher zunächst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Function diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die *Fourier*'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments?

Demnach betrachten wir die Reihe

$$\begin{aligned} &a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ +\tfrac{1}{2}b_0 + {}&b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots \end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}b_0 = A_0, \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1, \quad a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \cdots$$

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt.

Zur Convergenz einer Reihe ist nothwendig, dass ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n in's Unendliche abnehmen, so werden die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein; andernfalls kann dies nur für besondere Werthe von x stattfinden. Es ist nöthig, beide Fälle getrennt zu behandeln.

8.

Wir setzen also zunächst voraus, dass die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden.

Unter dieser Voraussetzung convergirt die Reihe

$$C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \ldots = F(x),$$

welche man aus Ω durch zweimalige Integration jedes Gliedes nach x erhält, für jeden Werth von x. Ihr Werth $F(x)$ ändert sich mit x stetig, und diese Function F von x lässt folglich allenthalben eine Integration zu.

Um beides—die Convergenz der Reihe und die Stetigkeit der Function $F(x)$—einzusehen, bezeichne man die Summe der Glieder bis $-\frac{A_n}{nn}$ einschliesslich durch N, den Rest der Reihe, d. h. die Reihe

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{A_{n+2}}{(n+2)^2} - \cdots$$

durch R und den grössten Werth von A_m für $m > n$ durch ε. Alsdann bleibt der Werth von R, wie weit man diese Reihe fortsetzen möge, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$< \varepsilon \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

und kann also in beliebig kleine Grenzen eingeschlossen werden, wenn man n nur hinreichend gross annimmt; folglich convergirt die Reihe. Ferner ist die Function $F(x)$ stetig; d. h. ihrer Aenderung kann jede Kleinheit gegeben werden, wenn man der entsprechenden Aenderung von x eine hinreichende Kleinheit vorschreibt. Denn die Aenderung von $F(x)$ setzt sich zusammen aus der Aenderung von R und von N; offenbar kann man nun erst n so gross annehmen, dass R, was auch x sei, und folglich auch die Aenderung von R für jede Aenderung von x beliebig klein wird, und dann die Aenderung von x so klein annehmen, dass auch die Aenderung von N beliebig klein wird.

Es wird gut sein, einige Sätze über diese Function $F(x)$, deren Beweise den Faden der Untersuchung unterbrechen würden, voraufzuschicken.

Lehrsatz 1. Falls die Reihe Ω convergirt, convergirt

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen denselben Werth wie die Reihe.

In der That wird

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

$$= A_0 + A_1 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin\beta}{\beta} + A_2 \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \frac{\sin 2\beta}{2\beta} + A_3 \frac{\sin 3\alpha}{3\alpha} \frac{\sin 3\beta}{3\beta} + \cdots$$

oder, um den einfacheren Fall, wo $\beta = \alpha$, zuerst zu erledigen,

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha} = A_0 + A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2 + \cdots$$

Ist die unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = f(x),$$

die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} = f(x) + \varepsilon_n,$$

so muss sich für eine beliebig gegebene Grösse δ ein Werth m von n angeben lassen, so dass, wenn $n > m$, $\varepsilon_n < \delta$ wird. Nehmen wir nun α so klein an, dass $m\alpha < \pi$, setzen wir mittelst der Substitution

$$A_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n,$$

$\sum\limits_{0,\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n$ in die Form

$$f(x) + \sum_{1,\infty}\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\},$$

und theilen wir diese letztere unendliche Reihe in drei Theile, indem wir

1) die Glieder vom Index 1 bis m einschliesslich,

2) vom Index $m+1$ bis zur grössten unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegenden ganzen Zahl, welche s sei,

3) von $s+1$ bis unendlich,

zusammenfassen, so besteht der erste Theil aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Gleider und kann daher seinem Grenzwerth 0 beliebig genähert werden, wenn man α hinreichend klein werden lässt; der zweite Theil ist, da der Factor von ε_n beständig positiv ist, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$< \delta\left\{\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right\};$$

um endlich den dritten Theil in Grenzen einzuschliessen, zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

und

$$\varepsilon_n \left\{ \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right\} = -\varepsilon_n \frac{\sin(2n-1)\alpha \, \sin\alpha}{(n\alpha)^2};$$

so leuchtet ein, dass es

$$< \delta \left\{ \frac{1}{(n-1)^2\alpha\alpha} - \frac{1}{nn\alpha\alpha} \right\} + \delta \frac{1}{nn\alpha}$$

und folglich die Summe von $n = s+1$ bis $n = \infty$

$$< \delta \left\{ \frac{1}{(s\alpha)^2} + \frac{1}{s\alpha} \right\},$$

welcher Werth für ein unendlich kleines α in

$$\delta \left\{ \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{\pi} \right\} \text{ übergeht.}$$

Die Reihe

$$\sum \varepsilon_n \left\{ \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right\},$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwerth, der nicht grösser als

$$\delta \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi\pi} \right\}$$

sein kann, also Null sein muss, und folglich convergirt

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha},$$

welches

$$= f(x) + \sum \varepsilon_n \left\{ \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right\},$$

mit in's Unendliche abnehmendem α gegen $f(x)$, wodurch unser Satz für den Fall $\beta = \alpha$ bewiesen ist.

Um ihn allgemein zu beweisen, sei

$$\begin{aligned} F(x+\alpha+\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha-\beta) &= (\alpha+\beta)^2(f(x)+\delta_1) \\ F(x+\alpha-\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha+\beta) &= (\alpha-\beta)^2(f(x)+\delta_2), \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)\\ =4\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)^2\delta_1-(\alpha-\beta)^2\delta_2.\end{aligned}$$

In Folge des eben Bewiesenen werden nun δ_1 und δ_2 unendlich klein, sobald α und β unendlich klein werden; es wird also auch

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_2$$

unendlich klein, wenn dabei die Coefficienten von δ_1 und δ_2 nicht unendlich gross werden, was nicht stattfindet, wenn zugleich $\dfrac{\beta}{\alpha}$ endlich bleibt; und folglich convergirt alsdann

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

gegen $f(x)$, w. z. b. w.

Lehrsatz 2.
$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$
wird stets mit α unendlich klein.

Um dieses zu beweisen, theile man die Reihe

$$\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

in drei Gruppen, von welchen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an A_n immer kleiner als ε bleibt, die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha \overline{\overline{<}}$ als eine feste Grösse c ist, die dritte den Rest der Reihe umfasst. Es ist dann leicht zu sehen, dass, wenn α in's Unendliche abnimmt, die Summe der ersten endlichen Gruppe endlich bleibt, d. h. $<$ eine feste Grösse Q; die der zweiten $<\varepsilon\dfrac{c}{\alpha}$, die der dritten

$$<\varepsilon\sum_{c<n\alpha}\frac{1}{nn\alpha\alpha}<\frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Folglich bleibt

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha},\ \text{welches } =2\alpha\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$

$$<2\left(Q\alpha+\varepsilon\left(c+\frac{1}{c}\right)\right),$$

woraus der z. b. Satz folgt.

Lehrsatz 3. Bezeichnet man durch b und c zwei beliebige Constanten, die grössere durch c, und durch $\lambda(x)$ eine Function, welche nebst ihrem ersten Differentialquotienten zwischen b und c immer stetig ist und an den Grenzen gleich Null wird, und von welcher der zweiter Differentialquotient nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so wird das Integral

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

wenn μ in's Unendliche wächst, zuletzt kleiner als jede gegebene Grösse.

Setzt man für $F(x)$ seinen Ausdruck durch die Reihe, so erhält man für

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

die Reihe (Φ)

$$\begin{aligned}\mu\mu\int_b^c \left(C+C'x+A_0\frac{xx}{2}\right)&\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx\\ -\sum_{1,\infty}\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c &A_n\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nun lässt sich $A_n\cos\mu(x-a)$ offenbar als ein Aggregat von

$$\cos(\mu+n)(x-a),\ \ \sin(\mu+n)(x-a),\ \ \cos(\mu-n)(x-a),\ \ \sin(\mu-n)(x-a)$$

ausdrücken, und bezeichnet man in demselben die Summe der beiden ersten Glieder durch $B_{\mu+n}$, die Summe der beiden letzten Glieder durch $B_{\mu-n}$, so hat man $\cos\mu(x-a)A_n = B_{\mu+n}+B_{\mu-n}$,

$$\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}=-(\mu+n)^2B_{\mu+n},\quad \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}=-(\mu-n)^2B_{\mu-n},$$

und es werden $B_{\mu+n}$ und $B_{\mu-n}$ mit wachsendem n, was auch x sei, zuletzt unendlich klein.

Das allgemeine Glied der Reihe (Φ)

$$-\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c A_n\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

wird daher

$$=\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx+\frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx,$$

oder durch zweimalige partielle Integration, indem man zuerst $\lambda(x)$, dann $\lambda'(x)$ als constant betrachtet,

$$= \frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int\limits_b^c B_{\mu+n}\lambda''(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int\limits_b^c B_{\mu-n}\lambda''(x)\,dx,$$

da $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ und daher auch die aus dem Integralzeichen tretenden Glieder an den Grenzen $= 0$ werden.

Man überzeugt sich nun leicht, dass $\int\limits_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx$, wenn μ in's Unendliche wächst, was auch n sei, unendlich klein wird; denn dieser Ausdruck ist gleich einem Aggregat der Integrale

$$\int\limits_b^c \cos(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx, \quad \int\limits_b^c \sin(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx,$$

und wenn $\mu\pm n$ unendlich gross wird, so werden diese Integrale, wenn aber nicht, weil dann n unendlich gross wird, ihre Coefficienten in diesem Ausdrucke unendlich klein.

Zum Beweise unseres Satzes genügt es daher offenbar, wenn von der Summe

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2}$$

über alle ganzen Werthe von n ausgedehnt, welche den Bedingungen $n < -c'$, $c'' < n < \mu - c'''$, $\mu + c^{\mathrm{IV}} < n$ genügen, für irgend welche positive Werthe der Grössen c gezeigt wird, dass sie, wenn μ unendlich gross wird, endlich bleibt. Denn abgesehen von den Gliedern, für welche $-c' < n < c''$, $\mu - c''' < n < \mu + c^{\mathrm{IV}}$, welche offenbar unendlich klein werden und von endlicher Anzahl sind, bleibt die Reihe (Φ) offenbar kleiner als diese Summe, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $\int\limits_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx$, welcher unendlich klein wird.

Nun ist aber, wenn die Grössen $c > 1$ sind, die Summe

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1-\frac{n}{\mu}\right)^2\left(\frac{n}{\mu}\right)^2},$$

in den obigen Grenzen, kleiner als

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{(1-x)^2 x^2},$$

ausgedehnt von

$$-\infty \text{ bis } -\frac{c'-1}{\mu}, \quad \frac{c''-1}{\mu} \text{ bis } 1-\frac{c'''-1}{\mu}, \quad 1+\frac{c^{\mathrm{IV}}-1}{\mu} \text{ bis } \infty;$$

denn zerlegt man das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ von Null anfangend in Intervalle von der Grösse $\frac{1}{\mu}$, und ersetzt man überall die Function unter dem Integralzeichen durch den kleinsten Werth in jedem Intervall, so erhält man, da diese Function zwischen den Integrationsgrenzen nirgends ein Maximum hat, sämmtliche Glieder der Reihe.

Führt man die Integration aus, so erhält man

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+2\log x - 2\log(1-x)\Big) + \text{const.}$$

und folglich zwischen den obigen Grenzen einen Werth, der mit μ nicht unendlich gross wird.

9.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden, Folgendes feststellen:

I. Wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, darstellbar sein soll, so muss es eine stetige Function $F(x)$ geben, von welcher $f(x)$ so abhängt, dass

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β unendlich klein werden und dabei ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen $f(x)$ convergirt.

Es muss ferner

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx,$$

wenn $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals $=0$ und zwischen denselben immer stetig sind und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden.

II. Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt.

Denn bestimmt man die Grössen C', A_0 so, dass

$$F(x) - C'x - A_0 \frac{xx}{2}$$

eine nach dem Intervall 2π periodisch wiederkehrende Function ist und entwickelt diese nach *Fourier*'s Methode in die trigonometrische Reihe

$$C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots,$$

indem man

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(F(t) - C't - A_0 \frac{tt}{2} \right) dt = C,$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(F(t) - C't - A_0 \frac{tt}{2} \right) \cos n(x-t)\, dt = -\frac{A_n}{nn}$$

setzt, so muss (n. V.)

$$A_n = -\frac{nn}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(F(t) - C't - A_0 \frac{tt}{2} \right) \cos n(x-t)\, dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werden; woraus nach Satz 1 des vorigen Art. folgt, dass die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

überall, wo sie convergirt, gegen $f(x)$ convergirt.

III. Es sei $b < x < c$, und $\varrho(t)$ eine solche Function, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ für $t = b$ und $t = c$ den Werth 0 haben und zwischen diesen Werthen stetig sich ändern, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und dass ferner für $t = x$ $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho^{\mathrm{IV}}(t)$ aber endlich und stetig sind; so wird der Unterschied zwischen der Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{b}^{c} F(t) \frac{dd \dfrac{\sin \dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \dfrac{(x-t)}{2}}}{dt^2} \varrho(t)\, dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein. Die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

wird daher convergiren oder nicht convergiren, je nachdem

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_b^c F(t)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)\,dt$$

sich mit wachsendem n zuletzt einer festen Grenze nähert oder dies nicht stattfindet.

In der That wird

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t)\,dt,$$

oder, da

$$2\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t) = 2\sum_{1,n}\frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2} = \frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}$$

ist,

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Nun wird aber nach Satz 3 des vorigen Art.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\lambda(t)\,dt$$

bei unendlichem Zunehmen von n unendlich klein, wenn $\lambda(t)$ nebst ihrem ersten Differentialquotienten stetig ist, $\lambda''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t = x$ $\lambda(t) = 0$, $\lambda'(t) = 0$, $\lambda''(t) = 0$, $\lambda'''(t)$ und $\lambda^{\mathrm{IV}}(t)$ aber endlich und stetig sind.

Setzt man hierin $\lambda(t)$ ausserhalb der Grenzen b, c gleich 1 und zwischen diesen Grenzen $= 1 - \varrho(t)$, was offenbar verstattet ist, so folgt, dass die Differenz zwischen der Reihe $A_1 + \cdots + A_n$ und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_b^c \left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right) \frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_b^c \left(C't + A_0\frac{tt}{2}\right) \frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)\,dt$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_0 convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

10.

Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe Ω zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes.

Ob nun die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, wird in vielen Fällen nicht aus ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale, sondern auf anderm Wege entschieden werden müssen. Es verdient indess *ein* Fall hervorgehoben zu werden, wo sich dies unmittelbar aus der Natur der Function entscheiden lässt, wenn nämlich die Function $f(x)$ durchgehends endlich bleibt und eine Integration zulässt.

In diesem Falle muss, wenn man das ganze Intervall von $-\pi$ bis π der Reihe nach in Stücke von der Grösse $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ zerlegt, und durch D_1 die grösste Schwankung der Function im ersten, durch D_2 im zweiten, u. s. w. bezeichnet,

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \cdots$$

unendlich klein werden, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden.

Zerlegt man aber das Integral $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx$, in welcher Form von dem Factor $\dfrac{1}{\pi}$ abgesehen die Coefficienten der Reihe enthalten sind, oder was dasselbe ist, $\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx$ von $x = a$ anfangend in Integrale vom Umfange $\dfrac{2\pi}{n}$, so liefert jedes derselben zur Summe einen Beitrag kleiner als $\dfrac{2}{n}$, multiplicirt mit der grössten Schwankung in seinem Intervall, und ihre Summe ist also kleiner als eine Grösse, welche n. V. mit $\dfrac{2\pi}{n}$ unendlich klein werden muss.

In der That: diese Integrale haben die Form

$$\int\limits_{a+\frac{s}{n}2\pi}^{a+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx.$$

Der Sinus wird in der ersten Hälfte positiv, in der zweiten negativ. Bezeichnet man also den grössten Werth von $f(x)$ in dem Intervall des Integrals durch M, den kleinsten durch m, so ist einleuchtend, dass man das Integral vergrössert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch M, in der zweiten durch m ersetzt, dass man aber das Integral verkleinert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch m und in der zweiten durch M ersetzt. Im ersteren Falle aber erhält man den Werth $\dfrac{2}{n}(M-m)$, im letzteren $\dfrac{2}{n}(m-M)$. Es ist daher dies Integral abgesehen vom Zeichen kleiner als $\dfrac{2}{n}(M-m)$ und das Integral

$$\int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\,dx$$

kleiner als

$$\frac{2}{n}(M_1 - m_1) + \frac{2}{n}(M_2 - m_2) + \frac{2}{n}(M_3 - m_3) + \cdots,$$

wenn man durch M_s den grössten, durch m_s den kleinsten Werth von $f(x)$ im s ten Intervall bezeichnet; diese Summe aber muss, wenn $f(x)$ einer Integration fähig ist, unendlich klein werden, sobald n unendlich gross und also der Umfang der Intervalle $\dfrac{2\pi}{n}$ unendlich klein wird.

In dem vorausgesetzten Falle werden daher die Coefficienten der Reihe unendlich klein.

11.

Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, wo die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, ohne dass dies für jeden Argumentwerth stattfindet. Dieser Fall lässt sich auf den vorigen zurückführen.

Wenn man nämlich in den Reihen für den Argumentwerth $x+t$ und $x-t$ die Glieder gleichen Ranges addirt, so erhält man die Reihe

$$2A_0 + 2A_1 \cos t + 2A_2 \cos 2t + \cdots,$$

in welcher die Glieder für jeden Werth von t zuletzt unendlich klein werden und auf welche also die vorige Untersuchung angewandt werden kann.

Bezeichnet man zu diesem Ende den Werth der unendlichen Reihe

$$C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} + A_0 \frac{tt}{2} - A_1 \frac{\cos t}{1} - A_2 \frac{\cos 2t}{4} - A_3 \frac{\cos 3t}{9} - \cdots$$

durth $G(t)$, so dass $\dfrac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ überall, wo die Reihen für $F(x+t)$ und $F(x-t)$ convergiren, $= G(t)$ ist, so ergiebt sich Folgendes:

I. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so muss

$$\mu\mu \int_b^c G(t) \cos \mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt,$$

wenn λ eine Function wie oben—Art. 9—bezeichnet, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden. Der Werth dieses Integrals setzt sich zusammen aus den beiden Bestandtheilen $\mu\mu \int_b^c \dfrac{F(x+t)}{2} \cos \mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt$ und $\mu\mu \int_b^c \dfrac{F(x-t)}{2} \cos \mu(t-a)\, \lambda(t)\, dt$, wofern diese Ausdrücke einen Werth haben. Das Unendlichkleinwerden desselben wird daher bewirkt durch das Verhalten der Function F an zwei symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen. Es ist aber zu bemerken, dass hier Stellen vorkommen müssen, wo jeder Bestandtheil für sich nicht unendlich klein wird; denn sonst würden die Glieder der Reihe für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden. Es müssen also dann die Beiträge der symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen einander aufheben, so dass ihre Summe für ein unendliches μ unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Reihe Ω nur für solche Werthe der Grösse x convergiren kann, zu welchen die Stellen, wo nicht

$$\mu\mu \int\limits_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

für ein unendliches μ unendlich klein wird, symmetrisch liegen. Offenbar kann daher nur dann, wenn die Anzahl dieser Stellen unendlich gross ist, die trigonometrische Reihe mit nicht in's Unendliche abnehmenden Coefficienten für eine unendliche Anzahl von Argumentwerthen convergiren.

Umgekehrt ist

$$A_n = -nn\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(G(t) - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos nt\,dt$$

und wird also mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn

$$\mu\mu \int\limits_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt$$

für ein unendliches μ immer unendlich klein wird.

II. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so hängt es nur von dem Gange der Function $G(t)$ für ein unendlich kleines t ab, ob die Reihe convergirt oder nicht, und zwar wird der Unterschied zwischen

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

und dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^b G(t)\frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn b eine zwischen 0 und π enthaltene noch so kleine Constante und $\varrho(t)$ eine solche Function bezeichnet, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ immer stetig und für $t = b$ gleich Null sind, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t = 0$, $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho''''(t)$ aber endlich und stetig sind.

12.

Die Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe können freilich noch etwas beschränkt und dadurch unsere

Untersuchungen ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function noch etwas weiter geführt werden. So z. B. kann in dem zuletzt erhaltenen Satze die Bedingung, dass $\varrho''(0) = 0$ sei, weggelassen werden, wenn man in dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)\,dt$$

$G(t)$ durch $G(t) - G(0)$ ersetzt. Es wird aber dadurch nichts Wesentliches gewonnen.

Indem wir uns daher zur Betrachtung besonderer Fälle wenden, wollen wir zunächst der Untersuchung für eine Function, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, diejenige Vervollständigung zu geben suchen, deren sie nach den Arbeiten *Dirichlet*'s noch fähig ist.

Es ist oben bemerkt, dass eine solche Function allenthalben integrirt werden kann, wo sie nicht unendlich wird, und es ist offenbar, dass dies nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen eintreten kann. Auch lässt der Beweis *Dirichlet*'s, dass in dem Integralausdrucke für das n te Glied der Reihe und für die Summe ihrer n ersten Glieder der Beitrag aller Strecken mit Ausnahme derer, wo die Function unendlich wird, und der dem Argumentwerth der Reihe unendlich nahe liegenden mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird, und dass

$$\int_x^{x+b} f(t)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt,$$

wenn $0 < b < \pi$ und $f(t)$ zwischen den Grenzen des Integrals nicht unendlich wird, für ein unendliches n gegen $\pi f(x+0)$ convergirt, in der That nichts zu wünschen übrig, wenn man die unnöthige Voraussetzung, dass die Function stetig sei, weglässt. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, in welchen Fällen in diesen Integralausdrücken der Beitrag der Stellen, wo die Function unendlich wird, mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Diese Untersuchung ist noch nicht erledigt; sondern es ist nur gegentlich von *Dirichlet* gezeigt, dass dies stattfindet unter der Voraussetzung, dass die darzustellende Function eine Integration zulässt, was nicht nothwendig ist.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, die Function $F(x)$, deren zweiter

Differentialquotient $f(x)$ ist, endlich und stetig sein muss, und dass

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

mit α stets unendlich klein wird. Wenn nun $F'(x+t) - F'(x-t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so muss es, wenn t Null wird, gegen einen festen Grenzwerth L convergiren oder unendlich gross werden, und es ist offenbar, dass

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (F'(x+t) - F'(x-t))\, dt = \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

dann ebenfalls gegen L oder gegen ∞ convergiren muss und daher nur unendlich klein werden kann, wenn $F'(x+t) - F'(x-t)$ gegen Null convergirt. Es muss daher, wenn $f(x)$ für $x = a$ unendlich gross wird, doch immer $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden können. Dies reicht hin, damit

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^c \right) dx\ (f(x) \cos n(x-a))$$

mit abnehmendem ε convergire und mit wachsendem n unendlich klein werde. Weil ferner die Function $F(x)$ endlich und stetig ist, so muss $F'(x)$ bis an $x = a$ eine Integration zulassen und $(x-a)F'(x)$ mit $(x-a)$ unendlich klein werden, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat; woraus folgt, dass

$$\frac{d(x-a)F'(x)}{dx} = (x-a)f(x) + F'(x)$$

und also auch $(x-a)f(x)$ bis an $x = a$ integrirt werden kann. Es kann daher auch $\int f(x) \sin n(x-a)\, dx$ bis an $x = a$ integrirt werden, und damit die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, ist offenbar nur noch nöthig, dass

$$\int_b^c f(x) \sin n(x-a)\, dx, \text{ wo } b < a < c,$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werde. Setzt man

$$f(x)(x-a) = \varphi(x),$$

so ist, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, für ein unendliches n

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a}\sin n(x-a)\,dx = \pi\frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2},$$

wie *Dirichlet* gezeigt hat. Es muss daher

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t) = f(a+t)t - f(a-t)t$$

mit t unendlich klein werden, und da

$$f(a+t)+f(a-t)$$

bis an $t=0$ integrirt werden kann und folglich auch

$$f(a+t)t+f(a-t)t$$

mit t unendlich klein wird, so muss sowohl $f(a+t)t$, als $f(a-t)t$ mit abnehmenden t zuletzt unendlich klein werden. Von Functionen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, abgesehen, ist es also zur Darstellbarkeit der Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe mit in's Unendliche abnehmenden Coefficienten hinreichend und nothwendig, dass, wenn sie für $x=a$ unendlich wird, $f(a+t)t$ und $f(a-t)t$ mit t unendlich klein werden und $f(a+t)+f(a-t)$ bis an $t=0$ integrirt werden kann.

Durch eine trigonometrische Reihe, deren Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden, kann eine Function $f(x)$, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, da

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dt$$

nur für eine endliche Anzahl von Stellen für ein unendliches μ nicht unendlich klein wird, auch nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen dargestellt werden, wobei es unnöthig ist länger zu verweilen.

13.

Was die Functionen betrifft, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, so ist es wohl nicht überflüssig zu bemerken, dass eine Function $f(x)$, welche unendlich viele Maxima und Minima hat, einer Integration durchgehends fähig sein kann, ohne durch die *Fourier*'sche Reihe darstellbar zu sein. Dies findet z. B. statt, wenn $f(x)$ zwischen 0 und 2π gleich

$$\frac{d\left(x^\nu\cos\dfrac{1}{x}\right)}{dx}, \text{ und } 0<\nu<\tfrac{1}{2}$$

ist. Denn wird in dem Integral $\int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a)\, dx$ mit wachsendem n der Beitrag derjenigen Stelle, wo x nahe $= \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ ist, allgemein zu reden, zuletzt unendlich gross, so dass das Verhältniss dieses Integrals zu

$$\tfrac{1}{2} \sin\left(2\sqrt{n} - na + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\pi} n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

gegen 1 convergirt, wie man auf dem gleich anzugebenden Wege finden wird. Um dabei das Beispiel zu verallgemeinern, wodurch das Wesen der Sache mehr hervortritt, setze man

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) \cos\psi(x)$$

und nehme an, dass $\varphi(x)$ für ein unendlich kleines x unendlich klein und $\psi(x)$ unendlich gross werde, übrigens aber diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten stetig seien und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Es wird dann

$$f(x) = \varphi'(x) \cos\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x) \sin\psi(x)$$

und

$$\int f(x) \cos n(x-a)\, dx$$

gleich der Summe der vier Integrale

$$\tfrac{1}{2} \int \varphi'(x) \cos(\psi(x) \pm n(x-a))\, dx,$$

$$-\tfrac{1}{2} \int \varphi(x)\psi'(x) \sin(\psi(x) \pm n(x-a))\, dx.$$

Man betrache nun, $\psi(x)$ positiv genommen, das Glied

$$-\tfrac{1}{2} \int \varphi(x)\psi'(x) \sin(\psi(x) + n(x-a))\, dx$$

und untersuche in diesem Integrale die Stelle, wo die Zeichenwechsel des Sinus sich am langsamsten folgen. Setzt man

$$\psi(x) + n(x-a) = y,$$

so geschieht dies, wo $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ist, und also,

$$\psi'(\alpha) + n = 0$$

gesetzt, fur $x = \alpha$. Man untersuche also das Verhalten des Integrals

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx$$

für den Fall, dass ε für ein unendliches n unendlich klein wird, und führe hiezu y als Variable ein. Setzt man

$$\psi(\alpha) + n(\alpha - a) = \beta,$$

so wird für ein hinreichend kleines ε

$$y = \beta + \psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \cdots$$

und zwar ist $\psi''(\alpha)$ positiv, da $\psi(x)$ für ein unendlich kleines x positiv unendlich wird; es wird ferner

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

je nachdem $x - \alpha \gtrless 0$, und

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\left(\int\limits_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}^{\beta} - \int\limits_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\right)\left(\sin y\,\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}}\right)\frac{\varphi(a)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}} \\
&\qquad = -\int\limits_{0}^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}} \sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\frac{\varphi(a)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.
\end{aligned}$$

Lässt man also mit wachsendem n die Grösse ε so abnehmen, dass $\psi''(\alpha)\varepsilon\varepsilon$ unendlich gross wird, so wird, falls

$$\int\limits_0^{\infty} \sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

welches bekanntlich gleich ist $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, nicht Null ist, von Grössen niederer Ordnung abgesehen

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x) + n(x-a))\,dx = -\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}\varphi(a)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Es wird daher, wenn diese Grösse nicht unendlich klein wird, das Verhältniss von

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

zu dieser Grösse, da dessen übrige Bestandtheile unendlich klein werden, bei unendlich Zunehmen von n gegen 1 convergiren.

Nimmt man an, dass $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ für ein unendlich kleines x mit Potenzen von x von gleicher Ordnung sind und zwar $\varphi(x)$ mit x^ν und $\psi'(x)$ mit $x^{-\mu-1}$ so dass $\nu > 0$ und $\mu \geqq 0$ sein muss, so wird für ein unendliches n

$$\frac{\varphi(a)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

von gleicher Ordnung mit $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$ und daher nicht unendlich klein, wenn $\mu \geqq 2\nu$. Ueberhaupt aber wird, wenn $x\psi'(x)$ oder, was damit identisch ist, wenn $\dfrac{\psi(x)}{\log x}$ für ein unendlich kleines x unendlich gross ist, sich $\varphi(x)$ immer so annehmen lassen, dass für ein unendlich kleines x $\varphi(x)$ unendlich klein,

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\dfrac{1}{x\psi'(x)}}}$$

aber unendlich gross wird, und folglich $\int\limits_x f(x)\,dx$ bis an $x = 0$ erstreckt werden kann, während

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

für ein unendliches n nicht unendlich klein wird. Wie man sieht, heben sich in dem Integrale $\int\limits_x f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen von x die Zuwachse des Integrals, obwohl ihr Verhältniss zu den Aenderungen von x sehr rasch wächst, wegen des raschen Zeichenwechsels der Function $f(x)$ einander auf; durch das Hinzutreten des Factors $\cos n(x-a)$ aber wird hier bewirkt, dass diese Zuwachse sich summiren.

Ebenso wohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängigen Möglichkeit der Integration die *Fourier*'sche Reihe nicht convergiren und selbst ihr Glied zuletzt unendlich gross werden kann,—ebsenso wohl können trotz der durchgängigen Unmöglichkeit der Integration von $f(x)$ zwischen je zwei noch so nahen Werthen unendlich viele Werthe von x liegen, für welche die Reihe Ω convergirt.

Ein Beispiel liefert, (nx) in der Bedeutung, wie oben (Art. 6.) genommen, die durch die Reihe

$$\sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{n}$$

gegebene Function, welche für jeden rationalen Werth von x vorhanden ist und sich durch die triogonometrische Reihe

$$\sum_{1,\infty}{}^{n} \frac{\Sigma^{\theta} - (-1)^{\theta}}{n\pi} \sin 2nx\pi,$$

wo für θ alle Theiler von n zu setzen sind, darstellen lässt, welche aber in keinem noch so kleinen Grössenintervall zwischen endlichen Grenzen enthalten ist und folglich nirgends eine Integration zulässt.

Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man in den Reihen

$$\sum_{0,\infty} c_n \cos nnx, \quad \sum_{0,\infty} c_n \sin nnx,$$

fur $c_0, c_1, c_2, \ldots$ positive Grössen setzt, welche immer abnehmen und zuletzt unendlich klein werden, während $\sum_{1,n}^{s} c_s$ mit n unendlich gross wird. Denn wenn das Verhältniss von x zu 2π rational und in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, ein Bruch mit dem Nenner m ist, so werden offenbar diese Reihen convergiren oder in's Unendliche wachsen, je nachdem

$$\sum_{0,m-1} \cos nnx, \quad \sum_{0,m-1} \sin nnx$$

gleich Null oder nicht gleich Null sind. Beide Fälle aber treten nach einem bekannten Theoreme der Kreistheilung[33] zwischen je zwei noch so engen Grenzen für unendlich viele Werthe von x ein.

In einem eben so grossen Umfange kann die Reihe Ω auch convergiren, ohne dass der Werth der Reihe

$$C' + A_0 x - \sum \frac{1}{nn} \frac{dA_n}{dx},$$

welche man durch Integration jedes Gliedes aus Ω erhält, durch ein noch so kleines Grössenintervall integrirt werden könnte.

[33] Disquis. ar. pag. 636 art. 356. (Gauss Werke Bd. I. pag. 442.)

Wenn man z. B. den Ausdruck

$$\sum_{1,\infty} \frac{1}{n^3}(1-q^n)\log\left(\frac{-\log(1-q^n)}{q^n}\right),$$

wo die Logarithmen so zu nehmen sind, dass sie für $q=0$ verschwinden, nach steigenden Potenzen von q entwickelt und darin $q=e^{xi}$ setzt, so bildet der imaginäre Theil eine trigonometrische Reihe, welche zweimal nach x differentiirt in jedem Grössenintervall unendlich oft convergirt, während ihr erster Differentialquotient unendlich oft unendlich wird.

In demselben Umfange, d. h. zwischen je zwei noch so nahen Argumentwerthen unendlich oft, kann die trigonometrische Reihe auch selbst dann convergiren, wenn ihre Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden. Ein enfaches Beispiel einer solchen Reihe bildet die unendliche Reihe $\sum\limits_{1,\infty}\sin(n!x\pi)$, wo $n!$, wie gebräuchlich, $=1.2.3\ldots n$, welche nicht bloss für jeden rationalen Werth von x convergirt, indem sie sich in eine endliche verwandelt, sondern auch für eine unendliche Anzahl von irrationalen, von denen die einfachsten sind $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$ und deren Vielfache, ungerade Vielfache von e, $\frac{e-\frac{1}{e}}{4}$, u. s. w.

Inhalt.