Über additive Eigenschaften von Zahlen.

Von

L. Schnirelmann in Moskau.

Einleitung.

Das allgemeine Problem der additiven Zahlentheorie ist die Darstellbarkeit aller natürlichen Zahlen durch eine beschränkte Anzahl von Summanden einer gegebenen Folge von natürlichen Zahlen, z. B. der Primzahlfolge oder der Folge der p-ten Potenzen. In der vorliegenden Arbeit soll diese Frage von allgemeinem Standpunkt aus untersucht werden, d. h. die Frage, wann die Darstellung aller natürlichen Zahlen durch Zahlen einer beliebigen Folge von natürlichen Zahlen möglich ist. Hauptsächlich sind dabei der Begriff der Dichtigkeit und der der Summenfolge.

Eine Folge von natürlichen Zahlen hat „positive Dichtigkeit", wenn der Quotient der Anzahl $N(x)$ der Glieder der Folge, die die Zahl x nicht überschreiten, durch x für alle x größer oder gleich α ist, wo α eine feste positive Zahl bedeutet. Unter der Summenfolge nF einer gegebenen Folge F verstehen wir die Folge der Zahlen $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, wo f_i beliebige Zahlen aus F und Null durchläuft, wobei nicht alle f_i gleich Null sein sollen.

Um ein Beispiel zu nennen: Eine arithmetische Progression hat positive Dichtigkeit; die Folge der Primzahlen dagegen nicht, da der obige Quotient die Größenordnung $\frac{1}{\lg x}$ hat; die Folge der p-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen ($p > 1$, ganz) ebenfalls nicht, da der Quotient die Größenordnung $x^{-\frac{p-1}{p}}$ hat.

Es ist leicht zu zeigen, daß sich aus einer beschränkten Anzahl von Gliedern einer Folge positiver Dichtigkeit, die die Zahl 1 enthält, alle natürlichen Zahlen additiv darstellen lassen. Es ist daher unser Ziel, für allgemeine Folgen hinreichende Kriterien dafür anzugeben, daß für ein gewisses n die Summenfolge nF positive Dichtigkeit hat. Dies gelingt in zwei allgemeinen Fällen:

1. Wenn die Glieder f_n von F nicht zu stark anwachsen und dies für die Anzahl $B(z)$ der Lösungen von $f_i + f_j = z$ in Zahlen f_i, f_j der Folge F auch gilt, genauer wenn

$$f_n = O(n\,\varphi(n)) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{z=1}^{x} B^3(z) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right)$$

ist, wo $\varphi(x)$ eine positive, wachsende Funktion bedeutet. Diese Bedingungen werden wir für die Primzahlfolge mit der Brun-Rademacherschen Siebmethode als erfüllt nachweisen.

2. Wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Bezeichnet $A_i(x)$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl i als Summe von je u Gliedern n_ν der Folge F mit $n_\nu \leqq x$ (u ist eine feste natürliche Zahl), so betrachte man die Funktion

$$D(x) = \sum_{j=1}^{x} A_j^2(x).$$

Wenn bei passendem u

$$D(x) = O\left(\frac{N\left(\frac{x}{u}\right)^{2u}}{x}\right) \tag{1}$$

ist, wo $N(x)$ die Anzahl der Glieder n_ν von F, die $\leqq x$, bezeichnet, dann können wir zeigen, daß uF positive Dichtigkeit hat.

Wir können $D(x)$ durch eine analytisch einfacher zu behandelnde Funktion abschätzen: Ist

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{k} e^{2\pi i n_\nu y},$$

wo n_k das größte Glied von F, das $\leqq x$ ist, bedeutet, so ist offenbar

$$|f^{2u}(x, y)| = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) + 2 \cdot \sum_{\substack{j,l=1 \\ j \neq l}}^{un_k} A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y (j-l),$$

also

$$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy = \sum_{j=1}^{u n_k} A_j^2(x) \geqq \sum_{j=1}^{x} A_j^2(x) = D(x).$$

Auf Grund dieser fundamentalen Formel werden wir zeigen, daß für die Folge der p-ten Potenzen für $D(x)$ die Ungleichung (1) erfüllt ist.

Man sieht leicht, daß man statt der Integraldarstellung von $D(x)$ eine analoge Summendarstellung benutzen kann; für diese kann man dann mit Hilfe der Weylschen und van der Corputschen Ungleichung, die ja auch in den Beweisen des Waringschen Problems von Hardy-Littlewood und Winogradoff eine ausschlaggebende Rolle spielen, leicht (1) als erfüllt nachweisen. Damit ist dann ein neuer Beweis des Waringschen Satzes erbracht.

Die Herren Dr. W. Weber und W. Wichmann in Göttingen hatten die große Freundlichkeit, diese Arbeit durchzusehen und inhaltlich und sprachlich wesentlich zu verbessern. Ich möchte ihnen dafür meinen herzlichen Dank aussprechen.

Folgen von positiver Dichtigkeit.

Die einfachste und nächstliegende Charakteristik einer Folge als Ganzes ist ihre „Dichtigkeit". Die Folgen, deren Dichtigkeit groß ist, bilden nämlich die einfachste Klasse von Folgen, für welche die additiven Eigenschaften noch vollständig elementar zu beweisen sind.

Wir stellen für das Folgende einige Definitionen und Bezeichnungen fest.

Definition 1. Eine Folge F von natürlichen Zahlen heißt Folge von einer positiven Dichtigkeit $\geqq \alpha$ in bezug auf die natürliche Zahlenfolge, oder kurz eine dichte Folge, wenn eine nur von F abhängige positive Zahl α existiert, für die

$$\frac{N(x)}{x} \geqq \alpha \tag{1}$$

ist. ($N(x) = N_F(x)$ bedeutet dabei die Anzahl der Glieder von F, die die Zahl x nicht überschreiten. Die Ungleichung (1) soll für alle x erfüllt sein. Insbesondere soll also die Zahl 1 zu der Folge gehören.)

Wir schreiben

$$D(F) \geqq \alpha.$$

Definition 2. Eine Folge von natürlichen Zahlen heißt Folge von fast positiver Dichtigkeit oder eine fast dichte Folge, wenn

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{N(x)}{x} = \alpha > 0. \tag{2}$$

Definition 3. Eine Folge natürlicher Zahlen heißt Folge von stark positiver Dichtigkeit, wenn für jedes $\varrho > 0$, $\sigma > 0$

$$\frac{N(x,z)}{z-x} > \alpha - \sigma \quad \text{für} \quad x \geqq x_0(\varrho,\sigma),\ z \geqq (1+\varrho)\,x \tag{3}$$

ist (es genügt übrigens, wie leicht zu sehen,

$$\frac{N(x,(1+\varrho)\,x)}{\varrho\, x} > \alpha - \sigma$$

für $x \geqq x_0(\varrho,\sigma)$ zu fordern), wo $N(x,y)$ die Anzahl der Glieder z der Folge F mit $x \leqq z \leqq y$ bedeutet, und α von ϱ unabhängig ist: wir schreiben: $S\,D(F) \geqq \alpha$.

Definition 4. Eine Folge F von natürlichen Zahlen heißt Basis der natürlichen Zahlen, wenn zwei ganze nur von F abhängige Zahlen a und m existieren, die die folgende Eigenschaft besitzen: jede ganze durch a teilbare Zahl $x > 0$ ist darstellbar als Summe von nicht mehr als m Gliedern der Folge F. Dann läßt sich, wenn 1 zu F gehört, jedes ganze $x > 0$ durch höchstens $m + a - 1$ Glieder von F additiv darstellen.

Definition 5. Eine Folge F von natürlichen Zahlen heißt starke Basis der natürlichen Zahlen, wenn es drei nur von F abhängige Zahlen a, m und λ gibt, wo a, m ganz, λ reell und von der Eigenschaft ist, daß jede durch a teilbare Zahl $x > 0$ als Summe von nicht mehr als m Gliedern von F darstellbar ist, und jedes Glied dabei größer als λx gewählt werden kann.

Definition 6. Eine Teilfolge F_1 von F heißt dichte Teilfolge von einer relativen Dichtigkeit $\geqq \alpha$ in bezug auf F, wenn

$$\frac{N_{F_1}(x)}{N_F(x)} \geqq \alpha \tag{4}$$

ist, wo α eine feste positive Zahl ist.

Definition 7. Eine Folge von natürlichen Zahlen heißt beständige Basis der natürlichen Zahlen, wenn nicht nur sie selbst, sondern auch jede ihrer dichten Teilfolgen eine Basis der natürlichen Zahlen bildet.

Definition 8. Es seien die Folgen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ gegeben. Bezeichnen wir mit f_k ein Glied von F_k.

Die Folge von verschiedenen, der Größe nach geordneten Zahlen von der Form $f_1 + f_2 + \ldots f_n$, wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig voneinander alle Glieder der Folgen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und die Zahl 0 (nicht alle $f_i = 0$) durchlaufen, heißt Summenfolge der Folgen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und wird mit $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ bezeichnet. Ist insbesondere $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$, so wird ihre Summenfolge mit nF bezeichnet.

Teil I.

§ 1.

Folgen positiver Dichtigkeit.

Hilfssatz 1. Es seien $F_1, \ldots, F_k$ Folgen von den Dichtigkeiten:

$$D(F_1) \geqq \alpha_1, \ \ldots, \ D(F_k) \geqq \alpha_k.$$

Es gilt die Ungleichung:

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_k) \leqq (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_k). \tag{5}$$

Beweis. Bezeichnen wir mit $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}$ diejenigen Glieder von F_1, die die beliebig gegebene Zahl x nicht überschreiten. Es ist $n \geqq \alpha_1 x$.

Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern f_{1i} und f_{1i+1}, deren Differenz größer als 1 ist, kann man eine von Null verschiedene Anzahl von neuen Gliedern von der Form $f_{1i} + f_{21}, f_{1i} + f_{22}, \ldots$ einführen. Die Anzahl der Glieder von der Form $f_{1i} + f_{2j}$, die zwischen f_{1i} und f_{1i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$ bzw. zwischen f_{1n} und x (x einschließlich, wenn $f_n < \nu$) so eingeführt werden können und die $\neq f_{1i}, \neq f_{1i+1}$ sind, ist nicht kleiner als $\alpha_2 (f_{1i+1} - f_{1i} - 1)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ bzw. $\alpha_2 (x - f_{1n})$. Die vollständige Anzahl der neu eingeführten Glieder ist folglich nicht kleiner als

$$\alpha_2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (f_{1i+1} - f_{1i} - 1) + \alpha_2 (x - f_{1n}) = \alpha_2 (x - n).$$

Die Anzahl der Glieder der Summenfolge $F_1 + F_2$, die x nicht überschreiten, kann also nicht kleiner als $n + \alpha_2 (x - n)$ sein. Da $n \geqq \alpha_1 x$ ist, so folgt:

$$n + \alpha_2 (x - n) \geqq \alpha_1 x (1 - \alpha_2) + \alpha_2 x = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) x > 0,$$

d. h.

$$D(F_1 + F_2) \geqq \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_2, \quad 1 - D(F_1 + F_2) \leqq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung folgt allgemein

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_k) \leqq (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_k).$$

Satz 1. Sei $k > 3$. Es seien die Folgen $F_1, \ldots, F_k$ der Dichtigkeiten $D(F_1) \geqq \alpha_1, \ldots, D(F_k) \geqq \alpha_k$ gegeben. Wenn das geometrische Mittel M der α_i der Ungleichung

$$M = \sqrt[k]{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \geqq \frac{\log (k-1)}{k-1} \tag{6}$$

genügt, so muß die Summenfolge $F_1 + \ldots + F_k$ mit der ganzen natürlichen Zahlenreihe R zusammenfallen.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist:

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_{k-1}) \leqq (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_{k-1}) < e^{-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})}.$$

Daraus folgt für $F = F_1 + \ldots + F_{k-1}$

$$x - N_F(x) < x e^{-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})}. \tag{7}$$

Außerdem haben wir: $N(x) \geqq \alpha_k x$, wo $N_{F_k}(x) = N(x)$ gesetzt ist. Sei $F_k = (n_1, n_2, \ldots)$. Die Folgen

$$n_1, n_2, \ldots \quad \text{und} \quad x - n_1, x - n_2, \ldots$$

haben offenbar zwischen Null und x dieselbe Anzahl von Gliedern. Daraus folgt, daß die Folge $x - n_1, x - n_2 \cdot N_F$, also mindestens $\alpha_k x$ Glieder zwischen Null und x enthält. Wenn $N_F(x) + N(x) > x$ ist, so muß mindestens ein Glied der Folge $x - n_1, x - n_2, \ldots$ einem Glied der Folge F gleich oder $= 0$ sein, d. h. die Zahl x muß ein Glied der Folge $F_1 + \ldots + F_k$ sein.

Damit die Ungleichung $N_F(x) + N(x) > x$ für jedes x erfüllt ist, genügt nach (7) die Gültigkeit der Ungleichung

$$\alpha_k > e^{-\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i} \quad \text{oder} \quad \log \frac{1}{\alpha_k} < \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i.$$

Aus Symmetriegründen kann man statt k eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots k$ nehmen. Jede Ungleichung von der Form

$$\log \frac{1}{\alpha_i} < \sum_{j \neq i} \alpha_j \qquad i = 1, \ldots, k \tag{8}$$

ist also eine hinreichende Bedingung für die Relation

$$F_1 + \ldots + F_k = R. \tag{8a}$$

Summieren wir diese Ungleichungen, so bekommen wir:

$$\log \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} < (k-1) \sum_{j=1}^{k} \alpha_j. \tag{9}$$

Es ist leicht zu sehen, daß auch (9) eine hinreichende Bedingung für

$$F_1 + \ldots + F_k = R$$

bildet. In der Tat: aus (9) folgt, daß mindestens eine der Ungleichungen (8) erfüllt ist. Aus der bekannten Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel folgt, daß die Ungleichung (9) erfüllt wird, wenn folgende Ungleichung gilt:

$$(k-1) \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i} > \frac{1}{k} \log \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} = \log \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}}. \tag{10}$$

Wenn wir $\frac{1}{\sqrt[k]{\Pi \alpha_i}}$ mit z bezeichnen, so bekommen wir für z die Ungleichung: $z \log z < k - 1$ (wobei z offenbar > 1 angenommen werden kann, für $z = 1$ ist die Behauptung des Satzes trivial).

Diese Ungleichungen werden sicher erfüllt, wenn

$$1 < z < \frac{k-1}{\log(k-1)}, \quad k > 3$$

ist.

Die letzte Ungleichung kann man auch so schreiben:

$$\sqrt[k]{\Pi \alpha_i} \geqq \frac{\log(k-1)}{k-1}.$$

Für $k = 1, 2, 3$ ist diese Ungleichung unbrauchbar. Im ersten Falle muß offenbar für die Erfüllbarkeit der Relation $F_1 = R$ die Gleichung $D(F_1) = 1$, und im zweiten Falle genügt für die Erfüllbarkeit der Relation $F_1 + F_2 = R$ nach obiger Schlußweise die Ungleichung $D(F_1) + D(F_2) > 1$, da dann $N_{F_1}(x) + N_{F_2}(x) > x$. Ganz entsprechend beweist man folgende Sätze:

I./1. Jede Folge F von einer positiven Dichtigkeit $\geqq \alpha$ bildet eine Basis der natürlichen Zahlen und leistet der Relation $4 \cdot \left[\frac{1}{\alpha}\right] F = R$ Genüge.

I./2. Jede Folge F von fast positiver Dichtigkeit bildet eine Basis der natürlichen Zahlen.

Beweis. Es existiert nach der Definition der fast positiven Dichtigkeit eine solche Zahl $x_0 = x_0(\varepsilon)$, daß für jedes $x > x_0$ die Ungleichung

$$\frac{N(x)}{x} > \alpha - \varepsilon = \beta$$

gilt (für beliebig kleines $\varepsilon > 0$).

Nehmen wir zu F alle Zahlen von 1 bis $x_0(\varepsilon)$ einschließlich x_0 hinzu, dann bekommen wir eine Folge F_1, die offenbar eine positive Dichtigkeit $\geqq \beta$ besitzt.

Es ist $hF_1 = R$, wenn $h = 4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right]$.

Denn ist $\beta > \frac{1}{2}$, d. h. $1 \leqq \frac{1}{\beta} < 2$, $h = 4$, so ist $2D(F_1) > 1$, also $2F_1 = R$, nach der Schlußbemerkung zu Satz 1.

Sonst genügt es aus demselben Grunde für $hF_1 = R$, $D\left(\frac{h}{2}F_1\right) = b > \frac{1}{2}$ zu zeigen. Nach Hilfssatz 1 ist $1 - b \leqq (1-b)^{h/2}$, es genügt also $\frac{h}{2}(-\lg(1-\beta)) > \log 2$ oder $\frac{h}{2}\cdot\beta > \log 2$ zu zeigen. Dies ist wegen $\frac{h}{2} \geqq 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$ und $\beta \leqq \frac{1}{2} < 1 - \frac{\log 2}{2}$ der Fall. (Man kann übrigens schon $\frac{h}{2}F_1 = R$ beweisen.)

Jede Zahl x ist also als Summe von nicht mehr als $4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right]$ Gliedern der Folge F_1 darstellbar, jedes x läßt sich also in nicht mehr als $4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right]$ Glieder von F und einen Summanden, der nicht größer als $4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right] x_0$ ist, zerlegen. Bezeichnen wir die letzte Zahl $4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right] x_0$ mit $A = A(\varepsilon)$; die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Summenfolge $4 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right] F$ ist also absolut nicht größer als $2A$, d. h. für jede Zahl x kann man zwei Glieder x_1 und x_2 von $4\left[\frac{1}{\beta}\right]F$ finden, so daß $0 < x_2 - x_1 \leqq 2A$, $x_1 \leqq x \leqq x_2$ ist. Es gilt identisch:

$$x = \frac{x_1(x_2 - x) + x_2(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Bezeichnen wir mit u das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, 2A$. Wir haben:

$$ux = \frac{u(x_2 - x)}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{u \cdot (x - x_1)}{x_2 - x_1} x_2.$$

Beide Zahlen $\frac{u(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$ und $\frac{u(x - x_1)}{x_2 - x_1}$ sind ganz, $\geqq 0$ und $\leqq u$. Jede Zahl von der Form ux ist also darstellbar als Summe von nicht mehr als $8 \cdot \left[\frac{1}{\beta}\right] u$ Gliedern von F. Hiermit sind beide Sätze bewiesen.

I./3. Sei $k > 3$. Wenn eine Folge F eine Dichtigkeit $\geqq \alpha$ hat und die Ungleichung

(11) $$\frac{\alpha}{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}} > \frac{\log(k-1)}{k-1}$$

erfüllt ist, wo $a_1, \ldots, a_k$ irgendwelche ganze Zahlen bedeuten, so kann man unter je $k+1$ aufeinanderfolgenden Zahlen $n, n+1, \ldots, n+k$ mindestens ein x finden, für welches die Gleichung

$$a_1 z_1 + \ldots + a_k z_k = x$$

in Zahlen z_i der Folge F lösbar ist.

Beweis. Wir bilden die Folgen $\Phi_1, \ldots \Phi_k$ von der Form: $1 + a_1 f_1$, $1 + a_2 f_2, \ldots, 1 + a_k f_k$, wo $f_1, \ldots, f_k$ alle Glieder der Folge F und Null durchlaufen. Es gelten die Ungleichungen

$$D(\Phi_1) \geqq \frac{\alpha}{a_1}, \ \ldots, \ D(\Phi_k) \geqq \frac{\alpha}{a_k}.$$

Daraus folgt, nach (11) und Satz 1, daß die Gleichung $x = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k$, wo φ_i ein zu der Folge Φ_i gehöriges Glied oder Null bedeutet, stets lösbar ist. Dadurch ist die Behauptung I./3. beweisen.

§ 2.

Folgen stark positiver Dichtigkeit.

Hilfssatz 2. Es sei F eine Folge von einer stark positiven Dichtigkeit $\geqq \alpha$. Man kann für beliebig gegebene positive Zahlen ϱ und σ eine nur von diesen Zahlen und von F abhängige Zahl x_0 finden, so daß für $x \geqq x_0$ zwischen x und $(1+\varrho)\,x$ (einschließlich der Grenzen) eine solche Zahl y existiert, daß für $z > y$ die Ungleichung

$$\frac{N(y, z)}{z - y} > \alpha - \sigma \tag{12}$$

erfüllt ist; $N(y, z)$ bedeutet hierbei die Anzahl der Glieder f_n von F mit $y \leqq f_n \leqq z$.

Beweis. Wählen wir x so groß, daß für $z \geqq (1+\varrho)\,x$ die Ungleichung

$$\frac{N(x, z)}{z - x} \geqq \alpha - \frac{\sigma}{2} \tag{13}$$

erfüllt ist.

Wir haben:

$$N(x, x_1) + N(x_1, x_2) \geqq N(x, x_2). \tag{14}$$

Nehmen wir den Hilfssatz 2 als falsch an. Es existiert also eine Zahl $x_1 > x_0$, die die Relation $N(x, x_1) \leqq (\alpha - \sigma)(x_1 - x)$ befriedigt. Wenn x_1 schon $\geqq x(1+\varrho)$ ist, so haben wir nach (13) schon einen Widerspruch. Wenn $x_1 < x(1+\varrho)$, so können wir nochmals eine noch größere Zahl x_2 von der Eigenschaft

$$N(x_1, x_2) \leqq (\alpha - \sigma)(x_2 - x_1)$$

finden usw.

Nach einer endlichen Anzahl Schritten kommen wir zu einer Zahl x_n, die $\geqq (1+\varrho)\,x$ ist (da wir x_i als ganz annehmen können), und für welche die Ungleichung

$$N(x, x_n) = N(x, x_1) + \ldots + N(x_{n-1}, x_n)$$
$$\leqq (\alpha - \sigma)(x_1 - x + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = (\alpha - \sigma)(x_n - x)$$

gilt, was aber nach (13) unmöglich ist.

Satz 2. Es seien die Folgen $F_1, F_2, \ldots, F_k$, $k > 3$ der stark positiven Dichtigkeiten:

$$S\,D(F_1) \geqq \alpha_1, \ldots, S\,D(F_k) \geqq \alpha_k,$$

gegeben.

Wenn die Ungleichung

$$\text{(14a)} \qquad \sqrt[k]{\alpha_1 \ldots \alpha_k} > \frac{\log(k-1)}{k-1}$$

erfüllt ist, kann man jede ganze Zahl $x > 0$ als Summe von k Summanden darstellen, die 1. alle $\geqq \frac{x}{k+1}$ sind und wo 2. je zwei von ihnen verschiedenen der Folgen $F_1, \ldots F_k$ angehören. $F_1 + \ldots + F_k$ ist also eine starke Basis der natürlichen Zahlen.

Beweis. Wählen wir $\sigma > 0$ so klein, daß

$$\text{(14b)} \qquad \sqrt[k]{(\alpha_1 - \sigma) \ldots (\alpha_k - \sigma)} > \frac{\log(k-1)}{k-1}$$

bleibt.

Man kann auf Grund des Hilfssatzes 2 eine so große, nur von $F_1, \ldots, F_k$, und σ abhängige ganze Zahl x_0 finden, so daß man für jedes $x > x_0$ zwischen $\frac{x}{k+1}$ und $\frac{x}{k}$ in jeder Folge F_i ein Glied y_i wählen kann, das die folgende Eigenschaft hat: für jedes $z > y_i$ ist

$$\frac{N(y_i, z_i)}{z_i - y_i} > \alpha - \sigma.$$

Für die Folgen $F_1 - y_1, F_2 - y_2, \ldots, F_k - y_k$ gelten also die Ungleichungen

$$D(F_i - y_i) \geqq \alpha_i - \sigma \qquad \text{für } i = 1, \ldots, k\text{[1]}.$$

Da die Zahl $x - y_1 - y_2 \ldots - y_k$ nach Wahl der y_i positiv oder Null ist, ist sie nach (14b) und Satz 1 als Summe von nicht mehr als k Gliedern $f_{1 i_1} - y_{i_1}, \ldots, f_{M i_M} - y_{i_M}$ darstellbar, wo

$$f_{\nu i_\nu} \geqq y_{i_\nu} \geqq \frac{x}{k+1}.$$

Es sei die Numerierung der F_i so gewählt, daß die besagten Glieder gerade die M ersten sind: $f_{1 i_1} - y_M, \ldots, f_{M i_M} - y_M$.

---

[1]) Hierbei hat man die Glieder $\leqq y_i$ von F_i wegzulassen.

Es ist also:

$$x - y_1 - \ldots - y_k = f_{1\,i_1} + \ldots + f_{M\,i_M} - y_1 - \ldots - y_M.$$

Daraus folgt:

$$x = f_{1\,i_1} + \ldots + f_{M\,i_M} + y_{M+1} + \ldots + y_k.$$

In dieser Summe ist jeder Folge F_i nur ein Glied entnommen, und alle diese Glieder sind offenbar $\geqq \frac{x}{k+1}$.

§ 3.

Schwach wachsende Folgen.

Definition. Eine Folge F heißt schwach wachsend, wenn die Summenfolge $2F$ eine dichte Folge ist, d. h. positive Dichtigkeit hat.

Satz 3. Es sei eine Folge $F = (n_1 = 1, n_2, \ldots)$ gegeben, deren allgemeines Glied die Ungleichung

$$n_i < C\, i\, \varphi(i) \tag{15}$$

erfüllt, wo C eine Konstante und $\varphi(i)$ eine positive, wachsende Funktion bedeutet.

Bezeichnen wir mit $B(z) = B_F(z)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $n_i + n_j = z$ und mit $R(x)$ die Summe

$$R(x) = \sum_{z=1}^{x} B^2(z), \tag{16}$$

so wird behauptet: wenn für die Folge F die Ungleichung

$$R(x) < C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)} \tag{17}$$

erfüllt ist, muß F 1. eine schwach wachsende Folge sein und 2. eine beständige Basis der natürlichen Zahlen bilden.

Beweis. Die Anzahl $N(z)$ der Glieder der Folge F, die eine bestimmte Zahl z nicht überschreiten, ist für $z > z_0$ nach (15) größer als

$$\frac{z}{2C\,\varphi(z)}, \tag{18}$$

da dann

$$z < n_{N(z)+1} < c\,(N(z)+1)\,\varphi(N(z)+1) \leqq 2C\,N(z)\,\varphi(z),$$

da wir annehmen können, daß $F \neq R$, der Reihe aller natürlichen Zahlen ist. Andererseits ist die Summe $\sum_{z=1}^{x} B(z)$ aller Lösungszahlen der Gleichungen $n_i + n_j = z$, $z = 1, \ldots, x$, d. h. die Anzahl der Lösungen der Ungleichung $n_i + n_j \leqq x$ nicht kleiner als die Anzahl der Lösungen derselben Ungleichung mit den Nebenbedingungen $n_i \leqq \frac{x}{2}$, $n_j \leqq \frac{x}{2}$. Die letzte Anzahl ist offenbar $N^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Daraus folgt nach (18)

$$(19) \qquad \sum_{z=1}^{x} B(z) \geqq N^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqq \frac{x^2}{16 C^2 \varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)} \geqq \frac{x^2}{16 C^2 \varphi^2(x)} \quad \text{für } x > 2 z_0.$$

Bezeichnen wir mit $M(x)$ die Anzahl derjenigen $B(z)$ für $z = 1, \ldots, x$, die ungleich Null sind.

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt (für $x > 2 z_0$):

$$(20) \qquad M(x) \geqq \frac{\left(\sum_{z=1}^{x} B(z)\right)^2}{\sum_{z=1}^{x} B^2(z)} \geqq \frac{x^4}{256 C^4 \cdot \varphi^4(x)} : C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)} = \frac{x}{256 C^4 \cdot C_1}.$$

Die letzte Ungleichung zeigt, daß die Anzahl der Glieder der Summenfolge $2F$, die $\leqq x$, für $x > 2 z_0$ nicht kleiner ist als $\frac{x}{256 C^4 C_1}$. Die Folge $2F$ besitzt daher eine positive Dichtigkeit, ist also nach Satz I, 1 eine Basis der natürlichen Zahlen. Um die Richtigkeit der zweiten Behauptung zu erkennen, bemerken wir, daß für eine dichte Teilfolge F_1 von F, von einer relativen Dichtigkeit $\geqq \alpha$ die Ungleichungen

$$(21) \qquad \frac{N_{F_1}(x)}{N(x)} \geqq \alpha \quad \text{und} \quad B_{F_1}(z) \leqq B(z)$$

erfüllt sind, so daß die Ungleichung (19) mit $\frac{\alpha^2}{16 C^2}$ statt $\frac{1}{16 C^2}$ erfüllt bleibt.

Satz 4. Es sei $\varphi(i)$ für $i \geqq i_0$ positiv, wachsend und $\varphi(i) = 0(\sqrt{i})$. Es sei F die Folge $(n_1 = 1, n_2, \ldots)$,

$$(22) \qquad n_i = O(i\,\varphi(i)).$$

Es sei $A(y, x)$ für $0 \leqq y \leqq x$ die Lösungszahl von $n_i - n_j = y$, $n_i < x$, $n_j < x$.

Es sei

$$(23) \qquad \sum_{y=1}^{x} A^2(y, x) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right).$$

Dann ist F eine schwach wachsende Folge und eine beständige Basis der natürlichen Zahlen[2]).

Beweis. Bedeutet $N(\xi)$ die Anzahl der $n_i \leqq \xi$, so ist für $x \geqq 2$ nach (22)

$$(24) \quad \frac{x}{2} < n_{N\left(\frac{x}{2}\right)+1} < C_1\left[N\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right] \varphi\left[N\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right] \leqq 2 C_1 N\left(\frac{x}{2}\right) \varphi(x),$$

---

[2]) Diese gegenüber meiner ursprünglichen verschärfte Formulierung von Satz 4 und der folgende Beweis sind von Herrn Landau gegeben. Landau, Göttinger Nachrichten 1930.

also, wenn $B(m)$ die Lösungszahl von $m = n_i + n_j$ und $M(x)$ die Anzahl der $B(m) \neq 0$ mit $m \leqq x$ ist,

$$(25) \qquad \frac{x^4}{c_2 \varphi^4(x)} < N^4\left(\frac{x}{2}\right) \leqq \left(\sum_{m=1}^{x} B(m)\right)^2 \leqq M(x) \sum_{m=1}^{x} B^2(m).$$

$B^2(m)$ ist die Lösungszahl von

$$(26) \qquad m = n_i + n_j = n_u + n_v;$$

ist hierin $i = u$, so gibt es

$$(27) \qquad B(m) \leqq \frac{1 + B^2(m)}{2}$$

solche Quadrupel; ist $i \gtrless u$, so ist der Beitrag dieser Quadrupel zu $\sum\limits_{m=1}^{x} B^2(m)$ höchstens

$$(28) \qquad 2 \sum_{y=1}^{x} A^2(y, x);$$

denn in

$$i > u, \; y = n_i - n_u = n_v - n_j \quad \text{ist} \quad 1 \leqq y \leqq x,$$

da alle $n_\omega \leqq x$. Also ist nach (23) für $x \geqq i_0$

$$(29) \qquad \sum_{m=1}^{x} B^2(m) \leqq \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{x} B^2(m) + C_3 \cdot \frac{x^3}{\varphi^4(x)},$$

$$(30) \qquad \frac{x^4}{C_2 \varphi^4(x)} < M(x)\left(x + 2\, C_3 \frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right) < C_4 M(x) \frac{x^3}{\varphi^4(x)},$$

d. h.

$$(31) \qquad M(x) > \frac{x}{c_5}.$$

Daß die Folge F auch eine beständige Basis der natürlichen Zahlen bildet, kann man genau so wie am Schluß des Beweises von Satz 3 zeigen.

Anhang zu Teil I.

§ 4.

Folgen, die eine beständige Basis der natürlichen Zahlen sind.

Satz 5. Es sei eine Folge F von der Form

$$(32) \qquad [r(n)] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, wo $r(t)$ eine reelle, dreimal differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen t ist, die für $t > 0$ folgende Ungleichungen befriedigt:

$$(33) \qquad \begin{cases} r(t) > 0; \; r'(t) > 1; \\ 0 < \frac{c_1}{t \ln t} < r''(t) < \frac{c_2}{t} \\ 0 > r'''(t) > -\frac{c_3}{t^2}. \end{cases} \qquad \text{für } t > 1,$$

Es wird behauptet, daß die Folge F eine beständige Basis der natürlichen Zahlen bildet.

Beweis. 1. Vorbereitungen: Aus (33) folgt durch Integration

(33a) $$c_1 \ln \ln t < r'(t) < c_4 \ln t \qquad \text{für } t > 1.$$

Bezeichnen wir mit $\Theta(t)$ die Ableitung $r'(t)$. Nach (33) haben wir für $t > 1$

(34) $$\begin{cases} \dfrac{c_1}{t \ln t} < \Theta'(t) < \dfrac{c_2}{t}, \\ \quad 0 > \Theta''(t) > -\dfrac{c_3}{t^2}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\Theta(t + \Theta(t)) = \Theta(t) + \Theta'(t + \lambda\Theta(t))\Theta(t); \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Da

$$\Theta'(t + \lambda\Theta(t)) < \frac{c_2}{t + \lambda\Theta(t)} < \frac{c_2}{t},$$

so bekommen wir nach (33a):

$$\Theta(t + \lambda\Theta) - \Theta(t) < \frac{c_2\,\Theta(t)}{t} = 0(1).$$

Es sei $u(x)$ die Funktion $\Theta(e^x)$. Dann wird

(35) $$u'(x) = \Theta'(e^x)\,e^x < \frac{c_2}{e^x}\,e^x = c_2.$$

Also

(36a) $$\begin{aligned} u(\ln t - 2\ln\Theta(t)) &= u(\ln t) - 2u'(\ln t - 2\lambda\ln\Theta(t))\ln\Theta(t) \\ &> u(\ln t) - c'\ln\Theta(t). \end{aligned}$$

Für Θ bekommen wir daher wegen (33a) für $t \geqq t_0$:

(36) $$\Theta\left(\frac{t}{\Theta^2(t)}\right) > \Theta(t) - c'\ln\Theta(t) > \frac{\Theta(t)}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $\Psi(x)$ die zu $\Theta(x)$ inverse Funktion. Da $\Theta(x)$ monoton wachsend ist, so ist $\Psi(x)$ auch eine monoton wachsende Funktion.

Wir haben:

$$\Psi[\Theta(x)] = \Theta[\Psi(x)] = x,$$
$$\Psi'[\Theta(x)] \cdot \Theta'(x) = 1.$$

Daraus folgt nach (34):

$$\frac{x}{c_2} < \Psi'[\Theta(x)] = \frac{1}{\Theta'(x)} < \frac{x \ln x}{c_1} \qquad \text{für } x > 1.$$

Setzen wir hier $\Theta(x) = t$, so bekommen wir:

(37) $$\frac{1}{c_2}\,\Psi(t) < \Psi'(t) < \frac{1}{c_1}\,\Psi(t)\ln\Psi(t).$$

Diese Formel wie auch (38) bis (41) gelten für alle $t \geqq t_0$, da Θ monoton wachsend. Durch weitere Differentiation erhalten wir:

$$\Psi''[\Theta(x)]\,\Theta'^2(x) + \Psi'[\Theta(x)]\,\Theta''(x) = 0$$

und nach (34)

$$\Psi''[\Theta(x)] = -\frac{\Psi'[\Theta(x)]\,\Theta''(x)}{\Theta'^2(x)} = -\frac{\Theta''(x)}{\Theta'^3(x)} < \frac{c_3\, x^3 \ln^3 x}{x^2 c_1^3} = M\, x \ln^3 x;$$

oder, wenn wir t statt $\Theta(x)$ setzen:

$$\Psi''(t) < M\,\Psi(t) \ln^3 \Psi(t). \tag{38}$$

Es sei $v(z)$ die Funktion $\log\log\Psi(z)$. Wir haben nach (37)

$$v'(z) = \frac{1}{\ln\Psi(z)}\,\frac{1}{\Psi(z)}\cdot\Psi'(z) < \frac{1}{c_1}.$$

Daraus folgt für $\varepsilon > 0$

$$v(z+\varepsilon) = v(z) + v'(z+\lambda\varepsilon)\,\varepsilon < v(z) + \frac{\varepsilon}{c_1}$$

und wir bekommen für Ψ die Ungleichung:

$$\Psi(t+\varepsilon) = e^{e^{v(t+\varepsilon)}} < e^{e^{v(t)+\frac{\varepsilon}{c_1}}} = [\Psi(t)]^{e^{\frac{\varepsilon}{c_1}}}. \tag{39}$$

Aus (37) und (38) bekommen wir daher:

$$\Psi'(t+\varepsilon) < \frac{1}{c_1}\,\Psi(t+\varepsilon)\log\Psi(t+\varepsilon) < \frac{e^{\varepsilon/c_1}}{c_1}[\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}}\ln\Psi(t) \tag{40}$$
$$= M_2\,[\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}}\ln\Psi(t).$$

$$\Psi''(t+\varepsilon) < M_3\,[\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}}\ln^3\Psi(t),\quad M_3 = M\,e^{3\varepsilon/c_1}. \tag{41}$$

2. Hilfssatz 1. Für die Anzahl $A(u)$ der Lösungen der Gleichung

$$[r(n)] - [r(m)] = u \tag{42}$$

in ganzzahligen m und n mit der Nebenbedingung $r(n) \leqq x$, wo u fest und der Bedingung

$$\ln^3 x\,\Theta^3(x) \leqq u \leqq \ln^3 x\,\Theta^4(x) \tag{43}$$

genügt, gilt:

$$A(u) \leqq C\,\frac{x}{\Theta^2(x)} \qquad \text{für } x > 1.$$

Die gesuchte Anzahl kann offenbar nicht größer sein, als die Anzahl der ganzzahligen Lösungspaare (n, m) der Ungleichungen

$$\begin{cases} u - 1 < r(n) - r(m) < u + 1, \\ \qquad\qquad r(n) \leqq x, \end{cases} \tag{44}$$

wobei Lösungen mit demselben m nur einmal gezählt werden; denn (42) hat zu jedem m höchstens eine Lösung, da $r'(x) > 1$. Wir werden darum die Anzahl der Lösungen von (44) betrachten. Bezeichnen wir die Differenz $n - m$ mit $\varkappa$.

Wir haben mit $0 < \lambda < 1$:

$$r(n) - r(m) = r(m+\varkappa) - r(m) = r'(m)\varkappa + \frac{r''(m+\lambda\varkappa)}{2}\varkappa^2.$$

Wegen

$$r''(t) > 0,\ r'(t) > 1 \quad \text{ist} \quad \varkappa < r(n) - r(m) < u + 1$$

wenn n, m Lösung von (44).

Aus $\varkappa < u + 1 = O(\log^3 x\, \Theta^4(x)) = o(\sqrt{x})$ folgt, daß die Anzahl der Lösungen der Ungleichung (44) für $x \geqq x_0$ nicht größer ist als die Anzahl der Lösungen der folgenden Ungleichungen:

$$u - 1 - \delta < r'(m)\varkappa < u + 1 + \delta, \; r(m) \leqq x,$$

wo δ eine beliebige positive Zahl bedeutet.

Oder anders geschrieben:

$$\frac{u-1-\delta}{\varkappa} < \Theta(m) < \frac{u+1+\delta}{\varkappa}, \tag{44a}$$

d. h.

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m < \Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right). \tag{44b}$$

Die Anzahl der möglichen verschiedenen m-Werte ist demnach bei festem $\varkappa$ nicht größer als

$$\Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) + 1. \tag{45}$$

Da jedem Wert von m nicht mehr als eine „Lösung" von (44) im obigen Sinne entspricht, so kann die Anzahl der „Lösungen" von (44), die zu einem bestimmten Wert von $\varkappa$ gehören, nicht größer als (45) sein.

Verteilen wir alle möglichen Werte von m in zwei Gruppen:

$$\text{(a)} \quad m \leqq \frac{x}{\Theta^2(x)}, \qquad \text{(b)} \quad m > \frac{x}{\Theta^2(x)}.$$

Die Gesamtanzahl der Lösungen, die der Gruppe (a) entsprechen, ist offenbar nicht größer als die Anzahl der m-Werte in dieser Gruppe, also

$$\leqq \frac{x}{\Theta^2(x)}. \tag{45a}$$

Für die Lösungen, die der zweiten Gruppe angehören, erhalten wir aus den Ungleichungen (44a), (36), (33a) und $\Theta' > 0$:

$$\left\{\begin{aligned} &\max \varkappa < \frac{u+1+\delta}{\Theta(\min m)} < \frac{u+1+\delta}{\Theta\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right)} < \frac{u+1+\delta}{\Theta(x) - c' \ln \Theta(x)} \left(< c_0 \frac{u}{\Theta(x)}\right) \\ &\min \varkappa > \frac{u-1-\delta}{\Theta(\max m)} > \frac{u-1-\delta}{\Theta(x)} > c_0' \frac{u}{\Theta(x)}. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Beweis. Es ist

$$\int_1^m \Theta(z)\,dz = r(m) - r(1) < x$$

für eine Lösung m von (44). Daher ist für $m \geqq 2$

$$x > \int_1^m \Theta(z)\,dz \geqq \int_{m/2}^m \Theta(z)\,dz > \Theta\left(\frac{m}{2}\right)\frac{m}{2},$$

da $\Theta(x) > 0$, $\Theta'(x) > 0$ für $x > 0$; somit, da in (b) $m > \frac{x}{\Theta^2(x)}$, ist für $x \geqq x_0$:

$$x > \frac{m}{2}\Theta\left(\frac{x}{2\Theta^2(x)}\right) > \frac{m}{4}\Theta(x),$$

was, wie in (36a), (36) folgt, d. h. nach (44a) für $x \geqq x_0$:

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{x}\right) < m < \frac{4x}{\Theta(x)}. \tag{47a}$$

Die Anzahl der Lösungen von (44), die zu der Gruppe (b) gehören, ist nach (44b) nicht größer als die folgende Summe:

$$\Sigma = \sum_{\min \varkappa \leqq \varkappa \leqq \max \varkappa} \left[\Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) + 1\right]. \tag{47}$$

Es genügt also für Hilfssatz 1 nach (45a) zu zeigen: $\sum = O\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right)$. Es ist mit $0 < \lambda < 1$:

$$\Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) = \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\cdot 2 \cdot \frac{1+\delta}{\varkappa}$$
$$+ \Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right)\cdot 2 \cdot \frac{(1+\delta)^2}{\varkappa^2}$$

und $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, wo

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) 2\frac{1+\delta}{\varkappa}, \\ \Sigma_2 &= \sum\left[\Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) 2\frac{(1+\delta)^2}{\varkappa^2} + 1\right]. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Hilfssatz 2.

$$\Sigma_2 = o\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right).$$

Beweis. Aus (41) folgt für $x \geqq x_0$ mit $\varrho = 2(1+\delta)\lambda$

$$\Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) < M_3\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\varrho/c_1\varkappa}} \ln^3\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)$$

((41) darf für $x \geqq x_0$ angewendet werden, da nach (46)

$$\frac{u-1-\delta}{\varkappa} \geqq c_0^*\Theta(x) \geqq t_0$$

für $x \geqq x_0$). Weiter bekommen wir nach (46)

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\varrho/c_1\varkappa}} = \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{O(\varrho/c_1\varkappa)} \\ &= \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\cdot\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{o(1/\varkappa)} \leqq \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) x^{O(1/\ln^3 x)} \\ &< (1+\eta(x))\,\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \end{aligned}\right. \tag{48a}$$

(wo $\eta(x) \to 0$, wenn $x \to \infty$), da

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m \leqq x \tag{48b}$$

(wegen $r(m) \leqq x$ und $r > 0$, $r' > 1$) und

$$\varkappa \geqq \frac{u c_0'}{\Theta(x)} \geqq c_0' \ln^3 x\, \Theta^2(x) \geqq c_0' \ln^3 x.$$

Wir bekommen daher nach (48b) die Ungleichung:

$$\Psi''\left[\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda \frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right] < M_4\, x \ln^3 x.$$

Jedes einzelne Glied der Summe Σ_2 ist folglich nach (46) kleiner als

$$M_4'\, x \ln^3 x \cdot \frac{2(1+\delta)^2}{(\min \varkappa)^2} < M_4'' \frac{x \ln^3 x}{\left(\frac{u}{\Theta(x)}\right)^2} < M_5 \frac{x \ln^3 x\, \Theta^2(x)}{u^2}.$$

Da die Anzahl aller Glieder in den Summen Σ_1, Σ_2 nach (46) nicht größer als

$$\max \varkappa - \min \varkappa + 1 < c_1' \frac{u \lg \Theta(x)}{\Theta^2(x)}, \tag{49}$$

und da nach (33a) reichlich

$$\Theta(x) < c_4 \ln x < c_5 \frac{u \ln \Theta(x)}{\Theta^2(x)}$$

ist, kann die Summe Σ_2 nach (33a), (43) nicht größer als

$$c_1'' \frac{u \lg \Theta(x)}{\Theta^2(x)} \cdot M_5 \frac{x \ln^3 x \cdot \Theta^2(x)}{u^2} = c_1'' M_5 \frac{x \ln^3 x \ln \Theta(x)}{u} = o\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right) \tag{49a}$$

sein.

Hilfssatz 3.

$$\Sigma_1 = O\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right).$$

Beweis. Bestimmen wir zuerst die Schwankung S der Funktion $\Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)$ für t zwischen $\varkappa$ und $\varkappa+1$, wo $\min \varkappa \leqq \varkappa < \max \varkappa$. Da $\Psi'(v) > 0$, ist nach (41) mit $0 < \lambda < 1$

$$S = \Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa+\lambda}\right) \frac{u-1-\delta}{(\varkappa+\lambda)^2} = \Psi''\left[\frac{u-1-\delta}{\varkappa+1} + \frac{(1-\lambda)(u-1-\delta)}{(\varkappa+1)(\varkappa+\lambda)}\right] \frac{u-1-\delta}{(\varkappa+\lambda)^2}$$

$$< M_3 \left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\frac{(u-1-\delta)(1-\lambda)}{(\varkappa+1)(\varkappa+\lambda)c_1}}} \lg^3 \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \cdot \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}.$$

Wie in (48a) wird für $x \geqq x_0$ der letztere Ausdruck und daher auch S mit Rücksicht auf (47a) nicht größer als

$$M_6\, \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \ln^3 \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \cdot \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2} < M_6 \frac{x \ln^3 x}{\Theta(x)} \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}. \tag{50a}$$

Ferner ist für $\varkappa \leqq t \leqq \varkappa + 1$, und $\varkappa < \max \varkappa$, wegen

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right) \leqq \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m \leqq x$$

(da $\Psi' > 0$), nach (37):

$$\Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)(u-1-\delta)\left(\frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{(\varkappa+1)^2}\right) \leqq M_6' u \frac{x \ln x}{(\min \varkappa)^3}. \tag{50b}$$

Die Differenz zwischen

$$\sum_{\min \varkappa \leqq \varkappa \leqq \max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}$$

und

$$\int\limits_{\min \varkappa}^{\max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right) \frac{u-1-\delta}{t^2}\, d t = \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} \Psi'(z)\, d z$$

ist nach (50a, b), (49)

$$(51)\quad \begin{cases} \leqq \displaystyle\sum_{\min \varkappa \leqq \varkappa \leqq \max \varkappa} \int\limits_{\varkappa}^{\varkappa+1} \left| \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right) \frac{u-1-\delta}{t^2} - \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa+1}\right) \frac{u-1-\delta}{(\varkappa+1)^2} \right| \\ + \Psi'\left(\dfrac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right) \dfrac{u-1-\delta}{(\min \varkappa)^2} \\ \qquad < \left\{ M_6 \dfrac{x \ln^3 x}{\Theta(x)} \left(\dfrac{n-1-\delta}{(\min \varkappa)^2}\right)^2 + u M_6' \dfrac{x \ln x}{(\min \varkappa)^3} \right\} \dfrac{u\, c_1' \ln \Theta(x)}{\Theta^2(x)} \\ + \Psi'\left(\dfrac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right) \dfrac{u-1-\delta}{(\min \varkappa)^2} < M_7 \dfrac{x \ln^3 x \ln \Theta(x)}{\min \varkappa} \text{ nach (46), (37), (48b).} \end{cases}$$

Die Summe Σ_1 ist

$$\leqq 2 \frac{(1+\delta) \max \varkappa}{u-1-\delta} \sum_{\min \varkappa \leqq \varkappa \leqq \max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}.$$

Die Differenz zwischen dieser Summe und dem Ausdruck

$$2 \cdot (1+\delta) \frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} \Psi'(z)\, d z$$

ist nach (51), (46), (43), (33a)

$$(52)\quad \leqq 2(1+\delta) \frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} M_7 \frac{x \ln^3 x \ln \Theta(x)}{\min \varkappa} < M_8 \frac{\ln \Theta(x)}{\Theta x} \frac{x}{\Theta^2(x)} = o\left(\frac{x}{\Theta^2(x)}\right).$$

Es ist nach (47a)

$$(53)\quad \frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}} \Psi'(z)\, d z = \frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} \left[\Psi(z)\right]_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}}$$

$$< C_2 \frac{\Psi\left(\dfrac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right)}{\Theta(x)} < C_3 \frac{x}{\Theta^2(x)},$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen. Die ganze Summe (47) ist nach (48) und Hilfssatz 2, 3 von der Größenordnung

$$(54)\quad C \frac{x}{\Theta^2(x)}.$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Es sei $\alpha = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4C}\right)$.

Hilfssatz 4. Es gibt für jedes $x \geqq x_0$ eine Teilmenge Φ von F von $[x\Theta(x)] = A$ Gliedern, die und deren Differenzen zwischen a, b liegen (einschließlich der Grenzen), wo

$$a = \ln^3 x\,\Theta^3(x) < b = \ln^3 x\,\Theta^4(x).$$

Beweis. Für $x \geqq x_0$ liegt bei jedem ganzen $k > 0$ mit $(k+1)\,a \leqq b$ im Innern des Intervalls $(ka, (k+1)\,a)$ mindestens ein Glied der Folge F. Denn sei

$$r(\xi) = ka, \quad r(\eta) = (k+1)\,a, \quad \eta - \xi = t,$$

so ist

$$a = r(\eta) - r(\xi) = t\,r'(\xi + \lambda t) = t\,\Theta(\xi + \lambda t) \quad (0 < \lambda < 1).$$

Da (für große x)

$$r(\eta) = (n+1)\,a \leqq b < x,$$

und

$$r(v) > 0, \quad r'(v) > 1 \qquad \text{für } v > 0,$$

so ist also $\eta < x$, d. h.

$$\Theta(\xi + \lambda t) \leqq \Theta(\eta) \leqq \Theta(x);$$

d. h. für $x \geqq x_1$ ist

$$t = \frac{a}{\Theta(\xi + \lambda t)} \geqq \frac{a}{\Theta(x)} = \Theta^2(x)\ln^3 x > 2.$$

Es gibt somit zwei ganze Zahlen n, $n+1$ mit

$$ka \leqq r(\xi) < r(n) < r(n+1) < r(\eta) = (k+1)\,a.$$

Wegen $r'(v) > 1$ ist $r(n) \leqq [r(n+1)] \leqq r(n+1)$, woraus die Behauptung folgt. Wir teilen nun das Intervall (a, b) in

$$\left[\frac{b-a}{2a}\right] = \left[\frac{\Theta(x) - 1}{2}\right] \quad (\geqq [\alpha\,\Theta(x)] \text{ für } x \geqq x_1 (\geqq x_0))$$

getrennte Teilintervalle der Länge $2\,a$ ein. Wir wählen dann in der linken Hälfte jedes der $[\alpha\Theta(x)]$ ersten Intervalle ein Glied von F. Diese bilden eine Teilmenge Φ der gewünschten Art. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Jetzt wollen wir zeigen, daß $2\,F$ eine fast positive Dichtigkeit hat. Wir bilden dazu alle Zahlen $\varphi_i + f_j$, $i = 1, \ldots, A$, f_j in F, für die

$$f_j \leqq x - \varphi_i;$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ bedeuten dabei die wachsend geordneten Zahlen der Menge Φ des Hilfssatzes 4.

Hilfssatz 5. Die Anzahl der $f_j \leqq x - b$ (also auch die der $f_j \leqq x - \varphi_i$) ist für $x \geqq x_0$ nicht kleiner als $\left[\frac{x}{\Theta(x)}\right]$.

Beweis. Es genügt, für $c = \frac{x}{\Theta(x)}$ zu zeigen, $r(c) \leqq x - b$, da dann die Zahlen $[r(v)]$ $(v = 1, \ldots, [c])$ wegen $r'(v) > 1$ eine Gesamtheit von $[c]$ verschiedenen Zahlen $f_j \leqq x - b$ darstellen. Es ist offenbar

$$r(c) - r(1) = \int_1^c \Theta(y)\,dy = \int_{\Theta(1)}^{\Theta(c)} z\Psi'(z)\,dz = z\Psi(z)\Big|_{\Theta(1)}^{\Theta(c)} - \int_{\Theta(1)}^{\Theta(c)} \Psi(z)\,dz.$$

Da zwischen $\Theta(1)$ und $\Theta(c)$ durchweg $\Psi(z) > 0$, $\Psi'(z) > 0$ gilt, so ist für $x \geqq x_0$ mit $0 < \lambda < 1$:

$$\int_{\Theta(1)}^{\Theta(c)} \Psi(z)\,dz > \int_{\Theta(c/z)}^{\Theta(c)} \Psi(z)\,dz > \Psi\left(\Theta\left(\frac{c}{z}\right)\right)\left(\Theta(c) - \Theta\left(\frac{c}{z}\right)\right)$$
$$= \frac{c}{2}\,\Theta'\left(\frac{c}{z} + \lambda\frac{c}{z}\right)\frac{c}{2} > c_1 \frac{c}{2\ln c},$$

Nach (34), und auf Grund der Ungleichung: $\Theta''(z) < 0$ für $z > 1$. Nach (33a) ist also reichlich

$$\int_{\Theta(1)}^{\Theta(c)} \Psi(z)\,dz > \frac{x}{2\cdot\Theta(x)}\cdot\frac{c_1}{\ln\left(\frac{x}{\Theta(x)}\right)} > \ln^3 x\,\Theta^4(x) + r(1) = b + r(1).$$

Somit ist

$$r(c) < c\Theta(c) - b = \frac{x}{\Theta(x)}\cdot\Theta\left(\frac{x}{\Theta(x)}\right) - b < \frac{x}{\Theta(x)}\,\Theta(x) - b = x - b.$$

Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Wir erhalten also mindestens $[\alpha\Theta(x)]\cdot\left[\frac{x}{\Theta(x)}\right]$ formal verschiedene Ausdrücke $\varphi_i + f_j$, die die Zahl x nicht überschreiten:

$$\text{(54a)}\qquad \left.\begin{array}{ll} (1) & \varphi_1 + f_1,\ \varphi_1 + f_2,\ \ldots,\ \varphi_1 + f_B, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A) & \varphi_A + f_1,\ \varphi_A + f_2,\ \ldots,\ \varphi_A + f_B. \end{array}\right\} \begin{array}{l} B = [c] = \left[\frac{x}{\Theta(x)}\right] \\ A = [\alpha\Theta(x)] \end{array}$$

In der ν-ten Zeile $(\nu = 1, \ldots, A)$ kommen für $x \geqq x_0$ von den in früheren Zeilen stehenden Gliedern verschiedene Ausdrücke in einer Anzahl hinzu, die nicht kleiner ist als

$$\left[\frac{x}{\Theta(x)}\right] - (\nu - 1)\,C\frac{x}{\Theta^2(x)}\left(\geqq \frac{x}{\Theta(x)}\left(\frac{1}{2} - \frac{C}{\Theta(x)}\cdot(\nu - 1)\right)\right).$$

Denn die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$\text{(54b)}\qquad f_n + \varphi_\nu = f_m + \varphi_\varkappa \quad (o < \varkappa < \nu,\ \varkappa, \nu \text{ fest};\ f_m \leqq x - b),$$

d. h. von

$$f_m - f_n = \varphi_\nu - \varphi_\varkappa = u$$

ist, da die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 nach Wahl der Teilfolge Φ durch Hilfssatz 4 erfüllt sind, für $x \geqq x_0$ nicht größer als

$$C\frac{x - b}{\Theta^2(x - b)} \leqq C\frac{x}{\Theta^2(x)},$$

also ist die Anzahl der Lösungen von (54b) bei festem ν und beliebigem $\varkappa$ mit $o < \varkappa < \nu$ nicht größer als $C \frac{x}{\Theta^2(x)}(\nu - 1)$, d. h. nur so viel Glieder der ν-ten Zeile von (54a) können schon in einer der früheren Zeilen vorkommen. Somit ist die Gesamtzahl der verschiedenen Ausdrücke $\varphi_i + f_j$, $i \leqq A = [\alpha\,\Theta(x)]$, $j \leqq B$, da $\alpha \leqq \frac{1}{4C}$ gewählt war, für $x \geqq x_0$ nicht kleiner als

$$\frac{x}{\Theta(x)} \sum_{\nu=1}^{A} \left(\frac{1}{2} - (\nu - 1)\frac{C}{\Theta(x)}\right) \geqq \frac{x}{\Theta(x)}\left(\frac{\alpha\,\Theta(x)}{4} - C \cdot \frac{(\alpha\,\Theta(x))^2}{2\,\Theta(x)}\right)$$
$$= x\frac{\alpha}{4}(1 - 2C\alpha) \geqq x\frac{\alpha}{8},$$

d. h. für $x \geqq x_0$ ist

$$N_{2F}(x) \geqq N_{F+\Phi}(x) \geqq x\frac{\alpha}{8}.$$

Damit ist bewiesen, daß $2F$ fast positive Dichtigkeit hat. Nach Satz 1, 2 ist daher $2F$, also F eine Basis der natürlichen Zahlen. Daß F eine beständige Basis bildet, folgt wie bei den vorigen Sätzen, da die Anzahl der Lösungen von (54a) für eine Teilfolge nicht größer als die für die ganze Folge ist und die untere Schranke der Anzahl der Glieder einer dichten Teilfolge sich um einen konstanten Faktor von der entsprechenden Zahl für die ganze Folge unterscheidet. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Beispiel. Man kann jede ganze Zahl zerlegen in 25 Summanden von der Form $[n\ln n]$ und in einen Summanden, der kleiner als eine feste Zahl ist.

In diesem Falle finden wir, daß die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$[n\ln n] - [m\ln m] = u, \qquad n\ln n < x$$

für

$$\Theta^3(x)\ln^3 x < u < \ln^3 x\,\Theta^4(x) \qquad (\Theta(x) = \ln x + 1)$$

für $x \geqq x_0$ nicht größer als $3{,}1\frac{x}{\ln^2 x}$ ist.

Daraus folgt, daß die Summenfolge $[n\ln n] + [m\ln m]$ eine fast positive Dichtigkeit besitzt, die größer als $\frac{1}{6{,}2}$ ist. Hieraus folgt nach Sätzen I 1, 2 die Behauptung.

Ebenso kann man die Möglichkeit der Zerlegung der ganzen Zahlen in eine beschränkte Anzahl von Summanden von der Form: $[\lg\Gamma(n)]$, $[n\lg\lg n]$ $(n \geqq n_0)$, usw. beweisen.

Teil II.

§ 1.

Die Primzahlfolge.

Satz 6. **Die Folge $p_1 = 1$, $p_2, p_3, \ldots$, wo p_i für $i > 1$ die wachsend geordneten Primzahlen durchläuft, bildet eine beständige Basis der natürlichen Zahlen.**

Hilfssatz 1 (Viggo Brun)[3]. Die Anzahl $A(u, x)$ der Lösungen des Systems:

$$p_i - p_j = u, \qquad p_i \leqq x, \quad p_i \text{ Primzahl,} \tag{55}$$

ist für $x \geqq x_1$ und $0 < u \leqq x$ kleiner als $k_3 \frac{x}{\ln^2 x} \cdot S(u)$, wo

$$S(u) = \prod_{\substack{p \geqq 17 \\ p \mid u}} \frac{p}{p-2}.$$

Wir werden einen Rademacherschen[4]) Beweis, der eine Abschätzung von $A(u, x)$ nach unten gibt, auf die Abschätzung nach oben übertragen.

Bezeichnen wir mit

$$P(\varDelta, D, x;\ a_1, b_1, p_1;\ \ldots;\ a_r, b_r, p_r) \tag{56}$$

die Anzahl der Zahlen $z > 0$, von der Form $\varDelta + Dt$, $t = 1, 2, \ldots$, die die Zahl x nicht überschreiten und zu keiner der Progressionen

$$a_i + t_i p_i, \ b_j + t_j p_j \quad (i, j = 1, \ldots, r;\ t_i, t_j = 1, 2, \ldots)$$

gehören, für die also die Relation

$$p_i \nmid (z - a_i)(z - b_i) \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{56a}$$

gilt. Hierbei sind $\varDelta, D, a_i, b_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ feste ganze Zahlen, $a_i \not\equiv b_i \pmod{p_i}$ $p_i \nmid D$; weiter sind p_i Primzahlen, die in ihrer natürlichen Reihenfolge gewählt sind:

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_r,$$

wobei $p_1 > 5$ vorausgesetzt wird. Wenn $r = 0$ ist, wenn also keine Relationen (56a) zu erfüllen sind, schreiben wir $P(\varDelta, D, x)$ für (56).

Da wir eine Abschätzung dieser Anzahl brauchen, die von $\varDelta$, a_i, b_j gar nicht abhängt, werden wir im folgenden statt (56) die kürzere Schreibweise benutzen:

$$P(D, x;\ p_1, p_2, \ldots, p_r). \tag{57}$$

Es gilt offenbar die Identität:

$$\begin{aligned} P(\varDelta, D, x;\ p_1, \ldots, p_r) &= P(\varDelta, D, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1}) \\ &\quad - P(\varDelta_r, Dp_r, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1}) - P(\varDelta_r', Dp_r, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1}), \end{aligned} \tag{58}$$

---

[3]) Viggo Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. Videnskapsselskapets Skrifter, I, Math.-Naturw. Kl., 1920, Nr. 3, Kristiania.

[4]) Rademacher, Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie (I), Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), und Landau, Göttinger Nachrichten 1930.

da die in $P(\Delta, D, x; p_1, \ldots, p_{r-1})$ zuviel aufgenommenen z die Form haben:

$$\left.\begin{cases} z \equiv a_r \pmod{p_r} \\ \quad \equiv \Delta \pmod{D} \end{cases} \text{oder} \quad \begin{aligned} z &\equiv b_r \pmod{p_r} \\ &\equiv \Delta \pmod{D} \end{aligned}\right\},$$

d. h.

$$z \equiv \Delta_r \pmod{D p_r} \quad \text{oder} \quad z \equiv \Delta_r' \pmod{D p_r},$$

da $p_i \nmid D$ gilt. Hierbei sind wegen $a_r \not\equiv b_r \pmod{p_r}$ die beiden Restklassen, die durch Δ_r, Δ_r' repräsentiert werden, verschieden.

Wir werden diese Identität symbolisch so schreiben:

$$\text{(59)} \qquad P(D, x;\ p_1, \ldots, p_r) = P(D, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1}) \\ - 2P(Dp_r, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1}).$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung:

$$\text{(60)} \quad P(D, x;\ p_1, \ldots, p_r) = P(D, x) - 2P(Dp_1, x) - 2P(Dp_2, x;\ p_1) \\ - \ldots - 2P(Dp_r, x;\ p_1, \ldots, p_{r-1})$$

und weiter

$$\text{(61)} \quad P(D, x;\ p_1, \ldots, p_r) = P(D, x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha, x) \\ + 4\sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta, x;\ p_1, \ldots, p_{\beta-1}).$$

Wenn wir in der letzten Summe in jedem Gliede bei gegebenem $r_1 < r$ nur diejenigen der $p_1, \ldots, p_{\beta-1}$ der in $P(Dp_\alpha, p_\beta, x;\ p_1, \ldots, p_{\beta-1})$ hinter dem Semikolon auftretenden Primzahlen berücksichtigen, deren Indizes höchstens r_1 sind, so verkleinern wir die Summe nicht. Es ist also

$$\text{(62)} \quad P(D, x;\ p_1, \ldots, p_r) \leqq P(D, x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha, x) \\ + 4\sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta, x;\ p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}(\beta-1, r_1)}).$$

Sind endlich $r_1, r_2, \ldots, r_n$ eine nachher festzulegende Folge von Indizes, für die

$$1 \leqq r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < r$$

gilt, so ist ebenso

$$\text{(63)} \quad P(D, x;\ p_1, \ldots, p_r) \leqq P(D, x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha, x) \\ + 4\sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta, x) - + \ldots \\ - 2^{2n-1} \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta<\alpha} \sum_{\gamma=1}^{\mathrm{Min}(\beta-1, r_1)} \sum_{\delta<\gamma} \cdots \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{Min}(\varkappa-1, r_n-1)} P(Dp_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta \ldots p_\lambda, x) \\ + 2^{2(n+1)} \sum_{\alpha=1}^{r} \cdots \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{Min}(\varkappa-1, r_n-1)} \sum_{\mu<\lambda} P(Dp_\alpha \ldots p_\lambda p_\mu, x;\ p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}(\mu-1, r_n)}).$$

Wir verkleinern den Ausdruck rechts nicht, wenn wir in der letzten Summe die Summanden

$$P(D p_\alpha \ldots p_\mu, x; p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}(\mu-1, r_n)}) \quad \text{durch} \quad P(D p_\alpha \ldots p_\mu, x)$$

ersetzen. Da

$$\left[\frac{x}{D}\right] \leqq P(D, x) \leqq \left[\frac{x}{D}\right] + 1 \tag{64}$$

ist, so folgt

$$P(D, x; p_1, \ldots, p_r) \leqq \frac{x}{D}\Big\{1 - 2\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{1}{p_\alpha} + 4\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{p_\alpha p_\beta} - + \ldots \tag{65}$$
$$+ 2^{2n}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha}\cdots\sum_{\lambda=1}^{\mathrm{Min}(\varkappa-1, r_{n-1})}\sum_{\mu<\lambda}\frac{1}{p_\alpha p_\beta \cdots p_\gamma p_\mu}\Big\} + R,$$

wo R die Gesamtzahl der Einzelsummanden in allen Summen ist, wobei daran zu erinnern ist, daß die Zweierpotenzen als symbolische Koeffizienten die Zusammenfassung verschiedener gleichartiger Summanden andeuten sollen. Wird für $i = 1, \ldots, 2n$ die Summe aller derjenigen vorkommenden Einzelprodukte, in denen genau i Faktoren $\frac{1}{p_j}$ auftreten, mit $E^{(i)}$ bezeichnet, und

$$E = 1 - E^{(1)} + E^{(2)} - + \ldots + E^{(2n)} \tag{66}$$

gesetzt, so folgt aus (65)

$$P(D, x; p_1, \ldots, p_r) \leqq \frac{x}{D}E + R. \tag{67}$$

Hierin ist

$$R \leqq (2r+1)^2(2r_1+1)^2\ldots(2r_{n-1}+1)^2, \tag{68}$$

(wobei $r_0 = r$ gesetzt ist), wie unmittelbar aus dem Vergleich der Summe in (65) mit dem Produkt

$$\Big(1 - \sum_{\alpha=1}^{r}\frac{2}{p_\alpha}\Big)\Big(1 - \sum_{\beta=1}^{r-1}\frac{2}{p_\beta}\Big)\Big(1 - \sum_{\gamma=1}^{r_1}\frac{2}{p_\gamma}\Big)\Big(1 - \sum_{\delta=1}^{r_1-1}\frac{2}{p_\delta}\Big)\ldots, \tag{68a}$$

wobei $\alpha, \beta, \ldots$ nicht wie in (65) an die Bedingung

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta \ldots$$

gebunden seien, folgt.

Wir setzen noch $r_{n+1} = 0$ und bezeichnen für $m = 1, \ldots, n+1$ und $i = 1, 2, \ldots$ mit

$$E_m^{(i)}$$

die Summe aller derjenigen der obigen Einzelprodukte, in denen genau i Faktoren vorkommen und alle auftretenden Indizes größer als r_m sind.

Das ist im Falle $m \leqq n$ nur für die $2m$ ersten Indizes i möglich; also ist $E_m^{(i)} = 0$ für $m \leqq n$, $i > 2m$ sowie für $m = n+1$, $i > 2n$. Wir setzen ferner für $m = 1, \ldots, n+1$

$$E_m = 1 - E_m^{(1)} + E_m^{(2)} - + \ldots; \tag{69}$$

die Summe bricht im Falle $m \leqq n$ mit dem Gliede $E_m^{(2m)}$, im Falle $m = n+1$ mit dem Gliede $E_{n+1}^{(2n)}$ ab. Es ist $E_{n+1} = E$.

Für den Übergang von E_{m-1} zu E_m $(m = 2, \ldots, n+1)$ bezeichnen wir die elementarsymmetrischen Funktionen von

$$\frac{2}{p_{r_m+1}}, \frac{2}{p_{r_m+2}}, \ldots, \frac{2}{p_{r_{m-1}}} \quad \text{mit} \quad S_m^{(1)}, S_m^{(2)}, \ldots. \tag{70}$$

Für die Bildung von $E_m^{(i)}$ müssen im obigen den i ersten Indizes sämtliche Systeme von Werten $\alpha, \beta, \ldots$ mit $\alpha > \beta > \ldots$ erteilt werden, die größer als r_m sind. Das ergibt der Reihe nach folgende Möglichkeiten:

1. Keiner der i Indizes ist größer als r_{m-1}; die Summe dieser Glieder ist $S_m^{(i)}$.

2. Nur der erste Index ist größer als r_{m-1}; das ergibt $E_{m-1}^{(1)} S_m^{(i-1)}$.

3. Nur die beiden ersten Indizes sind größer als r_{m-1}; das ergibt $E_{m-1}^{(2)} S_m^{(i-2)}$.

. . . .

$i+1$. Alle i Indizes sind größer als r_{m-1}; das ergibt $E_{m-1}^{(i)}$.

(Ist $i \geqq 2m-1$, so braucht man nur die Möglichkeiten 1. bis $2m-1$. zu berücksichtigen.)

Wir haben somit

$$E_m^{(i)} = S_m^{(i)} + E_m^{(1)} S_m^{(i-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(i)}. \tag{71}$$

Also ist

$$\begin{aligned} E_m = 1 &- (S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(1)}) + (S_m^{(2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(2)}) - + \ldots \\ &+ (S_m^{(2m-2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-3)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)}) \\ &- (S_m^{(2m-1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-2)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(1)}) \\ &+ (S_m^{(2m)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(2)}). \end{aligned} \tag{72}$$

Hiermit vergleichen wir das Produkt

$$\left\{\begin{aligned} &E_{m-1} \prod_{\nu=r_m+1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) \\ &= (1 - E_{m-1}^{(1)} + E_{m-1}^{(2)} - + \ldots)(1 - S_m^{(1)} + S_m^{(2)} - + \ldots) \\ &= 1 - (S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(1)}) + (S_m^{(2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(2)}) - + \ldots \\ &\quad + (S_m^{(2m-2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-3)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)}) \\ &\quad - (S_m^{(2m-1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-2)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(1)}) \\ &\quad + (S_m^{(2m)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(2)}) \\ &\quad - (S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)}) + - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{73}$$

Wir werden es nachher so einrichten, daß die $S_m^{(i)}$ mit wachsendem i monoton nicht zunehmen und sämtlich kleiner als 1 ausfallen. Dann nehmen die Klammern von der Stelle an, wo die Anzahl ihrer Glieder gleich $2m-1$ geworden ist, monoton nicht zu; da sie mit abwechselnden Vorzeichen versehen sind, so ist E_m, um das nächstfällige Glied

$$-\left(S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \dots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)}\right)$$

vermehrt, höchstens gleich dem Ausdruck (73). Führen wir noch die Abkürzungen

$$\Pi_m = \prod_{\nu = r_m + 1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, n+1 \tag{74}$$

ein, wo $r_0 = r$ gesetzt sei, so ergibt sich also

$$E_m \leqq E_{m-1} \Pi_m + \left(S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \dots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)}\right), \tag{75}$$

jedoch immer unter der Voraussetzung $1 > S_m^{(1)} \geqq S_m^{(2)} \geqq \dots$.

Von diesen Ungleichungen zieht die erste die anderen nach sich. Denn für die elementarsymmetrischen Funktionen $S^{(1)}, \dots, S^{(t)}$ von t untereinander verschiedenen positiven Größen gelten die Schlömilchschen Ungleichungen

$$\frac{S^{(1)}}{t} > \frac{2 S^{(2)}}{(t-1) S^{(1)}} > \dots > \frac{t S^{(t)}}{S^{(t-1)}},$$

aus denen einerseits

$$S^{(1)} > \frac{S^{(2)}}{S^{(1)}} > \dots > \frac{S^{(t)}}{S^{(t-1)}}$$

und im Falle $S^{(1)} < 1$ somit

$$S^{(1)} > S^{(2)} > \dots > S^{(t)} \tag{76}$$

folgt und sich andererseits

$$S^{(i)} < \frac{(S^{(1)})^i}{i!} \qquad \text{für } i < 1 \tag{77}$$

ergibt. Man erkennt aus (76), daß die Gültigkeit von (75) schon feststeht, wenn die Indizes r_m so gewählt werden, daß für jedes m aus der Reihe $2, \dots, n+1$ die Summe der Größen $\frac{2}{p_\nu}$ $(r_m < \nu \leqq r_{m-1})$ kleiner als 1 ausfällt.

Die Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ mögen nun bei festem u als aufeinanderfolgende in u nicht aufgehende Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge gewählt werden. $p_1 \geqq 3$ sei so groß, daß es ein $h_0 > 1$ mit $\log h_0 < \frac{1}{2}$ und

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{2}{p_1} > \dfrac{1}{h_0^2}, \\ p_1 > \dfrac{1}{\log h_0} \end{cases} \tag{77a}$$

gibt. Es sei $h_0 > h > 1$.

Wegen

$$\sum_{p \leqq \omega} \frac{1}{p} = \log\log\omega + c_1 + o(1) \tag{78}$$

und der daraus folgenden Gleichung

$$\prod_{3 \leqq p \leqq \omega} \left(1 - \frac{2}{p}\right) = \frac{c_2}{(\log\omega)^2} + o\left(\frac{1}{(\log\omega)^2}\right) \tag{79}$$

gibt es ein ω_0 so, daß für $\omega > \omega_0$

$$\begin{cases} 0 < \sum\limits_{\omega < p \leqq \omega^h} \frac{1}{p} < \log h_0, \\ \prod\limits_{\omega < p \leqq \omega^h} \left(1 - \frac{2}{p}\right) > \frac{2}{h_0^2} \end{cases} \tag{80}$$

ist.

Falls $p_r > \omega_0$ ist, legen wir die Indizes r_m folgendermaßen fest. Es sei p_{r_1} die größte in u nicht aufgehende Primzahl $\leqq p_r^{1/h}$, p_{r_2} die größte in u nicht aufgehende Primzahl $\leqq p_r^{1/h^2}$ usw., und diese Wahl der r_m werde so lange fortgesetzt, wie noch $p_{r_m} > \omega_0$ ausfällt. Wegen

$$\sum_{p_r^{1/h^\nu} < p \leqq p_r^{1/h^{\nu-1}}} \frac{1}{p} > 0$$

ist in der Tat $r > r_1 > r_2 > \ldots$.

Es sei p_{r_k} die kleinste Primzahl, die so bestimmt ist. Nach (80) ist

$$\begin{cases} 0 < \sigma_1 = \sum\limits_{\nu = r_1 + 1}^{r} \frac{1}{p_\nu} < \log h_0, \quad \prod_1 = \prod\limits_{\nu = r_1 + 1}^{r} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 < \sigma_k = \sum\limits_{\nu = r_k + 1}^{r_{k-1}} \frac{1}{p_\nu} < \log h_0, \quad \prod_k = \prod\limits_{\nu = r_k + 1}^{r_{k-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2}. \end{cases} \tag{81}$$

Die Zahlen $r_{k+1}, \ldots, r_{n+1} = 0$ werden nun der Reihe nach so festgelegt, daß jeweils r_m $(m = k+1, \ldots, n+1)$ das kleinste $\mu \geqq 0$ mit

$$0 < \sum_{\nu = \mu + 1}^{r_{m-1}} \frac{1}{p_\nu} < \log h_0, \tag{82}$$

$$\prod_{\nu = \mu + 1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2} \tag{83}$$

ist $\left(\text{dieses } \mu \text{ gibt es nach (77a) wegen } \frac{1}{p_{r_{m-1}}} < \log h_0,\ 1 - \frac{2}{p_{r_{m-1}}} > \frac{1}{h_0^2}\right)$.
Auch hier sei

$$\sigma_m = \sum_{\nu = r_m + 1}^{r_{m-1}} \frac{1}{p_\nu}, \quad \Pi_m = \prod_{\nu = r_m + 1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) \tag{83a}$$

gesetzt.

Ist dagegen $p_r \leqq \omega_0$, so werden alle Indizes r_m $(m = 1, \ldots, n+1)$ der Reihe nach so festgelegt, daß jeweils r_m das kleinste $\mu \geqq 0$ mit (82), (83) ist; dabei ist $r_0 = r$ zu setzen. Wieder sei für $m = 1, \ldots, n+1$ die Bezeichnung (83a) eingeführt.

Aus (68) folgt

$$R \leqq p_r^2 p_{r_1}^2 \ldots p_{r_{n-1}}^2 \leqq p_r^2 p_r^{2/h} \ldots p_r^{2/h^k} p_{r_{k+1}}^2 \ldots p_{n-1}^2 < C_3 p_r^{2h/h-1}, \tag{84}$$

wo C_3 nur von h und h_0 abhängt.

Aus (75) soll durch Rekursion $E_{n+1} = E$ nach oben abgeschätzt werden. Wir führen die Bezeichnung

$$\Phi_m = S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)} \quad \text{für } m = 2, \ldots, n+1 \tag{85}$$

ein. Dann schließen wir nach (75) und (81)

$$E_2 \leqq E_1 \Pi_2 + \Phi_2 \leqq \Pi_2 (E_1 + h_0^2 \Phi_2),$$
$$E_3 \leqq E_2 \Pi_3 + \Phi_3 \leqq \Pi_3 (E_2 + h_0^2 \Phi_3) \leqq \Pi_2 \Pi_3 (E_1 + h_0^2 \Phi_2 + h_0^4 \Phi_3)$$

usw., schließlich

$$E = E_{n+1} \leqq \Pi_2 \Pi_3 \ldots \Pi_{n+1} (E_1 + h_0^2 \Phi_2 + \ldots + h_0^{2n} \Phi_{n+1}). \tag{86}$$

Aus (85) ergibt sich, wenn man noch

$$S_\nu^{(1)} = 2\sigma_\nu < 2 \log h_0 < 1 \tag{77a}$$

berücksichtigt, wegen (77) unter Benutzung der Abkürzung $\tau = 2 \log h_0$

$$\Phi_m \leqq \frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} + E_{m-1}^{(1)} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} \frac{\tau^3}{3!}. \tag{87}$$

Aus (71) leiten wir ebenso ab:

$$E_m^{(i)} \leqq \frac{\tau^i}{i!} + E_{m-1}^{(1)} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + E_{m-1}^{(i)}. \tag{88}$$

Insbesondere ist

$$E_m^{(1)} \leqq \tau + E_{m-1}^{(1)}, \tag{89}$$

und da

$$E_1^{(1)} = 2\sigma_1 < \tau, \tag{89a}$$

so ist

$$E_m^{(1)} < m\tau. \tag{90}$$

Um nun eine Abschätzung für Φ_m bei beliebigem m zu erhalten, sei irgendein $m_0 \leqq n+1$ herausgegriffen und die Konstanten c_0 und $\varkappa$ so gewählt, daß

(91) $$E_{m_0}^{(i)} < c_0 (\tau\varkappa)^i \quad \text{für } i = 1, \ldots, 2m_0 \text{ (also für } i \geqq 1)$$

ist. Dann folgt aus (88) für $i \geqq 1$

(92) $$E_{m_0+1}^{(i)} < \frac{\tau^i}{i!} + c_0 (\tau\varkappa)^i \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{i-2}}{(i-2)!} + \ldots + 1 \right\}.$$

Wird noch $c_0 \geqq 1$ angenommen, so hat man also

(93) $$E_{m_0+1}^{(i)} < c_0 e^{1/\varkappa} (\tau\varkappa)^i \qquad \text{für } i \geqq 1$$

und, indem man so weiterschließt,

(94) $$E_m^{(i)} < c_0 e^{\frac{m-m_0}{\varkappa}} (\tau\varkappa)^i \qquad \text{für } m \geqq m_0,\ i \geqq 1.$$

Aus (87) ergibt sich dann für $m > m_0$

(95) $$\Phi_m < \frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_0 e^{\frac{m-m_0-1}{\varkappa}} (\tau\varkappa)^{2m+1} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{2m}}{(2m)!} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{3}}{3!} \right\}$$
$$< c_0 e^{\frac{m-m_0-1}{\varkappa}} \left(e^{1/\varkappa} - 1 - \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{2\varkappa^2}\right) (\tau\varkappa)^{2m+1}$$

und somit aus (86), falls $e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2 < 1$ ist, durch Summierung einer geometrischen Reihe

(96) $$E < \Pi_2 \ldots \Pi_{n+1} \left\{ E_1 + h_0^2 \Phi_2 + h_0^4 \Phi_3 + \ldots + h_0^{2m_0-2} \Phi_{m_0} \right.$$
$$\left. + \frac{h_0^{2m_0} \left(e^{1/\varkappa} - 1 - \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)}{1 - e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2} c_0 (\tau\varkappa)^{2m_0+2} \right\}.$$

Um hierin den Nenner des Bruches möglichst groß zu erhalten, muß man $\varkappa = \frac{1}{2}$ setzen. Ferner wählen wir $m_0 = 1$. Weiterhin nehmen wir $h_0 = 1{,}29$ und damit $\frac{2}{9} < \log h_0 < 0{,}255$, $\frac{4}{9} < \tau < 0{,}51$.

Dann ist $e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2 < 1$ und somit (96) anwendbar. Da nach (89a) $E_1^{(1)} < \tau$ und nach (76)

(96a) $$E_1^{(2)} < E_1^{(1)} < \tau$$

ist, so kann $c_0 = 9$ gewählt werden. Dann wird wegen $\tau = 2 \log h_0$

(97) $$E < \Pi_2 \ldots \Pi_{n+1} \left(E_1 + \frac{9 (e^2 - 5) h_0^2 (\log h_0)^5}{1 - (e h_0 \log h_0)^2} \right).$$

Bemerkt man noch, daß gemäß (69) und (96a)

(98) $$E_1 = 1 - E_1^{(1)} + E_1^{(2)} < 1$$

ist und daß

$$1 < h_0^2 \Pi_1$$

ist, so ergibt sich eine numerische Abschätzung von E:

$$E < 2{,}1 \cdot \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_{n+1} = 2{,}1 \cdot \prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) = 2{,}1 \cdot \Pi. \tag{99}$$

Endlich sei noch

$$h = \frac{89}{69} < 1{,}29 = h_0. \tag{100}$$

Durch Einsetzen von (99) und (84) in (67) erhält man für $x \geqq x_0$, wenn p_r die größte Primzahl $\leqq x^{1/9}$ ist,

$$P(D, x;\, p_1, \ldots, p_r) < 2{,}1 \frac{x}{D} \Pi + c' p_r^{89/10} < k_0 x \left(\frac{\Pi}{D} + \frac{1}{\log^2 x}\right). \tag{101}$$

Jetzt können wir die genannte Abschätzung der Anzahl $A(u, x)$ der Lösungen der Gleichung

$$p_i - p_j = u \qquad (p_i \leqq x)$$

beweisen. Wir können das obige Siebverfahren bei festem ganzen u, $0 < u \leqq x$, auf

$$D = 1, \quad a_i = 0, \quad b_i = u, \qquad i = 1, \ldots, r \ (r \geqq 0)$$

anwenden, wobei p_i $(i = 1, \ldots, r)$ alle (etwa vorhandenen) Primzahlen p mit $17 \leqq p \leqq x^{1/9}$ durchläuft, die nicht in u aufgehen, da $p_i \nmid D(a_i - b_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ und (77a) mit unseren h_0 für alle $p_1 > 5$ erfüllt ist. Es bleiben nach (101) und (79) für $x \geqq x_0$ nicht mehr als

$$k_0 x \left(\prod_{17 \leqq p \leqq x^{1/9}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \frac{1}{\prod\limits_{\substack{17 \leqq p \leqq x^{1/9} \\ p \mid u}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)} + \frac{1}{\ln^2 x} \right)$$

$$\leqq k_1 \frac{x}{\ln^2 x} (1 + S(u)) < k_2 \frac{x}{\ln^2 x} S(u)$$

$$\left(\text{mit } S(u) = \prod_{\substack{p \geqq 17 \\ p \mid u}} \frac{p}{p-2}\right)$$

Zahlen übrig. Da $A(u, x)$ nicht größer ist als die Anzahl der Lösungen von

$$a - b = u, \quad 0 < a \leqq x, \quad p_i \nmid a \cdot b \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

(d. h. die Anzahl der a mit $p_i \nmid a(a - u)$, $0 < a \leqq x$), vermehrt um die doppelte Anzahl der Primzahlen $\leqq x^{1/9}$, so ist für $x \geqq x_1$

$$A(u, x) < 2 x^{1/9} + k_2 \frac{x}{\ln^2 x} S(u) < k_3 \frac{x}{\ln^2 x} S(u). \tag{102}$$

Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2.

$$\sum_{u=1}^{x} S^2(u) < \varkappa x.$$

Beweis. Setzen wir

$$P(u) = \prod_{\substack{p/u \\ p \geqq 17}} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right),$$

so ist

$$(103) \qquad \frac{S(u)}{P(u)} = \prod_{\substack{p/u \\ p \geqq 17}} \frac{p}{p-2} \cdot \frac{p-1}{p+1} = \prod_{\substack{p/u \\ p \geqq 17}} \frac{p^2-p}{p^2-p-2}$$

$$= \prod_{\substack{p/u \\ p \geqq 17}} \left(1 + \frac{2}{p^2-p-2}\right) < \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{p^2-p-2}\right) = \varkappa_1.$$

Ferner ist

$$P^2(u) = \left(\sum \frac{2^\nu}{(p_{i_1}-1)\dots(p_{i_\nu}-1)}\right)^2$$

$$= \sum 2^M \cdot \frac{2^M\, 2^{2(\nu-M)}}{(p_{i_1}-1)\dots(p_{i_M}-1)(p_{i_{M+1}}-1)^2\dots(p_{i_\nu}-1)^2},$$

da die Anzahl der Zerlegungen eines Ausdrucks

$$(p_{i_1}-1)\dots(p_{i_M}-1)\,(p_{i_{M+1}}-1)^2\dots(p_{i_\nu}-1)^2$$

in zwei Produkte von lauter verschiedenen Ausdrücken $p_i - 1$ gleich 2^M ist. Somit ist

$$\sum_{u=1}^{x} P^2(u)$$

$$= \sum_{17 \leqq p \leqq x} \left[\frac{x}{p_{i_1}\dots p_{i_M} p_{i_{M+1}}\dots p_{i_\nu}}\right] \frac{2^{2\nu}}{(p_{i_1}-1)\dots(p_{i_M}-1)(p_{i_{M+1}}-1)^2\dots(p_{i_\nu}-1)^2}$$

$$\leqq x \cdot \sum_{17 \leqq p \leqq x} \frac{2^{2\nu}}{(p_{i_1}-1)^2\dots(p_{i_M}-1)^2\,(p_{i_{M+1}}-1)^2\dots(p_{i_\nu}-1)^2}$$

$$\leqq x \sum_{17 \leqq p \leqq x} \frac{1}{(p_{i_1}-1)^{3/2}\dots(p_{i_\nu}-1)^{3/2}}$$

$$< x \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^{3/2}}\right) = \varkappa_2\, x.$$

Also ist nach (103), (104)

$$(105) \qquad \sum_{u=1}^{x} S^2(u) < \varkappa_1^2 \sum_{u=1}^{x} P^2(u) < \varkappa_1^2 \varkappa_2 \cdot x = \varkappa\, x.$$

Beweis von Satz 6. Nach Hilfssatz 1 und 2 und (102) ist für $x \geqq x_2$

$$(106) \qquad \sum_{u=1}^{x} A^2(u,x) < k_3^2\, \frac{x^2}{\ln^4 x} \sum_{u=1}^{x} S^2(u) < k\, \frac{x^3}{\ln^4 x}.$$

Da nach Tschebyschef

(107) $$p_r < C r \ln r,$$

sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt. Aus ihm folgt die Behauptung von Satz 6.

Folgerung. Die Primzahlen einer arithmetischen Progression $at + b$, $t = 1, 2, \ldots$, bilden eine beständige Basis der natürlichen Zahlen. Denn es ist bekannt, daß die relative Dichtigkeit der Primzahlen in der Progression $at + b$ in bezug auf die ganze Primzahlenfolge $\frac{1}{\varphi(a)}$ ist. Sie bilden somit eine dichte Teilfolge der Primzahlfolge.

§ 2.

Allgemeines Kriterium für eine beständige Basis.

Es sei eine beliebige Folge $F = (n_1, n_2, \ldots)$ von natürlichen Zahlen gegeben. Sei $x > 0$ und $n_\varkappa$ das größte Glied von F, das nicht größer als x ist; sei

(108) $$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} e^{2\pi i n_\nu y}$$

(wenn die Folge F fest vorgegeben ist, hängt diese Summe nur von den zwei Veränderlichen x und y ab).

Satz 7. Wenn man für eine Folge F eine nur von F abhängige, ganze Zahl $u > 0$ finden kann, die für beliebiges x der Ungleichung

(109) $$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy < C \frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}$$

genügt, so ist F eine beständige Basis der natürlichen Zahlen. [In (109) ist $C = C(u)$ eine von x unabhängige Konstante und $N(z) = N_F(z)$ ist, wie früher, die Anzahl der Glieder von F, die z nicht überschreiten.]

Beweis. Es sei $A_i(x)$ die Anzahl der Darstellungen der Zahl i als Summe von je u Gliedern n_ν der Folge F mit $n_\nu \leqq x$.

$(f(x, y))^u$ hat die Form:

(110) $$\sum_{\nu=1}^{u n_\varkappa} A_\nu(x)\, e^{2\pi i y \nu}$$

und es ist

(111) $$|f(x, y)|^{2u} = \left(\sum_{j=1}^{u n_\varkappa} A_j(x) \cos 2\pi y j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{u n_\varkappa} A_j(x) \sin 2\pi y j\right)^2$$
$$= \sum_{j=1}^{u n_\varkappa} A_j^2(x) + \sum_{\substack{j, l = 1 \\ j \neq l}}^{u n_\varkappa} 2 A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y (j - l).$$

Daraus folgt:

$$(112)\qquad \int_0^1 |f(x,\, y)|^{2u} d\, y = \sum_{j=1}^{u n_x} A_j^2(x).$$

Es ist, nach (109) und (112), da $A_j(x) = 0$ für $j > u n_x$,

$$(113)\qquad \sum_{j=1}^{x} A_j^2(x) \leq \sum_{j=1}^{u n_x} A_j^2(x) < C\,\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}.$$

Weiter ist

$$(114)\qquad \sum_{j=1}^{x} A_j(x) \geqq \sum_{j=1}^{x} A_j\left(\frac{x}{u}\right).$$

Da die letzte Summe offenbar gleich $\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^u$ ist, so gilt die Ungleichung:

$$(115)\qquad \sum_{j=1}^{x} A_j(x) \geqq \left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^u.$$

Bezeichnen wir mit $M(x)$ die Anzahl der $A_j(x)$, $j \leqq x$, die ungleich Null sind, dann ist (Schwarzsche Ungleichung):

$$(116)\qquad M(x) \geqq \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{x} A_j(x)\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{x} A_j^2(x)} \geqq \frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{C\,\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}} = \frac{x}{C}.$$

Die letzte Ungleichung zeigt, daß die Summenfolge uF eine positive Dichtigkeit $\geqq \frac{1}{C}$ besitzt, da $N_{uF}(x) \geqq M(x)$. Daraus folgt, daß F eine Basis bildet.

Um zu beweisen, daß F auch eine beständige Basis bildet, genügt es zu bemerken, daß für jede dichte Teilfolge von F von einer relativen Dichtigkeit $\geqq \alpha$ die linke Seite von (109), wie aus (112) ersichtlich, nur kleiner werden kann, die Bedingung (109) also erfüllt bleibt, wenn man die Konstante C durch $C\,\frac{1}{\alpha^{2u}}$ ersetzt.

Bemerkung. Die Bedingung (109) in Satz 7 darf man im Wortlaut des Satzes durch folgende Bedingung ersetzen:

$$(117)\qquad \frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x,\, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u} < C\,\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}.$$

In der Tat ist mit $A_j(x) = A_j$

$$(118)\qquad \frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x,\, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u}$$

$$= \sum_{j=1}^{u n_x} A_j^2 + \frac{2}{x}\sum_{\substack{j=1\\ j \neq l}}^{u n_x}\sum_{l=1}^{u n_x}\sum_{a=0}^{x=1} A_j A_l \cos 2\pi\,\frac{a}{x}\,(j-l).$$

Es wird aber

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}\cos 2\pi\frac{a}{x}(j-l) = \begin{cases}1\\0\end{cases}$$

sein, je nachdem $j-l$ durch x teilbar ist oder nicht.

Es folgt also:

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x,\frac{a}{x}\right)\right|^{2u} \geqq \sum_{j=1}^{u n_x} A_j^2(x) = \int_0^1 |f(x,y)|^{2u}\,dy. \tag{119}$$

Wenn die Bedingung (117) erfüllt ist, so wird offenbar auch (109) erfüllt sein. (117) kann man auch in der Form

$$\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x,\frac{a}{x}\right)\right|^{2u} < C\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u} \tag{120}$$

schreiben.

§ 3.

Anwendung auf die Verallgemeinerung des Waringschen Satzes.

Unter dem Waringschen Satz versteht man die Behauptung, daß die Folge der p-ten ($p > 0$, beliebig ganz) Potenzen aller natürlichen Zahlen eine Basis der natürlichen Zahlen bildet.

Dieser Satz wurde zuerst von Hilbert (1908), später von Hardy und Littlewood (1921) und von Winogradoff (1924) bewiesen.

Es gilt folgender Satz, der als eine Verallgemeinerung des Waringschen Satzes angesehen werden kann:

Satz 8. Die Potenzfolge $F = (1^p, 2^p, \ldots)$ (p beliebig, positiv und ganz) bildet eine beständige Basis der natürlichen Zahlen.

Um diesen Satz zu beweisen, werden wir die Erfüllbarkeit der Bedingung (117) für die Folge der p-ten Potenzen nachweisen. Dabei werden wir die bekannten Abschätzungsmethoden benutzen, die in den obenerwähnten Beweisen des Waringschen Satzes (z. B. im Winogradoffschen Beweise) schon entwickelt sind.

Formulierung der Hilfssätze.

1. Landau-v. d. Corputsche Ungleichung[5]. $g(v)$ sei eine reell differentiierbare Funktion der Veränderlichen v, die für $m \geqq v \geqq n$ (m, n ganz, $m > n$) folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{cases} 0 < \Theta < g'(v) < \pi, \\ \quad\;\; 0 < g''(v); \end{cases} \tag{121}$$

Θ bedeutet dabei eine feste Zahl.

[5]) Vgl. etwa Landau, Zahlentheorie 1, S. 341.

Dann gilt die Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m} e^{g(\nu)i}\right| < \frac{4\pi}{\Theta}. \tag{122}$$

Weylsche Ungleichung[6]).

$P(k)$ sei ein Polynom p-ten Grades in k mit dem höchsten Koeffizienten γ. Es gilt die Ungleichung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{P(k)2\pi i}\right|^{2^{p-1}} < 4^{2^{p-1}}\left(n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p} \sum_{1 \leqq h_i \leqq n} \frac{1}{\{p!\,h_1 \ldots h_{p-1}\gamma\}}\right), \tag{123}$$

wo das Symbol $\frac{1}{\{\alpha\}}$ die kleinere der beiden Größen: n und reziproker Wert des Abstandes von α zur nächsten ganzen Zahl, bei ganzem α die Zahl n bedeutet.

2. Hilfssatz. Die Anzahl $A = A(x, y)$ der Lösungen der Bedingungen:

$$\begin{aligned} &y \mid p!\,h_1 \ldots h_{p-1}, \\ &0 < h_i \leqq x^{1/p} \qquad (i = 1, \ldots, p-1), \end{aligned}$$

wo $y, x, p > 1$ feste positive ganze Zahlen, ist für jedes $\varepsilon > 0$ nicht größer als

$$c(\varepsilon, p)\, \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, y^{\varepsilon}, \tag{124}$$

wo $c(\varepsilon, p)$ von x, y unabhängig.

Beweis. 1. Wir können annehmen, daß $y \leqq x^{1/p}$. Denn es gilt stets

$$A(x, y) \leqq c_1(p)\, \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, r(x), \tag{125}$$

wo

$$r(x) = \operatorname*{Max.}_{0 < m \leqq p!\,x^{\frac{p-1}{p}}} B(m),$$

wenn die Anzahl der Lösungen von

$$\begin{aligned} p!\,h_1 \ldots h_{p-1} &= m, \\ 0 < h_i &\leqq x^{1/p} \qquad (i = 1, \ldots, p-1) \end{aligned}$$

mit $B(m)$ bezeichnet wird. Für $x \geqq x_0(p)$ ist $p!\,x^{\frac{p-1}{p}} \leqq x$, also

$$r(x) \leqq \operatorname*{Max.}_{m = 1, \ldots, x} \left(T(m)^{p-1}\right),$$

wo $T(m)$ die Teilerzahl von m bedeutet. Es gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$T(m) \leqq c_2(\varepsilon, p)\, m^{\varepsilon/p(p-1)}\ ^{7});$$

[6]) Vgl. etwa Landau, Zahlentheorie 1, S. 253.

[7]) Vgl. etwa Landau, a. a. O., S. 250.

für $y \geqq x^{1/p}$ besteht also für große x, also (da bei jedem x nur endlich viele y ein von Null verschiedenes $A(x, y)$ liefern) für alle x eine Abschätzung von der Gestalt

$$A(x, y) \leqq c_3(\varepsilon, p) \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y} x^{\varepsilon/p} \tag{126}$$

$$\leqq c_3(\varepsilon, p) \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y} y^{\varepsilon},$$

so daß wir uns auf den Fall $y \leqq x^{1/p}$ beschränken können.

2. Es besteht für den größten gemeinsamen Teiler (c, d) zweier Zahlen c, d die Ungleichung

$$(y, ab) \leqq (y, a)\,(y, b).$$

Wir setzen

$$y_0 = (y, p!), \quad \text{also } y_0 \leqq p!.$$
$$y = y_0 z.$$

Es ist also

$$A = A(x, y) \leqq \frac{1}{y} \sum_{1 \leqq h_i \leqq x^{1/p}} (y, p!\, h_1 \ldots h_{p-1}),$$

$$\leqq \frac{y_0}{y} \sum_{1 \leqq h_i \leqq x^{1/p}} (z, p!\, h_1 \ldots h_{p-1}),$$

$$\leqq \frac{y_0}{y} p! \Big(\sum_{1 \leqq h \leqq x^{1/p}} (z, h) \Big)^{p-1}.$$

Wir zerlegen $\sum\limits_{0 < h \leqq x^{1/p}} (z, h)$ in Teilsummen $\Sigma_{\mathfrak{v}}$, indem wir das Intervall $0 < h \leqq [x^{1/p}]$ in $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ fremde Teilintervalle einteilen, von denen die ersten $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ je z konsekutive ganze Zahlen enthalten, das etwa noch verbleibende aber weniger. Die ersten $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ Teilsummen stimmen überein, so daß

$$A \leqq \frac{y_0}{y} p! \left(\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right] + 1 \right)^{p-1} \Big(\sum_{h=1}^{z} (h, z) \Big)^{p-1}.$$

Es ist, wenn $\varphi(a)$ die Eulersche Funktion von a bedeutet,

$$\sum_{h=1}^{z} (h, z) = \sum_{f \mid z} f \cdot \varphi\left(\frac{z}{f}\right) \leqq T(z) \cdot z, \tag{127}$$

wo $T(z)$ die Teilerzahl von z ist. Wegen

$$T(z) \leqq c_4(\varepsilon, p)\, z^{\varepsilon/p-1}$$

ist
$$\left(\sum_{h=1}^{z}(h, z)\right)^{p-1} \leqq c_5(\varepsilon, p)\, z^{\varepsilon} z^{p-1},$$
$$A \leqq \frac{y_0}{y}\, p!\left(2\,\frac{x^{1/p}}{z}\right)^{p-1} . \, c_5(\varepsilon, p)\, z^{\varepsilon} . \, z^{p-1}$$
$$\leqq c_6(\varepsilon, p)\,\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y} \cdot y^{\varepsilon}.$$
Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

3. Abschätzung der Summe
$$\sum_{n=1}^{[x^{1/p}]} e^{2\pi i n^p \cdot \frac{a}{x}}, \qquad a < x.$$

Es ist immer möglich[8]), einen solchen Bruch $\frac{q}{y}$ (mit relativ primen q und y) zu finden, daß die Differenz $\frac{a}{x} - \frac{q}{y} = \frac{a'}{xy}$ folgenden Bedingungen genügt:

(128) $$|a'| < \frac{x^{1/p}}{2p!} = c, \quad 0 < y \leqq 2p!\, x^{\frac{p-1}{p}} = b.$$

Für jedes $a < x$ gelten die folgenden zwei Abschätzungen (134), (142); (134) wird für kleine y, (142) für große y benutzt werden. Sei im folgenden $p > 1$, p fest. (Für $p = 1$ ist Satz 8 trivial).

Erste Abschätzung.

1. Sei $a' > 0$. Zerlegen wir die Summe
$$\Sigma_a = \sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}$$
in Teilsummen Σ_ϱ:
$$\Sigma_a = \sum_{\varrho=0}^{y-1} \Sigma_\varrho,$$
wo

(129) $$\Sigma_\varrho = \sum_{0 \leqq u' \leqq \frac{x^{1/p} - \varrho}{y}} e^{2\pi i \frac{a}{x}(\varrho + u'y)^p}$$

(wobei für $\varrho = 0$ das Glied mit $u' = 0$ fortzulassen ist). Es ist
$$\Sigma_\varrho = \sum_{0 \leqq u' \leqq \frac{x^{1/p} - \varrho}{y}} e^{2\pi i\left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right)(\varrho + u'y)^p} = e^{2\pi i\left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right)\varrho^p}\, \Sigma'_\varrho,$$
wo

(130) $$\Sigma'_\varrho = \sum_{0 \leqq u' \leqq \frac{x^{1/p} - \varrho}{y}} e^{g(u')i}, \quad g(u') = \frac{(\varrho + u'y)^p - \varrho^p}{y}\,\frac{2\pi a'}{x}.$$

---

8) Siehe etwa Landau, Zahlentheorie 1, S. 100.

Ferner ist nach (128) für die in Σ_ϱ auftretenden u', da $a' > 0$:

(131) $$g'(u') = 2\pi \frac{a'}{x} y^{p-1} \cdot \left(u' + \frac{\varrho}{y}\right)^{p-1} \cdot p < 2\pi p \frac{a'}{x} \cdot x^{\frac{p-1}{p}} < \pi.$$

Zerlegen wir Σ'_ϱ in zwei Teilsummen

(132) $$\Sigma_{1\varrho} = \sum_{u'=0}^{\left[\frac{\left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p} - \varrho}{y}\right]} e^{g(u')i} \quad \text{und} \quad \Sigma_{2\varrho} = \sum_{u' = \left[\frac{\left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p} - \varrho}{y}\right] + 1}^{\left[\frac{x^{1/p} - \varrho}{y}\right]} e^{g(u')i}.$$

Die erste Teilsumme $\Sigma_{1\varrho}$ ist absolut

$$\leqq \frac{x^{1/p}}{y\, a'^{1/p}} + 1.$$

Für alle u'-Werte der zweiten Teilsumme gilt die Ungleichung:

(133) $$g'(u') = \frac{a'}{x} \cdot 2p\pi \cdot (u'y + \varrho)^{p-1} > 2p\pi \cdot \left(\frac{a'}{x}\right)^{1/p} = \Theta > 0,$$

und nach (122) folgt wegen (131), da $g''(u') > 0$, also die Voraussetzungen der van der Corputschen Ungleichung erfüllt sind:

(133a) $$|\Sigma_{2\varrho}| < \frac{4\pi}{2p\pi} \left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p};$$

d. h.

$$|\Sigma_\varrho| \leqq |\Sigma_{1\varrho}| + |\Sigma_{2\varrho}| \leqq \frac{3\, x^{1/p}}{a'^{1/p}}.$$

Daraus folgt:

(134) $$|\Sigma_a| < \sum_{\varrho=0}^{y-1} |\Sigma_\varrho| \leqq \frac{3\, y\, x^{1/p}}{|a'|^{1/p}} = 3\, y \left(\frac{x}{|a'|}\right)^{1/p}.$$

2. Ist $a' < 0$, so ist, wenn im bisherigen überall a' durch $|a'|$ ersetzt wird, für die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\Sigma}_{2\varrho} = \Sigma e^{-g(u')i}$ die Voraussetzung von (122) erfüllt $\left(\text{mit } \Theta = 2p\pi \left(\frac{|a'|}{x}\right)^{1/p}\right)$, so daß (133a) mit $|a'|$ statt a', also (134) allgemein gilt.

Zweite Abschätzung.

Auf Grund der Weylschen Ungleichung (123) ist:

(135) $$\left| \sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2^{p-1}}$$

$$< 4^{2^{p-1}} \left[x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p} - 1} \sum_{0 < h_i \leqq [x^{1/p}]} \frac{1}{\left\{p!\, h_1 \cdots h_{p-1} \frac{a}{x}\right\}} \right].$$

Es ist:

$$(136)\qquad \frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{a}{x}\right\}}=\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}+p!\,\frac{h_1\ldots h_{p-1}a'}{x\,y}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}+\frac{\Theta}{y}\right\}}\leqq\frac{2}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}},$$

da $|\Theta|<\frac{1}{2}$ nach (128). (Diese Ungleichung gilt auch für $y/p!\,h_1\ldots h_{p-1}$).

Es genügt folglich, die Summe

$$(137)\qquad \sum=\sum_{0<h_i\leqq[x^{1/p}]}\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}}$$

zu untersuchen.

In dem Falle, wo das Produkt $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$ durch y teilbar ist, ist das betreffende Glied von (137) gleich $[x^{1/p}]$. Die Anzahl der Produkte $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$, die durch y teilbar sind, ist nach Hilfssatz 2 nicht größer als

$$c(\varepsilon)\,\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\,y^{\varepsilon},\quad\text{also}\ \leqq c\,\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-1/2p}}\text{ [9]}.$$

Die Summe aller zu diesen Produkten gehörenden Glieder ist nicht größer als

$$(137\,\mathrm{a})\qquad \frac{c\,x}{y^{1-1/2p}}.$$

Betrachten wir jetzt den Fall, wo das Produkt $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$ durch y nicht teilbar ist.

Die Reste modulo y einer jeden Zahlenfolge von der Form

$$q\,(u+1),\ q\,(u+2),\ \ldots,\ q\,(u+y),$$

wo $(q,y)=1$, sind, abgesehen von der Reihenfolge, alle ganzen Zahlen von Null bis $y-1$.

Die entsprechenden Werte von $\frac{1}{\alpha_t}$, wo α_t der Abstand von $q\frac{(u+t)}{y}$ zur nächsten ganzen Zahl, $1\leqq t\leqq y$ und $t\not\equiv-u\ (\mathrm{mod}\ y)$ ist, sind, abgesehen von der Reihenfolge, folgende:

$$y,\ \frac{y}{2},\ \frac{y}{3},\ \ldots,\ \frac{y}{[y/2]},\ \ldots,\ \frac{y}{3},\ \frac{y}{2},\ y,$$

wobei das Glied $\frac{y}{[y/2]}$ ein- oder zweimal auftritt, je nachdem y gerade oder ungerade ist. Die Summe dieser Werte ist für $y>1$ nicht größer als $4\,y\ln y$.

---

[9]) $c(\varepsilon)$ und c sind von p abhängig; p ist aber fest.

Aus (136) folgt, daß die Summe der verschiedenen unter den entsprechenden Werten in (137) nicht größer als

(139) $$4\, y \ln y$$

ist.

Andererseits kann bei jedem $\varepsilon' > 0$ für $x \geqq x_0(\varepsilon')$ jede Zahl unter allen Produkten $p!\, h_1 \ldots h_{p-1}$, die nicht größer als $p!\, x^{\frac{p-1}{p}}$ sind, nicht mehr als $x^{\varepsilon'}$mal auftreten, da die Gleichung $p!\, h_1 \ldots h_{p-1} = m \leqq p!\, x$ höchstens $T(m)^{p-1} = 0(x^{\varepsilon'})$ Lösungen $h_1 \ldots h_{p-1}$ hat, wenn $T(m)$ die Teilerzahl von m ist.

Die Summe aller Ausdrücke $\frac{1}{\left\{p!\, h_1 \ldots h_{p-1} \frac{a}{x}\right\}}$, die über alle durch y nicht teilbaren Produkte $p!\, h_1 \ldots h_{p-1}$ erstreckt ist, ist nach (128) nicht größer als

(140) $$y \ln y \cdot x^{\varepsilon''/2} < p!\, x^{\frac{p-1}{p} + \varepsilon''}$$

mit beliebig kleinem ε'', für $x \geqq x_1(\varepsilon'')$. Wählen wir $\varepsilon'' = \frac{1}{2p}$. Also ist nach (137)a und (140)

(141) $$\sum_{0 < h_i \leqq [x^{1/p}]} \frac{1}{\left\{p!\, h_1 \ldots h_{p-1} \frac{a}{x}\right\}} < c\left(x^{1-1/2p} + \frac{x}{y^{1-1/2p}}\right).$$

Daraus folgt nach (135)

(142) $$\left|\sum\nolimits_a\right|^{2p-1} = \left|\sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}\right|^{2p-1}$$
$$< 4^{2^{p-1}} c \left[x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p} - 1}\left(\frac{x}{y^{1-1/2p}} + x^{1-1/2p}\right)\right]$$
$$< c'\left[x^{\frac{2^{p-1}}{p} - \frac{1}{2p}} + \frac{x^{\frac{2^{p-1}}{p}}}{y^{1-1/2p}}\right].$$

4. Abschätzung der Summe

$$\sum_{a=0}^{x-1} \left|\sum_{0 < x \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}\right|^u.$$

Wir ersetzen in $\sum_a = \sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}$ die Zahl $\frac{a}{x}$ nach (128) durch $\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}$, schreiben $\sum_a = (a', y)$ und berücksichtigen dabei nicht die Abhängigkeit von (a', y) von q, da wir in (134) und (142) eine von q unabhängige Abschätzung von $\sum_a$ nach oben gefunden haben. Es kann verschiedenen a mit $0 \leqq a < x$ dasselbe Paar a', y durch (128) zugeordnet sein, aber, für jedes einzelne y höchstens $y$mal. Denn es sei $a = a_0$ das Paar a', y zugeordnet, und a_i bedeute die verschiedenen $a > a_0$, denen auch a', y zugeordnet ist (wachsend geordnet), dann ist $a_i y - q_i x = a'$ $(i = 0, 1, \ldots)$. In $(a_i - a_j)\, y = (q_i - q_j)\, x$ ist für $i > j$ stets $q_i > q_j$, da $y > 0$, $a_i > a_j$; d. h. es ist $q_i - q_0 \geqq i$, also $a_i - a_0 \geqq \frac{i x}{y}$.

Dies ist für $0 < a_i < x$ nur möglich, wenn $i < y$, womit obige Behauptung bewiesen. Wir haben also nach (128)[10])

$$\sum_{a=0}^{x-1} |\Sigma_a|^u \leqq \sum_{y=1}^{[b]} y \sum_{a'=[-c]+1}^{[c]} |(a', y)|^u. \tag{143}$$

1. Wenn $y > x^{\frac{1}{2p-1}}$ ist, so wird auf Grund von (142):

$$|(a', y)| < 2c' x^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p2^p}}.$$

Wenn $u > p\,2^p$ gewählt wird, so gilt also die Ungleichung

$$|(a', y)| < K_2(u, p) \frac{x^{u/p}}{x^2}. \tag{143a}$$

2. Für $y \leqq x^{\frac{1}{2p-1}}$ haben wir nach (142), (134):

$$|(a', y)| \leqq \text{Min.} \left[\frac{2c' x^{1/p}}{y^{\frac{1-1/2p}{2p-1}}}, \quad \frac{3x^{1/p} y}{|a'|^{1/p}} \right]. \tag{144}$$

Zerlegen wir die Summe

$$y \cdot \sum_{a'=[-c]+1}^{[c]} |(a', y)|^u \tag{145}$$

in zwei Teile, gemäß den Ungleichungen:

$$1.\ |a'| \leqq \frac{1}{c'^p} y^{p + \frac{2p-1}{2^p}}, \qquad 2.\ |a'| > \frac{1}{c'^p} y^{p + \frac{2p-1}{2^p}}.$$

Aus (144) folgt, daß im ersten Teil der Summe (145)

$$|a', y)| \leqq \frac{2c' x^{1/p}}{y^{\frac{1-1/2p}{2p-1}}},$$

im zweiten Teil

$$|(a', y)| \leqq \frac{3x^{1/p} y}{|a'|^{1/p}}. \tag{146}$$

Die Summe der Glieder, die zum ersten Teil von (145) gehören, ist also nicht größer als

$$4y \frac{(2c' x^{1/p})^u}{\left(y^{\frac{2p-1}{2^p \cdot p}}\right)^u} \cdot \frac{y^{p + \frac{2p-1}{2^p}}}{c'^p}. \tag{146a}$$

Wenn wir also $u \geqq \left(p + \frac{2p-1}{2^p} + 3\right) \frac{p\,2^p}{2p-1}$ z. B. $a \geqq 3p\,2^p$ wählen (es ist $p > 1$), wird diese Summe

$$\leqq 4 \frac{(2x^{1/p})^u c'^{u-p}}{y^2}. \tag{147}$$

---

10) b, c sind in (128) definiert.

Die Summe der Glieder, die zum zweiten Teil der Summe (145) gehören, ist nach (146)

$$\leqq x^{u/p} \sum_{a'=m}^{\infty} \frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}}$$

(die Summation ist über alle Werte von a' zwischen $m = \left[\frac{1}{c^{1p}} y^{p+\frac{2p-1}{2^p}}\right] + 1$ und $+\infty$ erstreckt). Es ist:

$$(147\text{a}) \qquad x^{u/p} \sum_{a'=m}^{\infty} \frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}} < x^{u/p} \int_m^{\infty} \frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}} d a' + \frac{(3y)^{u+1} c'^u x^{u/p}}{y^{\frac{u}{p}\left(p+\frac{2p-1}{2^p}\right)}}$$

$$< \frac{K_1(u, p)\, x^{u/p}}{y^{u \cdot \frac{2p-1}{2^p \cdot p} - \left(p + \frac{2p-1}{2^p} + 1\right)}} + \frac{(3y)^{u+1} c'^u x^{u/p}}{y^{\frac{u}{p}\left(p+\frac{2p-1}{2^p}\right)}}.$$

Wenn $u \geqq 3\, p\, 2^p$ gewählt ist, wird der letzte Ausdruck kleiner als

$$(147\text{b}) \qquad K_3(u, p) \frac{x^{u/p}}{y^2}$$

(wo $K_3(u, p)$ eine nur von u und p abhängige Größe bedeutet).

Für $u \geqq 3\, p\, 2^p$ haben wir also nach (143a), (147), (147b) die Ungleichung

$$(148\text{a}) \qquad \left(\sum_{y=1}^{[b]} y \sum_{a'=[-c]+1}^{[c]} |(a', y)|^u\right) < K_4(u, p)\, x^{u/p} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^2}$$

$$+ \frac{x^{u/p}}{x^2} K_2(u, p)\, x^{2\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p}} < K(u, p)\, x^{u/p}.$$

Somit bekommen wir für die Summe (143) die Abschätzung:

$$(148) \qquad \sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^u < K(u, p)\, x^{u/p}.$$

Beweis des Satzes. Da die Anzahl $N(x)$ der Glieder der Potenzfolge $1^p, 2^p, \ldots$, die eine Zahl x nicht überschreiten, durch den Ausdruck $[x^{1/p}]$ gegeben ist, so können wir nach (148) schreiben:

$$(149) \qquad \sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{0 < n \leqq x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2u} < \overline{K}(u, p) \left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u};$$

d. h. die Bedingung (120) der Bemerkung zu Satz 7 ist erfüllt.

Damit ist der verallgemeinerte Waringsche Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 1. 3. 1931.)