Zum Schluß wird eine Zuschrift von Herrn Bosch (Aachen) zur Kenntnis gebracht, der, zeitweilig zusammen mit Prof. Blumenthal, schon mehrere Semester mit Studenten Übungen über die wissenschaftliche Seite von Gegenständen der Schulmathematik abhält. Diese Arbeitsgemeinschaften besuchten auch Unterrichtsstunden an den höheren Schulen; einzelne Studenten wurden auch zur Mithilfe bei den mathematischen Arbeitsgemeinschaften der Schulen herangezogen. Hamel.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

102. Für ganze rationale Funktionen $f(x)$ ist $f'(x)$ rein formal ohne Grenzprozeß als Koeffizient von h in $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots$ definierbar. Das folgende Beispiel macht es wahrscheinlich, daß sich der Satz über den Zusammenhang des Steigens oder Fallens einer Funktion mit dem Vorzeichen des Differentialquotienten

„Aus $f'(x) > 0$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$"

für *ganze rationale* Funktionen *ohne* Anwendung des *Stetigkeitsaxioms* allein durch Rechnung beweisen läßt.

Wird für $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

definiert $$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$ so ist

$$(1) \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) + b(x_1 + x_2) + c$$

$$= 3a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + 2b\frac{x_1 + x_2}{2} + c + \frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2$$

$$= f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2$$ und

$$(2) \qquad 3\,\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f'(x_1) + f'(x_2) - \frac{3a}{4}(x_1 - x_2)^2.$$

Verwendet man bei positivem a Formel (1) und bei negativem a (2), so zeigen diese Darstellungen, daß aus

$$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_2) > 0, \quad f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$$

folgt $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Es wird die Aufgabe gestellt:

Den Satz „Aus $f'(x) > 0$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$" für *ganze rationale* $f(x)$ nur durch Rechnung ohne Anwendung des Stetigkeitsaxioms zu beweisen.

Franzburg bei Stralsund. F. Schürer.

(Eingegangen am 23. 8. 1930.)

103. Unitäre Transformationen analytischer Funktionen. Es seien die $2n$ Funktionen

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z);\quad g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_n(z)$$

regulär in einem gewissen Gebiet der z-Ebene, und es gelte daselbst

$$|f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2=|g_1(z)|^2+|g_2(z)|^2+\cdots+|g_n(z)|^2.$$

Sind $f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z)$ linear unabhängig, so sind es auch $g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_n(z)$, und es ist

$$g_\nu(z)=c_{\nu 1}f_1(z)+c_{\nu 2}f_2(z)+\cdots+c_{\nu n}f_n(z),\quad (\nu=1,2,\ldots,n),$$

wobei die Konstanten $c_{\nu\lambda}$ eine unitäre Matrix bilden.

Helsingfors und Zürich. R. Nevanlinna und G. Pólya.

(Eingegangen am 14. 10. 1930.)

104. Der Picardsche Satz für Matrizen. Es sei

$$g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$$

eine ganze Funktion, Z eine beliebige Matrix n-ter Ordnung. Dann stellt bekanntlich

$$g(Z)=a_0E+a_1Z+a_2Z^2+\cdots$$

(E ist die Einheitsmatrix) eine bestimmte Matrix n-ter Ordnung dar.

Wann läßt sich eine Matrix Z so bestimmen, daß

$$(*)\qquad g(Z)=A$$

wird, wo A eine vorgegebene Matrix ist?

Antwort: Zu jeder ganzen Funktion $g(z)$ gehören 0 oder 1 oder 2 „Ausnahmewerte", so beschaffen, daß die Gleichung (*) sicher lösbar ist, wenn alle charakteristischen Wurzeln von A von den Ausnahmewerten von $g(z)$ verschieden sind, hingegen nicht lösbar ist für spezielle Matrizen A, die diese Ausnahmewerte als charakteristische Wurzeln zulassen.

Z. B. hat die Funktion e^z-z keinen Ausnahmewert, e^z einen, $\sin z$ zwei Ausnahmewerte, und die Gleichungen

$$\sin\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sin\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

haben keine Auflösung.

Zürich. G. Pólya.

(Eingegangen am 14. 10. 1930.)

105. Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1. Es sei die ganze Funktion $F(z)$ so beschaffen, daß $F(z)\,e^{-\varepsilon|z|}$ bei jedem festen positiven Wert von ε in der ganzen z-Ebene beschränkt bleibt. Ist die Zahlenfolge

$$\ldots F(-n),\ \ldots,\ F(-2),\ F(-1),\ F(0),\ F(1),\ F2),\ \ldots,\ F(n),\ \ldots$$

beschränkt, so ist $F(z)$ eine Konstante.

Zürich. G. Pólya.

(Eingegangen am 14. 10. 1930).

106. Zwei Potenzreihen derselben analytischen Funktion mit zueinander komplementären Konvergenzbereichen. Es sei $f(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, die mit Ausnahme des Punktes $z = 1$ überall, auch im Punkte $z = \infty$ regulär ist. In der Umgebung von $z = 0$ gelte

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

in der Umgebung von $z = \infty$

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_n}{z^n} + \cdots$$

Gibt es eine Konstante k, so beschaffen, daß sowohl $a_n n^{-k}$ wie $b_n n^{-k}$ beschränkt ist ($n = 1, 2, 3, \ldots$), so ist $f(z)$ eine rationale Funktion.

Zürich. G. Pólya.

(Eingegangen am 14. 10. 1930.)

107. Transformation von bestimmten Integralen. Es gibt rationale Funktionen $R(x)$, so beschaffen, daß für eine willkürliche Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(R(x))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

gilt, falls nur das Integral rechts existiert.

Man beweise, daß die erwähnte Eigenschaft allen rationalen Funktionen von der Form

$$R(x) = \varepsilon \left(x - \alpha - \frac{p_1}{x - \alpha_1} - \frac{p_2}{x - \alpha_2} - \cdots - \frac{p_n}{x - \alpha_n}\right)$$

und *nur diesen* zukommt, wobei $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reelle und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ positive Zahlen sind, $n \geqq 0$. (Im Falle $n = 0$ ist $R(x) = \varepsilon(x - \alpha)$ zu lesen.)

Zürich. G. Pólya.

(Eingegangen am 14. 10. 1930.)

108. Ein Bruchteil des Fourierschen Funktionensystems ist vollständig im entsprechenden Bruchteil des Intervalles $[0, 2\pi]$, vorausgesetzt, daß kein Sinus von dem zugehörigen Kosinus getrennt wird. Genauer: Wenn die reellen (nicht notwendigerweise ganzen) Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ so beschaffen sind, daß $0 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ und

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{n}{m_n} > \frac{b - a}{2\pi} > 0,$$

wenn ferner die Funktion $f(x)$ im abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ stetig ist, so folgt aus

$$\int_a^b f(x) \cos m_n x \cdot dx = \int_a^b f(x) \sin m_n x \cdot dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

daß $f(x)$ identisch verschwindet.

Zürich. G. Pólya.

(Eingegangen am 28. 5. 1931.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 90. Dieser Jahresbericht Bd. 40 (1931), S. 3.

Die Aufgabe lautete:

Die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes ABC seien abc. (Gegenüberliegende Seiten und Winkel seien mit gleichlautenden Buchstaben bezeichnet.) Die Projektion von b auf c sei M.

Zeige die Richtigkeit der folgenden Formeln:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}.$$

Almar Naess.

Erste Lösung.

Beweis. Die Formel (1) folgt sofort aus dem Potenzsatz für einen kleinen Kugelkreis. Zeichnet man um C einen kleinen Kugelkreis mit dem Radius CA, der AB in D schneidet, so ist

$$\operatorname{tg}\frac{BA}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{BD}{2} = \operatorname{tg}\frac{BC+CA}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{BC-CA}{2}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right) = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Man kann die Formel auch leicht direkt herleiten. Nach der Neperschen Regel ist $\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} b \cdot \cos A$; daher folgt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \operatorname{tg} M}{1 + \operatorname{tg}\frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} M} = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2} - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b \sin c}}{1 + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b \sin c}}$$

$$= \frac{\sin\frac{c}{2} \cos b \sin c - \cos a \cos\frac{c}{2} + \cos b \cos c \cos\frac{c}{2}}{\cos b \sin c \cos\frac{c}{2} + \cos a \sin\frac{c}{2} - \cos b \cos c \sin\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{\cos b \cos\left(c - \frac{c}{2}\right) - \cos a \cos\frac{c}{2}}{\cos b \sin\left(c - \frac{c}{2}\right) + \cos a \sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} \cdot \operatorname{ctg}\frac{c}{2}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Nun ist nach den Analogien von Neper

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{c}{2},$$

folglich
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-M\right)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}.$$

In der Ebene (r Umkreisradius des Dreieckes ABC) ist
$$\frac{c}{2}-M=r\sin(A-B)=\frac{c}{2}\cdot\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{c}{2}\,\frac{(a+b)(a-b)}{c^2}$$
$$=\frac{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}}{\frac{c}{2}}.$$

Cottbus. MAHRENHOLZ.

(Eingegangen am 10. 2. 1931.)

Zweite Lösung.

Es gilt
$$(1)\quad \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-M\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}-\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M}{1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M}=\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{c}{2}}-\left(1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M\right)}{1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\frac{c}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M\right)}-1.$$

Es ist
$$(2)\quad \cos^2\frac{c}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg}M\right)=\frac{1+\cos c+\sin c\operatorname{tg}M}{2}\quad\text{und}$$
$$(3)\quad \operatorname{tg}M=\operatorname{tg}b\cos A=\frac{\operatorname{tg}b\cos a-\sin b\cos c}{\sin b\sin c}.\quad\text{Daher}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-M\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{2\sin b}{\sin b+\operatorname{tg}b\cos a}-1=\frac{\sin b-\operatorname{tg}b\cos a}{\sin b+\operatorname{tg}b\cos a}=\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}$$
$$=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-b}{2},\quad\text{w. z. b. w.}$$

Weiter ist
$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-M\right)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}\cdot\cot^2\frac{c}{2}=\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}\cdot\frac{1+\cos c}{1-\cos c}$$
$$=\frac{(\cos b-\cos a\cos c)-(\cos a-\cos b\cos c)}{(\cos b-\cos a\cos c)+(\cos a-\cos b\cos c)}$$
$$=\frac{\cos B\sin c\sin a-\cos A\sin b\sin c}{\cos B\sin c\sin a+\cos A\sin b\sin c}=\frac{\cos B\sin a-\cos A\sin b}{\cos B\sin a+\cos A\sin b}$$
$$=\frac{\cos B\sin A-\cos A\sin B}{\cos B\sin A+\cos A\sin B}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)},\quad\text{w. z. b. w.}$$

Wien. F. GRUBER.

(Eingegangen am 1. 3. 1931.)

Dritte Lösung.

Die Höhe auf der Seite c sei h. Dann haben wir aus den so gebildeten rechtwinkligen Dreiecken

$$\cos h = \frac{\cos a}{\cos(c - M)} = \frac{\cos b}{\cos M}.$$

Hieraus

$$\frac{\cos(c - M)}{\cos M} = \frac{\cos a}{\cos b}$$

$$\frac{\cos(c - M) - \cos M}{\cos(c - M) + \cos M} = \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b}$$

$$\frac{-2\sin\frac{c}{2}\cdot\sin\left(\frac{c}{2} - M\right)}{2\cos\frac{c}{2}\cdot\cos\left(\frac{c}{2} - M\right)} = \frac{-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

In derselben Weise

$$\operatorname{tg} h = \sin(c - M)\cdot\operatorname{tg} B = \sin M\cdot\operatorname{tg} A$$

$$\frac{\sin(c - M)}{\sin M} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$$

$$\frac{\sin(c - M) - \sin M}{\sin(c - M) + \sin M} = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2} - M\right)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}.$$

ALMAR NAESS.

(Eingegangen am 9. 4. 1930.)

Vierte Lösung.

Aus dem Dreieck AMC ergibt sich nach dem Kotangentensatz

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} b \cos A.$$

Der Kosinussatz liefert für das Dreieck ABC

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a.$$

Dividiert man beiderseits durch $\cos b$ und berücksichtigt die erste Gleichung, so kommt

$$\cos c + \sin c \operatorname{tg} m = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Daraus folgt durch korrespondierende Subtraktion und Addition

$$\frac{1 - \cos c - \sin c \operatorname{tg} m}{1 + \cos c + \sin c \operatorname{tg} m} = \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich in folgender Weise umformen:

$$\frac{\sin^2\frac{c}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\operatorname{tg} m}{\cos^2\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\operatorname{tg} m}=\frac{\left(\sin\frac{c}{2}-\cos\frac{c}{2}\operatorname{tg} m\right)\sin\frac{c}{2}}{\left(\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\operatorname{tg} m\right)\cos\frac{c}{2}}=\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{c}{2}-\operatorname{tg} m\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{tg} m}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-m\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

für die rechte Seite erhält man

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}.$$

Also ist

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-m\right)\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}. \tag{1}$$

Man wendet den Kotangentensatz auf das Dreieck ABC an und bekommt

$$\operatorname{cotg} b\sin c-\cos c\cos A=\sin A\operatorname{cotg} B.$$

Indem man beiderseits durch $\cos A$ dividiert und die erste Gleichung benützt, findet man

$$\frac{\sin c}{\operatorname{tg} m}-\cos c=\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

In ähnlicher Weise wie vorhin ergibt sich

$$\frac{\sin c-(1+\cos c)\operatorname{tg} m}{\sin c+(1-\cos c)\operatorname{tg} m}=\frac{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}$$

und diese Gleichung geht über in

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}-m\right)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}=\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}. \tag{2}$$

Bayreuth. OSKAR DEGEL.

(Eingegangen am 4. 5. 1931.)

Literarisches.

Besprechungen.

K. Hayashi, Tafeln der Besselschen Theta-, Kugel- und andere Funktionen. 125 S. Berlin 1930, Julius Springer.

Es handelt sich um sieben- und mehrstellige Tafeln, durch die der Verfasser sein früheres Werk über Kreis- und Hyperbelfunktionen fortsetzt. Eine große Zahl der Berechnungen hat der Verfasser selbst durchgeführt. Zu den im Titel genannten Tafeln tritt eine zwölfstellige Quadratwurzeltafel, die auch vielfach nützlich sein dürfte. BIEBERBACH.