SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Monatshefte für Mathematik
Verlag: Springer
Jahr: 1959
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN362162050_0063
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN362162050_0063

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN362162050
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN362162050

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

LXIII. BAND

MIT 39 TEXTABBILDUNGEN

Y5



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

NIEDERSACHS. STAATS- U. UNIV.- BIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Inhaltsverzeichnis

Erstes Heft

(Ausgegeben im Januar 1959)

Seite

Tschupik, J. P. Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen 1
Zink, R. E. On Regular Measures and Baire Functions 19
Kuipers, L. Generalized Legendre's Associated Functions (Integral Theorems, Recurrence Formulas) 24
Unkelbach, H. Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken 32
Horninger, H. Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen 39
Lesky, P. Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen . . 59
Buchbesprechungen 84

Zweites Heft

(Ausgegeben im Februar 1959)

Brauner, H. Über Strahlflächen von konstantem Drall 101
Weier, J. Eine topologische Konstante 112
Sabidussi, G. On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group 124
Lomnicki, Z. A. and **S. K. Zaremba.** On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II 128
Kautny, W. Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen 169
Buchbesprechungen 189

Drittes Heft

(Ausgegeben im Mai 1959)

Rembs, E. Flächen mit demselben sphärischen Bild 209
Tschupik, J. P. Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n 214
McCarthy, P. J. On an Arithmetic Function 228
Müller, H. R. Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik 231
Mirsky, L. Remarks on an Existence Theorem in Matrix Theory Due to A. Horn 241
Marcus, S. Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations . . 244
Pinl, M. Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 uxd R_5 256
Fan, Ky and **A. S. Householder.** A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices 265

Z 1959. 2510

Wunderlich, W. Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung 271
Lesky, P. und **A. Kaiser.** Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew 277
Heigl, F. Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen 287
Izbicki, H. Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften 298
Buchbesprechungen 302

Viertes Heft

(Ausgegeben im September 1959)

Izbicki, H. Über eine Klasse zusammengesetzter Zahlen 309
Barthel, W. Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff 317
Householder, A. S. Minimal Matrix Norms 344
Florian, A. Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln. . . 351
Utz, W. R. Boundedness of Solutions of a Linear Equation 356
Gaede, K.-W. Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten 359
Helmberg, G. Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen (II) 368
Hornich, H. Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen 378
Carlitz, L. Kummer's Congruences (mod 2^r) 394
Buchbesprechungen 401

Autorenverzeichnis

I. Originalarbeiten

Barthel, W. Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff. S. 317.
Brauner, H. Über Strahlflächen von konstantem Drall. S. 101.
Carlitz, L. Kummer's Congruences (mod 2^r). S. 394.
Fan, Ky and *A. S. Householder.* A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices. S. 265.
Florian, A. Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln. S. 351.
Gaede, K.-W. Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten. S. 359.
Heigl, F. Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen. S. 287.
Helmberg, G. Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen (II). S. 368.
Hornich, H. Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen. S. 378.

Horninger, H. Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen. S. 39.

Householder, A. S. Minimal Matrix Norms. S. 344.

Householder, A. S. and *Ky Fan.* A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices. S. 265.

Izbicki, H. Über eine Klasse zusammengesetzter Zahlen. S. 309.

Izbicki, H. Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. S. 298.

Kaiser, A. und *P. Lesky.* Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew. S. 277.

Kautny, W. Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. S. 169.

Kuipers, L. Generalized Legendre's Associated Functions (Integral Theorems, Recurrence Formulas). S. 24.

Lesky, P. Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen. S. 59.

Lesky, P. und *A. Kaiser.* Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew. S. 277.

Lomnicki, Z. A. and *S. K. Zaremba.* On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II. S. 128.

Marcus, S. Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations. S. 244.

McCarthy, P. J. On an Arithmetic Function. S. 228.

Mirsky, L. Remarks on an Existence Theorem in Matrix Theory Due to A. Horn. S. 241.

Müller, H. R. Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik. S. 231.

Pinl, M. Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R^2 und R^3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_5. S. 256.

Rembs, E. Flächen mit demselben sphärischen Bild. S. 209.

Sabidussi, G. On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group. S. 124.

Tschupik, J. P. Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen. S. 1.

Tschupik, J. P. Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n. S. 214.

Unkelbach, H. Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken. S. 32.

Utz, W. R. Boundedness of Solutions of a Linear Equation. S. 356.

Weier, J. Eine topologische Konstante. S. 112.

Wunderlich, W. Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung. S. 271.

Zaremba, S. K. and *Z. A. Lomnicki.* On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II. S. 128.

Zink, R. E. On Regular Measures and Baire Functions. S. 19.

II. Buchbesprechungen

Alexandrow, A. D. Konvexe Polyeder. Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von *W. Süß. (E. Hlawka)* S. 95.

Alt, F. L. Electronic Digital Computers. Their Use in Science and Engineering. *(N. Hofreiter)* S. 206.

Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique. — Proceedings of the International Association for Analog Computation. Band I, Nr. 2. Herausgegeben von l'Association International pour le Calcul Analogique. *(N. Hofreiter)* S. 413.

Athen, H. Ballistik. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 198.

Ayres, F., Jr. Theory and Problems of Differential Equations. *(N. Hofreiter)* S. 92.

Bartel, K. Perspektywa Malarska. Band II *(W. Wunderlich)* S. 204.

Bauer, E. Elektronenbeugung. Theorie, Praxis und industrielle Anwendungen. *(Th. Sexl)* S. 207.

Baumgartner, L. Gruppentheorie. Dritte Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 193.

Bernays, P. Axiomatic Set Theory. Mit einer historischen Einleitung von *A. A. Fraenkel. (J. Roppert)* S. 402.

Bianchi, L. Opere. Band VIII, IX, X. *(K. Mayrhofer)* S. 84.

Boas, R. P., Jr. and *R. C. Buck.* Polynomial Expansions of Analytic Functions. *(K. Prachar)* S. 304.

Brandt, H. und *O. Intrau.* Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen. *(N. Hofreiter)* S. 90.

Bronstein, I. N. und *K. A. Semendjajew.* Taschenbuch der Mathematik, für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. *(N. Hofreiter)* S. 85.

Bruck, R. H. A Survey of Binary Systems. *(W. Nöbauer)* S. 89.

de Bruijn, N. G. Asymptotic Methods in Analysis. *(E. Hlawka)* S. 198.

Burger, E. Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie. *(N. Hofreiter)* S. 407.

Carnap, R. Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Bearbeitet von *W. Stegmüller. (H. Brauner)* S. 401.

Chew, V. (Herausgeber). Experimental Designs in Industry. A Symposium Held at North Carolina State College 1956. *(N. Hofreiter)* S. 201.

Chintchin, A. I. Mathematical Foundations of Information Theory. Ins Englische übertragen von *R. A. Siverman* und *M. D. Friedman. (E. Hlawka)* S. 100.

Churchill, R. V. Operational Mathematics. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 93.

Colloque d'Algèbre Supérieure, tenu à Bruxelles 1956. Herausgegeben von: Centre Belge de Recherches Mathématiques. *(W. Nöbauer)* S. 89.

Curry, H. B. and *R. Feys,* Combinatory Logic. Band I. Mit zwei Abschnitten von *W. Craig. (W. Nöbauer)* S. 85.

Day, M. M. Normed Linear Spaces. *(E. Hlawka)* S. 93.

Derwidué, L. Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique. *(N. Hofreiter)* S. 87.

Destouches, J.-L. Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionelle. *(Th. Sexl)* S. 414.

Deuring, M. Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Zweite Auflage. *(E. Hlawka)* S. 405.

Dienes, P. The Taylor Series. An introduction to the theory of functions of a complex variable. *(N. Hofreiter)* S. 91.

Dobrowolski, W. W. Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven. *(R. Bereis)* S. 204.

Doetsch, G. Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften. *(N. Hofreiter)* S. 196.

Dörrie, H. Triumph der Mathematik. Fünfte Auflage. *(J. Laub)* S. 190.

Drenckhahn, F. (Herausgeber). Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. *(N. Hofreiter)* S. 190.

Dubnow, J. S. Fehler in geometrischen Beweisen. *(J. Laub)* S. 202.

Dugué, D. Traité de Statistique Théorique et Appliquée. Analyse Aléatoire — Algèbre Aléatoire. *(K. Prachar)* S. 97.

Dunford, N. und *J. T. Schwartz.* Linear Operators. Part I: General Theory. Unter Mitwirkung von *W. G. Bade* und *R. G. Bartle. (W. Nöbauer)* S. 302.

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band III: Analysis. Redigiert von *P. S. Alexandroff, A. I.*

Markuschewitsch und *A. J. Chintschin. (N. Hofreiter)* S. 84.

Euler, L. Vollständige Anleitung zur Algebra. Unter Mitwirkung von *J. Nießner* in revidierter Fassung neu herausgegeben von *J. E. Hofmann. (N. Hofreiter)* S. 404.

Festkörperphysik und Physik der Leuchtstoffe. Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der D. D. R., 1957 in Erfurt. *(Th. Sexl)* S. 208.

Fisz, M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. *(K. Prachar)* S. 307.

Föppl, L. Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt. *(Th. Sexl)* S. 413.

Fraser, D. A. S. Statistics — An Introduction. *(N. Hofreiter)* S. 406.

Fubini, G. Opere Scelte. Vol. II. *(N. Hofreiter)* S. 302.

Gantmacher, F. R. Matrizenrechnung. Teil I: Allgemeine Theorie. *(N. Hofreiter)* S. 86.

Garnir, H. G. Les Problèmes aux Limites de la Physique Mathématique. Introduction à leur étude générale. *(E. Hlawka)* S. 412.

Gelfand, I. M., A. M. Jaglom, A. N. Kolmogoroff, Chiang Tse-Pei, I. P. Zaregradski. Arbeiten zur Informationstheorie II. *(E. Hlawka)* S. 408.

Gelfond, A. O. Differenzenrechnung. *(E. Hlawka)* S. 197.

Goldberg, S. Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology. *(N. Hofreiter)* S. 92.

Graeub, W. Lineare Algebra. *(W. Nöbauer)* S. 88.

Graf, U. und *H.-J. Henning.* Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berichtigter Neudruck. *(N. Hofreiter)* S. 202.

Graves, L. M. (Herausgeber). Calculus of Variations and its Applications. Proceedings of the Eighth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, Chicago 1956. *(P. Funk)* S. 199.

Grivet, P. und *Au. Blaquière.* Le Bruit de Fond. *(K. Prachar)* S. 409.

Grundzüge der Mathematik. Für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band I: Grundlagen der Mathematik — Arithmetik und Algebra. Herausgegeben von *H. Behnke, K. Fladt* und *W. Süß. (N. Hofreiter)* S. 191.

Gupta, H., C. E. Gwyther und *J. C. P. Miller.* Tables of Partitions. *(K. Prachar)* S. 90.

Hauser, W. und *W. Burau.* Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven. *(H. Brauner)* S. 304.

Hayman, W. K. Multivalent Functions. *(H. Hornich)* S. 92.

Hecke, E. Mathematische Werke. *(E. Hlawka)* S. 401.

Heffter, L. Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. Dritte Auflage. *(H. Brauner)* S. 94.

Helton, F. F. Introducing Mathematics. Zweite Auflage. *(J. Laub)* S. 403.

Hilbert, D. und *W. Ackermann.* Grundzüge der theoretischen Logik. Vierte Auflage. *(H. Hornich)* S. 401.

Hille, E. und *R. S. Phillips.* Functional Analysis and Semi-Groups. Revised Edition. *(E. Hlawka)* S. 93.

Hodge, W. V. D. Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale. Deutsche Übersetzung. *(E. Hlawka)* S. 197.

Hofmann, J. E. Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. *(P. Funk)* S. 403.

Hoheisel, G. Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Dritte Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 92.

Holtmann, F. Mathematik. Band I: Arithmetik. Dritte Auflage. Band II: Geometrie. Zweite Auflage. *(J. Laub)* S. 191.

Holzer, L. Zahlentheorie. Teil I. *(N. Hofreiter)* S. 193.

Holzer, L. Zahlentheorie. Teil II. *(N. Hofreiter)* S. 405.

Hurewicz, W. Lectures on Ordinary Differential Equations. *(N. Hofreiter)* S. 92.

Jenkins, J. A. Univalent Functions and Conformal Mapping. *(H. Hornich)* S. 91.

Journal of the Association for Computing Machinery. Band 6, Nr. 1. Herausgegeben von Association for Computing Machinery. *(N. Hofreiter)* S. 412.

Kähler, E. Algebra und Differentialrechnung. *(E. Hlawka)* S. 194.

Kantorovich, L. V. und *V. I. Krylov.* Approximate Methods of Higher Analysis. Englische Übersetzung nach der 3. russ. Auflage *(N. Hofreiter)* S. 406.

Keller, O.-H. Analytische Geometrie und lineare Algebra. *(E. Hlawka)* S. 203.

Kneser, H. Funktionentheorie. *(H. Hornich)* S. 90.

Kramer, W. Darstellende Geometrie. Band I. *(H. Brauner)* S. 410.

Lang, S. Introduction to Algebraic Geometry. *(W. Gröbner)* S. 410.

Lebesgue, H. Notices d'Histoire des Mathématiques. *(P. Funk)* S. 403.

Lefebvre, E. Structure et Objet de l'Analyse Mathématique. *(W. Nöbauer)* S. 194.

Loève, M. Probability Theory. Foundations — Random Sequences. *(K. Prachar)* S. 199.

Lorenzen, P. Formale Logik. *(W. Nöbauer)* S. 189.

Lötzbeyer, Ph. Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf. Mit Angabe der Genauigkeit in Zahl und Bild. Graphische Rechentafeln. Siebzehnte Auflage. *(J. Laub)* S. 202.

Luce, R. D. und *H. Raiffa.* Games and Decisions. *(L. Schmetterer)* S. 99.

Lugowski, H. und *H. J. Weinert.* Grundzüge der Algebra. Teil II: Allgemeine Ring- und Körpertheorie. *(N. Hofreiter)* S. 404.

Maria, M. H. The Structure of Arithmetic and Algebra. *(W. Nöbauer)* S. 302.

McConnell, A. J. Applications of Tensor Analysis. *(H. Brauner)* S. 97.

Menninger, K. Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Zweite Auflage. *(F. Hohenberg)* S. 86.

Metzger, R. W. Elementary Mathematical Programming. *(N. Hofreiter)* S. 407.

Miles, J. W. The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. *(Th. Sexl)* S. 414.

Mostowski, A. und *M. Stark.* Elementy Algebry Wyzszej. *(K. Prachar)* S. 87.

Norden, A. P. Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. *(H. Brauner)* S. 205.

Operations Research Group. A Comprehensive Bibliography on Operations Research. Through 1956 with supplement for 1957. Case Institute of Technology. *(N. Hofreiter)* S. 200.

Oppelt, W. (Zusammenstellung). Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen. Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. *(N. Hofreiter)* S. 412.

Ore, O. Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary. *(P. Funk)* S. 189.

Parke III, N. G. Guide to the Literature of Mathematics and Physics Including Related Works on Engineering Science. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 411.

Peano, G. Opere Scelte. Vol. II: Logica Matematica — Interlingua ed Algebra della Grammatica. *(N. Hofreiter)* S. 302.

Pickert, G. Analytische Geometrie. Dritte Auflage. *(H. Brauner)* S. 203.

Pickert, G. Ebene Inzidenzgeometrie. *(H. Brauner)* S. 94.

Pontrjagin, L. S. Topologische Gruppen. Teil 2. *(W. Nöbauer)* S. 193.

Priwalow, I. I. Einführung in die Funktionentheorie. Teil I. *(N. Hofreiter)* S. 195.

Reticoli e geometrie proiettive, Convegno internazionale. Palermo — Messina 1957. *(H. Brauner)* S. 96.

Riordan, J. An Introduction to Combinatorial Analysis. *(N. Hofreiter)* S. 97.

Robin, L. Fonctions Sphériques de Legendre et Functions Sphéroïdales. Band II. *(K. Prachar)* S. 406.

Sauer, R. Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 195.

Segre, C. Opere. Band II. *(K. Mayrhofer)* S. 84.

Severi, F. Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. *(W. Gröbner)* S. 305.

Severi, F. Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà; questioni collegate. *(W. Gröbner)* S. 95.

Slownik Polsko-Rosyjsko-Angieski Statystyki Matematycznej. I: Statystycznej kontroli jakości produkcji. Herausgegeben vom Mathematischen Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften. *(K. Prachar)* S. 407.

Smirnow, W. I. Lehrbuch der höheren Mathematik. Teil IV. *(N. Hofreiter)* S. 303.

Smith, D. E. History of Mathematics. Band I: General Survey of the History of Elementary Mathematics. Band II: Special Topics of Elementary Mathematics. *(P. Funk)* S. 189.

Smithies, F. Integral Equations. *(N. Hofreiter)* S. 197.

Specht, W. Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 405.

Stephan, F. F. und *Ph. J. McCarthy,* Sampling Opinions. An Analysis of Survey Procedure. *(N. Hofreiter)* S. 100.

Strubecker, K. Differentialgeometrie. Band II: Theorie der Flächenmetrik. Band III: Theorie der Flächenkrümmung. *(H. Brauner)* S. 205.

Taylor, A. E. Introduction to Functional Analysis. *(W. Nöbauer)* S. 198.

Tomovic, R. Calculateurs Analogiques Répétitifs. *(K. Prachar)* S. 409.

Treizième Congrès des Mathématiciens Scandinaves. Helsinki 1957. *(N. Hofreiter)* S. 85.

Vazsonyi, A. Scientific Programming in Business and Industry. *(N. Hofreiter)* S. 200.

Weizel, W. Lehrbuch der theoretischen Physik. 2. Band: Struktur der Materie. Zweite Auflage. *(E. Hlawka)* S. 308.

Winter, E. (Herausgeber, in Verbindung mit *P. N. Berkov, N. A. Figurovskij* und *V. P. Zubov).* Die Deutsch-Russische Begegnung und Leonhard Euler. *(P. Funk)* S. 189.

Zaanen, A. C. An Introduction to the Theory of Integration. *(K. Prachar)* S. 195.

Zariski, O. Introduction to the Problem of Minimal Models in the Theory of Algebraic Surfaces. *(W. Gröbner)* S. 305.

Zariski, O. und *P. Samuel.* Commutative Algebra. Band I. Unter der Mitarbeit von *I. S. Cohen. (W. Nöbauer)* S. 88.

Zassenhaus, H. The Theory of Groups. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 404.

Zemanek, H. Elementare Informationstheorie. *(E. Hlawka)* S. 408.

Zurmühl, R. Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Zweite Auflage. *(N. Hofreiter)* S. 192.

Zypkin, Ja. S. Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. Deutsche Übersetzung aus dem Russischen. *(K. Prachar)* S. 206.

Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen

Von

Josef P. Tschupik, Graz

(*Eingegangen am 25. Januar 1958*)

Mit 7 Textabbildungen

1. Einleitung

Als Projektion bezeichnet man in der darstellenden Geometrie i. a. eine Abbildung der Raumpunkte P auf die Punkte P' einer gegebenen Bildebene Π, wobei P und P' perspektiv liegen, d. h. an Strahlen durch einen festen Punkt Z — das Projektionszentrum — gebunden sind.

In der von *F. Hohenberg*[1] stammenden Verallgemeinerung des Begriffes Projektion können *Zentrum* Z und *Bildraum* Π beliebige lineare Teilräume eines projektiven R_n sein. Das Bild P' eines Punktes P, der nicht dem Zentrum angehört, findet man als Schnitt des Verbindungsraumes von P und Z mit Π. P' wird i. a. ein linearer Teilraum von Π sein. Ist P' insbesondere wieder ein Punkt, so möge eine solche spezielle Projektion als *P-Projektion* bezeichnet werden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit *Zweibildersystemen*, die durch gleichzeitige Ausübung zweier P-Projektionen entstehen. Ein Punkt P des R_n wird auf ein *Bildpaar* P', P'' abgebildet. Es soll hier untersucht werden, wie die Beziehung zwischen *Urbild* P und Bildpaar P', P'' durch die Dimension und gegenseitige Lage der Zentren und Bildräume beeinflußt wird.

2. P-Projektionen

Zwei lineare Teilräume Z und Π des R_n bestimmen dann eine P-Projektion, wenn sie punktfremd sind und wenn für ihre Dimensionen die Beziehung[2]

[1] *F. Hohenberg*, Projektionen projektiver Räume, Monatshefte für Mathematik 61 (1957), S. 54—66.

[2] Siehe z. B. *F. Hohenberg*, l. c., S. 55.

$$\dim Z + \dim \Pi = n - 1 \tag{1}$$

gilt. Wir setzen $n - \dim Z = r$; dann ist $\dim Z = n - r$ und wegen (1) ist $\dim \Pi = r - 1$. Im Falle $r = 1$, $\dim \Pi = 0$ werden alle R_n-Punkte P auf einen und denselben Bildpunkt Π abgebildet. Schließt man diese triviale Projektion aus, so ist r eine natürliche Zahl[3] mit $2 \leqq r \leqq n$.

Liegt ein Punkt P nicht in Z, so gilt für den Verbindungsraum[4] $p = [Z\,P]$ von Z mit P

$$\dim p = n - r + 1$$

und es ist die Dimension des Schnittraumes P' von p mit Π

$$\dim P' = \dim (p\,\Pi) = (n - r + 1) + (r - 1) - n = 0,$$

also P' tatsächlich ein Punkt. Alle Punkte von p, die nicht in Z liegen, haben denselben Bildpunkt P'. Liegt P in Z, so ist p und daher auch P' unbestimmt; liegt P in Π, so ist $P' \equiv P$.

(2) *Ist R_k ein linearer Teilraum des R_n und enthält R_k das Zentrum Z, so kann man Z und den Schnittraum $(\Pi\,R_k)$ als Zentrum und Bildraum für eine P-Projektion innerhalb des R_k verwenden*, denn es ist

$$\dim (\Pi\,R_k) = (r - 1) + k - n,$$

also $\dim (\Pi\,R_k) + \dim Z = k - 1$. Z und $(\Pi\,R_k)$ sind auch punktfremd, da ja zuvor Z und Π punktfremd waren.

Sind R_p und R_q zwei punktfremde lineare Teilräume des R_n, so folgt aus $\dim [R_p\,R_q] = p + q + 1 = n^*$ oder $p + q = n^* - 1$ wegen (1):

(3) *Zwei beliebige punktfremde Räume R_p und R_q können als Zentrum und Bildraum einer P-Projektion in ihrem Verbindungsraum $[R_p\,R_q]$ verwendet werden.*

---

[3] Man kann zeigen, daß eine P-Projektion eine spezielle singuläre Kollineation im R_n ist. r bedeutet dann den Rang der Transformationsmatrix (a_{ik}) in $\varrho y_i = a_{ik}\,x_k$. Vgl. hiezu z. B. *E. Bertini*, Einführung in die Geometrie mehrdimensionaler Räume, Verlag von L. W. Seidel und Sohn in Wien, 1924, S. 65ff.

[4] Sind R_p, R_q punktfremde lineare Teilräume des R_n, so findet man bekanntlich die Dimension ihres Verbindungsraumes $[R_p\,R_q]$ mit $\dim [R_p\,R_q] = p + q + 1$ und es ist dann $p + q + 1 \leqq n$. Haben R_p und R_q einen Schnittraum R_s, so ist $\dim [R_p\,R_q] = p + q - s$.

Für den Schnittraum $(R_p\,R_q)$ von R_p und R_q gilt $\dim (R_p\,R_q) \geqq p + q - n$ und zwar sprechen wir bei $\dim (R_p\,R_q) = p + q - n$ von allgemeiner Lage der Räume zueinander (insbes. bei $p + q - n < 0$, wenn R_p und R_q punktfremd sind). Durch spezielle Wahl der beiden Räume kann man immer $\dim (R_p\,R_q) > \text{Max.}\,(p + q - n, -1)$ erreichen. In der vorliegenden Arbeit sind die Schnittraumdimensionen, wenn nicht anders angegeben, stets für allgemeine Lage berechnet.

3. Zweibildersysteme

Gegeben seien zwei P-Projektionen durch die Zentren Z_i mit den Dimensionen $n - r_i$ und durch die Bildräume Π_i mit den Dimensionen $r_i - 1$ $(i=1, 2)$. Jeder Punkt P des R_n, der weder in Z_1 noch in Z_2 liegt, werde mit Hilfe der projizierenden Räume $p_i = [Z_i\, P]$ gleichzeitig auf $P' = (p_1 \Pi_1)$ in Π_1 und auf $P'' = (p_2 \Pi_2)$ in Π_2 abgebildet. P ist also ein eindeutig bestimmtes Bildpaar P', P'' zugeordnet.

3. 1. Lage der Zentren und Bildräume

Die gegenseitige Lage der Zentren und Bildräume drückt sich in den Dimensionen der Schnitträume $Z = (Z_1 Z_2)$, $X = (\Pi_1 \Pi_2)$ und $(Z_i \Pi_j)$ $(i, j = 1, 2$ und $i \neq j)$ aus; die Schnitträume $(Z_i \Pi_i)$ dürfen nicht auftreten, da nach Voraussetzung P-Projektionen vorliegen.

1) Es ist $\dim Z = (n-r_1) + (n-r_2) - n = n-(r_1 + r_2)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Z_1 und Z_2 ist $n - (r_1 + r_2) < 0$ bzw.

$$(4)\quad r_1 + r_2 \geqq n + 1.$$

2) Es ist $\dim X = (r_1 - 1) + (r_2 - 1) - n = r_1 + r_2 - (n + 2)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Π_1 und Π_2 ist dann $r_1 + r_2 - (n + 2) < 0$ bzw.

$$(5)\quad r_1 + r_2 \leqq n + 1.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von X ist $\dim X \geqq 0$, also

$$(6)\quad r_1 + r_2 \geqq n + 2.$$

3) Sollen gleichzeitig die Schnitträume Z und X leer sein, so folgt aus (4) und (5) die notwendige Bedingung

$$(7)\quad r_1 + r_2 = n + 1.$$

4) Es ist $\dim (Z_i \Pi_j) = (n - r_i) + (r_j - 1) - n = r_j - (r_i + 1)$. Notwendig für die Punktfremdheit von Z_i und Π_j ist dann bei fixem i

$$(8)\quad r_i + 1 > r_j.$$

Sollen gleichzeitig $(Z_1 \Pi_2)$ und $(Z_2 \Pi_1)$ leer sein, so folgt aus (8) wegen $r_2 + 1 > r_1$ und $r_1 + 1 > r_2$ die Bedingung

$$(9)\quad r_1 = r_2.$$

5) Sollen gleichzeitig die Schnitträume $Z = (Z_1 Z_2)$, $X = (\Pi_1 \Pi_2)$, $(Z_1 \Pi_2)$ und $(Z_2 \Pi_1)$ leer sein, so folgt aus (7) und (9) die Bedingung

$n = 2r_1 - 1$, d. h. *es gibt nur in Räumen ungerader Dimension Zweibildersysteme (die aus zwei P-Projektionen zusammengesetzt sind) mit paarweise punktfremden Zentren und Bildräumen.*

Im Zweibildersystem sind ferner die Verbindungsräume $O = [Z_1 Z_2]$, $p_0 = [O P] = [p_1 p_2]$ (P bedeutet dabei einen beliebigen Punkt des R_n, der nicht in O liegt), sowie die Schnitträume $O_i = (O \Pi_i)$ und $(O X)$ von Bedeutung, soferne sie nicht leer sind. Wann treten nun diese ausgezeichneten Räume auf?

6) Es ist $\dim O = (n - r_1) + (n - r_2) + 1 = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$. O tritt als echter Teilraum des R_n auf, wenn $\dim O < n$ ist. Dies führt zur hinreichenden Bedingung

$$(10)\quad n + 2 \leqq r_1 + r_2.$$

7) Es ist $\dim p_0 = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + 0 + 1 = 2n + 2 - (r_1 + r_2)$. Soll $\dim p_0 < n$ sein, so erhält man die hinreichende Bedingung

$$(11)\quad n + 2 < r_1 + r_2.$$

8) Es ist $\dim O_i = [2n + 1 - (r_i + r_j)] + (r_i - 1) - n = n - r_j = \dim Z_j$. Wegen $\dim Z_j \geqq 0$ ist auch $\dim O_i \geqq 0$. Liegen O und Π_i allgemein, so ist $O_i = (O \Pi_i)$ immer dann echter Teilraum von Π_i, wenn O echter Teilraum des R_n ist. Die notwendige Bedingung für $\dim O_i < \dim \Pi_i$ ist also

$$(12)\quad n + 2 \leqq r_1 + r_2.$$

Die Ergebnisse von 2), 6), 7) und 8) lassen sich zusammenfassen in:

(13) *Die Voraussetzung* $n + 2 \leqq r_1 + r_2$ *reicht hin für die Existenz von* X, $O(O \neq R_n)$ *und* $O_i(O_i \neq \Pi_i)$. *Gilt jedoch* $n + 2 < r_1 + r_2$, *so existiert außer diesen Räumen auch noch* p_0 *als echter Teilraum des* R_n.

9) *O und X sind bei allgemeiner Lage punktfremd*, denn es ist

$$\dim (OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = -1.$$

3.2. a-Systeme

Ein Zweibildersystem heiße *a-System*, wenn $\dim Z$, $\dim X$ und $\dim (OX)$ den kleinstmöglichen Wert haben (siehe 3. 1. unter 1), 2) und 9)), d. h. wenn die Zentren und Bildräume möglichst allgemein liegen.

Man kommt zu einer Einteilung der a-Systeme, wenn man die Urbildmannigfaltigkeit betrachtet, die zu einem vorgegebenen Bildpaar P', P'' gehört.

Alle Punkte mit dem Bild $P^{(i)}$ liegen in $p_i = [Z_i P^{(i)}]$, also liegen alle Punkte mit dem Bildpaar P', P'' im Schnittraum $(p_1 p_2)$. Nun ist

$$\dim(p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - n = n + 2 - (r_1 + r_2)$$

und je nachdem dim $(p_1 p_2 \gtreqless 0$ bzw. $n + 2 \gtreqless r_1 + r_2$ ist, wird man verschiedene Typen von a-Systemen erhalten[5].

3. 2. 1. *a-Systeme mit* $n + 2 = r_1 + r_2$

Wir setzen voraus, daß $P^{(i)}$ nicht in O_i liege[6], dann ist wegen dim $(p_1 p_2) = O$ jedem beliebigen Punktepaar P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ein und nur ein Punkt P als Urbild zugeordnet. Eine Kontrolle bietet auch die Abzählung. Für $P^{(i)}$ gibt es $\infty^{r_i - 1}$ mögliche Lagen in Π_i, für das Bildpaar P', P'' also $\infty^{r_1 - 1} \cdot \infty^{r_2 - 1} = \infty^{r_1 + r_2 - 2}$. Nach Voraussetzung ist $r_1 + r_2 - 2 = n$, also stehen den ∞^n Punkten P wirklich ∞^n Bildpaare P', P'' gegenüber. Ein Beispiel für dieses a-System ist die *Kotierte Projektion* im R_3.[7]

3. 2. 2. *a-Systeme mit* $n + 2 < r_1 + r_2$

Unter dieser Annahme ist dim $(p_1 p_2) < 0$, d. h. bei willkürlich vorgegebenem Punktepaar P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ sind die zugehörigen projizierenden Räume p_1, p_2 i. a. punktfremd, es gibt also i. a. keinen Punkt P mit P', P'' als Bildpaar. Dasselbe zeigt die Abzählung, denn es stehen den ∞^n Punkten des R_n $\infty^{r_1 + r_2 - 2}$ Möglichkeiten für Punktepaare P', P'' gegenüber, wobei nach Voraussetzung $r_1 + r_2 - 2 > n$ ist; P', P'' müssen also abhängig sein, wenn sie Bildpaar eines Punktes P sein sollen.

Nach (13) existieren im vorliegenden Falle die Räume X, O, O_i und p_0 als echte Teilräume des R_n. Der Abbildungsvorgang eines Punktes P kann sich nur innerhalb des Raumes $[Z_1 Z_2 P] = [OP] = p_0$ vollziehen, daher muß $P^{(i)}$ in $(p_0 \Pi_i)$ liegen. Da dim $p_0 < n$ ist, tritt $(p_0 \Pi_i)$ als echter Teilraum von Π_i auf. Andererseits ist wegen $[Z_j P] = p_j$

$$(p_0 \Pi_i) = ([Z_i Z_j P] \Pi_i) = ([Z_i p_j] \Pi_i) = p_j^{(i)} \text{ mit } \dim p_j^{(i)} = n - r_j + 1,$$

also liegt $P^{(i)}$ auf $p_j^{(i)}$. $p_j^{(i)}$ heiße Ordner in Π_i. Gibt man $P^{(j)} (P^{(j)} \notin O_j)$[6] in Π_j willkürlich vor, so ist $p_0 = [OP] = [OP^{(j)}]$ und daher auch der entsprechende Ordner $p_j^{(i)} = (p_0 \Pi_i)$ in Π_i eindeutig bestimmt. Abzählung: $P^{(j)}$ ist in Π_j auf $\infty^{r_j - 1}$ Arten wählbar; für $P^{(i)}$ gibt es $\infty^{n - r_j + 1}$ mögliche Lagen innerhalb $p_j^{(i)}$, es reduziert sich also die Anzahl der Punktepaare P', P'', die als Bildpaare von R_n-Punkten P zu betrachten sind, auf $\infty^{r_j - 1} \cdot \infty^{n - r_j + 1} = \infty^n$.

Da O in p_0 liegt, muß $O_i = (O \Pi_i)$ in $p_j^{(i)} = (p_0 \Pi_i)$ liegen. Weiters müssen sich entsprechende Ordner p_1'' und p_2' in einem Punkt von X

[5] Vgl. auch *F. Hohenberg*, l. c., S. 56.

[6] Der Fall $P \in O$, also $P^{(i)} \in O_i$ wird unter 3.2.3.1. behandelt werden.

[7] Vgl. *F. Hohenberg*, l. c., S. 59. Siehe auch vorl. Arbeit unter 3.2.3.1.

schneiden, denn es ist

$$\dim (p_0 X) = [2n + 2 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = 0.$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann man zu einem vorgegebenen $P^{(j)}$ in $\Pi_j (P^{(j)} \notin O_j)$ den entsprechenden Ordner $p_j^{(i)}$ in Π_i finden, ohne im Urbildraum p_0 aufsuchen zu müssen, d. h. man hat nur Operationen in den Bildräumen durchzuführen. Den Ordner $p_i^{(j)}$ in Π_j findet man als Verbindungsraum $[O_j P^{(j)}]$; schneidet man diesen mit X im Punkt $\overline{P} = (X[O_j P^{(j)}])$, so ist $p_j^{(i)} = [O_i \overline{P}]$.

Zusammenfassend gilt:

(14) *In einem a-System vom Typus $n + 2 < r_1 + r_2$ ist ein Punktepaar P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, aber $P^{(i)} \notin O_i$) dann und nur dann Bildpaar eines R_n-Punktes P, wenn P' und P'' auf entsprechenden Ordnern liegen. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n - r_j + 1$ und enthalten O_i; je zwei entsprechende Ordner p_1'' und p_2' schneiden sich in einem Punkt von X.*

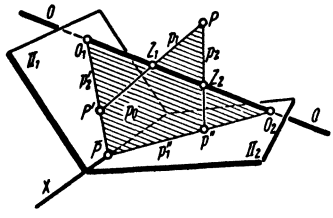

Abb 1

Ein Beispiel für ein a-System dieser Art ist das *allgemeine Zweibilderprinzip*[8] im R_3; man erhält es für $n = r_i = 3$ $(i = 1, 2)$ und es ist dann $\dim Z_i = 0$, $\dim \Pi_i = 2$, $\dim p_i = 1$, $\dim O = 1$, $\dim O_i = 0$, $\dim X = 1$, $\dim p_i^{(j)} = 1$ und $\dim p_0 = 2$ (Abb. 1).

3. 2. 3. *a-Systeme mit $n + 2 > r_1 + r_2$*

Wie schon erwähnt, erfüllen in diesem Falle die Urbilder zu einem gegebenen Bildpaar P', P'' einen Raum der Dimension $n + 2 - (r_1 + r_2)$, nämlich den Schnittraum $(p_1 p_2)$. Den ∞^n Punkten P des R_n stehen $\infty^{r_1 + r_2 - 2}$ Punktepaare P', P'' gegenüber, wobei nach Voraussetzung $r_1 + r_2 - 2 < n$ ist. Da nun ein Punktepaar P', P'' Bildpaar von $\infty^{n+2-(r_1+r_2)}$ Punkten aus $(p_1 p_2)$ ist, ist die Anzahl der Urbilder

$$\infty^{n+2-(r_1+r_2)} \cdot \infty^{r_1+r_2-2} = \infty^n.$$

Nun soll die Lage der $(p_1 p_2)$ im R_n untersucht werden. Nach (4) sind unter der Voraussetzung $r_1 + r_2 \geqq n + 1$ die Zentren punktfremd. Wir haben $r_1 + r_2 < n + 2$ oder gleichbedeutend damit $r_1 + r_2 \leqq n + 1$ vorausgesetzt; es wird also zweckmäßig sein, den Fall $r_1 + r_2 = n + 1$,

[8] Siehe *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Verlag Deuticke, Leipzig und Wien, 1923, S. 125ff.

in dem die Zentren punktfremd sind, vom Fall $r_1 + r_2 < n + 1$ zu trennen.

3. 2. 3. 1. *Es sei* $r_1 + r_2 = n + 1$

O tritt nach (10) nicht mehr als echter Teilraum des R_n auf, um so weniger daher $p_0 = [OP]$. Für die Dimension der Urbildräume $(p_1\, p_2)$ folgt aus unserer Voraussetzung

$$\dim (p_1\, p_2) = n + 2 - (r_1 + r_2) = 1.$$

Z_i und $(p_i\, p_j)$ liegen in p_i; für ihren Schnittraum innerhalb des Oberraumes p_i gilt

$$\dim ((p_i\, p_j)\, Z_i) = 1 + (n - r_i) - (n - r_i + 1) = 0,$$

d. h. die $(p_1\, p_2)$ sind Treffgeraden von Z_1 und Z_2. Die Treffgeradenanzahl und die Anzahl der Bildpaare stimmen überein, denn es gibt

$$\infty^{n-r_1} \cdot \infty^{n-r_2} = \infty^{2n-(r_1+r_2)} = \infty^{n-1} \text{ Treffgeraden}$$

$$\text{und } \infty^{r_1-1} \cdot \infty^{r_2-1} = \infty^{r_1+r_2-2} = \infty^{n-1} \text{ Bildpaare.}$$

Durch jeden Punkt $P (P \in \sum_i Z_i)$ des R_n kann man p_1 und p_2 legen, daher geht durch P eine Treffgerade $(p_1\, p_2)$. Umgekehrt läßt sich jede Treffgerade g von Z_1 und Z_2 als $(p_1\, p_2)$ auffassen, denn in $p_i = [Z_i (g\, Z_j)]$ ist ganz g enthalten. Zusammenfassend gilt:

(15) *In einem a-System vom Typus* $r_1 + r_2 = n + 1$ *sind die Zentren punktfremd und die* ∞^{n-1} *Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *bilden sich eineindeutig auf die* ∞^{n-1} *Bildpaare* P', $P'' (P^{(i)} \in \Pi_i)$ *ab.*

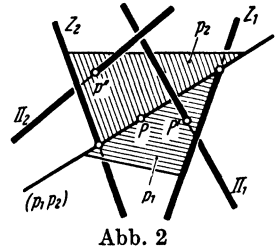

Abb. 2

Ein solches a-System findet man im R_3, wenn man $r_i = 2$ setzt[9]. Es ist dann $\dim Z_i = 1$ und $\dim \Pi_i = 1$, d. h. die beiden Zentren sind windschiefe Geraden und ebenso die beiden Bildräume (Abb. 2).

Mit Hilfe von (15) läßt sich klären, wie in einem a-System vom Typus $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ die Punkte aus O abgebildet werden. Nach (10) existiert O in einem solchen System als echter Teilraum des R_n und es ist $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2) = \bar{n}$. Die Abbildung der Punkte von O führt nicht aus O heraus, da alle auftretenden p_1, p_2 in O liegen. Nach (2) werden die Punkte von O aus $\bar{Z}_i = Z_i$ auf $\overline{\Pi}_i = (O\, \Pi_i) = O_i$ abgebildet. Da Z_i, $\Pi_i (i = 1, 2)$ nach Voraussetzung ein a-System bestimmen, gilt dasselbe auch für $\bar{Z}_i$, $\overline{\Pi}_i$. Weiters folgt aus

[9] Vgl. auch *F. Hohenberg*, l. c., S. 61.

$$\dim \overline{\Pi}_i = \dim O_i = n - r_j = \bar{r}_i - 1$$

die Beziehung $\bar{r}_i = n - r_j + 1$ und daraus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2n + 2 - (r_1 + r_2) = \bar{n} + 1$. Es gilt also:

(16) *In den a-Systemen mit* $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ *erfolgt die Abbildung der Punkte Q aus O durch ein a-System vom Typus* $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$, *d. h. die Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *bilden sich auf die Punktepaare* $Q', Q''(Q^{(i)} \in O_i)$ *ab. Liegt Q in* Z_i, *so ist* $Q^{(i)}$ *unbestimmt und* $Q^{(j)}$ *liegt in* O_j.

Ein Beispiel für $r_1 + r_2 = n + 2$ ist bekanntlich die Kotierte Projektion[7] im R_3. Sie ist zusammengesetzt aus dem Normalriß aus dem Fernpunkt Z_1 auf die Bildebene Π_1 und aus der Projektion aus der Ferngeraden Z_2 von Π_1 auf eine eigentliche Gerade Π_2 durch Z_1. O ist hier die Fernebene. Die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 bilden hier das Ferngeradenbüschel Z_1. Sie bilden sich ab auf die Punkte von $\overline{\Pi}_1 = (O\Pi_1) = Z_2$, also auf die Fernpunkte von Π_1 und auf den Punkt $\overline{\Pi}_2 = (O\,\Pi_2) = Z_1$, d. h. auf die Kote ∞.

Ein Beispiel für $r_1 + r_2 > n + 2$ ist das allgemeine Zweibilderprinzip im R_3 (Abb. 1). Hier gibt es nur eine einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2, nämlich O. Die Bildräume $\overline{\Pi}_1 = O_1$, $\overline{\Pi}_2 = O_2$ sind Punkte, d. h. es gibt nur ein einziges Bildpaar für die Punkte aus O.

3. 2. 3. 2. *Es sei* $r_1 + r_2 < n + 1$

Nach (10) tritt in diesem Falle O nicht mehr als echter Teilraum des R_n auf, dagegen existiert Z nach (4) und es ist $\dim Z = n - (r_1 + r_2)$, d. h. die Zentren haben stets einen Schnittraum. Für $(p_1\, p_2)$ gilt wieder $\dim (p_1\, p_2) = n + 2 - (r_1 + r_2)$. Z liegt in Z_i, Z_i liegt in allen p_i, daher ist Z auch allen $(p_1\, p_2)$ gemein.

Durch Abzählung soll geklärt werden, ob jeder $R_{n+2-(r_1+r_2)}$, der Z enthält, als $(p_1\, p_2)$ aufgefaßt werden kann. Es gibt

$$\infty^{2(n-[n+2-(r_1+r_2)])} = \infty^{2(r_1+r_2-2)}$$

Räume der Dimension $n + 2 - (r_1 + r_2)$, die einen gegebenen $R_{n-(r_1+r_2)}$, nämlich Z, enthalten[10]. Dagegen gibt es

$$\infty^{r_1-1} \cdot \infty^{r_2-1} = \infty^{r_1+r_2-2}$$

Bildpaare P', P''. Diese beiden Anzahlen stimmen nur für $r_1 + r_2 - 2 = 0$ überein, doch müßte man dann $r_1 = 0$ oder $r_1 = 1$ wählen, was wir stets ausgeschlossen haben. Man erkennt also, daß nicht jeder $R_{n+2-(r_1+r_2)}$, der Z enthält, als $(p_1\, p_2)$ aufgefaßt werden kann. Welche Bedingung haben also die $(p_1\, p_2)$ zu erfüllen? $(p_i\, p_j)$ und Z_i liegen in p_i und enthalten Z, daher gilt innerhalb des Oberraumes p_i

$$\dim((p_i p_j) Z_i) = [n + 2 - (r_i + r_j)] + (n - r_i) - (n - r_i + 1) = \\ = n + 1 - (r_i + r_j).$$

Bezeichnen wir $((p_i p_j) Z_i)$ mit T_i, so müssen alle T_i durch Z gehen und die Dimension $n + 1 - (r_1 + r_2)$ haben. Von einem beliebigen $R_{n+1-(r_1+r_2)}$, der durch Z geht und in Z_i liegt, kann man noch nicht sagen, ob er ein T_i ist, wir bezeichnen ihn daher mit T_i^*. Es gibt dann [10]

$$\infty^{1.(n-r_i-[n+1-r_i-r_j])} = \infty^{r_j-1}$$

solche T_i^* und $\infty^{(r_1-1)+(r_2-1)} = \infty^{r_1+r_2-2}$ Verbindungsräume $[T_1^* T_2^*]$. Weiters ist

$$\dim[T_1^* T_2^*] = 2(n + 1 - r_1 - r_2) - (n - r_1 - r_2) = n + 2 - (r_1 + r_2).$$

Man sieht, daß die Anzahl der $[T_1^* T_2^*]$ mit der Anzahl der Bildpaare übereinstimmt und daß ihre Dimension gleich groß ist wie die der $[T_1 T_2] = (p_1 p_2)$. Falls man zeigen kann, daß jedem $[T_1^* T_2^*]$ ein Bildpaar P', P'' zugeordnet ist, so folgt daraus $T_i^* = T_i$ und $[T_1^* T_2^*] = (p_1 p_2)$. Zur Abbildung von $[T_1^* T_2^*]$ benötigt man den Verbindungsraum $[[T_i^* T_j] Z_j] = [T_i^* Z_j]$ (T_j^* konnte man weglassen, weil T_j^* schon in Z_j enthalten ist). Nun ist

$$\dim[T_i^* Z_j] = (n + 1 - r_i - r_j) + (n - r_j) - (n - r_i - r_j) = \\ = n - r_j + 1 = \dim p_j,$$

d. h. $[T_i^* Z_j]$ ist ein p_j, weil ja jeder R_{n-r_j+1} durch Z_j ein p_j ist. Das Bild von $[T_1^* T_2^*]$ ist daher $(p_j \Pi_j) = R_0 = P^{(j)}$, also ist tatsächlich jedem $[T_1^* T_2^*]$ ein bestimmtes Punktepaar P', P'' als Bildpaar zugeordnet und es muß daher $T_i^* = T_i$ und $[T_1^* T_2^*] = (p_1 p_2)$ sein. Zusammenfassend gilt:

(17) *In einem a-System vom Typus* $r_1 + r_2 < n + 1$ *erfüllen die Urbildpunkte eines Bildpaares* P', P'' *einen* $R_{n+2-(r_1+r_2)} = [T_1 T_2]$, *wobei die* T_i *in* Z_i *liegen,* Z *enthalten und die Dimension* $n + 1 - (r_1 + r_2)$ haben.

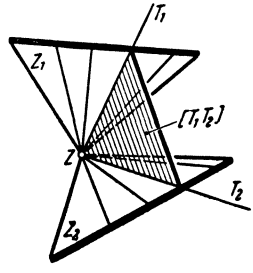

Abb. 3

Beispiel: Um eine nichtausgearbeitete Abbildung zu erhalten, muß man $r_i > 1$, also $r_1 + r_2 \geqq 4$ voraussetzen. Wählt man $r_1 = r_2 = 2$, so erhält man wegen der Voraussetzung $r_1 + r_2 < n + 1$ als kleinsten Wert für die Dimension des Oberraumes $n = 4$. Daraus bestimmt man

$$\dim Z_i = 2, \qquad \dim \Pi_i = 1,$$

[10] Vgl. hiezu z. B. *E. Bertini*, l. c., S. 36.

$$\dim p_i = 3, \qquad \dim T_i = 1,$$
$$\dim Z = 0 \text{ und } \dim [T_1\, T_2] = 2.$$

Abb. 3 zeigt in einer Skizze die Lage der Urbildräume in diesem Beispiel.

3. 2. 4. *Übersicht über die a-Systeme*

Aus den bisherigen Ergebnissen erhält man folgende Einteilung:

$r_1 + r_2 < n + 1$ Nach (17) bilden sich die $[T_1\, T_2]$ durch Z auf die Punktepaare P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ab.

$r_1 + r_2 = n + 1$ Z_1 und Z_2 sind punktfremd; nach (15) bilden sich die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 auf die Punktepaare P', $P''(P^{(i)} \in \Pi_i)$ ab.

$r_1 + r_2 = n + 2$ Den Punkten $P(P \underset{i}{\in} O)$ des R_n sind eineindeutig die Punktepaare P', $P''(P^{(i)} \in \Pi_i, P^{(i)} \underset{i}{\in} O_i)$ zugeordnet. Die Punkte Q aus O werden durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare Q', Q'' mit $Q^{(i)} \in O_i$ abgebildet (siehe 3. 2. 1. und (16)).

$r_1 + r_2 > n + 2$ Die Bilder $P^{(i)}$ $(i=1, 2)$ eines Punktes $P(P \underset{i}{\in} O)$ sind nach (14) in Π_i an Order durch O_i von der Dimension $n - r_j + 1$ gebunden. Entsprechende Ordner schneiden sich in einem Punkt von X. Die Punkte Q aus O werden nach (16) durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare $Q', Q''(Q^{(i)} \in O_i)$. abgebildet.

3.3. z-Systeme

3.3. 1. *Allgemeines*

Ein Zweibildersystem soll z-System heißen, wenn $\dim X$ und $\dim (O X)$ den kleinstmöglichen Wert haben, während $\dim Z = z$ den Minimalwert $n - (r_1 + r_2)$ überschreitet und $\geqq 0$ ist; es gilt also

(18) $Z = R_z$ mit Max. $(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq$ Min. $(n - r_1, n - r_2)$

Ist P ein allgemein liegender Punkt des R_n, so schneiden sich die zugehörigen p_i in $(p_1\, p_2)$, wobei $\dim (p_1\, p_2) = z + 1$ ist, da die p_i außer P auch Z und daher den ganzen Verbindungsraum $[Z\, P] = R_{z+1}$ gemein haben; in allen z-Systemen ist also die Dimension der Urbildräume stets > 0.

Wann leistet ein z-System mehr als eine seiner beiden P-Projektionen? Wir sagen, daß ein Abbildungsverfahren A_1 mehr leistet als ein Abbildungsverfahren A_2, wenn die ∞^n Punkte des R_n vermöge $A_v (v = 1, 2)$

auf ∞^{n_ν} Bildpunkte oder Bildpaare abgebildet werden, wobei $n_1 > n_2$ ist. Im z-System gibt es wie beim a-System $\infty^{r_1+r_2-2}$ Punktepaare P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$), dagegen gibt es nun ∞^{n-z-1} Möglichkeiten für die Urbildräume R_{z+1} durch Z. Aus (18) folgt

$$(19)\quad n - z - 1 \leqq r_1 + r_2 - 2,$$

d. h. es gibt i. a. mehr Möglichkeiten für Punktepaare P', P'' als für Urbildräume. Es können sicherlich nicht mehr als ∞^{n-z-1} Bildpaare auftreten; diese Anzahl tritt aber sicher auf, da verschiedenen R_{z+1} verschiedene Paare p_1, p_2 und diesen wieder verschiedene Paare P', P'' entsprechen. Zur P-Projektion Z_i, Π_i gehören ∞^{r_i-1} Bildpunkte. Die Gegenüberstellung zeigt $r_i - 1 \leqq n - z - 1$, da ja nach Voraussetzung $z \leqq n - r_i$ ist. Abgesehen vom Fall $z = n - r_i$ (hier ist $i = 1$ oder 2, aber fix), in dem das z-System gleich viel leistet wie die P-Projektion T_i, Π_i, leistet also das z-System stets mehr als eine seiner beiden P-Projektionen. Im Falle $z = n - r_i$ (i fix) ist $Z = Z_i$, daher $n - r_i \leqq n - r_j$ und $r_j - 1 \leqq r_i - 1$, d. h. die Abbildung aus Z_j auf Π_j ist überflüssig, denn Z_i, Π_i leistet mehr als die Abbildung Z_j, Π_j und gleich viel wie das z-System. In Hinkunft werde daher der Fall $z = n - r_i$ ausgeschlossen.

In allen z-Systemen tritt O als echter Teilraum des R_n auf, denn wegen (18) gilt

$$\dim O = \dim [Z_1 Z_2] = (n - r_1) + (n - r_2) - z = 2n - (r_1 + r_2 + z) < n.$$

Man kann zeigen, daß in allen z-Systemen die Abbildung der Punkte aus O gleich vor sich geht. Nach (2) werden die Punkte von O aus $\overline{Z}_i = Z_i$ auf $\overline{\Pi}_i = (O\,\Pi_i) = O_i$ abgebildet. Z_i und Π_i sind nach Voraussetzung punktfremd, innerhalb O ist $Z = (\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2)$ der kleinste Schnittraum von $\overline{Z}_1$ und $\overline{Z}_2$, also definieren $\overline{Z}_i, \overline{\Pi}_i$ (i=1, 2) ein a-System. In diesem a-System ist

$$\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z) = \bar{n}$$

und

$$\dim \overline{\Pi}_i = 2n - (r_i + r_j + z) + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z + 1) = \bar{r}_i - 1.$$

Daraus folgt $\bar{r}_i = n - (r_j + z)$ und $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 2n - (r_1 + r_2 + 2z)$, also schließlich $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$. Also gilt:

(20) *In allen z-Systemen werden die Punkte Q aus O durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare Q', Q'' ($Q^{(i)} \in O_i$) abgebildet.*

Nach (17) findet man für die ausgezeichneten Räume in diesem a-System $\dim \overline{Z} = \bar{n} - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z$, $\dim \overline{T}_i = \bar{n} + 1 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z + 1$ und $\dim [\overline{T}_1\,\overline{T}_2] = \bar{n} + 2 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = z + 2$.

Es sollen nun die Fälle $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ getrennt behandelt werden, da ihnen nach (19) verschiedene Typen von z-Systemen entsprechen.

3. 3. 2. *Es sei* $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$

Den $\infty^{n-z-1} = \infty^{r_1+r_2-2}$ Räumen R_{z+1} durch $Z = R_z$ stehen $\infty^{r_1+r_2-2}$ Punktepaare P', P'' gegenüber. Alle Punkte eines R_{z+1} durch Z bilden sich auf dasselbe Bildpaar P', P'' ab, denn es ist

$$\dim [R_{z+1} Z_i] = (z + 1) + (n - r_i) - z = n - r_i + 1 = \dim p_i$$

und daher $[R_{z+1} Z_i] = p_i$. Umgekehrt ist auch jedem beliebigen Punktepaar P', $P''(P^{(i)} \in \Pi_i, P^{(i)} \notin_i O_i)$ als Urbildraum ein R_{z+1} durch Z zugeordnet, denn schneidet man die durch P', P'' gehenden p_1 bzw. p_2, so ist

$$\dim (p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - n = n + 2 - (r_1 + r_2) = \\ = z + 1.$$

R_{z+1} enthält dabei Z, da Z in p_i liegt. Wir erhalten also:

(21) *In einem z-System vom Typus* $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ *ist jedes beliebige Punktepaar* P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i$, *aber* $P^{(i)} \notin_i O_i)$ *Bildpaar eines* R_{z+1} *durch* Z.

Beispiel für ein z-System vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$. Wählt man im R_3 $r_i = 2$ und $z = 0$, so ist die Voraussetzung erfüllt. Es ist dann $\dim Z_i = \dim \Pi_i = 1$ $(i = 1, 2)$, d. h. die Zentren und Bildräume sind Geraden, wobei sich Z_1 und Z_2 in einem Punkt schneiden. Nach (21) werden die ∞^2 Strahlen des Strahlbündels Z auf die ∞^2 Punktepaare P', P'' der linearen Punktreihen Π_1 und Π_2 abgebildet (Abb. 4). In diesem speziellen System gibt es nur einen einzigen $R_{z+2} = [\overline{T}_1 \overline{T}_2]$, nämlich den Verbindungsraum O der beiden Zentren.

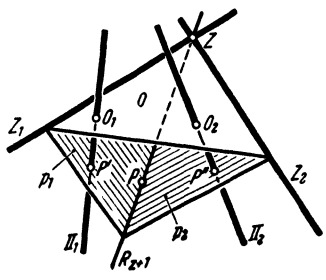

Abb. 4

3. 3. 3. *Es sei* $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$

In diesem Falle tritt $p_0 = [O\,P]$ als echter Teilraum des R_n auf, denn aus $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ folgt

$$\dim p_0 = \dim [O\,P] = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z) < n.$$

Weiters ist

$$\dim O_i = \dim (O \Pi_i) = [2n - (r_i + r_j + z)] + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z + 1)$$

und

$$\dim (p_0 \Pi_i) = 2n + 1 - (r_i + r_j + z) + (r_i - 1) - n = n - (r_j + z).$$

(22) Es ist somit

$$\dim p_0 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z),$$
$$\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$$

und

$$\dim (p_0 \Pi_i) = n - (r_j + z).$$

Die Schnitträume O_i und $(p_0 \Pi_i)$ haben nur dann Bedeutung, wenn ihre Dimensionen $\geqq 0$ sind und wenn sie echte Teilräume von Π_i sind. Einerseits ist wegen $\dim p_0 < n$ auch $\dim (O \Pi_i) < \dim (p_0 \Pi_i) < \dim \Pi_i$ und andererseits gilt wegen $n - r_j > z$ die Beziehung

$$\dim (p_0 \Pi_i) > \dim (O \Pi_i) = n - (r_j + z + 1) \geqq 0.$$

$O_i = (O \Pi_i)$ und $(p_0 \Pi_i)$ treten daher als echte Teilräume von Π_i auf. Man erkennt, daß das Bild $P^{(i)}$ eines Punktes P nur innerhalb $(p_0 \Pi_i)$ liegen kann, es fungieren also die $(p_0 \Pi_i)$ durch O_i als Ordner in Π_i. $P^{(j)}$ kann man in Π_j auf $\infty^{r_j - 1}$ Arten wählen, für $P^{(i)}$ gibt es dann nur mehr $\infty^{n - r_j - z}$ mögliche Lagen innerhalb des Ordners in Π_i. Die Anzahl der Punktepaare P', P'', die als Bildpaare von R_n-Punkten P auftreten, reduziert sich also auf $\infty^{r_j - 1} \cdot \infty^{n - r_j - z} = \infty^{n - z - 1}$. Diese Anzahl stimmt nun überein mit der Anzahl der R_{z+1} durch Z.

Beim a-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ traten auch Ordner auf und es mußten sich jeweils entsprechende Ordner in einem Punkt von X schneiden; bei den vorliegenden z-Systemen wurde die Existenz von X nicht vorausgesetzt, wir müssen also eine andere vom Urbildraum unabhängige Beziehung suchen, mit deren Hilfe man zu einem gegebenen Ordner in Π_j den entsprechenden in Π_i finden kann. — Da der Bund O mit p_0 perspektiv liegt zu O_i mit $(p_0 \Pi_i)$, müssen die Bünde O_1 mit $(p_0 \Pi_1)$ und O_2 mit $(p_0 \Pi_2)$ untereinander projektiv[11] sein und dies ist schon die gesuchte Beziehung.

Liegen P' und P'' in entsprechenden Ordnern, so liegen sie auch im selben Oberraum p_0 und dies reicht hin, daß sich p_1 und p_2 in einem R_{z+1} schneiden, denn es ist dann

$$\dim (p_1 p_2) = (n - r_1 + 1) + (n - r_2 + 1) - [2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] = z + 1$$

Daraus ergibt sich:

(23) *In einem z-System vom Typus* $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ *sind* P' *und* P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, *aber* $P^{(i)} \notin O_i$) *dann und nur dann Bildpunkte eines*

[11] Vgl. etwa *E. Bertini*, l. c., S. 49 und S. 54.

R_n-Punktes P, wenn sie in entsprechenden Ordnern der projektiven Ordnerbünde O_1 und O_2 liegen. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n - r_j + z$ und enthalten einen festen $R_{n-(r_j+z+1)}$), nämlich O_i.

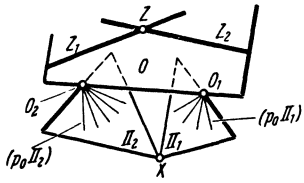

Abb. 5

Beispiel für ein z-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$. Soll Z nicht mit Z_1 zusammenfallen und berücksichtigt man auch (18), so muß man zumindest in den R_4 gehen. Wir wählen also $n = 4$, $r_i = 3$ $(i = 1, 2)$ und $z = 0$; dann ist dim $Z_i = 1$, dim $\Pi_i = 2$, dim $O = 2$, dim $O_i = 0$ und dim $(p_0 \Pi_i) = 1$. Abb. 5 zeigt in einer Skizze die Lage der ausgezeichneten Räume in diesem System.

3.4. x-Systeme

Wir lassen beim a-System die Voraussetzung fallen, daß dim X den kleinsten möglichen Wert habe und ersetzen sie durch

(24) $X = R_x$ mit $\mathrm{Max}\,(0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \mathrm{Min}\,(r_1 - 1, r_2 - 1)$.

Das neue System möge dann x-System heißen.

Es soll zuerst untersucht werden, welche x-Systeme von den besprochenen Systemen abweichen. — Nach 2. ist durch Z_i und Π_i (i fix) eine P-Projektion bestimmt, wenn man Punktfremdheit von Z_i und Π_i sowie dim Z_i + dim $\Pi_i = n - 1$ voraussetzt. Zu einem gegebenen a-System $Z_i, \Pi_i (i = 1, 2)$ gehören bestimmte Mannigfaltigkeiten von p_i, p_0 und $(p_1\, p_2)$; diese sind in Dimension und Lage nur von Z_1, Z_2 und P, aber nicht von Π_1, Π_2 abhängig. Ersetzt man Π_i durch Π_i^*, wobei dim Π_i^* = dim Π_i sei und Π_i^* mit $Z_i^* = Z_i$ keine Punkte gemein habe, so bleiben alle Urbildräume fest. Der Typus des a-Systems, soweit er von den Urbildräumen abhängt, bleibt also erhalten. Durch geeignete Wahl von Π_i^* kann man nun $(\Pi_1^*\, \Pi_2^*) = R_x$, also ein x-System herstellen. Somit unterscheidet sich ein x-System von einem a-System mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen höchstens durch die Lage der Bildpaare. Die Lage der Bildpaare kann nur beeinflußt werden, wenn Ordner auftreten, wenn also $r_1 + r_2 > n + 2$ ist (vgl. 3. 2. 4.). Man kann daher alle x-Systeme ausscheiden, für die $r_1 + r_2 \leqq n + 2$ ist, da sie abgesehen von den ∞^x Punkten des R_x, die mit ihren Bildpaaren zusammenfallen, die Eigenschaften gleichdimensionierter a-Systeme haben. In den verbleibenden x-Systemen vom Typus

$r_1 + r_2 > n + 2$ treten nach (13) stets O und p_0 als echte Teilräume des R_n auf. Der Schnittraum $(O\,X)$ existiert, da die Voraussetzung $r_1 + r_2 - (n+1) \leqq x$ zu

$$\dim (O\,X) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + x - n = n + x + 1 - (r_1 + r_2) \geqq 0$$

führt; um so mehr existiert daher $(p_0 X)$ wegen $\dim (p_0 X) = \dim (O X) + 1$. Unmittelbar ist zu erkennen, daß $(O\,X) = (O_1\,O_2)$ ist. Je zwei entsprechende Ordner schneiden sich in einem $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$, nämlich in $(p_0\,X)$. Da O in p_0 liegt, enthält $(p_0\,X)$ den Raum $(O\,X) = R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$. Jeder $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ aus X, der $(O\,X)$ enthält, tritt als Ordnerschnitt auf, da der Verbindungsraum mit O_i die Dimension

$$\dim [(O\,X)\,O_i] =$$

$$= [n+x+2-(r_i+r_j)] + (n-r_i) - [n+x+1-(r_i+r_j)] = n - r_j + 1$$

hat und andererseits jeder R_{n-r_j+1} durch O_i in Π_i ein Ordner ist. Sieht man von der Abbildung der Punkte aus O ab, so gilt:

(25) *In einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ schneiden sich je zwei entsprechende Ordner in einem $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ von X. Alle $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ enthalten einen festen $R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$, nämlich $(O\,X)$.*

Von Bedeutung ist oft der Sonderfall, daß Π_1 in Π_2 liegt, daß also $x = r_1 - 1$ ist. (25) geht dann über in:

(26) *Ist in einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ der Bildraum Π_1 in Π_2 enthalten, so liegt auch O_1 in O_2 und p_2' in p_1''.*

Beispiel für ein x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ unter der Voraussetzung $x < r_i - 1$ $(i = 1, 2)$. Das kleinstdimensionierte nicht-

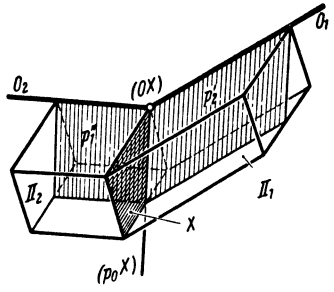

Abb. 6

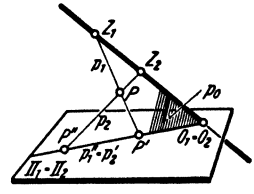

Abb. 7

ausgeartete x-System dieser Art findet man erst im R_5 mit $r_1 = r_2 = 4$ und $x = 2$. Es ist dann $\dim Z_i = 1$, $\dim \Pi_i = 3$, $\dim O = 3$, $\dim O_i = 1$, $\dim p_j^{(i)} = 2$, $\dim (O\,X) = 0$ und $\dim (p_0\,X) = 1$ $(i, j = 1, 2)$. Abb. 6 zeigt in einer Skizze die Situation in den Bildräumen in diesem Beispiel.

Beispiel für ein x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$, wobei Π_1 in Π_2 liege. Wir wählen im R_3 $r_1 = r_2 = 3$ und $x = 2$. Die Projektionszentren sind dann Punkte und die Bildräume sind Ebenen. Wegen $x = 2$ fallen die Bildebenen zusammen, desgleichen auch je zwei entsprechende Ordner sowie die Punkte O_1 und O_2 (Abb. 7).

Nun soll geklärt werden, wie in einem x-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ die Punkte aus O abgebildet werden. Im a-System vom Typus $r_1 + r_2 > n + 2$ werden nach 3. 2. 4. die Punkte aus O durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$ abgebildet. Führt man, wie vorhin erwähnt, das a-System Π_i, Z_i in ein x-System über, so geht auch das a-System $\overline{\Pi}_i$, $\overline{Z}_i$ in ein x-System über. Dies folgt aus der Tatsache, daß vorher $\dim \overline{X} = -1$ war, während nun $\dim \overline{X} = \dim (O\,X) \geqq 0$ ist. Es folgt daraus

(27) *In einem x-System vom Typus* $r_1 + r_2 > n + 2$ *erfolgt die Abbildung der Punkte* Q *aus* O *durch ein x-System vom Typus* $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$, *d. h. die Treffgeraden von* Z_1 *und* Z_2 *werden auf die Punktepaare* $Q', Q'(Q^{(i)} \in O_i)$ *abgebildet.*

3.5. xz-Systeme

Ein Zweibildersystem soll xz-System heißen, wenn O und X den kleinstmöglichen Durchschnitt haben, aber $\dim Z$ und $\dim X$ den Minimalwert überschreiten. Das xz-System unterscheidet sich somit vom a-System durch die Voraussetzung

(28) $Z = R_z$ mit $\mathrm{Max}\,(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq \mathrm{Min}\,(n - r_1, n - r_2)$, sowie $X = R_x$ mit $\mathrm{Max}\,(0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \mathrm{Min}\,(r_1 - 1, r_2 - 1)$.

Wie bei den z-Systemen werde auch hier der Fall $z = n - r_i$ (i fix) ausgeschlossen. Auch der Fall $x = r_i - 1$ (i fix) bietet nichts Neues, denn wenn keine Ordner existieren, so ist das xz-System einem gleichdimensionierten z-System gleichwertig, existieren aber Ordner, so sind sie nach (26) inzident. Wir beschränken uns daher auf die Betrachtung des Falles $z < n - r_i$, $x < r_i - 1$ ($i = 1, 2$). So wie unter 3. 4. gezeigt wurde, daß man aus einem a-System durch andere Wahl der Bildräume ein x-System herstellen kann, so kann man im vorliegenden Fall aus einem z-System ein xz-System herstellen. Da in den z-Systemen vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ die Bildpaare nicht an Ordner gebunden sind, folgt daraus, daß im wesentlichen die z-Systeme und xz-Systeme vom Typus $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ gleiche Eigenschaften haben. Die einzige Abweichung bilden die Punkte aus X, die nun mit ihrem Bildpaar zusammenfallen.

Es sei $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$

Wie beim z-System ist $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$ und $\dim p_0 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)$, weiters $\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$ und $\dim p_j^{(i)} = n - (r_j + z)$. Die Forderung $\dim (O\,X) \geqq 0$ führt zu $[2n - (r_1 + r_2 + z)] + x - n \geqq 0$, also zu

$$(29)\quad x - z > r_1 + r_2 - (n + 1),$$

während sich aus der Forderung $\dim (p_0\,X) \geqq 0$ die Bedingung $[2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] + x - n \geqq 0$, also

$$(30)\quad x - z \geqq r_1 + r_2 - (n + 1)$$

ergibt.

Nach (28) ist zwar $x > r_1 + r_2 - (n + 2)$, doch werden die Bedingungen (29) und (30) i. a. nicht erfüllt sein, d. h. das xz-System hat dann die Eigenschaften eines z-Systems mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen. Es gilt also:

(31) *Ist in einem xz-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ die Bedingung $x - z \geqq r_1 + r_2 - (n + 1)$ erfüllt, so schneiden sich je zwei entsprechende Ordner in einem $R_{n+x+1-(r_1+r_2+z)}$ von X; gilt $x - z > r_1 + r_2 - (n + 1)$, so gehen diese Ordnerschnitte durch einen festen $R_{n+x-(r_1+r_2+z)}$, nämlich durch $(O\,X)$.*

Die Punkte Q aus O werden nach (20) in allen z-Systemen durch ein a-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$, d. h. ohne Ordner, abgebildet; geht man zum xz-System über, so wird aus dem a-System in O ein x-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$. Nach 3. 5. unterscheidet sich aber ein solches x-System nur unwesentlich von einem a-System mit gleichdimensionierten Zentren und Bildräumen. Es gilt:

(32) *In einem xz-System werden die Punkte Q aus O durch ein x-System vom Typus $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$ auf die Punktepaare Q', Q'' ($Q^{(i)} \in O_i$) abgebildet.*

Beispiel für ein xz-System vom Typus $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$. Wir wählen im R_4 $r_i = 3$, $z = 0$ und $x = 1$. Die Zentren sind dann zwei Geraden, die einen Punkt gemein haben. Die Bildräume sind Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden. Als Ordner treten Geraden auf; je zwei entsprechende Ordner schneiden sich in einem Punkt von X. Die Ordner in Π_i enthalten den Punkt O_i. Die Situation in den Bildräumen ist also ganz gleich wie beim allgemeinen Zweibilderprinzip im R_3 (vgl. Abb. 1), nur erfüllen jetzt die Urbilder zu einem gegebenen Bildpaar P', P'' eine Gerade durch Z.

In den behandelten Systemen wurde stets vorausgesetzt, daß dim $(O\,X)$ den kleinstmöglichen Wert habe. Die Besonderheiten, die sich ergeben, wenn man diese Voraussetzung fallen läßt, mögen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. *F. Hohenberg* ergebenst danken, von dem ich die Anregung zu dieser Arbeit empfing und der die Untersuchung durch zahlreiche Ratschläge gefördert hat.

On Regular Measures and Baire Functions

By

Robert E. Zink, Lafayette, Ind., USA

(*Received February 24, 1958*)

1. Introduction. Let X be a topological space and let (X, S, μ) be an associated measure space. Let f be a non-negative measurable (S) function on X. We define the measure v on S by means of the equation

$$v(E) = \int_E f(x)\, d\,\mu(x).$$

It has been shown [3] that, if μ is outer regular, then the necessary and sufficient conditions for the outer regularity of v are: (1) if f is integrable over E, there exists a sequence of measurable open sets $\{U_n\}$ such that E is contained in $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ and f is integrable over each U_n; (2) if f is integrable over E and ε and δ are any positive numbers, there exists a measurable open set U containing $E \cap \{x : f(x) = 0\}$ such that $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap U) < \varepsilon$. Now the second condition appears to be a sort of continuity restriction, and, in fact, it was observed in [3] that, if S is a σ-algebra, then every continuous measurable function satisfies this requirement. It is the purpose of this note to inquire more deeply into the nature of the functions that satisfy this condition. In particular we shall see that the σ-algebra hypothesis of the theorem just quoted is superfluous. However, our principal objective is to show that if S is the σ-ring generated by the class of all compact subsets of X, then, every measurable Baire function satisfying (1) also satisfies (2).

2. Notation and terminology. Throughout the discussion we shall use the symbols (1) and (2) for the two conditions of the introduction. By extended real-valued function, we mean a function which may assume the values $+\infty$ and $-\infty$ as well as real values. If f is an extended real-valued function on a set X, the subsets $\{x : f(x) = 0\}$ and $\{x : f(x) \neq 0\}$ are denoted by $Z(f)$ and $N(f)$ respectively. If S is a subset of X, the characteristic function of S is denoted by χ_S.

A measure μ on a σ-ring, S, of subsets of a topological space is outer regular if and only if $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ is open, } U \in \mathrm{S}\}$ for each E

belonging to S. The Borel σ-ring of subsets of a topological space X is the σ-ring generated by the class of all compact subsets of X. If S is a subset of the topological space X, we write cl S for the closure of S in X.

3. The Discussion. We begin the discussion by proving an elementary theorem which is an extension of Corollary 5 of [3].

Theorem 1: *If f is upper semi-continuous, as well as non-negative measurable* (S), *μ is an outer regular measure on* S, *and* $v = \int f d\mu$, then (1) *is a necessary and sufficient condition for the outer regularity of v.*

Proof: Since f is upper semi-continuous, each of the sets $U_n = \{x: f(x) < \frac{1}{n}\}$ is open. Let E be any measurable set. Since μ is outer regular, there exists a measurable open set U containing E. Let $V_n = U_n \cap U$. Then each V_n is measurable and open and contains $E \cap Z(f)$. Thus, it is clear that there exists for each positive δ a measurable open set V containing $E \cap Z(f)$ and such that $\{x: f(x) > \delta\} \cap V = \phi$. In particular, (2) is satisfied, and the theorem is proved.

We now prove a sequence of lemmas which leads up to the principal theorem.

Lemma 2: *Let v be a measure on the Borel subsets of X. Let E and F be measurable sets satisfying*: (i) *$E \cup F$ is contained in a measurable open set U*; (ii) *if V is a measurable open set containing F, then $v(E \cap V) > \eta > 0$. Then, for every measurable set A, with $v(A) < \eta$, $F \cap cl(E - A) \neq \phi$.*

Proof: Let A be measurable set satisfying $v(A) < \eta$. If the proposition were false, there would exist, for each x in F, an open set V_x containing x and disjoint from $E - A$. Let $W = \bigcup_{x \in F} V_x$ and $V = W \cap U$. Then V is open and contains F. Since V is an open subset of the Borel set U, it is itself measurable [1, p. 219]. But $V \cap (E - A) = \varnothing$; hence

$$v(E \cap V) = v(E - A) \cap V) + v(A \cap V) = v(A \cap V) \leq v(A) < \eta.$$

Since this contradicts (ii), our assumption is false, and the lemma is proved.

Definition 3: Let X be an arbitrary topological space. Designate by B_0 the class of all extended real-valued continuous functions on X. Let B_1 denote the class of all discontinuous functions which are limits of pointwise convergent sequences of functions of class 0. Proceeding inductively, corresponding to an arbitrary ordinal $\alpha < \Omega$ (the first uncountable ordinal), let F_α be the class of all functions which are limits of pointwise convergent sequences of functions taken from $\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$,

and let $B_\alpha = F_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. A function is a Baire function if and only if it is an element of one of the above classes B_α.

(We observe that the Baire functions may be described as the elements of the smallest class of extended real-valued functions which contains the continuous functions and which contains the limit of every pointwise convergent sequence of functions in it.)

Lemma 4: *If* S *is the σ-ring of Borel subsets of X, f is a Baire function on X, and U is a measurable open set, then* $f\chi_U$ *is measurable* (S).

Proof: If f is a continuous function and c is a real number, then $N(f)$ and $\{x : f(x) < c\}$ are open sets. Consequently, $\{x : f\chi_U(x) < c\} \cap N(f\chi_U) = \{x : f(x) < c\} \cap N(f) \cap U$ is an open subset of U, and is therefore measurable. Thus, the proposition is valid for functions of class 0. Now suppose that the lemma has been established for the functions of each class B_α with $\alpha < \beta$. Let f be an element of B_β, say $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, where f_n belongs to B_{α_n}, with $\alpha_n < \beta$. Then, $f\chi_U = \lim_{n\to\infty} f_n\chi_U$, and the measurability of $f\chi_U$ is established. By the principle of transfinite induction the lemma is proved.

Lemma 5: *Let v be a measure on* S, *the σ-ring of Borel subsets of X, and let E and U be measurable sets such that U is open,* $E \subset U$, *and* $v(U) < +\infty$. *If f is a Baire function satisfying* $E \subset \{x : f(x) > \delta\}$ *for some real number δ, then corresponding to arbitrary* $\eta > 0$ *there exists a measurable set A such that* $v(A) < \eta$ *and* $f[cl(E - A)] \subset [\delta, +\infty]$.

Proof: Once again, the argument depends on the principle of transfinite induction. The proposition is certainly true for Baire functions of class 0. Now suppose that the lemma has been established for the Baire functions of each class B_α with $\alpha < \beta$. Let f be an element of B_β and let E and U be elements of S such that $E \subset U$, U is open, $v(U) < +\infty$, and such that $E \subset \{x : f(x) > \delta\}$ for a given real number δ. Let $g = f \wedge (1 + \delta)$. Then, g is a Baire function of class $\gamma \leq \beta$ (see, for example [2, p. 35]), and $E \subset \{x : g(x) > \delta\}$. Suppose $\gamma < \beta$, then there exists for each positive η a corresponding measurable set A such that $v(A) < \eta$ and $g[cl(E-A)] \subset [\delta, +\infty)$. But $f(x) \geqq g(x)$ for all x in X; hence, $f[cl(E-A)] \subset [\delta, +\infty]$. On the other hand, if $\gamma = \beta$, then, by definition of the Baire classes, $g = \lim_{n\to\infty} f_n$ where f_n belongs to B_{α_n} with $\alpha_n < \beta$. Thus, a fortiori, we must have $g\chi_U = \lim_n f_n\chi_U$. Since $g\chi_U$ is real-valued on E and since each f_n may be assumed to be real-valued [2, p. 35] and in view of lemma 4, we may apply Egoroff's

theorem to find A_0, a measurable subset of E with $v(A_0) < \frac{\eta}{2}$, such that $f_n \chi_U$ converges uniformly to $g \chi_U$ on $E - A_0$. Thus, corresponding to arbitrary $k > 1$, there exists an N such that $f_n(x) > \delta(1 - k^{-1})$ for all $n \geqq N$ and all x in $E - A_0$. Applying the induction hypothesis to $E - A_0$ and each f_n with $n \geqq N$, there exists a measurable set A_n such that $v(A_n) < \frac{\eta}{2^{n+1}}$ and $f_n[cl((E - A_0) - A_n)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$. Let $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \cup A_0$. Then $v(A) < \eta$, $f_n[cl(E - A)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$, for $n \geqq N$ and, as a result, $g[cl(E - A)] \subset [\delta(1 - k^{-1}), + \infty)$. Since k may be taken to be arbitrarily large, it follows that $g[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty)$. Since $f(x) \geqq g(x)$ for all x in X, it follows that $f[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty]$, and the lemma is established.

Theorem 6: *If f is a non-negative, Borel measurable Baire function and μ is an outer regular measure on* S, *the σ-ring of Borel subsets of X, then* (1) *is a necessary and sufficient condition for the outer regularity of $v = \int f d\mu$.*

Proof: In view of the theorem stated in the introduction, we need only show that condition (2) is satisfied.

Let B be a Borel set over which f is integrable, let $\{U_n\}$ be a countable covering of B by measurable open sets, over each of which f is also integrable, and let $B_n = B \cap U_n$. We show first that if ε and δ are any positive numbers and n is a positive integer, then there exists a measurable open set V containing $B_n \cap Z(f)$ and satisfying $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) < \varepsilon$. Suppose, on the contrary, that there are positive numbers ε and δ and a positive integer N such that $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) \geqq \varepsilon$ for each measurable open set V containing $B_N \cap Z(f)$. Let $E = \{x : f(x) > \delta\} \cap U_N$, and let $\eta = \delta \varepsilon$. By lemma 5, there exists a measurable set A such that $v(A) < \eta$ and $f[cl(E - A)] \subset [\delta, + \infty]$. But according to lemma 2, there exists in $B_N \cap Z(f)$ a limit point of $E - A$. Since this is an obvious contradiction, the assertion is proved. Thus, if ε and δ are any positive numbers, we may choose for each positive integer n, a measurable open set V_n containing $B_n \cap Z(f)$ and satisfying the condition $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Certainly $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ is open and measurable while $B \cap Z(f) \subset V$. Since $\mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : f(x) > \delta\} \cap V_n) < \varepsilon$, the proof of the theorem is complete.

Since we have proved (theorem 1), in the case of continuous functions, that one does not require the Borel σ-ring hypothesis, it is natural to

inquire whether this restriction can be eliminated entirely. It is easy to construct examples to show that this is not the case. We give one here in the interests of completeness.

Example 7: Let $X = [0, 2]$, topologized in the usual manner. Let S be the σ-ring consisting of the four sets $\varnothing$, $[0, 1]$, $(1, 2]$, X, and let $\mu([0, 1]) = \mu(X) = +\infty$, $\mu((1, 2]) = 1$. It is clear that μ is an outer regular measure on S. Finally, let $f = \chi_{(1, 2]}$. Certainly f is a Baire function of class 1, while $v = \int f\, d\mu$ is not outer regular.

Finally we observe that a Borel measurable Baire function need not satisfy (2) in the absence of condition (1).

Example 8: Let $X = [0, 1]$ with the ordinary topology, let S be the σ-ring of Borel subsets of X, and let μ be the outer regular measure defined on S as follows: $\mu(E) = \int_E \frac{1}{x}\, dm(x)$, if $0 \notin E$; $\mu(\{0\}) = +\infty$, where m is the Lebesgue measure on S. Consider the (measurable) Baire function $f = \chi_{(0, 1]}$. Let $B = \{0\}$ and $\delta = \frac{1}{2}$. Then, if V is open and $0 \in V$, there exists a positive number $\alpha\ (\leq 1)$ such that $\{x : f(x) > \frac{1}{2}\} \cap V \supset (0, \alpha)$. Hence, $\mu(\{x : f(x) > \frac{1}{2}\} \cap V) \geqq \mu((0, \alpha)) = +\infty$, and condition (2) fails to hold. To show that condition (1) is not satisfied, note that f is integrable over B while any open covering of B can be reduced to a covering consisting of only one (open) set, over which, of course, f is not integrable.

Theorem 1 shows that we cannot hope to find such an example among the functions of B_0; the function f given above is an element of B_1.

References

1. *Paul R. Halmos*, Measure Theory, New York, 1950.

2. *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble classes de Baire, Paris, 1916.

3. *Robert E. Zink*, A note concerning regular measures, Duke Math. J., **24** (1957), 127—136.

Generalized Legendre's Associated Functions (Integral Theorems, Recurrence Formulas)

By

L. Kuipers, Delft

(*Received February 26, 1958*)

1. In the present note we derive some properties on the class of generalized Legendre's associated functions introduced by *Meulenbeld* and the author in [1]. Many integral theorems and recurrence formulae can be established, and what is presented in the following sections is only a choice.

The functions mentioned above are the specified linearly independent solutions $P_k^{m,n}(z)$ and $Q_k^{m,n}(z)$ of the differential equation

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-z)}-\frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w=0, \qquad (1)$$

where primarily z is thought of as a complex variable not lying in the part $(-\infty, 1)$ of the real axis. In [1] the following representation was deduced:

$$P_k^{m,n}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}F\left(k-\frac{m-n}{2}+1, -k-\frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2}\right), \qquad (2)$$

and this formula is the startingpoint of section 2.

2. For real values of z lying in the interval $-1<x<1$ we introduce as a solution of the differential equation (1) the function $P_k^{m,n}(x)$ defined by

$$P_k^{m,n}(x)=\tfrac{1}{2}\{e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x+i\,0)+e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x-i\,0)\}, \qquad (3)$$

quite analogous to the way this is done in the theory of the Legendre functions.

According to the expression (2) for $P_k^{m,n}(z)$ it can easily be seen that

$$P_k^{m,n}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(1+x)^{n/2}}{(1-x)^{m/2}}F\left\{k-\frac{m-n}{2}+1, -k-\frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-x}{2}\right\} \qquad (4)$$

Now for $k \neq l$ it follows from the equations

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2x\frac{dw}{dx} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-x)} - \frac{n^2}{2(1+x)}\right\} w = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2x\frac{dw}{dx} + \left\{l(l+1) - \frac{m^2}{2(1-x)} - \frac{n^2}{2(1+x)}\right\} w = 0$$

that

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left(P_l^{m,n}(x)\frac{d}{dx}P_k^{m,n}(x) - P_k^{m,n}(x)\frac{d}{dx}P_l^{m,n}(x)\right)\right\} + \\ + (k-l)(k+l+1)P_k^{m,n}(x)P_l^{m,n}(x) = 0.$$

Integration between -1 and 1 yields

$$\int_{-1}^{1} P_k^{m,n}(x)\,P_l^{m,n}(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l). \tag{5}$$

Now suppose that the eight numbers $k \pm \frac{m \pm n}{2}$ and $l \pm \frac{m \pm n}{2}$ are positive integers. According to [1] (13) we replace the expression on the right of (4) by

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{(1+x)^{n/2}(1-x)^{m/2}}{2^m\,\Gamma(m+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)} \cdot \\ F\left(k+\frac{m+n}{2}+1,\ -k+\frac{m+n}{2};\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{6}$$

Following an argument used by *Barnes* [2] and putting

$$(a)_0 = 1,\ (a)_s = a(a+1)\ldots(a+s-1) \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

we observe that the hypergeometric function on the right of (6) is the same as

$$\sum_{s=0}^{k-\frac{m+n}{2}} \frac{(k+\frac{m+n}{2}+1)_s\,(-k+\frac{m+n}{2})_s}{(m+1)_s\,\Gamma(s+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^s,$$

thus (6) can be replaced by

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{(1+x)^{n/2}\,(1-x)^{m/2}}{2^m} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot$$

$$\sum_{s=0}^{k-\frac{m+n}{2}} (-1)^s \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1+s)}{\Gamma(m+1+s)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1-s)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^s, \quad (7)$$

and since $\lim_{\zeta \to s} (\zeta - s)\,\Gamma(-\zeta) = \frac{(-1)^{s+1}}{s!}$ we find for (7) by Cauchy's theorem

$$\left.\begin{aligned} P_k^{m,n}(x) = & \frac{-\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{1}{2^{m+1}\pi i} \cdot (1+x)^{n/2}\,(1-x)^{m/2} \cdot \\ & \oint \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1+\zeta)\,\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(m+1+\zeta)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1-\zeta)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\zeta} d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

where the integral is taken along a contour including the poles $\zeta = 0, 1, \ldots, k - \frac{m+n}{2}$. Hence

$$\int_{-1}^{1} P_k^{m,n}(x)\,P_l^{m,n}(x)\,dx = \frac{-1}{2^{m-n+2}\pi^2} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(l+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(l-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot$$

$$\oint\oint \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1+\zeta)\,\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1-\zeta)\,\Gamma(m+1+\zeta)} \cdot \frac{\Gamma(l+\frac{m+n}{2}+1+\nu)\,\Gamma(-\nu)}{\Gamma(l-\frac{m+n}{2}+1-\nu)\,\Gamma(m+1+\nu)} \cdot$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \left(\frac{1-x}{2}\right)^{m+\zeta+\nu} dx\,d\zeta\,d\nu. \quad (9)$$

We perform the integration with respect to x, and then we introduce new variables

$$\zeta = \xi - \frac{m+n}{2} - 1$$

$$\nu = \eta - \frac{m+n}{2} - 1.$$

The double integral occurring in (9) is except for a factor $2\,\Gamma(n+1)$ equal to

$$\oint\oint \frac{\Gamma(k+\xi)\,\Gamma(l+\eta)}{\Gamma(\xi+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\xi)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(k-\xi+2)\,\Gamma(l-\eta+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(\xi+\eta-n-1)}{\Gamma(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta, \text{ or, } \oint \frac{\Gamma(l+\eta)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(l-\eta+2)}\,d\eta\,.$$

$$\oint \frac{\Gamma(k+\xi)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\xi)\,\Gamma(\xi+\eta-n-1)}{\Gamma(\xi+\frac{m-n}{2})\,\Gamma(k-\xi+2)\,\Gamma(\xi+\eta)}\,d\xi.$$

The poles of the integrand of the last integral are

$$\xi = \frac{m+n}{2} + 1, \frac{m+n}{2} + 2, \ldots, k \text{ and } \xi = 1-\eta, 2-\eta, \ldots, n+1-\eta.$$

Now this integral (with respect to ξ) vanishes when taken round an infinitely large contour, hence in our case the integral is equal to $-2\pi i$. Σ residues in the points $1-\eta, \ldots, n+1-\eta =$

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\eta+r+1)\,\Gamma(\frac{m+n}{2}+\eta-r)}{\Gamma(-\eta+\frac{m-n}{2}+r+1)\,\Gamma(k+\eta-r+1)} \cdot \frac{(-1)^{n-r+1}}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}.$$

There remains to be evaluated

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \oint (-1)^{r-r+1} \frac{\Gamma(l+\eta)\ \Gamma(\frac{m+n}{2}+1-\eta)}{\Gamma(\eta+\frac{m-n}{2})\ \Gamma(l-\eta+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(k-\eta+r+1)\ \Gamma(\frac{m+n}{2}+\eta-r)}{\Gamma(-\eta+\frac{m-n}{2}+r+1)\ \Gamma(k+\eta-r+1)} \cdot \frac{d\eta}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}$$

Poles are $\eta = \frac{m+n}{2}+1, \frac{m+n}{2}+2, \ldots, l+1.$

Put $\eta = \alpha + \frac{m+n}{2}+1$, and replace r by $n-r$, then the last expression is transformed into

$$-2\pi i \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r!(n-r)!} \oint \frac{\Gamma(l+\frac{m+n}{2}+1+\alpha)}{\Gamma(m+1+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(m+\alpha+r+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+\alpha+r+2)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1+l-\frac{m+n}{2}-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}-r-\alpha)}{\Gamma(-r-\alpha)}\, d\alpha. \tag{10}$$

If $l < k$, then there are no poles, and the integral in (10) vanishes. The same holds if $l > k$.

Now assume that $k = l$. Then the only pole of the integrand of (10) is when $r = n$ for $\alpha = k - \frac{m+n}{2}$. Thus the value of (10) is equal to

$$4\pi^2 \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)} \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(2k+2)} \cdot \frac{\Gamma(-k+\frac{m+n}{2})}{\Gamma(-k+\frac{m-n}{2})} =$$

$$\frac{-4\pi^2}{n!} \frac{1}{2k+1} \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}.$$

Finally we have from the last result, (9) and (10)

$$\int_{-1}^{1} \{P_k^{m,n}(x)\}^2 dx = \frac{1}{2^{m-n-1}} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}. \tag{11}$$

3. If in the wellknown relation

$$c(c-1)(\zeta-1)F(a,b;c-1;\zeta) + c[c-1-(2c-a-b-1)\zeta]F(a,b;c;\zeta) + (c-a)(c-b)\zeta F(a,b;c+1;\zeta) = 0 \tag{12}$$

we set $a = k - \frac{m-n}{2} + 1$, $b = -k - \frac{m-n}{2}$, $c = 1-m$, $\zeta = \frac{1-z}{2}$, then according to (2) it is easily seen that (12) gives rise to a recurrence formula for the $P_k^{m,n}$ function. After some calculation we find

$$\left.\begin{aligned} P_k^{m+1,n+1}(z) + \{m-n+(m+n)z\}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}} P_k^{m,n}(z) - \\ - (k+\frac{m+n}{2})(k-\frac{m+n}{2}+1) P_k^{m-1,n-1}(z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Another recurrence formula can be derived by making use of the relations

$$cF(a,b-1;c;\zeta) - cF(a-1,b;c;\zeta) + (a-b)\zeta F(a,b;c+1;\zeta) = 0 \tag{14}$$

$$c(a-b)F(a,b;c;\zeta) - a(c-b)F(a+1,b;c+1;\zeta) + b(c-a)F(a,b+1;c+1;\zeta) = 0 \tag{15}$$

(see [43], p. 36, (1), (2)).

Replace each of the last two hypergeometrie functions occurring in (15) by an expression found from (14) in which first a and b are changed into $a+1$ and $b+1$ respectively. In the result we set

$$a = k - \frac{m-n}{2} + 1, \; b = -k - \frac{m-n}{2}, \; c = 1-m, \; \zeta = \frac{1-z}{2}.$$

Again we make use of (2) and after some calculation we get

$$\left.\begin{aligned}&\{2k(k+1)(2k+1)z+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}P_k^{m,n}(z)=\\&=2k(k-\frac{m-n}{2}+1)(k-\frac{m+n}{2}+1)P_{k+1}^{m,n}(z)+\\&+2(k+1)(k+\frac{m-n}{2})(k+\frac{m+n}{2})P_{k-1}^{m,n}(z).\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Remarks.

1. Because of (3), which implies

$$e^{\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x+i0)=e^{-\frac{1}{2}m\pi i}P_k^{m,n}(x-i0)=P_k^{m,n}(x)\quad(-1<x<1),$$

it follows that (13) and (16) are also valid when z is chosen on the crosscut $(-1, 1)$.

2. It is not difficult to show that (13) and (16) hold for the $Q_k^{m,n}(z)$. For instance, one may use the next formula (see [4], (24))

$$Q_k^{m,n}(z)=\frac{\pi e^{\pi i m}}{2\sin(k+\frac{m+n}{2})\pi}\left[e^{\mp\pi i(k-\frac{m-n}{2})}P_k^{m,n}(z)-\right.$$

$$\left.-e^{\pm\frac{m-n}{2}\pi i}\frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)}\cdot\frac{1}{2^{m-n}}P_k^{n,m}(-z)\right],$$

and from this relation, (13) and (16), the desired results can be derived.

3. From (13) and (5) follows by multiplication and integration

$$\int_{-1}^{1}\{2k(k+1)(2k+1)x+\tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\}(P_k^{m,n}(x))^2\,dx=0,\text{ or,}$$

$$\int_{-1}^{1}x\{P_k^{m,n}(x)\}^2dx=-\frac{(m^2-n^2)\,\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+1)}{2^{m-n+1}k(k+1)(2k+1)\,\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}\qquad(17)$$

In the case of the ordinary Legendre's associated functions (17) leads to a trivial result.

4. Another integral theorem, derived from (16) and (5) by multiplication and integration is

$$\int_{-1}^{1} \{2k(k+1)(2k+1)x + \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)(2k+1)\} P_k^{m,n}(x) P_{k+1}^{m,n}(x)\,dx =$$

$$= 2k(k-\frac{m-n}{2}+1)(k-\frac{m+n}{2}+1) \int_{-1}^{1} \{P_{k+1}^{m,n}(x)\}^2\,dx, \text{ or,}$$

$$\int_{-1}^{1} x P_k^{m,n}(x) P_{k+1}^{m,n}(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{(k+1)(2k+1)(2k+3)} \frac{1}{2^{m-n-1}} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{m-n}{2}+2)\,\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+2)}{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)\,\Gamma(k-\frac{m+n}{2}+1)}. \tag{18}$$

For $m = n$, (18) becomes

$$\int_{-1}^{1} x P_k^m(x) P_{k+1}^m(x)\,dx = \frac{2\,\Gamma(k+m+2)}{(k+1)(2k+1)(2k+3)\,\Gamma(k-m+1)}.$$

References

[1] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*: On a generalization of Legendre's associated differential equation I, II, Proc. Kon. Ned. Ak. v. W., Amsterdam, Series A, **60**, No 4, pp. 436—450.

[2] *E. W. Barnes*: On generalized Legendre functions, Quart. J. Math. Oxford Ser. **39** (1908), pp. 97—204.

[3] *T. M. MacRobert*: On recurrence formulae, Proc. Glasgow Math. Ass., **III** (1956), part I, pp. 36—37.

[4] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld*: Related generalized Legendre's associated functions (to be published).

Die Vollständigkeit der funktionentheoretischen Invarianten kongruenter Kreisbogenecken

Von

Helmut Unkelbach, Bonn

(*Eingegangen am 27. Februar 1958*)

Wir bezeichnen mit $\{z, \zeta\}$ den Schwarzschen Differentialausdruck und betrachten eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_k}{\zeta^k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + P(\zeta), \qquad a_k \neq 0, \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten a_k, a_{k-1}, $\ldots$ a_1 reell sind und die Funktion $P(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell ist. Ist die Funktion $z = f(\zeta)$ eine Lösung von (1), dann bildet sie den Halbkreis $|\zeta| < \varepsilon$, $\Im(\zeta) > 0$ auf eine „Umgebung" einer verallgemeinerten Kreisbogenecke $E^{(k,l)}$ ab, welche die Ordnung k und die Art l besitzt, wobei[1]

$$l = 1 \text{ für } a_k < 0, \quad l = 2 \text{ für } a_k > 0. \tag{2}$$

Für alle geraden Werte von k wurde ein Winkel $W^{(k,l)}$ von $E^{(k,l)}$ definiert, und $W^{(k,l)}$ dargestellt als eine Funktion

$$W^{(k,l)} = F_k(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{m+1}), \tag{3}$$
$$m = k/2.$$

Das Bildungsgesetz dieser Funktion F_k ist in [4] und [5] beschrieben. Dabei ist die Art l durch den Funktionswert von F_k für $W^{(k,l)} \neq 0$ eindeutig bestimmt, da für $l = 1$ der Wert von F_k reell, für $l = 2$ der Wert von F_k rein imaginär ist.

In [3], Seite 329 wurde definiert, in welchen Fällen zwei Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ kongruent heißen sollen. Es handelt sich um einen

[1] Vgl. [2] und [3]. Das Vorzeichen von a_k ist entsprechend der Arbeit [2] gewählt, d. h. anders als in [4] und [5]. Zur Abkürzung sagen wir, die Ecke $E^{(k,l)}$ „gehört" zu den Koeffizienten a_k, a_{k-1} a_1. Im folgenden bezeichnen wir mit $P_\mu(\zeta)$ durchweg Funktionen, welche in einem Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell sind.

verallgemeinerten Kongruenzbegriff, wobei durch eine Möbiussche Transformation der einen Ecke eine Euklidische Kongruenz hergestellt werden kann („Möbius-Kongruenz").

Die Funktionen (3) sind Invarianten kongruenter Ecken, d. h. daß die Funktionen für kongruente Ecken denselben Wert annehmen. Für ungerades k hat sich bisher keine Analogie zu (3) ergeben. Für beliebiges endliches k wurde außer (3) nur noch die Invariante

$$F_k^0(a_k) = \frac{a_k}{|a_k|}, \tag{4}$$

abgeleitet, welche die Art l bestimmt.

Da die Invarianten (3) und (4) eine geometrische Bedeutung besitzen, interessiert die Frage, welche weiteren Invarianten es noch gibt. Wir fragen also nach weiteren Funktionen

$$G(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1),\ a_k \neq 0,$$

welche für kongruente Ecken dieselben Werte annehmen. Es stellt sich heraus, daß es „im wesentlichen" keine weiteren Invarianten gibt, und zwar entsprechend dem folgenden

Hauptsatz

Ist $G(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$ eine eindeutige komplexe Funktion der Koeffizienten $a_k, \ldots, a_1, a_k \neq 0$, welche für kongruente Ecken dieselben Werte annimmt, dann läßt sich G darstellen als

$$G = H(F_k, F_k^0) \text{ für gerades } k, \tag{A}$$

$$G = H(F_k) \text{ für gerades } k,\ F_k \neq 0 \tag{B}$$

$$G = H(F_k^0) \text{ für ungerades } k, \tag{C}$$

wo H eine Funktion der Invarianten F_k bzw. F_k^0 bedeutet.[2]

Folgerung aus dem Hauptsatz: Sowohl die Theorie der geradlinigen Polygone als auch der Kreisbogenpolygone legt es nahe, von einem Winkel zu verlangen, daß er sich als Funktion der Koeffizienten des betreffenden Hauptteiles der Differentialgleichung darstellen läßt, welcher die Abbildungsfunktion genügt. Weiter wird von einem Winkel sinngemäß gefordert, daß er für kongruente Ecken denselben Wert hat und daß er bei festem k und l verschiedene Werte annehmen kann.

[2] Es ist bemerkenswert, daß für die Funktion G weder die Voraussetzung der Stetigkeit noch sonst eine weitere Voraussetzung erforderlich ist.

Auf der Grundlage dieser Forderungen ergeben sich aus unserem Satz die beiden Folgerungen:

I. *Ecken ungerader Ordnung besitzen keine Winkel.*

II. *Ecken gerader Ordnung besitzen „im wesentlichen" keine anderen Winkel, als sie in* [3] *und* [5] *definiert sind.*

Der Beweis des Hauptsatzes ergibt sich aus dem folgenden

Hilfssatz

$E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ seien zwei beliebige Ecken derselben Ordnung und Art. Eine Funktion $z = f(\zeta)$, welche eine „Umgebung" von $E^{(k,l)}$ auf den Halbkreis $|\zeta| < \varepsilon$, $\Im(\zeta) > 0$ und die Eckenelemente auf den Punkt $\zeta = 0$ abbildet („Abbildungsfunktion" der Ecke), möge die Differentialgleichung (1) erfüllen. Ist k ungerade, dann gibt es eine zu $E_1^{(k,l)}$ kongruente Ecke $E_2^{(k,l)}$, deren Abbildungsfunktion $z = f_2(\zeta)$ eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt erfüllt:

$$\{z, \zeta\} = \frac{a_k}{\zeta_k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + P_2(\zeta), \tag{5}$$

wobei die Funktion $P_2(\zeta)$ im Kreise $|\zeta| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta < \varepsilon$ reell ist. Wenn k gerade ist, müssen $E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ als gleichwinklig angenommen werden. Dann gibt es ebenfalls eine zu $E_1^{(k,l)}$ kongruente Ecke $E_2^{(k,l)}$ deren Abbildungsfunktion $z = f_2(\zeta)$ eine Differentialgleichung (5) erfüllt.

Beweis des Hilfssatzes: Wir bezeichnen mit $z = f^*(\zeta_*)$ eine Funktion, welche eine „Umgebung" von $E_1^{(k,l)}$ auf den Halbkreis $|\zeta_*| < \varepsilon$, $\Im(\zeta_*) > 0$ und die Eckenelemente auf den Punkt $\zeta_* = 0$ abbildet. Dann erfüllt $z = f^*(\zeta_*)$ eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$\{z, \zeta_*\} = \frac{b_k}{\zeta_*{}^k} + \frac{b_{k-1}}{\zeta_*{}^{k-1}} + \ldots + \frac{b_1}{\zeta_*} + P_1(\zeta_*), \tag{6}$$

wobei die Funktion $P_1(\zeta_*)$ im Kreise $|\zeta_*| < \varepsilon$ regulär und für $-\varepsilon < \zeta_* < \varepsilon$ reell ist. Nach [3] Seite 329, sind die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $R_2^{(k,l)}$ dann und nur dann kongruent, wenn sie durch lineare Transformationen in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Funktion

$$\zeta_* = \overline{f^*}(f_2(\zeta)) \equiv g(\zeta) \tag{7}$$

in einer gewissen Umgebung von $\zeta = 0$ regulär und umkehrbar eindeutig ist und innerhalb dieser Umgebung die Halbachse $\zeta > 0$ auf die Halbachse $\zeta_* > 0$ abbildet. Dabei wird mit $\zeta_* = \overline{f^*}(z)$ die Umkehrfunktion von $z = f^*(\zeta_*)$ bezeichnet.

Aus (7) folgt, daß $g(\zeta)$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\{f_2(\zeta), \zeta\} = [g'(\zeta)]^2 \cdot \{f^*(\zeta_*), \zeta_*\} + \{g(\zeta), \zeta\}. \tag{8}$$

Wir setzen

$$\zeta_* = g(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu;\ c_1 > 0,\ c_\nu \text{ reell}. \tag{9}$$

Eine Ecke $E_2^{(k,l)}$ existiert dann und nur dann, wenn die c_ν so bestimmt werden können, daß (8) erfüllt ist und die Reihe (9) konvergiert. Zur Ermittlung der Koeffizienten c_ν führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &[g'(\zeta)]^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \zeta^\nu;\ \{g(\zeta), \zeta\} = P_3(\zeta) \\ &\frac{1}{c_1 + c_2\zeta + c_3\zeta^2 + \dots} = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \dots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Gleichung (8) hat dann unter Berücksichtigung von (5) und (6) die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} &a_k + a_{k-1}\zeta + a_{k-2}\zeta^2 + \dots + a_1\zeta^{k-1} + \zeta^k P_2(\zeta) = \\ &= [d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \dots] \cdot [b_k(p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \dots)^k + \\ &+ b_{k-1}\zeta(p_0 + p_1\zeta + \dots)^{k-1} + \dots + b_1\zeta^{k-1}(p_0 + p_1\zeta + \dots) + \\ &+ \zeta^k P_1(c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots)] + \zeta^k P_3(\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ aus (11) bezeichnen wir mit $R_\mu(c_1, \dots, c_\nu, b_1, \dots, b_k)$ rationale Funktionen der Koeffizienten $c_1, \dots, c_\nu$, $b_1, \dots, b_k$ welche für $c_1 \neq 0$ endliche Werte annehmen. Dann folgt aus (10):

$$p_\nu c_1 + p_{\nu-1} c_2 + \dots + p_0 c_{\nu+1} = 0 \text{ für } \nu \geqq 1.$$

Also

$$p_\nu = -\frac{c_{\nu+1}}{c_1^2} + R_1(c_1, \dots, c_\nu). \tag{10a}$$

Außerdem ist

$$d_\nu = 2(\nu + 1)\, c_1 c_{\nu+1} + R_2(c_1, \dots, c_\nu) \text{ für } \nu \geqq 1. \tag{10b}$$

Die Gleichung (11) kann für vorgegebene Koeffizienten $a_k, \dots, a_1, b_k, \dots, b_1$ nur dann identisch erfüllt sein, wenn:

$$a_k = d_0 b_k p_0^k = b_k c_1^{2-k}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{2-k}} && \text{für } k \neq 2, \\ a_2 &= b_2, && \text{für } k = 2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wegen $c_1 > 0$ folgt aus (12) insbesondere

$$\text{sign}\,(a_k) = \text{sign}\,(b_k), \tag{13}$$

d. h. daß die Ecken nur dann kongruent sein können, wenn sie von derselben Art sind[3].

Wenn $k = 1$ ist, dann kann $c_\nu = 0$ für $\nu \geqq 2$ gesetzt werden, wobei $P_2(\zeta)$ durch $P_1(\zeta_*)$ und c_1 bestimmt ist, und zwar gilt

$$P_2(\zeta) = c_1^2\, P_1(c_1\,\zeta). \tag{14}$$

Die Ecken $E_1^{(1,l)}$ und $E_2^{(1,l)}$ sind kongruent. Unser Hilfssatz ist also für $k = 1$ bewiesen.

Für den Koeffizienten c_2 ergibt sich für $k \geqq 2$ aus (11) die Gleichung

$$a_{k-1} = d_0(k p_0^{k-1}\, p_1\, b_k + p_0^{k-1}\, b_{k-1}) + d_1\, b_k\, p_0^k.$$

Aus (10) folgt

$$d_0 = c_1^2 \qquad d_1 = 4\, c_1\, c_2$$

$$p_0 = \frac{1}{c_1} \qquad p_1 = -\frac{c_2}{c_1^2}.$$

Also

$$c_2 = \frac{c_1^2\, b_{k-1} - c_1^{k-1}\, a_{k-1}}{(k-4)\, b_k} \qquad \text{für } k \neq 4. \tag{12a}$$

Für $k = 4$ ist notwendig

$$\frac{a_3}{\sqrt{a_4}} = \frac{b_3}{\sqrt{b_4}},$$

d. h. nach [5], daß die Winkel von $E_1^{(4,l)}$ und $E_2^{(4,l)}$ übereinstimmen. Der Koeffizient c_2 ist in diesem Falle willkürlich wählbar.

Wenn $k = 2$ und $a_2 = b_2$ ist, d. h. daß die Ecken $E_1^{(2,l)}$ und $E_2^{(2,l)}$ denselben Winkel besitzen, dann kann $c_\nu = 0$ für $\nu \geqq 3$ gesetzt werden, wobei $P_2(\zeta)$ durch $P_1(\zeta_*)$, a_1, b_1 und b_2 bestimmt ist, und zwar gilt ($c_1 = 1$)

$$P_2(\zeta) = 3\, b_1\, c_2 - b_2\, c_2^2 + P_1(\zeta + c_2\,.\,\zeta^2) - 6\left(\frac{c_2}{1+2\,c_2\,\zeta}\right)^2 \tag{15}$$

Dabei ist $c_2 = \dfrac{a_1 - b_1}{2\, b_2}$.

---

[3] Sind die Koeffizienten c_ν so bestimmbar, daß $c_1 < 0$ ist, dann bedeutet dies geometrisch, daß die Ecken spiegelbildlich kongruent sind. Ecken verschiedener Art können nur dann spiegelbildlich kongruent sein, wenn sie von ungerader Ordnung sind.

Die Ecken $E_1^{(2,l)}$ und $E_2^{(2,l)}$ sind kongruent. Unser Hilfssatz ist also für $k = 2$ bewiesen.

Vergleicht man in Formel (11) die Koeffizienten von ζ^ν, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, so erhält man

$$a_{k-\nu} = d_0\, b_k\, k\, p_0^{k-1}\, p_\nu + d_\nu\, b_k\, p_0^k + R_3(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k).$$

Hieraus sowie aus (10a) und (10b) errechnet man

$$a_{k-\nu} = b_k\, c_1^{1-k}\, c_{\nu+1}\,[2(\nu+1) - k] + R_4(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k). \tag{16}$$

Ist k ungerade, dann kann nach dieser Formel der Koeffizient $c_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, aus den Koeffizienten $c_1, \ldots, c_\nu$ berechnet werden und es kann $c_\nu = 0$ gesetzt werden für $\nu \geqq k+1$. $P_2(\zeta)$ ist analog zu (15) durch $P_1(\zeta_*)$, $b_1, \ldots, b_k$, $a_1, \ldots, a_k$ bestimmt. Die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ sind also kongruent und unser Hilfssatz ist für ungerades k bewiesen.

Wenn k gerade ist, dann setzen wir wie in (3) zur Abkürzung

$$\frac{k}{2} = m.$$

Die Gleichung (16) ist für

$$\nu = 1, 2, \ldots, m-2, m, \ldots, k-1$$

nach $c_{\nu+1}$ auflösbar. Für $\nu = m-1$ ist (16) dann und nur dann nach $c_{\nu+1}$ auflösbar, wenn

$$a_{m+1} = R_4(c_1, \ldots, c_\nu, b_1, \ldots, b_k). \tag{17}$$

Andererseits kann eine Lösung nur dann existieren, wenn die Ecken $E^{(k,l)}$ und $E_1^{(k,l)}$ denselben Winkel W besitzen, weil die Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ kongruent sind. Deshalb ist a_{m+1} durch $a_k, \ldots, a_{m+2}, b_k, \ldots, b_{m+1}$ eindeutig bestimmt, da a_{m+1} in die Invariante F_k, welche den Winkel W bestimmt, linear eingeht. Diese für a_{m+1} bestehende Gleichung muß mit (17) übereinstimmen. Die Gleichheit der Winkel ist deshalb neben der Gleichheit der Art die einzige Bedingung für die Existenz einer Ecke $E_2^{(k,l)}$. Damit ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich leicht der

Beweis des Hauptsatzes: Für ungerades k müssen wir beweisen, daß G für konstantes sign (a_k) denselben Wert annimmt. Wir geben uns zwei reelle Wertesysteme

$$\left.\begin{array}{ll} & a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1 \\ & b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1 \\ \text{mit} & a_k \neq 0,\ b_k \neq 0,\ \operatorname{sign}(a_k) = \operatorname{sign}(b_k) \end{array}\right\} \tag{18}$$

Nach dem Hilfssatz gibt es zwei kongruente Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$, wobei $E_1^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $b_k, \ldots, b_1$ und $E_2^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $a_k, \ldots, a_1$ „gehört". Da G für kongruente Ecken invariant sein soll, gilt

$$G(b_k, \ldots, b_1) = G(a_k, \ldots, a_1). \tag{19}$$

Daraus folgt Gleichung (C) des Hauptsatzes.

Für gerades k setzen wir in (18) noch voraus:

$$F_k(b_k, \ldots, b_{m+1}) = F_k(a_k, \ldots, a_{m+1}) = W.$$

Nach dem Hilfssatz gibt es zwei kongruente Ecken $E_1^{(k,l)}$ und $E_2^{(k,l)}$ mit dem Winkel W, wobei $E_1^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $b_k, \ldots, b_1$ und $E_2^{(k,l)}$ zu dem Wertesystem $a_k, \ldots, a_1$ „gehört". Da G für kongruente Ecken invariant sein soll, gilt wieder (19). Daraus folgt Gleichung (A) des Hauptsatzes.

Da W für Ecken 1. Art reell, für Ecken 2. Art rein imaginär ist, gilt (B) für $F_k \neq 0$. Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

Da für $F_k = 0$, $k \geqq 4$ die Ecke sowohl von der 1. Art als auch von der 2. Art sein kann, ist (B) in diesem Falle nicht richtig. Jedoch gilt (B) auch für $F_k = 0$, $k = 2$, da für $k = l = 2$ stets $W \neq 0$ ist.

Aus der vorliegenden Untersuchung ergeben sich weitere Probleme, z. B. die Frage nach funktionentheoretischen Invarianten von Ecken unendlicher Ordnung.

Literatur

[1] *Helmut Unkelbach*: Die konforme Abbildung echter Polygone. Mathem. Ann. **125**, 82—118 (1952).

[2] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone I. Mathem. Ann. **129**, 391—414 (1955).

[3] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone II. Mathem. Ann. **130**, 327—336 (1955).

[4] *Helmut Unkelbach*: Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung. Mathem. Ann. **133**, 320—327 (1957).

[5] *Helmut Unkelbach*: Über Ecken mit imaginären Winkeln und ihre konforme Abbildung. Monatshefte für Mathematik, **62**, 200—211 (1958).

[6] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen I. Math. Z. **60**, 187—212 (1954).

[7] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen II. Math. Z. **68**, 27—76 (1957).

[8] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen III. Math. Z. **68**, 245—266 (1957).

Weitere Literatur in [1], [6] — [8].

Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen

Von

H. Horninger, Istanbul

Mit 5 Textabbildungen

(*Eingegangen am 3. Februar 1958*)

Mit dem vorliegenden Aufsatz beende ich die Untersuchungen über die Beziehungen, die zwischen Euklidischen Schraubflächen und bestimmten Arten zusammengesetzter Schraubungen bestehen, wobei ich insbesondere die Frage zu klären versucht habe, unter welchen Voraussetzungen sich *die Durchdringungskurven dieser Flächen als Bahnkurven solcher Bewegungen darstellen lassen.* Wie in früheren Arbeiten gezeigt, ergeben sich die auf Drehkegeln bzw. einschaligen Drehhyperboloiden liegenden *konischen Schraublinien und Evolventenschraublinien* als Durchdringungskurven koachsialer geschlossener, bzw. offener schiefer Regelschraubflächen und als Bahnkurven von Evolventenschraubungen[1]; *Trochoidenschraublinien* als Durchdringungskurven koachsialer gerader Kreisschraubflächen und als Bahnkurven von Trochoidenschraubungen[2], sowie *Konchoidenschraublinien* (als Verallgemeinerung der exzentrischen Euklidischen Schraublinien von Wendelflächen) als Durchdringungskurven achsenparalleler gerader Regelschraubflächen und als Bahnkurven von Konchoidenschraubungen[3].

In den nachfolgenden Zeilen zeige ich zunächst, daß jede Trochoidenschraublinie *auf* ∞ *viele Arten als Bahnkurve proportional zusammengesetzter Euklidischer Schraubungen* mit zueinander parallelen Achsen

[1] *H. Horninger*: „Über eine planare Evolventenbewegung" (Bull. of Techn. Univ. Istanbul, Vol. III, Nb. 1, 1950, p. 103–122 und „Über eine Evolventenschraubung" (Rev. de la Fac. Sc. Univ. Istanbul, A–XVI–4; 1951, p. 255–277.

[2] *H. Horninger*: „Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen", Mh. f. Math. 1954, Bd. 58, S. 193–212.

[3] *H. Horninger*: „Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen", Mh. f. Math. 1954, Bd. 58, S. 226–240.

gewonnen werden kann, also eine spezielle *Helikoide* ist[4]; ihre Ganghöhe läßt sich aus den Ganghöhen beider Schraubungen und dem Proportionalitätsfaktor in einfacher Weise ableiten (Nr. 1). Jede zyklische Schraubfläche Φ ist *durch* ∞ *viele Trochoidenschraubungen erzeugbar*; wenn die Normalschnitt-Trochoiden von Φ algebraisch sind, so ist die Ganghöhe jeder auf Φ liegenden Trochoidenschraublinie, die einen algebraischen Grundriß besitzt, ein ganzzahliges Vielfaches der Geschoßhöhe von Φ. Hieraus folgt u. a., daß zwei algebraische Trochoiden, die dieselben Leitkreise l_i' besitzen, eine *bestimmte Anzahl stets reeller Schnittpunkte* haben, die dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre Leitpunkte je ein den Kreisen l_i' eingeschriebenes regelmäßiges Polygon bilden (Nr. 2). Die Existenz dieser *Hauptschnittpunkte* führt zur Erkenntnis, daß dem Gesamtschnitt zweier zyklischer Schraubflächen Φ_1, Φ_2, deren exzentrische Schraublinien auf denselben Drehzylindern liegen, eine *bestimmte Anzahl von Trochoidenschraublinien* angehört. Die Grundrisse dieser, den *Hauptschnitt* $\Phi_1\,\Phi_2$ bildenden Kurven liegen je nach den Modulwerten der Normalschnitte w_1, w_2 von Φ_1, Φ_2 und den Geschoßhöhen beider Flächen entweder in einer *einzigen* Trochoide oder in *mehreren, symmetrisch verteilten Kurven* (Nr. 3). Alle algebraischen Trochoiden, die durch die N Hauptschnittpunkte von w_1, w_2 laufen, bilden ein *Büschel*; dieses kann entweder als *Grundriß der Hauptschnitte* je zweier zyklischer Schraubflächen oder als *ebener Schnitt des Büschels aller zyklischen Schraubflächen* gedeutet werden, dessen Basis aus N äquidistanten, einander im Grundriß deckenden Trochoidenschraublinien besteht (Nr. 4).

1. Erzeugung von Trochoidenschraublinien mittels proportionaler Schraubungen. Jede Trochoidenschraublinie k ist bekanntlich gemeinsame Bahnkurve zweier koachsialer Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_i$ $(i = 1, 2)$. Wird die Achse f von k vertikal gewählt, so ist der in π_1 liegende Grundriß k' von k als gemeinsame Bahn der Kreisrollungen $\mathfrak{T}_i'$ eine Trochoide mit der Mitte f' (Abb. 1). Wir denken π_1 durch den Punkt P_0 von k gelegt, dessen Grundriß ein Scheitel P_0' von k' ist; die Ebene $\Sigma_0 = P_0 f$ besitzt die Symmetrieachse $\Sigma_0' = P_0' f'$ von k' zur Spur. Wenn k' algebraisch ist — was im Folgenden stets vorausgesetzt wird —, so lassen sich die Modulwerte m_i von k' (d. h. die Verhältnisse zusammengehöriger Grundrißwinkel α_i, β_i der Bewegungen

[4] Über Helikoidenbewegungen und ihre Bahnen vgl. *F. Hohenberg*: „Über die Zusammensetzung zweier gleichförmiger Schraubungen", Mh. f. Math. 1950, Bd. 54, S. 222–234.

$\mathfrak{T}_i$) als Quotienten je zweier zueinander teilerfremder ganzer Zahlen a_i, b_i ausdrücken:

$$m_i = a_i : b_i = \alpha_i : \beta_i \tag{1}$$

Durch die Bedingung

$$\Sigma m_i = -1, \tag{2}$$

an die die Zahlen m_i gebunden sind, werden zwischen a_i, b_i und α_i, β_i die Beziehungen

$$a_i + b_i = a_{i\pm1};\ \alpha_i + \beta_i = \alpha_{i\pm1} \tag{3}$$

hergestellt (oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$; also $\Sigma b_i = \Sigma \beta_i = 0$). Die Leitschraublinien l_i von k gehören den Drehzylindern Λ_i an, deren in π_1 befindliche Normalschnitte die Leitkreise l_i' von k' sind; ihre Ganghöhen seien durch $\mathfrak{j}_i$ bezeichnet[5]. Die Urschraublinien u_i von k liegen auf zwei mit P_0 inzidenten Drehzylindern $\sigma_{i,0}$, deren Achsen $e_{i,0}$ zu f parallel sind und der Ebene Σ_0 angehören. Der Radius von u_i ist gleich dem von $l_{i\pm1}$, die Ganghöhen $\mathfrak{v}_i$ der Kurven u_i sind entgegengesetzt gleich. Um einen beliebigen Punkt P von k zu erhalten, bringt man entweder P_0 durch die Leitschraubung $\mathfrak{L}_i(f; \mathfrak{j}_i)$ in die zum Grundrißwinkel α_i gehörige Lage J_i und dreht J_i um die Gerade e_i, in die $e_{i,0}$ durch $\mathfrak{L}_i$ übergeht, durch den Winkel β_i; oder man führt P_0 auf der Urschraublinie u_i in die durch den Grundrißwinkel β_i bestimmte Lage U_i und dreht U_i um f durch α_i. Die Höhe von P über π_1 ist demnach

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{j}_i}{2\pi}\alpha_i = \frac{\mathfrak{v}_i}{2\pi}\beta_i \tag{4}$$

Die Ganghöhe von k besitzt als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $\mathfrak{j}_i$, $\mathfrak{v}_i$ den Wert

$$\mathfrak{H} = a_i \mathfrak{j}_i = b_i \mathfrak{v}_i. \tag{5}$$

Die mit P gleich hoch liegenden Punkte F, L_i von f, l_i bilden im Verein mit P ein Parallelogramm.

k ergibt sich aber auch *durch proportionale Zusammensetzung zweier Schraubungen* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}_i$ (bzw. $\mathfrak{E}_{i,0}$), mit den Achsen f, e_i (bzw. $e_{i,0}$), soferne deren Ganghöhen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}_i$ die Bedingung

$$\mathfrak{H} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ -\mathfrak{h}_i & \mathfrak{s} \end{vmatrix} \tag{6}$$

[5] Über Definition und Grundeigenschaften der Trochoidenschraublinien vgl. die in Fußn. 2 zit. Abh. Während sich für die Beweisführungen a. a. O. die Parameter aller vorkommenden Schraubungen als zweckentsprechend erwiesen hatten, zeigen sich für die vorliegenden Untersuchungen die Ganghöhen derselben als geeigneter. Gleichfalls aus Zweckmäßigkeitsgründen sind einige Bezeichnungen gegenüber der obgenannten Abh. geändert worden.

erfüllen: Die Teilschraubungen $\mathfrak{S}(f; \mathfrak{z}, \alpha_i)$ bzw. $\mathfrak{E}_{i,0}(e_{i,0}; \mathfrak{y}_i, \beta_i)$ bringen nämlich P_0 mit je einem Punkt P_i, bzw. V_i zur Deckung, dessen Grundriß mit J_i', bzw. U_i' zusammenfällt; die Teilschraubungen $\mathfrak{E}_i(e_i; \mathfrak{y}_i, \beta_i)$,

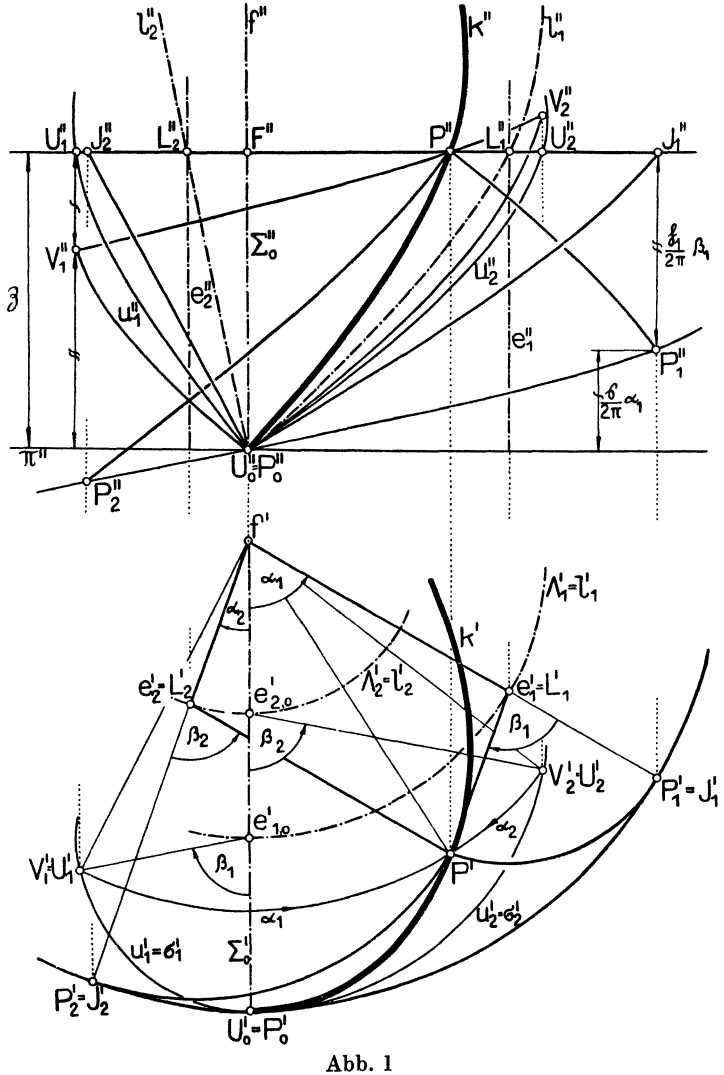

Abb. 1

$\mathfrak{S}(f; \mathfrak{z}, \alpha_i)$ führen die Punkte P_i, V_i in P über. Für die Höhe $\mathfrak{z}$ von P ergibt sich bei dieser Darstellungsweise der Wert

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2\pi} \cdot \begin{vmatrix} a_i & \beta_i \\ \mathfrak{h}_i & \mathfrak{s} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

dessen Identität mit dem in Gl. 4 angegebenen Wert mittels der Gl. 1, 5, 6 unmittelbar bestätigt wird (vgl. auch Abb. 1; die zur Konstruktion derselben verwendeten Zahlenwerte sind in Tab. 1 zusammengefaßt). Da es ∞^1 Wertepaare $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ gibt, die bei konstanten a_i, b_i, $\mathfrak{H}$ die Gl. 6 befriedigen, so gibt es ∞^1 *Schraubungspaare, durch deren proportionale Zusammensetzung die Trochoidenschraubungen* $\mathfrak{T}_i$ *entstehen*; zwischen den Ganghöhen $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ zusammengehöriger Paare besteht wegen Gl. 3 die Beziehung

$$\Sigma \mathfrak{h}_i = \mathfrak{s} \tag{8}$$

Die speziellen Paare, die wir zur ursprünglichen Definition der Bewegungen $\mathfrak{T}_i$ verwendet hatten (Schraubung + proportionaler Drehung), sind durch $\mathfrak{h}_i = 0$, bzw. $\mathfrak{s} = 0$ bestimmt. Jede Bewegung, die durch proportionale Zusammensetzung zweier Schraubungen zustandekommt, wird nach *F. Hohenberg* als *Helikoidenbewegung* bezeichnet[4]; durch die vorstehenden Überlegungen ist demnach erwiesen:

I: *Die Helikoidenbewegungen, die durch Zusammensetzung von Schraubungen mit zueinander parallelen Achsen entstehen, sind Trochoidenschraubungen; jede solche Bewegung kann durch* ∞^1 *verschiedene Paare einander proportional zugeordneter Schraubungen definiert werden. Jede Trochoidenschraublinie k ist als gemeinsame Bahnkurve zweier Trochoidenschraubungen auf zwei verschiedene Arten durch je* ∞^1 *Helikoidenbewegungen erzeugbar; ihre Ganghöhe wird durch die Determinante aus den Ganghöhen beider Schraubungen und den zueinander teilerfremden ganzen Zahlen dargestellt, deren Quotienten die Modulwerte von k' sind.*

Da jede vertikale Gerade, die den Bewegungen $\mathfrak{T}_i$ unterworfen wird, in ihrer Richtung ungeändert bleibt, so können wir die Trochoidenschraubungen auch als *diejenigen Helikoidenbewegungen erklären, die eine feste Richtung des Raumes invariant lassen.*

Tabelle 1:

i	m_i	a_i b_i	α_i β_i	$\mathfrak{j}_i$ $\mathfrak{v}_i$	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}_i$ $\mathfrak{s}$
1	$-3:4$	3 -4	$\frac{\pi}{3}$ $\frac{-4\pi}{9}$	24 -18	4	72	-12 8
2	$-1:4$	-1 4	$-\frac{\pi}{9}$ $\frac{4\pi}{9}$	-72 18			20

2. Die Trochoidenschraublinien einer zyklischen Schraubfläche. Unterwirft man die mit P_0 inzidenten Schraublinien $c_{i,0}(e_{i,0}; \mathfrak{h}_i)$ der Schraubung $\mathfrak{S}(f; \mathfrak{s})$, so entsteht *eine und dieselbe zyklische Schraubfläche* Φ, da Gl. 8 mit der Bedingung identisch ist, an die die Ganghöhen der drei Scharen Euklidischer Schraublinien von Φ (der Bahnschraublinien mit der Achse f und der exzentrischen Schraublinien c_i) gebunden sind[6]. P_0 wird durch einen vollen Gang von $\mathfrak{S}$ auf der Geraden $p = P_0 // f$ um die Strecke $\mathfrak{s}$ und durch einen Gang der Schraubung $\mathfrak{E}_{i,0}$, deren Bahn $c_{i,0}$ ist, um die Strecke $\mathfrak{h}_i$ verschoben. Der kürzeste Abstand, den zwei auf p liegende Punkte der Fläche voneinander haben, ist daher der Maximalteiler $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{s}$, den wir als *Geschoßhöhe* von Φ bezeichnen wollen; die durch die Gl.

$$a_i' = \mp \mathfrak{h}_i : \mathfrak{G}; \quad b_i' = \pm \mathfrak{s} : \mathfrak{G} \tag{9}$$

definierten ganzen Zahlen a_i', b_i' sind relativ prim (oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$). Die Normalschnitte von Φ sind algebraische Trochoiden w, deren Leitkreise den Zylindern Λ_i angehören und deren Modulwerte m_i' durch die Gl.

$$m_i' = -\mathfrak{h}_i : \mathfrak{s} = a_i' : b_i' \tag{10}$$

bestimmt sind; je zwei Normalschnitte vom Höhenunterschied $\mathfrak{G}$ besitzen denselben Grundriß. Abb. 2 zeigt einen einfachen, durch die Annahme $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ charakterisierten Fall; die Normalschnitte sind Ellipsen.

Die Fläche Φ entsteht auch, wenn man die Schraublinien $c_{i,0}$ einer der ∞^1, durch je einen beliebigen Proportionalitätsfaktor m_i definierten Trochoidenschraubungen T_i unterwirft, die durch Zusammensetzung der Schraubungen $\mathfrak{E}_{i,0}$, $\mathfrak{S}$ zustandekommt, weil die Kurven $c_{i,0}$ durch die Schraubungen $\mathfrak{E}_{i,0}$ nur in sich bewegt werden[7]. Von den ∞^2 Trochoidenschraublinien k, die die Punkte der Schraublinien $c_{i,0}$ bei diesen Bewegungen durchlaufen, sind je ∞^1, durch die gleichen Werte m_i definierten Kurven einander kongruent; die Leitschraublinien aller Kurven k liegen auf den Zylindern Λ_i. Die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ jeder solchen Kurve hängt von $\mathfrak{h}_i$, $\mathfrak{s}$ und den m_i bestimmenden Zahlen a_i, b_i gemäß Gl. 6 ab; die exzentrischen Schraublinien von Φ sind durch $a_i = 0$ oder $a_i = 1$, $b_i = -1$ definiert, die Bahnschraublinien durch $b_i = 0$. Ersetzt

[6] Vgl. z. B. *L. Burmester*, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung, Z. Math. Phys. 33 (1888), S. 337–348, oder *E. Müller*, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht, Sitz.-Ber. Ak. d. Wiss. Wien 1909, IIa, S. 1–11.

[7] Vgl. die in Fußn. 4 zit. Abh. von *F. Hohenberg*, Schluß von Nr. 3.

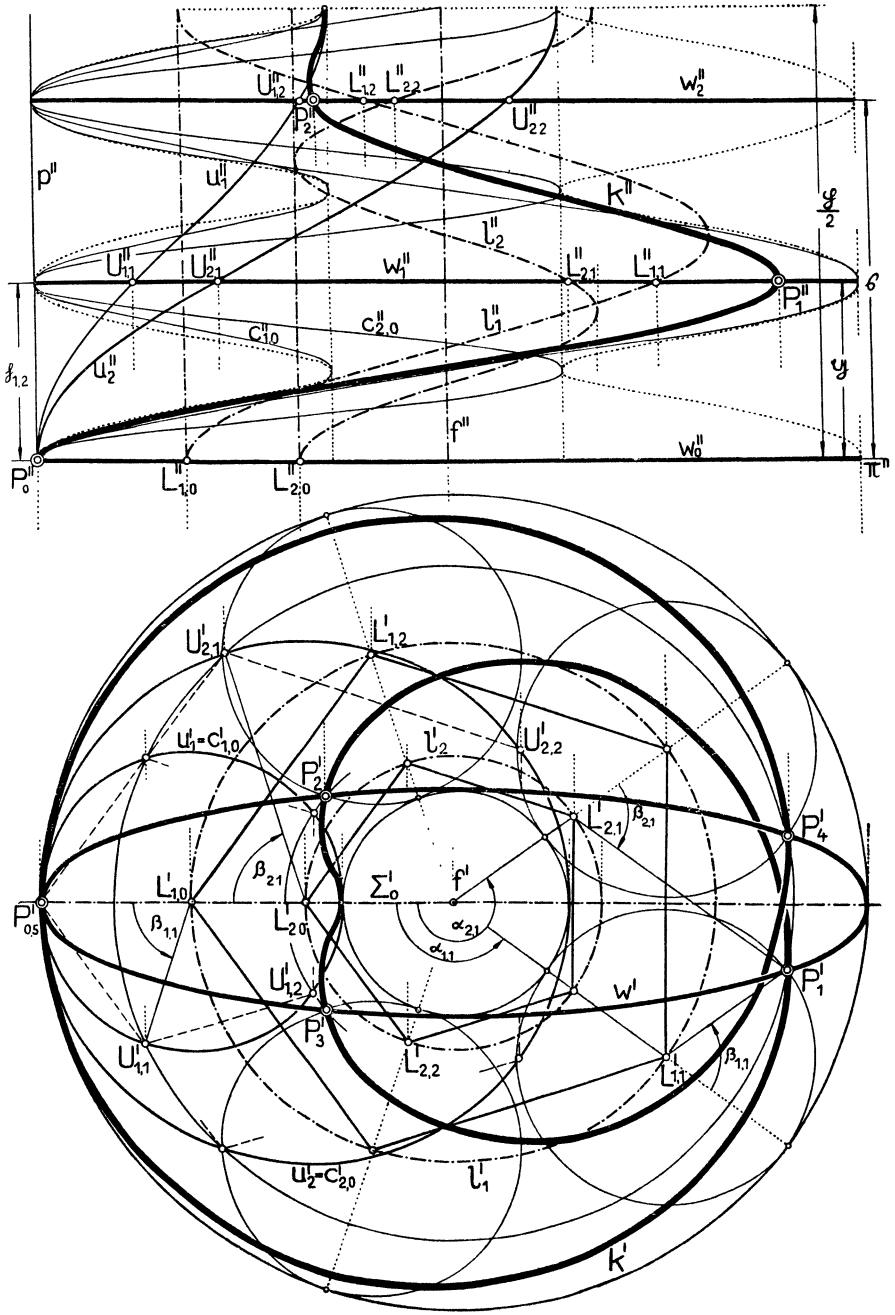
$U''_{1,2}$
$L''_{1,2}$ $L''_{2,2}$
w''_2
P''_2
$U''_{2,2}$
p''
u''_1
k''
$\frac{g}{2}$
l''_2
$U''_{1,1}$ $U''_{2,1}$
w''_1
$L''_{2,1}$ $L''_{1,1}$
P''_1
6
$c''_{1,0}$
$c''_{2,0}$
l''_1
$f_{1,2}$
u''_2
y
f''
w''_0
P''_0
$L''_{1,0}$ $L''_{2,0}$
π''
$U'_{2,1}$
$L'_{1,2}$
$u'_1=c'_{1,0}$
l'_2
$U'_{2,2}$
P'_2
$L'_{2,1}$
$\beta_{2,1}$
P'_4
$L'_{1,0}$
Σ'_0
f'
$P'_{0,5}$
$\beta_{1,1}$
$L'_{2,0}$
$\alpha_{2,1}$
$\alpha_{1,1}$
$U'_{1,2}$
w'
P'_1
P'_3
$U'_{1,1}$
$L'_{2,2}$
$L'_{1,1}$
$\beta_{1,1}$
$u'_2=c'_{2,0}$
l'_1
k'

Abb. 2

man in Gl. 6 die Werte $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}$ durch die in den Gl. 9 angegebenen Ausdrücke und schreibt

$$n = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i' & b_i' \end{vmatrix}, \tag{11}$$

so nimmt Gl. 6 die einfache Form

$$\mathfrak{H} = n \,.\, \mathfrak{G} \tag{12}$$

an[8]. *Ein Gang von k erstreckt sich also über genau n Geschosse von* Φ. Hieraus folgt einerseits, daß je n Normalschnitte von Φ, die einander im Grundriß decken, k *in Punkten desselben Ganges schneiden* bzw. anderseits, daß je n auf Φ liegende Trochoidenschraublinien von der Ganghöhe $\mathfrak{H}$ *einen und denselben Grundriß besitzen*; je zwei der Kurven gehen durch Parallelverschiebung um die Strecke $\mathfrak{G}$ ineinander über.

II: *Jede zyklische Schraubfläche* Φ *kann auf zwei verschiedene Arten durch je* ∞^1 *koachsiale Trochoidenschraubungen als Bahnfläche einer Euklidischen Schraublinie erzeugt werden. Wenn sich die Modulwerte* m_i, m_i' *einer auf* Φ *liegenden Trochoidenschraublinie k und der Normalschnitte w von* Φ *als Quotienten je zweier teilerfremder ganzer Zahlen* a_i, b_i *bzw.* a_i', b_i' *ausdrücken lassen, so ist die Ganghöhe* $\mathfrak{H}$ *von k gleich dem Produkt aus der Geschoßhöhe von* Φ *und der aus* a_i, b_i; a_i', b_i' *gebildeten Determinante.*

Da die in den Höhen $\mathfrak{z} = r.\mathfrak{G}$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ befindlichen Normalschnitte w_r von Φ einen und denselben Grundriß w' besitzen, so stellen die Grundrisse P_r' ihrer Schnittpunkte P_r mit k zugleich n *Schnittpunkte der Trochoiden* k', w' dar. Die Leit- und Urpunkte jedes Punktes P_r sind die in derselben Höhe liegenden Punkte $L_{i,r}$, $U_{i,r}$ der Leit- und Urschraublinien l_i, u_i von k; ihre Grundrisse $L_{i,r}'$, $U_{i,r}'$ sind wegen Gl. 4, 5 durch die Zentriwinkel

$$\alpha_{i,r} = \frac{2\pi \,.\, ra_i}{n}; \quad \beta_{i,r} = \frac{2\pi \,.\, rb_i}{n} \tag{13}$$

der Kreise l_i', u_i' bestimmt ($\alpha_{1,1} = L_{1,0}' f' L_{1,1}' \ldots$ usw.). Die Punkte $L_{i,r}'$ bilden daher auf den Kreisen l_i', die Punkte $U_{i,r}'$ auf u_i' die Ecken je eines *regelmäßigen Polygons*. Wenn die Zahlen a_i, a_i' einerseits bzw. b_i, b_i' anderseits relativ prim sind, so gilt dasselbe für die Zahlen a_i, n

[8] Wir wollen n und analoge, je eine Anzahl reeller Elemente darstellenden Zahlen stets positiv nehmen, auch ohne $|\ n\ |$ zu schreiben. Unter Berücksichtigung der Gl. 3 kann man n auch durch die Determinante $\begin{vmatrix} a_i & a_{i\pm1} \\ a_i' & a'_{i\pm1} \end{vmatrix}$ ausdrücken.

bzw. b_i, n; in diesem Fall sind alle Polygone *n-Ecke*. Für $r = a_i'$ folgt aus Gl. 13 wegen Gl. 11

$$\bar{\alpha}_i = \frac{2\pi . a_i' a_i}{n}; \quad \bar{\beta} = \frac{2\pi . a'_i b_i}{n} = \frac{2\pi . a_i b_i'}{n} \pm 2\pi \tag{14}$$

D. h. Der Grundriß des in der Höhe $a_i' . \mathfrak{G}$ liegenden Punktes von k besitzt *dieselben Leit- und Urpunkte, gleichgültig ob man ihn als Punkt von k' oder von w' ansieht.* Dasselbe gilt offenbar für alle Punkte von k, deren Höhe ein ganzzahliges Vielfaches von a_i' $\mathfrak{G}$ ist. Wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit von a_i, a_i' gelangt man auf diese Weise zu n verschiedenen, insgesamt a_i' aufeinanderfolgenden Gängen von k angehörigen Punkten, deren Grundrisse mit den oberwähnten n Schnittpunkten P_r' von k' und w' identisch und durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, in Bezug auf k' und w' die gleichen Leit- und Urpunkte zu besitzen. Wir wollen die solcherart aus der Gesamtheit aller Schnittpunkte k' w' herausgehobenen Punkte P_r' als *Hauptschnittpunkte* beider Kurven bezeichnen; die übrigen Schnittpunkte der Trochoiden (*Nebenschnittpunkte*) sind dadurch charakterisiert, daß sie voneinander verschiedene Leit- und Urpunkte besitzen, jenachdem man sie als Punkte der einen oder der anderen Trochoide auffaßt. Wenn eines der Zahlenpaare a_i, a_i' oder b_i, b_i' einen von 1 verschiedenen ganzzahligen Maximalteiler p_i, bzw. q_i aufweist, so ist dieser auch Maximalteiler von a_i, n bzw. b_i, n. In diesem Fall bilden die Leitpunkte $L'_{i,r}$ der n Hauptschnittpunkte k' w' auf dem Kreis l_i' ein regelmäßiges Polygon von der Seitenzahl $n : p_i$, die auf u_i' liegenden Punkte $U'_{i,r}$ ein solches von der Seitenzahl $n : q_i$. Jeder Punkt $L'_{i,r}$ ist gemeinsamer Leitpunkt für p_i verschiedene Punkte P_r', jeder Punkt $U'_{i,r}$ gemeinsamer Urpunkt für q_i dieser Punkte. Aus der vorausgesetzten Teilerfremdheit von a_i, b_i einerseits bzw. a_i', b_i' anderseits folgt aber, daß stets wenigstens *einer* der vier durch Gl. 13 dargestellten Quotienten nicht mehr kürzbar ist, d. h. daß *mindestens eines der vier Polygone ein n-Eck* ist. Wir gewinnen somit folgende Ergebnisse:

III: *Wenn zwei algebraische Trochoiden die gleichen Leitkreise haben, so ist eine bestimmte Anzahl n ihrer Schnittpunkte (die Hauptschnittpunkte der Kurven) stets reell und dadurch gekennzeichnet, daß ihre Leit- und Urpunkte in Bezug auf beide Kurven dieselben sind und die Ecken je eines regelmäßigen Polygons bilden. Sind die Modulwerte der Trochoiden als Quotienten je zweier teilerfremder ganzer Zahlen a_i, b_i, bzw. a_i', b_i' gegeben, so ist n die aus a_i, b_i; a_i', b_i' gebildete Deter-*

minante. Bezeichnen p_i, q_i die Maximalteiler von a_i, a_i' bzw. b_i, b_i', so gibt $n : p_i$ bzw. $n : q_i$ die Seitenzahl der Polygone an; mindestens eines derselben ist ein n-Eck[9].

IV: *Die Punkte, in denen jede Trochoidenschraublinie k einer zyklischen Schraubfläche Φ alle einander im Grundriß deckenden Normalschnitte w (oder ein Normalschnitt der Fläche alle einander im Grundriß deckenden Trochoidenschraublinien) von Φ trifft, bilden sich im Grundriß als sämtliche Hauptschnittpunkte k' w' ab.*

Aus der Beweisführung folgt, daß die Trochoiden k', w' gegeneinander ganz beliebige Lage einnehmen können, soferne nur die Grundforderung erfüllt ist, daß beide Kurven *die gleichen Leitkreise* besitzen. M. a. W.: Denkt man etwa k' festgehalten, w' aber um den gemeinsamen Mittelpunkt f' beider Trochoiden gedreht, so bilden in jedem Augenblick *je n Punkte von k' die Hauptschnittpunkte beider Kurven*; die Leit- und Urpunkte jeder solchen Punktegruppe formen je ein regelmäßiges Polygon. Ist demnach *ein* Hauptschnittpunkt bekannt, so kann man *alle übrigen* durch Konstruktion der Polygone finden, ohne die Trochoiden selbst zeichnen zu müssen; die Zuordnung zwischen den Eckpunkten der Polygone, die Leit- und Urpunkte desselben Hauptschnittpunktes darstellen, ist durch die Gl. 13 gegeben. Bei der in Abb. 2 gewählten Annahme (Tab. 2) liegt der Anfangspunkt P_0' auf der gemeinsamen Symmetrieachse Σ_0' der Trochoiden k', w'; die Polygone und die Hauptschnittpunkte sind daher bezüglich Σ_0' symmetrisch.

Tabelle 2:

i	$\mathfrak{h}_i$	$\mathfrak{s}$	a_i'	b_i'	a_i	b_i	n
1	2	4	−1	2	2	1	5
2	2		1	−2	3	−1	

In Abb. 3 ist P_0' als willkürlicher Punkt von k' vorausgesetzt; die Polygone und die Hauptschnittpunkte P_r' von k', w' besitzen diesfalls keine gemeinsame Symmetrieachse. Die der Zeichnung zugrundegelegten

[9] Dieses Ergebnis kann naturgemäß auch auf rein planimetrischem Weg abgeleitet werden; ich habe jedoch den obigen, auf räumlicher Betrachtung fußenden Beweis vorgezogen, da ich in erster Linie die charakteristischen — und, wie ich annehmen darf, noch nicht bekannten — Eigenschaften der auf einer zyklischen Schraubfläche liegenden Trochoidenschraublinien zeigen wollte und die auf eine ebene Trochoiden bezüglichen — in dieser Form vielleicht noch nicht abgeleiteten — Ergebnisse hiebei von selbst zu Tage treten.

Modulwerte beider Kurven und die aus ihnen folgenden Größen sind in Tab. 3 verzeichnet. Die Konstruktion der Punkte P_r' ist unabhängig davon, welche der Trochoiden man als Grundriß einer Trochoidenschraublinie k ansieht, nur die Bezifferung der Punkte wird von dieser Voraussetzung beeinflußt; die Indices der Punkte P_r' stellen zugleich die Koten der Punkte P_r von k dar.

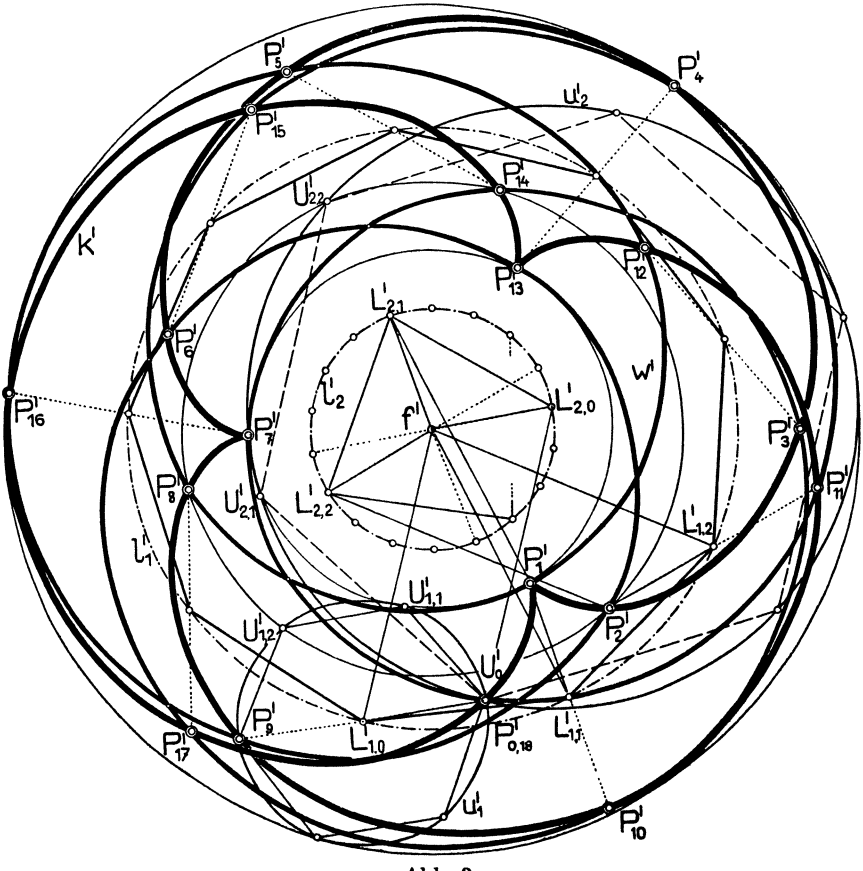

Abb. 3

Tabelle 3:

i	a_i	b_i	a_i'	b_i'	n	p_i	q_i	$n:p_i$	$n:q_i$
1	2	3	4	−3	18	2	3	9	6
2	5	−3	1	3		1	3	18	6

3. Trochoidenschraublinien als Durchdringungskurven zyklischer Schraubflächen. Wenn zwei auf demselben Drehzylinder $\sigma_{i,0}$ liegende Schraublinien von willkürlichen Ganghöhen $\mathfrak{h}_i'$, $\mathfrak{h}_i''$ je einer von zwei Schraubungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ unterworfen werden, die die gleiche, zur Achse von $\sigma_{i,0}$ parallele Gerade f zur Achse, aber voneinander verschiedene Ganghöhen $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$ haben, so entstehen zwei koachsiale zyklische Schraubflächen Φ_1, Φ_2, deren gegenseitige Lage dadurch gekennzeichnet ist, daß *jeder Drehzylinder σ_i, der eine exzentrische Schraublinie der einen Fläche trägt, auch eine oder mehrere exzentrische Schraublinien der anderen enthält.* Die in π_1 liegenden Normalschnitte von Φ_1, Φ_2 sind zwei konzentrische Trochoiden w_1, w_2, die dieselben Leitkreise l_i' haben; die Leitschraublinien aller auf Φ_1 und Φ_2 befindlichen Trochoidenschraublinien gehören den mit den Kreisen l_i' inzidenten Drehzylindern Λ_i an. Alle Schnittpunkte je zweier auf demselben Drehzylinder σ_i liegenden Schraublinien von Φ_1 und Φ_2 sind nach der in Nr. 2 gegebenen Definition Hauptschnittpunkte der mit ihnen inzidenten Normalschnitte beider Flächen. Der geometrische Ort dieser Punkte ist demnach mit der Gesamtheit der Hauptschnittpunkte aller Normalschnitte von Φ_1 und Φ_2 identisch; wir bezeichnen ihn als den *Hauptschnitt* $\Phi_1 \Phi_2$. Die Gesamtheit aller übrigen Punkte, die Φ_1 und Φ_2 gemeinsam sind, möge *Nebenschnitt* genannt werden; jeder dieser Punkte stellt einen Nebenschnittpunkt zweier Normalschnitte von Φ_1, Φ_2 und zugleich einen Schnittpunkt zweier Schraublinien von Φ_1, Φ_2 dar, deren Achsen zwei *verschiedene* Erzeugende von Λ_i sind.

Da jede zyklische Schraubfläche nach Nr. 2 durch ∞^1 Paare koachsialer Trochoidenschraubungen erzeugbar ist, so gibt es bestimmte Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_i$, durch die *sowohl Φ_1 als auch Φ_2* gewonnen werden kann. Die Trochoidenschraublinien k, die die Schnittpunkte P_0 der auf $\sigma_{i,0}$ liegenden Schraublinien von Φ_1 und Φ_2 bei diesen Bewegungen durchlaufen, gehören beiden Flächen an, sie bilden daher *einen Teil des Gesamtschnittes $\Phi_1 \Phi_2$*. Da sich in jedem Punkte P_r der Kurven je zwei dem *gleichen* Drehzylinder σ_i angehörige exzentrische Schraublinien von Φ_1, Φ_2 treffen, so ist *die Gesamtheit dieser Trochoidenschraublinien mit dem Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ identisch.* Jede der Kurven durchsetzt π_1 in einem einzigen Punkt; *die Gesamtzahl der Kurven k ist also gleich der Anzahl der Hauptschnittpunkte $w_1 w_2$.*

Die Geschoßhöhen $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ von Φ_1, Φ_2 sind nach Nr. 2 die Maximalteiler von $\mathfrak{h}_i'$, $\mathfrak{s}'$ bzw. $\mathfrak{h}_i''$, $\mathfrak{s}''$. Die zueinander teilerfremden ganzen Zahlen a_i', b_i'; a_i'', b_i'', deren Quotienten die Modulwerte von w_1, w_2

sind, besitzen nach Gl. 9 die Werte

$$\begin{aligned} a_i' &= \mp \mathfrak{h}_i' : \mathfrak{G}' ; \qquad b_i' = \pm \mathfrak{s}' : \mathfrak{G}' \\ a_i'' &= \mp \mathfrak{h}_i'' : \mathfrak{G}''; \qquad b_i'' = \pm \mathfrak{s}'' : \mathfrak{G}'' \end{aligned} \tag{15}$$

(oberes Vorzeichen für $i = 1$, unteres für $i = 2$). Die Zahl der Hauptschnittpunkte $w_1\, w_2$ ist nach Gl. 11

$$N = \begin{vmatrix} a_i' & b_i' \\ a_i'' & b_i'' \end{vmatrix} \tag{16}$$

Um die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ der Trochoidenschraublinien k, die zueinander teilerfremden ganzen Zahlen a_i, b_i, deren Quotienten die Modulwerte von k' darstellen und die durch Gl.

$$N' = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i' & b_i' \end{vmatrix}; \qquad N'' = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_i'' & b_i'' \end{vmatrix} \tag{17}$$

definierten Zahlen N', N'' zu bestimmen, die die Anzahl der Hauptschnittpuukte $k'\, w_1$, bzw. $k'\, w_2$ angeben, verwenden wir die aus Gl. 12 folgende Beziehung

$$\mathfrak{H} = N'\, \mathfrak{G}' = N''\, \mathfrak{G}'' \tag{18}$$

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{g}$ den Maximalteiler von $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, erhalten mittels der Gl.

$$G' = \mathfrak{G}' : \mathfrak{g}; \qquad G'' = \mathfrak{G}'' : \mathfrak{g} \tag{19}$$

zwei zueinander teilerfremde ganze Zahlen G', G'' und bilden mit diesen die Determinanten

$$A_i = \begin{vmatrix} a_i' & a_i'' \\ G'' & G' \end{vmatrix}; \qquad B_i = \begin{vmatrix} b_i' & b_i'' \\ G'' & G' \end{vmatrix} \tag{20}$$

Der Maximalteiler von A_i, B_i ist eine bestimmte Zahl T. Man findet sodann

$$a_i = \frac{A_i}{T}; \qquad b_i = \frac{B_i}{T} \tag{21}$$

$$N' = \frac{N}{T} \cdot G''; \quad N'' = \frac{N}{T} \cdot G' \tag{22}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{N}{T} \cdot G'\, G''\, \mathfrak{g} \tag{23}$$

Die der Abb. 4 zugrundegelegten Werte sind in Tab. 4 zusammengestellt.

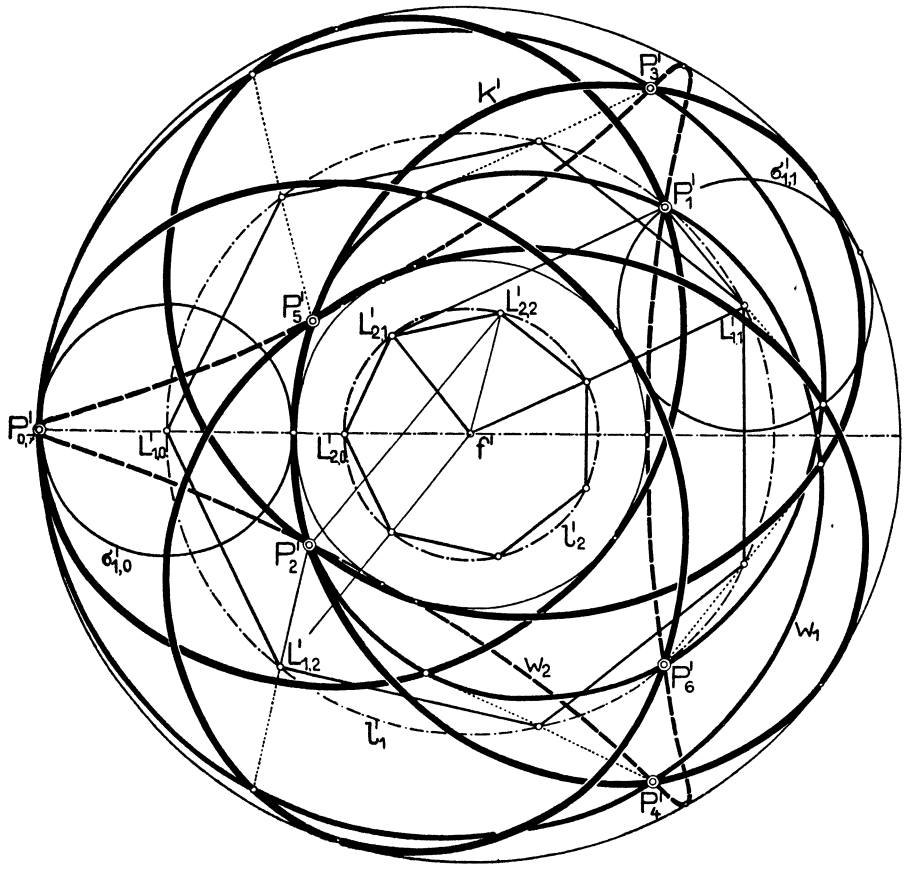

Abb. 4

Tabelle 4:

i	$\mathfrak{h}_i'$ $\mathfrak{z}'$	$\mathfrak{h}_i''$ $\mathfrak{z}''$	$\mathfrak{G}'$ $\mathfrak{G}''$	a_i' b_i'	a_i'' b_i''	N	g	G' G''	A_i B_i	T	a_i b_i	N' N''	$\mathfrak{H}$
1	−6 3	6 18	3 6	2 1	−1 3	7	3	1 2	4 −5	1	4 −5	14 7	42
2	9	12		3 −1	2 −3				−1 5		−1 5		

Die Flächen Φ_1, Φ_2 tragen je N' bzw. N'' einander im Grundriß deckende Trochoidenschraublinien von der Ganghöhe $\mathfrak{H}$. Da die Zahlen G', G'' relativ prim sind, so ist der Maximalteiler von N', N'' gleich N/T

(Gl. 22). Von den N Trochoidenschraublinien k, die den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ bilden, besitzen daher je N/T *den gleichen Grundriß*; m. a. W.: *Die N Kurven k bilden sich im Grundriß als T verschiedene Trochoiden k' ab.* Hieraus folgt, daß T nur 1, N oder *ein ganzzahliger Teiler von N* sein kann[10]. Demgemäß können wir folgende Fälle unterscheiden:

I. Wenn $T = 1$ ist, so besitzen alle N Kurven k *eine und dieselbe, durch sämtliche Hauptschnittpunkte* $w_1 w_2$ *laufende Trochoide zum Grundriß* (vgl. Abb. 4). Jeder dieser Punkte ist zugleich ein Hauptschnittpunkt von k' mit w_1 und w_2, aber es gibt nach Gl. 22 i. a. auch Hauptschnittpunkte $k'\, w_1$, bzw. $k'\, w_2$, die nicht zugleich Hauptschnittpunkte $w_1 w_2$ sind (bei dem in Abb. 4 dargestellten Beispiel ergeben sich für N', N'' wegen $G' = 1$, $G'' = 2$ die Werte $2N$ bzw. N).

II. Wenn T ein von 1 verschiedener Teiler von N ist, so gibt es T *verschiedene Trochoiden* k' und jede dieser Kurven trägt N/T Hauptschnittpunkte $w_1 w_2$ derart, daß die Gesamtheit der T Kurven k' sämtliche N Hauptschnittpunkte enthält. Je zwei Trochoiden k' sind um die Zentriwinkel $2\pi/T$ gegeneinander gedreht (vgl. die Ellipsen und Konchoiden in Abb. 5).

III. Wenn $T = N$ ist, so besitzen *alle Kurven k voneinander verschiedene Grundrisse* k' und jede dieser Kurven läuft durch *einen einzigen Hauptschnittpunkt* $w_1 w_2$; je zwei Kurven k' sind um die Winkel $2\pi/N$ gegeneinander gedreht.

Zusammenfassend kann somit gesagt werden

V: *Wenn die exzentrischen Schraublinien zweier zyklischer Schraubflächen* Φ_1, Φ_2 *denselben Drehzylindern angehören, so besteht ein Teil des Gesamtschnittes beider Flächen (der Hauptschnitt* $\Phi_1 \Phi_2$*) aus Trochoidenschraublinien. Sind die Normalschnitte* w_1, w_2 *der Flächen algebraisch, so besitzt die Anzahl dieser Kurven k einen festen, nur von den Modulwerten der Trochoiden* w_1, w_2 *abhängigen Wert N. Der Grundriß der Kurven ist entweder eine einzige Trochoide k' oder er umfaßt* $T(\leqq N)$ *verschiedene, symmetrisch verteilte Kurven. Im ersten Fall läuft k' durch alle Hauptschnittpunkte* $w_1 w_2$; *im zweiten Fall enthält jede Kurve k' nur* N/T *dieser Punkte.*

4. Trochoidenbüschel. Betrachtet man in den vorstehenden Gleichungen die Zahlen a_i', b_i'; a_i'', b_i'' als fest und wählt für G', G'' alle

[10] Dies ergibt sich auch ohne Berücksichtigung des geometrischen Zusammenhangs unmittelbar aus der unschwer zu beweisenden Tatsache, daß sich N als Linearkombination von A_i, B_i darstellen läßt.

möglichen, zueinander teilerfremden Paare ganzer Zahlen, so gelangt man zu *allen Trochoiden k', die mit den N Hauptschnittpunkten P_r' der beiden durch die Modulwerte $a_i' : b_i'$*, bzw. *$a_i'' : b_i''$ festgelegten Trochoiden w_1, w_2 inzident sind.* Wir wollen die Gesamtheit dieser Kurven als ein *Büschel mit den Grundpunkten P_r'* bezeichnen. Alle Büschelkurven besitzen die gleichen Leitkreise l_i'; die Zahlen a_i, b_i, die ihre Modulwerte bestimmen, ergeben sich aus den durch Gl. 20 definierten Größen A_i, B_i und deren Maximalteiler T gemäß Gl. 21; die Anzahlen N', N'' ihrer Hauptschnittpunkte mit w_1, bzw. w_2 sind durch Gl. 22 gegeben. Sicht man die Kurven w_1, w_2 als die in π_1 liegenden Normalschnitte zweier Schraubflächen Φ_1, Φ_2 an, so stellen sich die Grundpunkte des Büschels als die in π_1 befindlichen Spurpunkte der Trochoidenschraublinien k dar, die den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$ bilden; jede Büschelkurve k' ist der Grundriß einer oder mehrerer dieser Kurven. Die Hauptschnitte je zweier Flächen, für die das Verhältnis ihrer Geschoßhöhen den gleichen Wert $G' : G''$ hat, besitzen wegen Gl. 19 denselben Grundriß. Je nach dem Wert von T unterscheiden wir folgende Gruppen von Büschelkurven:

I. Jedes Zahlenpaar G', G'', das *für T den Wert* 1 ergibt, legt *eine Trochoide k' fest, die durch sämtliche Grundpunkte P_r' des Büschels läuft.* Die Zahl der Hauptschnittpunkte k' w_1, k' w_2 ist G'' N, bzw. G' N; je N derselben sind die Punkte P_r'. Je zwei Flächen Φ_1, Φ_2, deren Geschoßhöhen zu G', G'' proportional sind, tragen G'' N, bzw. G' N äquidistant liegende Trochoidenschraublinien k, die k' zum Grundriß haben; N der Kurven bilden den Hauptschnitt $\Phi_1 \Phi_2$. Bei der in Abb. 5 gewählten Annahme ($N = 10$) ist als Repräsentant dieser Gruppe die durch $G' = 1$, $G'' = 2$ bestimmte Büschelkurve k' (eine Trochoide von Modul $-1 : 7$) samt ihren 20, bzw. 10 Hauptschnittpunkten mit w_1 und w_2 dargestellt (vgl. Tab. 5).

II. Wenn N keine Primzahl ist, so gibt es Zahlenpaare G', G'', die *für T einen von* 1 *verschiedenen ganzzahligen Teiler von N* ergeben. Durch jedes solche Zahlenpaar werden T *verschiedene, untereinander kongruente und gegeneinander um die Winkel $2\pi/T$ gedrehte Trochoiden* $k_1', k_2' \ldots$ definiert, deren jede N/T Grundpunkte des Büschels trägt, wobei keine zwei Kurven mit den gleichen Grundpunkten inzident sind, so daß die T Kurven *in ihrer Gesamtheit* die N Grundpunkte des Büschels enthalten. Die Zahl der Hauptschnittpunkte jeder Kurve $k_1', k_2' \ldots$ mit w_1 und w_2 ist G'' N/T, bzw. G' N/T; je N/T derselben sind Grundpunkte des Büschels. Bei dem in Abb. 5 wiedergegebenen

Beispiel sind als Vertreter dieser Kurvengruppe zwei Ellipsen k_1', k_2' (für $T = 2$) und zwei Konchoiden k_a', k_b' (für $T = 5$) samt ihren Haupt-

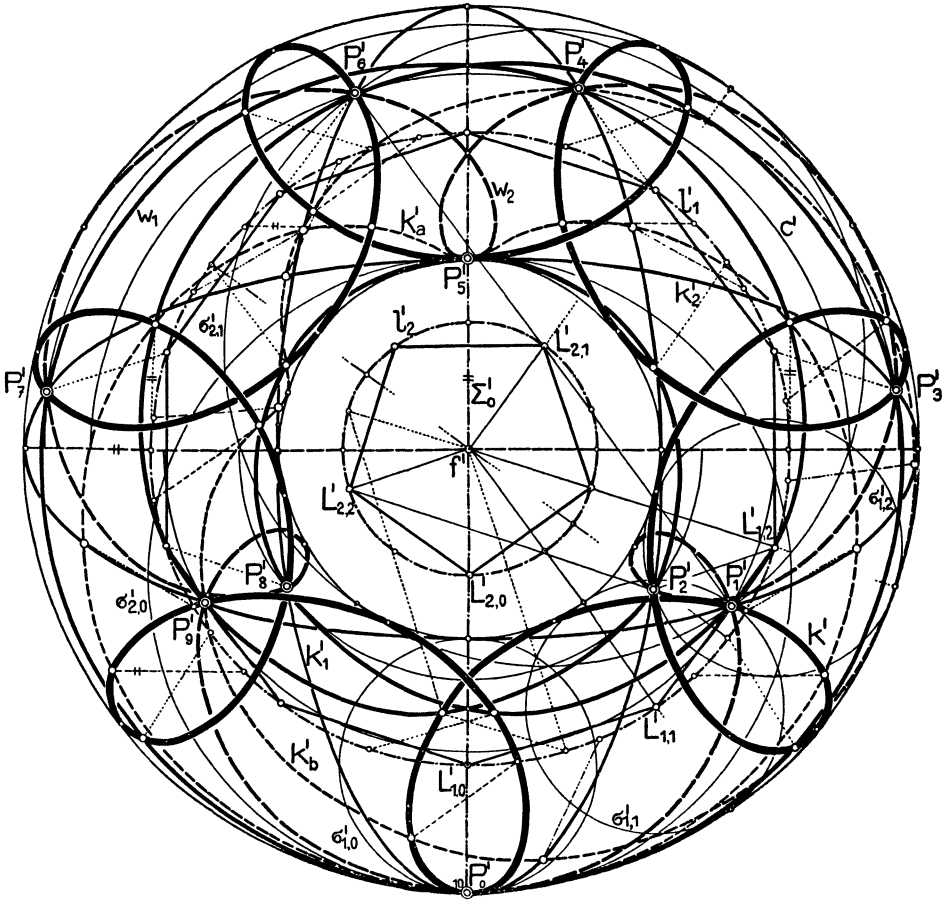

Abb. 5

schnittpunkten mit w_1 und w_2 dargestellt. Da die Zahlen G', G'', die die Ellipsen bestimmen, je gleich 1 sind, so bilden die fünf Grundpunkte des Büschels, durch die jede Ellipse läuft, zugleich ihre sämtlichen Hauptschnittpunkte mit w_1 und w_2. Die Konchoiden sind durch $G' = 1$, $G'' = -2$ definiert; die zwei Grundpunkte des Büschels, die jede Konchoide enthält, sind zugleich ihre sämtlichen Hauptschnittpunkte mit w_2; außer diesen besitzt sie noch zwei Hauptschnittpunkte mit w_1

(vgl. Tab. 5). In der Abbildung sind überdies alle Hauptschnittpunkte der Trochoide k' mit den gezeichneten Ellipsen und Konchoiden, sowie die der letzteren untereinander in Verbindung mit ihren ersten Leitpunkten eingetragen. Da je ein Hauptschnittpunkt der dargestellten Kurvenpaare ein Grundpunkt des Büschels ist, so können alle übrigen mittels der Leitpolygone nach Nr. 2 konstruiert werden, wie der Abbildung zu entnehmen ist.

III. Durch jedes Zahlenpaar G', G'', das *für T den Wert N* ergibt, werden N *verschiedene, symmetrisch verteilte Trochoiden* k' definiert, deren jede *einen einzigen* Grundpunkt des Büschels enthält, wobei wiederum keine zwei der Kurven durch den gleichen Grundpunkt laufen. Jede Kurve hat mit w_1 bzw. w_2 insgesamt G'', bzw. G' Hauptschnittpunkte gemein; einer derselben ist ein Grundpunkt des Büschels. Je zwei Flächen Φ_1, Φ_2, deren Geschoßhöhen zu den Zahlen G', G'' proportional sind, tragen G'', bzw. G' Trochoidenschraublinien, die eine der N Kurven k' zum Grundriß haben; eine dieser Kurven gehört dem Hauptschnitt $\Phi_1\,\Phi_2$ an. In Abb. 5 sind Trochoiden dieser Gruppe nicht dargestellt, da sie gegenüber den Kurven der Gruppe II nichts wesentlich Neues bieten.

Wählt man zur Bestimmung einer Büschelkurve an Stelle von G', G'' *die Zahlen* a_i, b_i, *die ihre Modulwerte definieren*, so erhält man aus diesen zunächst mittels Gl. 17 die Zahlen N', N''; der Maximalteiler von N', N'' stellt wegen Gl. 22 den Quotienten N/T dar, aus der Konstanz von N folgt hieraus T sowie das Zahlenpaar G', G''. Man erkennt somit, daß im Büschel *Trochoiden von jedem rationalen Modulwert* vertreten sind; je nach dem Wert von T gibt es entweder *eine einzige Kurve oder* T ($\leqq N$) *voneinander verschiedene Trochoiden von einem und demselben Modul.* Durch die Annahme $a_i = 0$ oder $b_i = 0$ werden die drei Scharen der im Büschel enthaltenen *Kreise* definiert; diese stellen je einen aus *Euklidischen Schraublinien* bestehenden Hauptschnitt zweier durch w_1, bzw. w_2 laufenden Schraubflächen dar (vgl. Nr. 2, vor Gl. 11). Bei dem in Abb. 5 gewählten Beispiel gehören die durch $a_1 = 0$ definierten Kreise $\sigma'_{1,r}$, deren Mitten die Leitpunkte $L'_{1,r}$ der Punkte P'_r sind, sowie die durch $b_i = 0$ bestimmten Kreise c' um f' zur Gruppe III ($T = 10$); die ersteren sind durch $G' = 1$, $G'' = 3$, die letzteren durch $G' = 3$, $G'' = -1$ festgelegt (die Tatsache, daß die Zahl der mit den Punkten P'_r inzidenten Kreise um f' kleiner als zehn ist, wird durch die symmetrische Anordnung dieser Punkte bewirkt). Die durch $a_2 = 0$ (oder $a_1 = 1$, $b_1 = -1$) bestimmten Kreise $\sigma'_{2,r}$, deren

Mitten die Leitpunkte $L'_{2,r}$ sind, gehören zur Gruppe II ($T = 5$). Dies folgt schon aus dem Umstand, daß die Punkte $L'_{2,r}$ wegen des gemeinsamen Teilers 2 von a_2', a_2'' ein Fünfeck bilden (vgl. Nr. 2), so daß je zwei Punkte P_r' bezüglich einer Ecke desselben symmetrisch liegen (z. B. P_1' und P_6' bezüglich $L'_{2,1}$); diese Kreise sind durch $G' = 2$, $G'' = 1$ bestimmt.

Tabelle 5:

i	a_i'	b_i'	a_i''	b_i''	N
1	3	−1	1	3	10
2	2	1	4	−3	

Kurve	i	G'	G''	A_i	B_i	T	a_i	b_i	N'	N''
k'	1	1	2	1	−7	1	1	−7	20	10
	2			−6	7		−6	7		
k_1', k_2'	1	1	1	2	−4	2	1	−2	5	5
	2			−2	4		−1	2		
k_a', k_b'	1	1	−2	5	5	5	1	1	4	2
	2			10	−5		2	−1		
$\sigma'_{1,r}$	1	2	1	5	−5	5	1	−1	2	4
	2			0	5		0	1		
$\sigma'_{2,r}$	1	1	3	0	−10	10	0	−1	3	1
	2			−10	10		−1	1		
c'	1	3	−1	10	0	10	1	0	1	3
	2			10	0		1	0		

Betrachtet man das Büschel durch *eine Trochoide k' und seine Grundpunkte P_r'* gegeben (d. h. N Punkte von k', deren Leitpunkte je ein regelmäßiges Polygon bilden), so kann man k' als *gemeinsamen Grundriß von N äquidistanten Trochoidenschraublinien k*, die Punkte P_r' als deren in π_1 liegende *Spurpunkte* und jede Büschelkurve als den in π_1 befindlichen *Normalschnitt einer Schraubfläche* deuten, die mit mindestens einer jener Raumkurven inzident liegt. Die Gesamtheit dieser Flächen bildet ein *Büschel mit den Grundkurven k*. Das in π_1 liegende Trochoidenbüschel stellt einen ebenen Schnitt desselben dar; seine Kurven gewinnen hiebei folgende Bedeutung:

I. Jede Trochoide w_x, die durch *alle* Grundpunkte des Büschels läuft, stellt den Normalschnitt einer Fläche Φ_x dar, die *alle N* Trochoidenschraublinien k enthält. Ist die Zahl N_x der Hauptschnittpunkte k' w_x ein ganzzahliges Vielfaches GN von N, so gibt sie zugleich die Anzahl

aller auf Φ_x liegenden Trochoidenschraublinien an, die k' zum Grundriß haben. N derselben sind die Grundkurven des Büschels; von den übrigen liegen je $G-1$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kurven k in einander gleichen, die Geschoßhöhe $\mathfrak{G}_x$ von Φ_x darstellenden Abständen; die Ganghöhe $\mathfrak{H}$ der Kurven k ist gleich $N_x \mathfrak{G}_x$.

II. Wenn T *voneinander verschiedene,* einander kongruente und symmetrisch verteilte Trochoiden w_x in der oben beschriebenen Weise in ihrer Gesamtheit die N Grundpunkte des Trochoidenbüschels enthalten, so stellt jede dieser Kurven den Normalschnitt einer Fläche Φ_x dar, die nur N/T *Grundkurven des Flächenbüschels* trägt; es gibt also T *verschiedene, einander kongruente Schraubflächen Φ_x, die mit der Gesamtheit aller N Trochoidenschraublinien k inzident sind.* Die Zahl $N_x = NG/T$ der Hauptschnittpunkte einer dieser Kurven w_x mit k' gibt zugleich die Anzahl der Trochoidenschraublinien mit dem Grundriß k' an, die der durch w_x bestimmten Büschelfläche Φ_x angehören; die Geschoßhöhe von Φ_x ist $\mathfrak{H}/N_x = T\mathfrak{H}/NG$.

III. Im Falle $T = N$ ergeben sich je N Trochoiden w_x in π_1, deren jede nur *einen einzigen* Grundpunkt des Büschels enthält; diese Kurven stellen die Normalschnitte von N *verschiedenen, einander kongruenten Flächen dar, deren jede eine einzige der N Trochoidenschraublinien k trägt.* Jede der Kurven w_x hat mit k' insgesamt $N_x = G$ Hauptschnittpunkte gemein; die mit w_x inzidente Büschelfläche Φ_x enthält G Trochoidenschraublinien mit dem Grundriß k'. Die Geschoßhöhe von Φ_x ist $\mathfrak{H}/G$.

Zusammenfassend können wir sohin feststellen

VI: *Die Hauptschnitte je zweier zyklischer Schraubflächen, deren exzentrische Schraublinien denselben Drehzylindern angehören und deren in π_1 liegende Normalschnitte zwei feste algebraische Trochoiden w_1, w_2 sind, bilden sich im Normalriß auf π_1 als die sämtlichen Trochoiden eines Büschels ab, dessen Grundpunkte die N Hauptschnittpunkte w_1 w_2 sind. Im Büschel sind Kurven von allen möglichen rationalen Modulwerten vertreten; je nach dem Wert desselben ist die Zahl T der Büschelkurven, die mit allen Grundpunkten inzident liegen, gleich* 1 *oder einem von* 1 *verschiedenen Teiler von N bzw. gleich N selbst. Im Falle $N > 1$ sind alle durch den gleichen Modul bestimmten Trochoiden symmetrisch verteilt. Deutet man die Grundpunkte des Büschels als Spurpunkte von N äquidistanten, einander im Normalriß auf π_1 deckenden Trochoidenschraublinien, so stellt sich das Trochoidenbüschel als ebener Schnitt des Büschels aller zyklischen Schraubflächen dar, deren jede entweder mit allen N, bzw. T oder einer einzigen dieser Kurven inzident ist.*

Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen

Von

Peter Lesky, Innsbruck*

(*Eingegangen am 20. März 1958*)

I. Allgemeine Sätze über unendliche orthogonale Matrizen

1. Orthogonalitätsbedingungen. — 2. Abgeschlossenheit. — 3. Darstellungssatz. — 4. Vollständigkeit. — 5. Abgeschlossenheitstheorem von Vitali. — 6. Erweiterung auf orthogonale Funktionensysteme.

1. **Definition 1:** *Die aus den reellen Zahlen* $r_{\nu n}$ $(\nu, n=1, 2, 3, \ldots)$ *gebildete unendliche Matrix*

$$\mathfrak{R} = (r_{\nu n}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

heißt orthogonal, wenn die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen (im folgenden kurz ON-Bedingungen)

$$\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} = \delta_{\nu\mu} \tag{1}$$

und

$$\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\nu m} = \delta_{nm} \tag{2}$$

für das System der Zeilen- beziehungsweise Spaltenvektoren erfüllt sind, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$$

ist[1].

---

* Mathematisches Institut der Universität Innsbruck.

[1] Die Bezeichnungen für den Matrizenkalkül wurden [1] entnommen.

2. **Definition 2:** *Einen unendlichen Vektor* $\tilde{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *mit reellen Komponenten nennen wir zulässig, wenn*

$$\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} = |\,\mathfrak{x}\,|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

konvergiert. Erfüllt nun die Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ die erste *ON*-Bedingung (1), dann kann der Vektor $\mathfrak{R}.\mathfrak{x}$ mit den Komponenten

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, x_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

gebildet werden, denn die **Schwarzsche Ungleichung**

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |\, r_{\nu n}\, x_n\,|\Big)^2 \leqq \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}^2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \tag{4}$$

zeigt die absolute Konvergenz aller unendlichen Reihen (3); daß er auch zulässig ist, wird später bewiesen werden (Satz 3).

Definition 3: *Wir nennen das System der Zeilenvektoren* $\{r_{\nu 1}, r_{\nu 2}, \ldots\}$ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *der Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ **abgeschlossen,** *wenn für jeden beliebigen zulässigen Vektor* $\tilde{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *aus*

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = 0, \text{ d. h. } \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, x_n = 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

immer

$$\mathfrak{x} = 0, \text{ d. h. } \quad x_n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5'}$$

folgt. Dann gilt der

Satz 1: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *beiden ON-Bedingungen* (1) *und* (2), *dann ist das System ihrer Zeilenvektoren abgeschlossen* und der noch schärfere

Satz 2: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1), *dann ist die zweite ON-Bedingung* (2) *der Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren äquivalent.*

Beweis: a) Aus (1) und (2) folgt (5) (5'), denn mit (1) ist $\mathfrak{R}.\mathfrak{x}$ sinnvoll und aus $\mathfrak{R}.\mathfrak{x} = 0$ folgt

$$\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x} = 0.$$

b) Aus (1) und (5) (5') folgt (2), denn $\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}$ ergibt

$$(\mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}})\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}) = \mathfrak{R},$$

also

$$\mathfrak{R}(\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} - \mathfrak{E}) = 0.$$

Dies kann aber auf Grund der Abgeschlossenheit nur dann gelten, wenn $\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ ist.

Da die erste (bzw. zweite) *ON*-Bedingung für die Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ der zweiten (bzw. ersten) *ON*-Bedingung für die transponierte Matrix $\tilde{\mathfrak{R}} = (r_{n\nu})$ gleichbedeutend ist, folgt aus der Voraussetzung des Satzes 1 auch die Abgeschlossenheit des Systems der Spaltenvektoren der Matrix $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$. Eine unendliche orthogonale Matrix ist also in diesem Sinne **abgeschlossen.**

3. **Satz 3:** *Genügt die Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1) *und bilden wir mit einem beliebigen zulässigen Vektor* $\tilde{\mathfrak{a}} = (a_1, a_2, \ldots)$ *den (dann sinnvollen) Vektor* $\gamma = \mathfrak{R}.\mathfrak{a}$ *mit den Komponenten*

$$\gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

den wir als den zu $\mathfrak{a}$ *gehörenden* **Fourierschen Vektor** *bezeichnen, so ist dieser ebenfalls zulässig.*

Beweis: Aus der **Besselschen Ungleichung**

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu\, r_{\nu n}]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - 2 \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \sum_{n=1}^{\infty} a_n . r_{\nu n} + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \gamma_\nu \gamma_\mu \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu^2 \geqq 0 \tag{7}$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \tag{8}$$

das heißt mit Verwendung des Matrizenkalküls

$$\tilde{\gamma}\,\gamma = \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}, \tag{8'}$$

also die Zulässigkeit von γ.

Satz 4[2]**:** *Ist die Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *orthogonal, dann gibt es zu jedem beliebig vorgegebenen zulässigen Vektor* γ *eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a}$*, so daß* γ *der Fouriersche Vektor von* $\mathfrak{a}$ *bezüglich* $\mathfrak{R}$ *ist.*

Zu einem zulässigen Vektor γ soll also ein Vektor $\mathfrak{a}$ gesucht werden, so daß

$$\gamma = \mathfrak{R}\ .\ \mathfrak{a}$$

gilt. Wir behaupten nun, daß der Vektor $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ der gesuchte Vektor ist. Da nämlich $\mathfrak{R}$ der zweiten *ON*-Bedingung genügt, erfüllt $\tilde{\mathfrak{R}}$ die erste und $\tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ ist daher zulässig. Aus $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma$ und der ersten *ON*-Bedingung für $\mathfrak{R}$ folgt dann

$$\mathfrak{R}\ .\ \mathfrak{a} = \mathfrak{R}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\gamma = \mathfrak{E}\,\gamma = \gamma.$$

---

[2] Analog dem Satz von *Fischer Rieß*, siehe etwa [2], S. 23, oder [3], S. 23.

Dieser Vektor $\mathfrak{a}$ ist eindeutig bestimmt, denn für jeden Vektor $\mathfrak{a}^*$ mit

$$\gamma = \mathfrak{R} \,.\, \mathfrak{a}^*$$

folgt

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^*) = 0,$$

also $\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^* = 0$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$, das heißt aber $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$.

Indem wir Satz 3 und Satz 4 zusammenfassen, können wir nun folgenden **Darstellungssatz** formulieren:

Satz 5: *Ist* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *ein abgeschlossenes unendliches Vektorsystem,* $\mathfrak{a}$ *ein zulässiger Vektor, dann gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{R}}.\gamma, \text{ d. h. } a_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{\nu n}\, \gamma_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei der zu $\mathfrak{a}$ *gehörende Fouriersche Vektor* γ *durch*

$$\gamma = \mathfrak{R}.\mathfrak{a}, \text{ d. h. } \gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

gegeben ist.

4. **Definition 4:** *Wenn in der Besselschen Ungleichung* (7) *für jeden zulässigen Vektor* $\mathfrak{a}$ *und jedes zugehörige* γ *das Gleichheitszeichen gilt, dann heißt das System der Zeilenvektoren* $(r_{\nu 1}, r_{\nu 2}, \ldots)$ *vollständig; aus der Besselschen Ungleichung wird dann die* **Parsevalsche Gleichung**

$$\tilde{\mathfrak{a}}\, \tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}. \tag{9}$$

Es gilt der

Satz 6: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung* (1), *dann ist die zweite ON-Bedingung* (2) *der Vollständigkeit des Systems ihrer Zeilenvektoren äquivalent, woraus dann nach Satz* 2 *die Äquivalenz von Vollständigkeit und Abgeschlossenheit folgt.*

Beweis: a) Aus (1) und (2) folgt (9), denn gilt die erste *ON*-Bedingung, dann ist die Bildung von $\tilde{\mathfrak{a}}\,.\,\tilde{\mathfrak{R}}$ bzw. $\mathfrak{R}\,.\,\mathfrak{a}$ sinnvoll, während die zweite *ON*-Bedingung $\tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ gerade die Gültigkeit von (9) bewirkt.

b) Andrerseits folgt aus (1) und (9) die Bedingung (2). Bilden wir mit einem beliebigen zulässigen Vektor $\mathfrak{x}$ das wegen (1) sinnvolle Produkt $\mathfrak{R}\, \mathfrak{x}$ und ist

$$\mathfrak{R}\, \mathfrak{x} = 0,$$

dann folgt daraus wegen der Vollständigkeit (9)

$$\tilde{\mathfrak{x}}\, \tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R}\, \mathfrak{x} = \tilde{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{x} = 0,$$

also $\mathfrak{x} = 0$, d. h. die Abgeschlossenheit des Systems der Zeilenvektoren von $\mathfrak{R}$ und damit nach Satz 2 die zweite *ON*-Bedingung.

Ebenso wie bei der Abgeschlossenheit können wir hier aus der Erfüllung der beiden *ON*-Bedingungen auch auf die Vollständigkeit des Systems der Spaltenvektoren schließen; eine unendliche orthogonale Matrix kann also in diesem Sinne **vollständig** und **abgeschlossen** genannt werden.

5. **Satz 7**[3]: *Genügt die unendliche Matrix* $\mathfrak{R} = (r_{\nu n})$ *der ersten ON-Bedingung, dann ist für die Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren die Gültigkeit von*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{m} r_{\nu n}]^2 = m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

notwendig und hinreichend.

Beweis: a) Aus der Abgeschlossenheit des Systems ihrer Zeilenvektoren und nach Satz 5 folgt die Parsevalsche Gleichung (9), d. h. für $\tilde{\mathfrak{a}} = (a_1, a_2, \ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, a_n]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{9'}$$

Setzt man darin für $\mathfrak{a}$ der Reihe nach $\mathfrak{a}_m = (\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{m}, 0, 0, \ldots)$, $m = 1, 2, \ldots$, so erhält man gerade die Bedingungen (10).

b) Umgekehrt gelte (10) und $\mathfrak{R}$ wäre nicht abgeschlossen, dann gibt es einen zulässigen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$, für den $\mathfrak{R}\,\mathfrak{x} = 0$ gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x} = 1$ an; dann gilt für die Matrix

$$\mathfrak{R}^* = \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{x}} \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix}$$

die erste Orthogonalitätsbedingung $\mathfrak{R}^*\,\tilde{\mathfrak{R}}^* = \mathfrak{E}$ und daher für jeden zulässigen Vektor $\mathfrak{a}$ die Besselsche Ungleichung

$$\tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}^*\,\mathfrak{R}^*\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a},$$

also wegen

$$\tilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x} \,\vdots\, \tilde{\mathfrak{R}}) \begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{R} \end{pmatrix} \mathfrak{a} = (\tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x} \mid \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{x}}\mathfrak{a} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{R}\mathfrak{a} \end{pmatrix} = \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}\,\tilde{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{a} + \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a}$$

die Ungleichung

$$|\,\tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{x}\,|^2 + \tilde{\mathfrak{a}}\,\tilde{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{a} \leqq \tilde{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}.$$

Da nach Annahme für die (zulässigen) Vektoren $\mathfrak{a}_m$

[3] Entspricht dem Vollständigkeitstheorem von *Vitali* [4], S. 25.

$$\tilde{a}_m \,\tilde{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{R}\, a_m = \tilde{a}_m\, a_m, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10'}$$

gilt, muß $\left| \tilde{a}_m \mathfrak{x} \right|^2 = 0$, d. h. $\tilde{a}_m \mathfrak{x} = 0$ für jedes m sein. Daraus folgt aber sukzessive $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$, also $\mathfrak{x} = 0$ und somit die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$.

6. Es sei

$$\Phi = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$$

ein im Intervall [a, b] vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem und $\mathfrak{R}$ eine unendliche orthogonale Matrix. Da für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}^2$ konvergiert, gibt es nach dem Satz von **Fischer Rieß**[4] eine bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmte, in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion $\psi_\nu(x)$, deren Fourierkoeffizienten bezüglich des Systems Φ die $r_{\nu n}$ sind, d. h. es gilt

$$r_{\nu n} = \int_a^b \psi_\nu(x)\, \varphi_n(x)\, dx, \quad \nu, n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Dabei konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, \varphi_n(x)$ im Mittel gegen $\psi_\nu(x)$

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, \varphi_n(x)]^2\, dx = 0. \tag{12}$$

Das System $\tilde{\Psi} = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots)$ (das also bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt ist) wollen wir symbolisch mit

$$\Psi = \mathfrak{R}.\Phi \tag{13}$$

bezeichnen. Es gilt

Satz 8: *Wenn $\mathfrak{R}$ eine unendliche orthogonale Matrix und Φ ein im Intervall* [a, b] *vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem ist, dann ist auch $\Psi = \mathfrak{R}.\Phi$ ein in* [a, b] *vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem.*

Beweis: a) Aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, \varphi_n(x)]\, [\psi_\mu(x) - \sum_{m=1}^{N} r_{\mu m}\, \varphi_m(x)]\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq \left\{ \int_a^b [\psi_\nu(x) - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, \varphi_n(x)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_a^b [\psi_\mu(x) - \sum_{m=1}^{N} r_{\nu m}\, \varphi_m(x)]^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

folgt wegen (12), daß der Ausdruck

[4] Vgl. [2], S. 23.

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \int_a^b \varphi_n(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{m=1}^{N} r_{\mu m} \int_a^b \varphi_m(x)\,\psi_\nu(x)\,dx + \\ + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{\nu n}\, r_{\mu m} \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, r_{\mu n}$$

mit wachsendem N gegen null strebt. Also ist

$$\int_a^b \psi_\nu(x)\,\psi_\mu(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, r_{\mu n} = \delta_{\nu\mu} \qquad \nu, \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

d. h. es gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen für das Funktionensystem Ψ.

b) Es sei $f(x)$ eine in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion und $\tilde{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ das System ihrer Fourierkoeffizienten in Bezug auf Φ, d. h.

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wegen der Vollständigkeit von Φ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx,$$

und $\mathfrak{c}$ ist daher ein zulässiger Vektor. Entsprechend sei $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ der (zulässige) Vektor der Fourierkoeffizienten von $f(x)$ bezüglich Ψ, d. h.

$$\gamma_\nu = \int_a^b f(x)\,\psi_\nu(x)\,dx, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Mit

$$S_{\nu N} = \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\, c_n = \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x) \sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x)\,dx, \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

erhalten wir durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|S_{\nu N} - \gamma_\nu| = \left|\int_a^b f(x)\,[\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x) - \psi_\nu(x)]\,dx\right| \leqq \\ \leqq \left[\int_a^b f(x)^2\,dx \cdot \int_a^b [\sum_{n=1}^{N} r_{\nu n}\,\varphi_n(x) - \psi_\nu(x)]^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

und daher wegen (12)

$$\lim_{N\to\infty} [S_{\nu N} - \gamma_\nu] = 0,$$

das heißt

$$\gamma_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\nu n}\, c_n, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es gilt also für die Vektoren γ, $\mathfrak{c}$

$$\gamma = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{c}$$

und somit

$$\tilde{\gamma}\,\gamma = \tilde{\gamma}\,\tilde{R}\,R\,\gamma = \tilde{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{c},$$

woraus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx$$

wegen der Vollständigkeit von Φ folgt. Da dies für jede in [a, b] quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt, ist das Orthogonalsystem $\Psi = \mathfrak{R} \cdot \Phi$ in [a, b] vollständig.

Der Satz 8 bietet die Möglichkeit, aus einem gegebenen Orthogonalsystem neue Orthogonalsysteme zu bilden. Es soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, die Bildung solcher Orthogonalsysteme vorzunehmen und zu untersuchen.

II. Laguerresche Matrizen

Im zweiten Teil dieser Arbeit sollen unendliche orthogonale Matrizen nach einem Verfahren konstruiert werden, das auf einem Variationsprinzip beruht. Dieses Verfahren ist analog einer von *W. Gröbner* [5] für orthogonale Funktionensysteme angegebenen Methode.

Die Zeilen dieser unendlichen orthogonalen Matrizen stehen in Analogie zu den bekannten *Laguerreschen* Polynomen. Diese Analogie besteht darin, daß an Stelle von Integralen unendliche Summen (mit passend gewählten Gewichtsfunktionen), an Stelle von Differentialen und Differentialgleichungen Differenzen und Differenzgleichungen treten. Dabei werden alle Analogien zwischen Differential- und Differenzenrechnung ausgenützt.

Wir stellen uns die Aufgabe, Polynome mit reellen Koeffizienten zu konstruieren, die in n den Grad ν erreichen:

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \binom{n}{2} a_{\nu 2} + \ldots + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu}, \quad (\nu, n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{(I)}$$

und die folgenden Orthogonalitätsbedingungen mit der Gewichtsfunktion e^{-n}

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\, y_{\nu n}\, y_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

erfüllen.

Mit diesen Polynomen werden wir das normierte orthogonale System von Zeilenvektoren einer unendlichen orthogonalen Matrix bilden, indem wir

$$r_{\nu n} = e^{-\frac{n}{2}} \frac{y_{\nu n}}{\sqrt{\sigma_\nu}} \tag{III}$$

setzen. Die $r_{\nu n}$ sind dann die Elemente einer unendlichen orthogonalen Matrix, die wir eine *Laguerresche Matrix* nennen; im folgenden sollen diese Matrizen noch verallgemeinert werden.

§ 1. Aufstellung der Polynome

1. Ein Hilfssatz von *W. Gröbner* über Orthogonalsysteme. — 2. Bestimmung der Polynome mit einem Variationsprinzip. — 3. Verallgemeinerung der Polynome. — 4. Berechnung einiger Summen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} f(n)$. — 5. Normierung der Polynome.

1. Ein **Hilfssatz** von *W. Gröbner* [6], den wir auf (II) anwenden können, indem wir $f_{\nu n} = e^{-\frac{n}{2}} y_{\nu n}$ setzen, besagt:

Dafür, daß für ein unendliches System von (zulässigen und nicht verschwindenden) Vektoren $\{f_{\nu n}\}$ die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n} f_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Summe

$$S_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} [c_0 f_{0n} + c_1 f_{1n} + \ldots + c_{\nu-1} f_{\nu-1,n} + f_{\nu n}]^2 \tag{2}$$

bei jedem ν ihr Minimum für $c_0 = c_1 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$ erreicht[5].

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, daß für die $f_{\nu n}$ die Orthogonalitätsbedingungen (1) erfüllt sind; dann gilt

$$S_\nu = c_0^2 \sigma_0 + c_1^2 \sigma_1 + \ldots + c_{\nu-1}^2 \sigma_{\nu-1} + \sigma_\nu$$

und da alle σ_k positiv sind, ergibt sich das Minimum für S_ν bei $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$.

Umgekehrt sei die Voraussetzung erfüllt, daß S_ν sein Minimum für $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{\nu-1} = 0$ erreicht, dann muß auch

$$s_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} [c_\mu f_{\mu n} + f_{\nu n}]^2 \qquad \mu < \nu$$

sein Minimum für $c_\mu = 0$ erreichen. Nun erreicht aber

$$s_\mu = c_\mu^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}^2 + 2 c_\mu \sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n} f_{\nu n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}^2$$

[5] Die Koeffizienten c_k sind unabhängig von der Summationsvariablen.

sein Minimum für

$$c_\mu = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}\, f_{\nu n}}{\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}^2},$$

das heißt, es muß

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\mu n}\, f_{\nu n} = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu < \nu$$

sein; da dies für jedes ν gilt, folgen daraus die Orthogonalitätsrelationen (1).

2. Unter den Differenzen der Polynome (I) verstehen wir

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_{\nu n} &= y_{\nu n}, \\ \Delta^1 y_{\nu n} &= y_{\nu, n+1} - y_{\nu n} \\ \Delta^2 y_{\nu n} &= y_{\nu, n+2} - 2\, y_{\nu, n+1} + y_{\nu n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^k y_{\nu n} = \Delta^1(\Delta^{k-1} y_{\nu n}) &= y_{\nu, n+k} - \binom{k}{1} y_{\nu, n+k-1} + \cdots + (-1)^k y_{\nu n}; \end{aligned} \tag{3}$$

die ν-te Differenz ist dann

$$\Delta^\nu y_{\nu n} = a_{\nu\nu} \neq 0. \tag{4}$$

Den oben bewiesenen Hilfssatz können wir dazu verwenden, die Orthogonalitätsbedingungen (II) durch ein Variationsproblem zu ersetzen. Denn die Forderung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\, y_{\nu n}^2 = \text{Min!} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

unter der Nebenbedingung, daß der ν-te Koeffizient der Polynome (I) festbleibt, entspricht gerade den Orthogonalitätsbedingungen (II). In bekannter Weise fügen wir diese Nebenbedingung mit einem *Lagrange*-Faktor $2\,\lambda_n$ zur obigen Minimalbedingung und erhalten das Variationsproblem

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-n}\, y_{\nu n}^2 + 2\,\lambda_n(\Delta^\nu y_{\nu n} - a_{\nu\nu})] = \text{Min!} \tag{5}$$

Durch Überlagerung einer Zahlenfolge $\{z_n\}$, die willkürlich gewählt werden kann und nur der Einschränkung unterliegt, nicht stärker als eine Potenz von n zu wachsen, variieren wir

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-n}[y_{\nu n} + \varepsilon\, z_n]^2 + 2\,\lambda_n[\Delta^\nu(y_{\nu n} + \varepsilon\, z_n) - a_{\nu\nu}]\} = \text{Min!} \tag{5'}$$

$\Omega(\varepsilon)$ ist eine Funktion von ε, die für $\varepsilon = 0$ ein Minimum hat, daher muß

$$\delta\,\Omega = \left(\frac{\partial \Omega\,(\varepsilon)}{\partial\,\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 2\sum_{n=0}^{\infty}[e^{-n}\,y_{\nu n}\,z_n + \lambda_n\,\Delta^{\nu}\,z_n] = 0,\quad \nu = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

sein[6].

Die Bedingung (6) muß für jede beliebige Folge $\{z_n\}$ erfüllt sein, daher versuchen wir eine Umformung, mit der eine Ausklammerung dieser willkürlichen z_n gelingt. Zu diesem Zweck wenden wir auf den zweiten Teil der Summe in (6) die partielle Summation an, die dem Sinne nach der partiellen Integration entspricht:

Aus

$$\Delta(u_n\,v_n) = u_n\,\Delta\,v_n + v_{n+1}\,\Delta\,u_n$$

und

$$\sum_{n=a}^{b}\Delta(u_n\,v_n) = [u_n\,v_n]_{n=a}^{n=b+1}, \qquad (a,\ b \text{ ganz})$$

folgt die Formel für die partielle Summation

$$\sum_{n=a}^{b} u_n\,\Delta\,v_n = [u_n\,v_n]_{n=a}^{n=b+1} - \sum_{n=a}^{b} v_{n+1}\,\Delta\,u_n. \qquad (7)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel (7) auf das zweite Glied in (6) erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\,\Delta^{\nu}\,z_n = [\lambda_n\,\Delta^{\nu-1}\,z_n - \Delta\,\lambda_n\,\Delta^{\nu-2}\,z_{n+1} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\nu-1}\,\Delta^{\nu-1}\,\lambda_n\,z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=\infty} + (-1)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^{\nu}\,\lambda_n\,z_{n+\nu}.$$

Dadurch entsteht für die Variation (6)

$$\frac{1}{2}\,\delta\,\Omega = \sum_{n=0}^{\infty}\{e^{-n}\,y_{\nu n} + (-1)^{\nu}\,\Delta^{\nu}\,\lambda_{n-\nu}\}\,z_n + (-1)^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\nu-1}\Delta^{\nu}\,\lambda_{n-\nu}\,z_n +$$

$$+ [\lambda_n\,\Delta^{\nu-1}\,z_n - \Delta\,\lambda_n\,\Delta^{\nu-2}\,z_{n+1} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\,\Delta^{\nu-1}\,\lambda_n\,z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=\infty} \qquad (8)$$

Die Variation $\delta\,\Omega$ muß bei jeder Wahl der Folge $\{z_n\}$ verschwinden; wählt man insbesondere nur das eine Glied $z_k = 1$ $(k \geqq \nu)$, alle übrigen Glieder aber gleich null, so folgt aus (8), wenn wir wieder n statt k schreiben

---

[6] Die Folge λ_n der *Lagrange* Faktoren muß so beschaffen sein, daß die Summen in (5), (5′) und (6) absolut konvergieren. Tatsächlich zeigt sich bei der Bestimmung der λ_n (9′), daß diese den Faktor e^{-n} enthalten, während die $y_{\nu n}$ und die z_n nicht stärker als eine Potenz von n wachsen, also die verlangte Bedingung erfüllt ist.

$$e^{-n} y_{\nu n} + (-1)^{\nu} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} = 0 \qquad \text{für } n \geqq \nu$$

und daher

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu-1} e^{n} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} \qquad \text{für } n \geqq \nu. \tag{9}$$

Nun ist aber nach Voraussetzung $y_{\nu n}$ ein Polynom des Grades ν in n; daraus folgt, wie sich aus einer leichten Überlegung ergibt, daß auch der *Lagrange*-Faktor $\lambda_{n-\nu}$ bis auf einen Faktor e^{-n} selbst ein Polynom $p_{\nu n}$ des Grades ν in n sein muß:

$$\lambda_{n-\nu} = (-1)^{\nu-1} e^{-n} p_{\nu n} \qquad \text{für } n \geqq \nu. \tag{9'}$$

Lassen wir die Gleichungen (9), (9') auch für $n = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ gelten, so wird dadurch der *Lagrange*-Faktor λ_n für negative Indizes festgelegt. Diese Festlegung ist möglich, denn im Variationsprinzip (5) kommen die λ_n mit negativem Index nicht vor und sind daher noch vollkommen frei wählbar.

Bei dieser Wahl von λ_n verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer von (8) an der oberen Grenze unter der Voraussetzung, daß die Zahlenfolge $\{z_n\}$ für $n \to \infty$ nicht stärker als eine Potenz von n wächst; dieser Voraussetzung wurde aber bereits bei der Definition der Zahlenfolge $\{z_n\}$ Rechnung getragen. Außerdem ist der Ausdruck in der geschlungenen Klammer von (8) null, denn (9) gilt nach neuer Voraussetzung für alle n. Schließlich bleibt von Gleichung (8) nur

$$\frac{1}{2} \delta \Omega = (-1)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^{\nu} \lambda_{n-\nu} z_n - \\ - \lambda_0 \Delta^{\nu-1} z_0 + \Delta \lambda_0 \Delta^{\nu-2} z_1 - \ldots + (-1)^{\nu} \Delta^{\nu-1} \lambda_0 z_{\nu-1} = 0$$

übrig. Entsprechend den Gleichungen (3) lösen wir die Differenzen von z auf

$$\frac{1}{2} \delta \Omega = \sum_{k=1}^{\nu} z_{\nu-k} (-1)^{k} \left[\binom{\nu-1}{k-1} \lambda_0 - \binom{\nu-2}{k-1} \Delta \lambda_0 + \ldots + \right. \\ \left. + (-1)^{\nu+k} \binom{k-1}{k-1} \Delta^{\nu-k} \lambda_0 + (-1)^{\nu+k+1} \Delta^{\nu} \lambda_{-k}\right].$$

Der letzte Summand hat ausführlich geschrieben die Form

$$\Delta^{\nu} \lambda_{-k} = \lambda_{\nu-k} - \binom{\nu}{1} \lambda_{\nu-k-1} + \ldots + (-1)^{\nu-k} \binom{\nu}{\nu-k} \lambda_0 + - \ldots + (-1)^{\nu} \lambda_{-k},$$

so daß wir nach analoger Auflösung der Differenzen von λ

$$\frac{1}{2} \delta \Omega = \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k} z_{\nu-k} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-k} (-1)^{j} \lambda_j \left[\binom{\nu-j-1}{k-1} + \binom{j+1}{1} \binom{\nu-j-2}{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ldots + \binom{\nu-k}{\nu-k-j} \binom{k-1}{k-1} - \binom{\nu}{k+j}\right] + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j} \lambda_{-j-1} \binom{\nu}{k-j-1} \right\}$$

erhalten. In diesem Ausdruck ergeben sich alle Koeffizienten von λ_j als null, denn es gilt[7]

$$\binom{\nu-j-1}{k-1} + \binom{j+1}{1}\binom{\nu-j-2}{k-1} + \ldots + \binom{\nu-k}{\nu-k-j}\binom{k-1}{k-1} = \binom{\nu}{j+k}. \tag{10}$$

Letzten Endes bleibt noch

$$\frac{1}{2}\delta\Omega = -z_{\nu-1}[\lambda_{-1}] + z_{\nu-2}[\binom{\nu}{1}\lambda_{-1} - \lambda_{-2}] + \ldots +$$
$$+ (-1)^{\nu} z_0 [\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_{-1} - \binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{-2} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\lambda_{-\nu}].$$

Dieser Ausdruck muß ebenfalls für jede Wahl von $\{z_n\}$ verschwinden. Setzen wir $z_{\nu-1} = 1$ und alle anderen darin vorkommenden z_n null, so folgt $\lambda_{-1} = 0$. Setzen wir $z_{\nu-2} = 1$ und alle anderen z_n null, so muß auch $\lambda_{-2} = 0$ sein, denn λ_{-1} hat sich bereits als null ergeben. So findet man sukzessive die Bedingung, daß alle λ_{-j-1} $(j=0, 1, 2, \ldots)$ null sein müssen. Das in $\lambda_{n-\nu}$ enthaltene Polynom $p_{\nu n}(\vartheta')$ kann also, abgesehen von einem konstanten Normierungsfaktor, nur die Form $\binom{n}{\nu}$ haben; die endgültigen Formeln lauten daher:

$$\lambda_{n-\nu} = (-1)^{\nu-1} e^{-n}\binom{n}{\nu},\ y_{\nu n} = e^{n}\,\Delta^{\nu}[e^{-n}\binom{n}{\nu}],\quad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

3. In die Orthogonalitätsbedingungen (II) führen wir ähnlich wie bei den *Laguerreschen* Polynomen ([4], S. 280) eine allgemeinere Gewichtsfunktion ein

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\binom{n+\alpha}{n} y_{\nu n}^{(\alpha)} y_{\mu n}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \tau_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu, \end{cases} \tag{12}$$

mit irgendeiner nicht negativen reellen Zahl α[8]. Alle vorausgehenden Überlegungen bleiben gültig und es folgt

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n}}{\binom{n+\alpha}{n}}\,\Delta^{\nu}[e^{-n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}],\qquad \nu, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

---

[7] Entwickelt man

$$(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-j-1} = (1-x)^{-j-m-2}$$

in eine Binominalreihe und vergleicht auf beiden Seiten die Koeffizienten, so erhält man die Formel

$$\sum_{s=0}^{p-m}\binom{p-s}{m}\binom{j+s}{j} = \binom{p+j+1}{p-m},$$

aus der man (10) folgern kann. Vgl. [7], S. 251.

[8] Noch allgemeiner kann $e^{-\beta n}$ mit $\beta > 0$ gesetzt werden. Dann wäre in allen folgenden Betrachtungen statt e einfach e^{β} zu setzen.

Entwickeln wir die Differenz nach (3), so erhalten wir

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} - e^{-(n+\nu-1)} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^\nu e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \frac{(-1)^\nu}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k e^{-k} \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n-\nu+k}. \qquad (14)$$

Außerdem können wir durch einfache Umformungen noch zwei weitere Entwicklungen von (13) angeben. Verwendet man die Beziehung

$$\binom{n+\alpha}{n-\nu} = \binom{n+\alpha+\nu}{n} - \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n} + \dots + (-1)^\nu \binom{n+\alpha}{n},$$

so findet man

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[\left(\frac{1}{e} - 1\right)^\nu \binom{n+\alpha+\nu}{n} + \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n} + \dots + \right.$$

$$\left. + \binom{n+\alpha}{n}\right] = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n} \qquad (15)$$

und die Beziehung

$$\binom{n+\alpha+\nu}{n} = \binom{n+\alpha}{n-\nu} + \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha}{n-\nu+1} + \dots + \binom{n+\alpha}{n}$$

anwendend erhält man

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[\left(\frac{1}{e} - 1\right)^\nu \binom{n+\alpha}{n-\nu} + \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-1} \frac{1}{e} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha}{n-\nu+1} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^\nu} \binom{n+\alpha}{n}\right] = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu-k} \frac{1}{e^k} \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha}{n-\nu+k}. \qquad (16)$$

In übersichtlicher Darstellung sollen hier die ersten Polynome für den Fall $\alpha = 0$ angeschrieben werden:

$$y_{0n} = 1,$$

$$y_{1n} = \frac{1}{e} + n \cdot \left(\frac{1}{e} - 1\right),$$

$$y_{2n} = \frac{1}{e^2} + n \cdot \left(\frac{3}{2e^2} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right) + n^2 \left(\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right),$$

$$y_{3n} = \frac{1}{e^3} + n \cdot \left(\frac{11}{6e^3} - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{3}\right) + n^2 \left(\frac{1}{e^3} - \frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2}\right) + n^3 \left(\frac{1}{6e^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e} - \frac{1}{6}\right),$$

$$y_{4n} = \frac{1}{e^4} + n \cdot \left(\frac{25}{12\,e^4} - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{2\,e^2} - \frac{1}{3\,e} - \frac{1}{4}\right) + n^2 \left(\frac{35}{24\,e^4} - \frac{11}{6\,e^3} - \frac{1}{4\,e^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6\,e} + \frac{11}{24}\right) + n^3 \left(\frac{5}{12\,e^4} - \frac{1}{e^3} + \frac{1}{2\,e^2} + \frac{1}{3\,e} - \frac{1}{4}\right) + n^4 \left(\frac{1}{24\,e^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6\,e^3} + \frac{1}{4\,e^2} - \frac{1}{6\,e} + \frac{1}{24}\right),$$

. . . . . .

4. Im Punkt 5 dieses Paragraphen werden wir die Orthogonalität der Polynome (13) nochmals nachweisen und die Normierung vornehmen. Zu diesem Zweck benötigen wir die Summen

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n}{k}, \quad T_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

die wir mit der partiellen Summation (7) einfach berechnen können.

Zunächst gilt

$$S_0 = T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}$$

und für alle folgenden findet man die Rekursionsformel:

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n}{k} = \frac{e}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta\, e^{-n} = \frac{e}{e-1} \left\{ \left[\binom{n}{k} e^{-n}\right]_0^{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)} \Delta \binom{n}{k} \right\}$$

bzw. vereinfacht

$$S_k = \frac{1}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k-1} e^{-n} = \frac{1}{e-1} S_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Daraus ergibt sich nun die allgemeine Formel:

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} e^{-n} = \frac{e}{(e-1)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Entsprechend verfahren wir mit den Summen T_k:

$$T_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} = \frac{e}{e-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta\, e^{-n} =$$

$$= \frac{e}{e-1} \left\{ \left[\binom{n+k}{k} e^{-n}\right]_0^{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)} \Delta \binom{n+k}{k} \right\} = \frac{e}{e-1} \left[-1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)} \binom{n+k}{k-1}\right] =$$

$$= \frac{e}{e-1} \left[-1 + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k-1}{k-1}\right] = \frac{e}{e-1} T_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

aus dieser Rekursionsformel entsteht allgemein

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+k}{k} = \frac{e}{(e-1)^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

5. Wir überprüfen nun auch noch direkt die Orthogonalität der Polynome (13) und verwenden die dazu nötigen Entwicklungen zur Normierung der Polynome.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir im folgenden $\nu > \mu$ an. Indem wir die partielle Summation (7) wieder sukzessive auf die Orthogonalitätsbedingungen (12) anwenden, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+\alpha}{n} y_{\nu n}^{(\alpha)} y_{\mu n}^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{\nu} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] y_{\mu n}^{(\alpha)} =$$

$$= \left\{ \Delta^{\nu-1} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] y_{\mu n}^{(\alpha)} - \Delta^{\nu-2} \left[e^{-(n+1)} \binom{n+\alpha+1}{n-\nu+1}\right] \Delta\, y_{\mu n}^{(\alpha)} + - \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\nu-1} e^{-(n+\nu-1)} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} \Delta^{\nu-1} y_{\mu n}^{(\alpha)} \right\}_0^{\infty} + (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} \Delta^{\nu} y_{\mu n}^{(\alpha)}. \tag{19}$$

Die in der geschlungenen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können als Summen dargestellt werden

$$\Delta^{\nu-j-1} \left[e^{-(n+j)} \binom{n+\alpha+j}{n-\nu+j}\right] = e^{-(n+j)} \sum_{k=0}^{\nu-j-1} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{n+\alpha+j+k}{n-1} \binom{\nu-j-1}{k},$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1,$$

die sowohl für $n = 0$ als auch für $n = \infty$ verschwinden. Außerdem sind alle $\Delta^{\nu} y_{\mu n}^{(\alpha)}$ wegen $\nu > \mu$ null, es verschwindet also auch die letzte Summe und die Orthogonalität (12) ist für $\nu > \mu$ bewiesen. Nehmen wir von vornherein $\nu < \mu$ an und stellen $y_{\mu n}^{(\alpha)}$ als Differenz dar, dann folgt ebenso die Orthogonalität für $\nu < \mu$.

Zur Normierung berechnen wir die ν-te Differenz $\Delta^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}$, indem wir für $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ die Darstellung (15) verwenden. Dann enthält nur ein Glied n im Grad ν und liefert daher allein einen Beitrag zur ν-ten Differenz:

$$\Delta^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \Delta^{\nu} \left[\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{\nu}{k} \binom{n+\alpha+k}{n}\right] = \Delta^{\nu} \left[\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{n}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \frac{1}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)} \Delta^{\nu} \left[(n+\alpha+\nu) \ldots (n+\alpha+1)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{\nu} \frac{\nu!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\nu)}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und nach (3) und (13)

$$\Delta^0 y_{on}^{(\alpha)} = 1.$$

Setzen wir in (19) $\nu = \mu$, so verschwinden ebenfalls alle Glieder in der geschlungenen Klammer. Nur die Summe liefert einen von null verschiedenen Beitrag, den wir unter Anwendung der Formel (18) berechnen können; so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+\alpha}{n} [y_{\nu n}^{(\alpha)}]^2 = (-1)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\nu)} \binom{n+\alpha+\nu}{n} \Delta^\nu y_{\nu n}^{(\alpha)} =$$

$$= \frac{\nu!\, e^{\alpha+\nu+1} (1/e - 1)^\nu}{(\alpha+1) \dots (\alpha+\nu)\, e^\nu (e-1)^{\alpha+\nu+1}} = \frac{1}{\binom{\alpha+\nu}{\nu} \cdot (e-1)^{\alpha+1} e^{\nu-\alpha-1}} = \tau_\nu;$$

die normierten Polynome $r_{\nu n}^{(\alpha)}$ haben die Gestalt:

$$r_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n}}\, y_{\nu n}^{(\alpha)}}{\sqrt{\tau_\nu}} = e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \cdot (e-1)^{\alpha+1} e^{\nu-\alpha-1}}\, y_{\nu n}^{(\alpha)},$$

$$\nu, n = 0, 1, 2, \dots, \alpha > 0. \tag{20}$$

§ 2. Beziehungen zwischen den Polynomen

1. Erzeugendes Polynom. — 2. Rekursionsformel bezüglich ν. — 3. Summenformel von *Christoffel*. — 4. Differenzengleichung für die Polynome. — 5. Summenabschätzung analog der Integralabschätzung von *Kogbetliantz*.

1. In diesem Paragraphen werden ausschließlich die nicht normierten Polynome $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ verwendet.

Bilden wir mit einer beliebigen, nicht negativen ganzen Zahl z

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}$$

und ersetzen $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ nach Formel (15), § 1, so erhalten wir durch Summenvertauschung

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} \frac{(-1)^\nu \binom{z}{\nu}}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n+\alpha+k}{n} \binom{\nu}{k} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{z} \binom{n+\alpha+k}{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \sum_{\nu=k}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \binom{\nu}{k}.$$

Für jedes nicht negative ganzzahlige z und k gilt[9]

$$\sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \binom{\nu}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } z \neq k \\ (-1)^k & \text{für } z = k \end{cases}$$

[9] Siehe etwa [7], S. 255.

und daher bleibt nur das letzte Glied übrig. Wir erhalten so als **erzeugendes Polynom**

$$\varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{\binom{n+\alpha+z}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^z, \quad z, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

2. Aus diesem erzeugenden Polynom (1) soll eine Rekursionsformel für die $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ bezüglich ν hergeleitet werden. Dazu bilden wir von φ_{nz} die Differenz bezüglich z

$$\Delta \varphi_{nz} = \varphi_{n,z+1} - \varphi_{nz},$$

indem wir für φ_{nz} einmal die Summe und einmal das Polynom aus (1) verwenden. So finden wir einerseits

$$\Delta \varphi_{nz} = \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \binom{z}{\nu-1} y_{\nu n}^{(\alpha)} \tag{2}$$

und andrerseits

$$\Delta \varphi_{nz} = \varphi_{nz} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{n + \alpha + z + 1}{\alpha + z + 1} - 1\right],$$

welche Beziehung wir zur folgenden Herleitung besser

$$(\alpha+z+1)\, \Delta \varphi_{nz} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} \cdot \left[n\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{\alpha}{e} - \frac{1}{e}(z+1)\right] \tag{3}$$

schreiben. Wir setzen nun (2) in (3) ein und formen die Glieder mit dem Faktor $(z + 1)$ um

$$(z+1) \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \binom{z}{\nu-1} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{z+1} (-1)^\nu \nu \left[\binom{z}{\nu} + \binom{z}{\nu-1}\right] y_{\nu n}^{(\alpha)},$$

$$\frac{(z+1)}{e} \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \frac{(\nu+1)}{e} \left[\binom{z}{\nu+1} + \binom{z}{\nu}\right] y_{\nu n}^{(\alpha)}.$$

Treffen wir außerdem noch die Festlegung $y_{-1,n}^{(\alpha)} = 0$, so erhalten wir

$$\sum_{\nu=0}^{z} (-1)^\nu \binom{z}{\nu} \left\{(\alpha + \nu + 1)\, y_{\nu+1,n}^{(\alpha)} - \left[\nu + \frac{\nu+1}{e} + \frac{\alpha}{e} - n\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right] y_{\nu n}^{(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{e}\, y_{\nu-1,n}^{(\alpha)}\right\} = 0, \qquad z, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) gilt für alle nicht negativen ganzzahligen z, wir setzen daher sukzessive $z = 0, 1, 2, \ldots$. Damit die Gleichung (4) für $z = 0$ erfüllt ist, muß der Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit $\nu = 0$ verschwinden. Damit die Gleichung (4) für $z = 1$ erfüllt ist, muß der Ausdruck in der geschlungenen Klammer mit $\nu = 1$ ver-

schwinden, da der erste Ausdruck mit $\nu=0$ bereits null ist. So weiter schließend sieht man, daß für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ die **Rekursionsformel**

$$(\alpha+\nu+1)\, y^{(\alpha)}_{\nu+1,n} - \left[\frac{1}{e}(\alpha+n+\nu+1)+\nu-n\right] y^{(\alpha)}_{\nu n} + \frac{\nu}{e}\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}=0 \quad (5)$$

gilt.

3. Wir multiplizieren die Rekursionsformel (5) mit $\dfrac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu m}$ und erhalten

$$\left[\frac{1}{e}(\alpha+n+\nu+1)+\nu-n\right]\frac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!}{\nu!}\, e^{\nu}\, y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} + \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu-1)!}\, e^{\nu-1}\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}\, y_{\nu m}, \qquad \nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vertauscht man in dieser Formel n und m und zieht die so entstehende Beziehung von der ursprünglichen ab, so findet man

$$\frac{(\nu+\alpha)!}{\nu!}\, e^{\nu}(m-n)\left(1-\frac{1}{e}\right) y^{(\alpha)}_{\nu n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!}{\nu!}\, e^{\nu}\left[y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu+1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right] + \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu-1)!}\, e^{\nu-1}\left[y^{(\alpha)}_{\nu-1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu-1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right].$$

Summiert man dann diesen Ausdruck über ν, so entfallen rechts vom Gleichheitszeichen alle bis auf das letzte Glied und es bleibt

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(k+\alpha)!}{k!}(e-1)\, e^{k-1}\, y^{(\alpha)}_{k,n}\, y^{(\alpha)}_{k,m} = \frac{(\nu+\alpha+1)!\, e^{\nu}}{\nu!(m-n)}\left[y^{(\alpha)}_{\nu+1,n}\, y^{(\alpha)}_{\nu m} - y^{(\alpha)}_{\nu+1,m}\, y^{(\alpha)}_{\nu n}\right] \qquad \nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (6)$$

eine Beziehung, die der Summendarstellung von *Christoffel* ([4], S. 277) entspricht[10].

4. In diesem 4. Punkt, in dem wir eine Differenzengleichung der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ herleiten wollen, werden wir unter den Differenzen immer solche bezüglich n verstehen.

Bilden wir unter Verwendung der Darstellung (15), § 1 die Differenz

$$\Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu n} = y^{(\alpha)}_{\nu,n+1} - y^{(\alpha)}_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{k}{n+\alpha+1}\,\frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{\nu}{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{k-1}\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+1+k-1}{n}}{\binom{n+\alpha+1}{n}}, \quad (7)$$

[10] Für nicht ganzzahlige α ist das Fakultätszeichen in üblicher Weise durch die Gammafunktion erklärt: $\alpha! = \Gamma(\alpha+1)$.

so entspricht das der Formel

$$\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = -\frac{\nu}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{e}\right) y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha+1)}. \tag{7'}$$

Auf ähnliche Art und Weise können viele weitere Formeln zusammengesetzt werden, wie z. B.

$$\Delta[(\nu-1)\, y_{\nu n}^{(\alpha)} - \nu . y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}] = \frac{\nu(\nu-1)\,(n+\alpha+2)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)}\left(\frac{1}{e}-1\right)^2 y_{\nu-2,\,n}^{(\alpha+2)}. \tag{8}$$

Wir brauchen aber zur Herleitung einer Differenzengleichung, die der für die Laguerreschen Polynome geltenden Differentialgleichung entspricht, Beziehungen, bei denen sich α nicht ändert. So kann man zusammensetzen

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} - y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu-1}{k-1}\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\, k.\left(\frac{1}{e}-1\right)^k \frac{\binom{n+\alpha+k}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}}$$

und das ist bis auf den Faktor $\dfrac{n+\alpha+1}{\nu}$ gerade die zweite Summe in (7); also gilt

$$(n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = \nu\,[y_{\nu n}^{(\alpha)} - y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}]. \tag{9}$$

Eine weitere Beziehung dieser Art können wir mit Hilfe der Rekursionsformel (5) finden. Neben (9) gilt für $\nu+1$

$$(n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} = (\nu+1)\,[y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} - y_{\nu n}^{(\alpha)}]. \tag{9'}$$

Aus (9) und (9') berechnen wir

$$y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)} = y_{\nu n}^{(\alpha)} + \frac{n+\alpha+1}{\nu+1}\,\Delta\, y_{\nu+1,\,n}^{(\alpha)},$$

$$\nu . y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \nu . y_{\nu n}^{(\alpha)} - (n+\alpha+1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)}$$

und setzen diese Ausdrücke in die Rekursionsformel (5) ein, so entsteht neben (9) als zweite Beziehung

$$\nu\,.\,\Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} - e(\alpha+\nu)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} = \nu(e-1)\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Zuletzt muß der in den beiden Formeln (9) und (10) noch auftretende Index $\nu-1$ beseitigt werden. Zu diesem Zweck bilden wir aus (9) durch nochmalige Differenzenbildung

$$(n+\alpha+2)\,\Delta^2 y_{\nu n}^{(\alpha)} - (\nu-1)\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)} + \nu . \Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = 0 \tag{11}$$

und schließlich durch Elimination von $y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)}$ aus (9) und (10)

$$\nu\,\Delta\, y_{\nu-1,\,n}^{(\alpha)} = \nu .(e-1)\, y_{\nu n}^{(\alpha)} + [e(\nu-n-1)+n+\alpha+1]\,\Delta\, y_{\nu n}^{(\alpha)}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) können wir wieder $\nu . \Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu-1,\,n}$ eliminieren und erhalten dann

$$(n+\alpha+2)\,\Delta^2 y^{(\alpha)}_{\nu n} + [(n+\alpha+2) + \nu(e-1) - e(\nu+1)]\,\Delta\, y^{(\alpha)}_{\nu n} + \\ + \nu(e-1)\, y^{(\alpha)}_{\nu n} = 0, \qquad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

als **Differenzengleichung** der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$.

5. In diesem letzten Punkt werden wir eine Beziehung zwischen den Polynomen $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ und $y^{(\beta)}_{\nu n}$ beweisen, die der Integralformel von *Kogbetliantz* bei den Laguerreschen Polynomen ([4], S. 278) analog ist und bei der Abschätzung der Polynome $y^{(\alpha)}_{\nu n}$ Verwendung finden wird.

Wir behaupten, daß für $\alpha > \beta\ (\beta \geqq 0)$ die Beziehung

$$y^{(\alpha)}_{\nu n} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta}{k}\, y^{(\beta)}_{\nu k} \tag{14}$$

gilt. Zum Beweise schreiben wir $y^{(\beta)}_{\nu k}$ ausführlich unter Verwendung der Darstellung (15), § 1 und vertauschen die endlichen Summen

$$\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^i \binom{k+\beta+i}{k} =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^i \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta+i}{k}.$$

Nun ist aber[11]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-\beta-1}{n-k} \binom{k+\beta+i}{k} = \binom{n+\alpha+i}{n}$$

und in der vorhergehenden Gleichung steht rechts gerade die Darstellung (15), § 1 für $y^{(\alpha)}_{\nu n}$.

§ 3. Vollständigkeit und Abschätzung der Polynome

1. Orthogonalität der Spaltenvektoren. — 2. Abschätzungen.

1. Nach den Ausführungen des § 1 sind für die aus den normierten Polynomen (20), § 1 gebildeten Zeilenvektoren die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{(\alpha)}_{\nu n}\, r^{(\alpha)}_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{1}$$

erfüllt.

Wir zeigen nun, daß diese Orthogonalitätsbedingungen auch für die Spaltenvektoren (aus den normierten Polynomen)

[11] Kann ebenfalls aus der Formel in Anmerkung 7 gefolgert werden.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)}\, r_{\nu m}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \tag{2}$$

erfüllt sind. Dann gilt nach den Entwicklungen in I der

Satz 9: *Die mit den Elementen $r_{\nu n}^{(\alpha)}$ gebildete unendliche Matrix ist im Sinne der Definition* 1 *aus* I *für jedes $\alpha > 0$ eine unendliche orthogonale Matrix; das System der Zeilen- und Spaltenvektoren ist dann nach Satz* 1 *und* 6 *abgeschlossen und vollständig.*

Beweis: Zur Unterscheidung der Differenzen bezüglich n und ν schreiben wir unter das Differenzenzeichen die Größe, auf die sich die Differenzenbildung bezieht. Wir stellen zunächst $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ als Differenz bezüglich ν dar

$$\begin{aligned} y_{\nu n}^{(\alpha)} &= \frac{e^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \underset{(n)}{\Delta^{\nu}} \left[e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \left[e^{-\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{n} - e^{-\nu+1} \binom{\nu}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{n-1} + \ldots + (-1)^{\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{1}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \left[e^{-\nu} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} - e^{-\nu+1} \binom{n}{1} \binom{n+\alpha+\nu-1}{\nu-1} + \ldots + (-1)^{n} \binom{\alpha+\nu}{\nu-n} e^{n-\nu}\right] = \\ &= \frac{e^n}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \underset{(\nu)}{\Delta^{n}} \left[e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Gehen wir analog dem Punkt 3, § 1, vor, so können wir aus dieser Differenz bezüglich ν drei weitere Summendarstellungen für $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ bilden

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}(-1)^n}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-k} \binom{n}{k} \binom{\nu+\alpha+k}{\nu+k-n}, \tag{4}$$

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^k \binom{n}{k} \binom{\alpha+\nu+k}{\nu}, \tag{5}$$

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{e^{n-\nu}}{\binom{\nu+\alpha}{\nu}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e} - 1\right)^{n-k} e^{-k} \binom{n}{k} \binom{\alpha+\nu}{\nu+k-n}, \tag{6}$$

die (14), (15) und (16) in § 1 entsprechen.

Zum Beweise der Orthogonalität der Spaltenvektoren nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $m < n$ an und führen in die Orthogonalitätsbedingungen (2) die Differenzendarstellung (3) ein

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)}\, r_{\nu m}^{(\alpha)} = \underbrace{e^{\frac{n-m}{2}} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n}\binom{m+\alpha}{m}} \left(\frac{e-1}{e}\right)^{\alpha+1}}_{M} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu}\, y_{\nu m}^{(\alpha)} \underset{(\nu)}{\Delta^{n}} \left[e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}\right].$$

Auf diese Differenz wenden wir wieder sukzessive die partielle Summation (7), § 1 an und erhalten

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu n}^{(\alpha)} r_{\nu m}^{(\alpha)} = M\{e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)} \underset{(\nu)}{\Delta^{n-1}} [e^{-\nu} \binom{\nu+\alpha}{\nu-n}] - \underset{(\nu)}{\Delta} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}] \underset{(\nu)}{\Delta^{n-2}} [e^{-(\nu+1)} \binom{\nu+\alpha+1}{\nu-n+1}]$$
$$+ - \ldots + (-1)^{n-1} e^{-(\nu+n-1)} \binom{\nu+\alpha+n-1}{\nu-1} \underset{(\nu)}{\Delta^{n-1}} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}]\}_{\nu=0}^{\nu=\infty} +$$
$$+ M.(-1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{\nu+\alpha+n}{\nu} \underset{(\nu)}{\Delta^n} [e^{\nu} y_{\nu m}^{(\alpha)}]. \qquad (7)$$

Die in der geschlungenen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können mit Hilfe der Beziehung (5) als Summen dargestellt werden

$$\underset{(\nu)}{\Delta^{n-j-1}} [e^{-(\nu+j)} \binom{\nu+j+\alpha}{\nu+j-n}] = e^{-(\nu+j)} \sum_{k=0}^{n-j-1} (\frac{1}{e} - 1)^k \binom{\alpha+\nu+k+j}{\nu-1} \binom{\nu-j-1}{k},$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

die sowohl für $\nu = 0$ als auch für $\nu = \infty$ verschwinden. Außerdem verschwinden alle n-ten Differenzen in der Summe von (7), denn nach Voraussetzung gilt $m < n$. Ebenso kann man für $n < m$ schließen und die Orthogonalität der Spaltenvektoren ist bewiesen.

Zum Beweise, daß es sich um ein *normiertes* Orthogonalsystem handelt, setzen wir in (7) $n{=}m$. Es verschwinden ebenso alle Ausdrücke in der geschlungenen Klammer, nur die Summe über die n-ten Differenzen von $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ ist von null verschieden. Diese n-ten Differenzen (bezüglich ν) können wir unter Verwendung der Darstellung (4) leicht berechnen

$$\underset{(\nu)}{\Delta^n} [e^{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)}] = \frac{(1-e)^n}{\binom{n+\alpha}{n}};$$

daraus erhalten wir durch Anwendung der Formel (18) aus § 1:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} = (\frac{e}{e-1})^{\alpha+1} \frac{1}{(e-1)^n}$$

und schließlich für jedes n ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu m}^2 = \binom{n+\alpha}{n} (\frac{e-1}{e})^{\alpha+1} \frac{(e-1)^n}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(\nu+n)} \binom{n+\alpha+\nu}{\nu} = 1.$$

2. **Satz 10:** *Für die Polynome $y_{\nu n}^{(\alpha)}$ gelten die Abschätzungen*

$$|y_{\nu n}^{(\alpha)}| \leqq \frac{e.\alpha\sqrt{e^n-1}}{(e-1)(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu}}} \leqq \frac{\sqrt{2e}.\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e-1}} e^{\frac{n-\nu}{2}} \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad (8)$$

$$\left| y_{\nu n}^{(0)} \right| \leqq \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e-1}} e^{\frac{n-\nu}{2}} \qquad \text{für } \alpha = 0, \tag{9}$$

$$\nu, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Beweis: Die in (14), § 2 angegebene Summenformel (*Kogbetliantz*) hat für $\beta = 0$ die Form

$$y_{\nu n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} y_{\nu k}^{(0)}, \qquad \alpha > 0. \tag{10}$$

Beachten wir den Zusammenhang zwischen normierten und nicht normierten Polynomen (20), § 1

$$y_{\nu k}^{(0)} = \frac{e^{\frac{k}{2}} r_{\nu k}^{(0)}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}}$$

und die für jedes k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) geltende Abschätzung

$$\frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{(n-k+\alpha-1)(n-k+\alpha-2)\ldots\alpha}{(n+\alpha)\ldots(\alpha+1)} \leqq \frac{\alpha}{n+\alpha},$$

dann können wir durch Anwendung der *Schwarzschen Ungleichung* auf (10) abschätzen

$$\left| y_{\nu n}^{(\alpha)} \right| = \left| \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} y_{\nu k}^{(0)} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left| \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{k}{2}} r_{\nu k}^{(\cdot)} \right| \leqq \frac{\alpha}{(n+\alpha)\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left[\sum_{k=0}^{n} e^{k}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{\nu k}^{(0)2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Einsetzen von

$$\sum_{k=0}^{n} e^{k} = \frac{e^{n+1}-e}{e-1} < 2\,e^{n} \tag{11}$$

in diese Abschätzung folgt gerade (8).

Ähnlich folgt (9) aus

$$\left| y_{\nu n}^{(\cdot)} \right| = \frac{\left| r_{\nu n}^{(0)} \right| e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \leqq \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{e^{\nu-1}(e-1)}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{\nu k}^{(0)2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Literatur

[1] *W. Gröbner*: Matrizenrechnung, München, Verlag R. Oldenbourg, 1956.
[2] *F. G. Tricomi*: Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

[3] *W. Schmeidler*: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

[4] *G. Vitali e G. Sansone*: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bologna, Nicola Zanichelli editore, 1946, parte II.

[5] *W. Gröbner*: Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni, Sem. Mat. Roma, 3 (4), 29—51, 1939.

[6] *W. Gröbner*: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Monatshefte für Mathematik **52**, 38—54, 1948.

[7] *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig, Verlag Teubner, 1901.

[8] *G. Szegö*: Orthogonal Polynomials, New York, American Mathematical Society. 1939.

Buchbesprechungen

Opere. Band VIII: Classi speciali di superficie; Band IX: Geometria degli spazi di Riemann; Band X: Richerche varie. Von *L. Bianchi.* 398, 263, 78 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Band VIII: Lire 3500.—, Band IX und X: Lire 3500.—.

Die vorliegenden Bände VIII bis X der Werke *Bianchis* enthalten differentialgeometrische Arbeiten, und zwar Band VIII über spezielle Flächenklassen, Band IX über Riemannsche Geometrie und Band X über verschiedene Themen, insbesondere über den Parallelismus von *Levi-Civita.* Den einzelnen Bänden sind (wie bei den vorher erschienenen) kurze Inhaltsangaben über die aufgenommenen Publikationen vorangestellt, die von *M. Villa, A. Maxia* und *P. Tortorici* verfaßt sind und eine bequeme und rasche Orientierung ermöglichen. Insgesamt umfassen die drei Bände 41 Arbeiten aus den Jahren 1887 bis 1927.

K. Mayrhofer, Wien

Opere. Band II. Von *C. Segre.* A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Richerche. XVIII, 438 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 4000.—.

Dieser zweite Band der Werke von *C. Segre* bringt seine durchwegs projektiv gehaltenen Arbeiten über Differentialgeometrie, ferner seine umfangreichen Untersuchungen über die geometrische Repräsentation komplexer Gebilde, darunter die Abhandlung „Projektive Geometrien im Bereiche der dualen Zahlen". Die insgesamt 19 abgedruckten Arbeiten sind aus den Jahren 1886 bis 1924.

K. Mayrhofer, Wien

Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band III: Analysis. Redigiert von *P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch* und *A. J. Chintschin.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 9.) Mit 158 Textabb., IX, 536 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. DM 30.—.

Für die Lehramtskandidaten ist es wesentlich, die Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus zu übersehen und zu begreifen. Zwischen dem Mathematikunterricht an Mittelschulen und an Hochschulen muß ein inniger Zusammenhang bestehen. Bedauerlicherweise ist manchmal eine Kluft vorhanden, und es ist daher die von Sowjetmathematikern herausgegebene und nun ins Deutsche übersetzte Enzyklopädie der Elementarmathematik von hohem Wert. Band III behandelt Probleme der Analysis, und zwar elementare Funktionen, Grenzwerte, allgemeiner Funktionsbegriff, Reihen, Differential- und Integralrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen und eine Einführung in die Funktionentheorie. Wenn auch diese nicht in der Schule gelehrt werden kann, so ist sie doch für die Lehrer notwendig, um die elementaren Funktionen gründlich zu verstehen. Die Darstellung ist sehr breit und leicht verständlich. Das Buch enthält viele Beispiele und zahlreiche methodische Bemerkungen. Stets wird auf die

enge Verbindung der abstrakten logischen Seite mit der numerischen Seite Wert gelegt. Die Artikel stammen von *W. L. Gontscharow* und *I. P. Natanson.*

N. Hofreiter, Wien

Taschenbuch der Mathematik, für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen. Von *I. N. Bronstein* und *K. A. Semendjajew.* Mit 427 Textabb., XII, 548 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. DM 22.50.

Vorbild wird wohl die „Hütte", des Ingenieurs Taschenbuch gewesen sein. Das vorliegende Buch beschränkt sich aber auf Mathematik und ist eine Übersetzung der sechsten russischen Auflage. Es bringt Tabellen, graphische Darstellungen, Algebra, Elementargeometrie, Analytische Geometrie und Differentialgeometrie, eine ausführliche Einführung in die reelle Analysis, ferner Differential- und Integralrechnung, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Vektoralgebra und Vektoranalysis, und eine kurze Einführung in die Funktionentheorie, die Variationsrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inhaltlich stimmt das Werk weitgehend mit der „Hütte" überein, ist aber mehr als doppelt so umfangreich. Dies kommt daher, weil es viel mehr Theorie bringt und viel ausführlicher geschrieben ist. Der Druck ist leider sehr klein. Die Übungsaufgaben könnten meiner Meinung nach in einem Nachschlagewerk wegbleiben. Das Literaturverzeichnis legt bestimmt keinen Wert auf Vollständigkeit. Es sei aber doch erlaubt, auf die Integraltafeln (I, Unbestimmte Integrale; II, Bestimmte Integrale) von *W. Gröbner* und *N. Hofreiter*, herausgegeben im Springer-Verlag, Wien, 2. Auflage 1957 bzw. 1958, ergänzend hinzuweisen. — Zusammenfassend kann gesagt werden: Das Taschenbuch ist den Ingenieuren, Mathematikern und Physikern ein sehr brauchbares und handliches Nachschlagewerk, das bald weite Verbreitung finden wird. *N. Hofreiter*, Wien

Treizième Congrès des Mathématiciens Scandinaves. Tenu à Helsinki 18—23 Août 1957. Mit Textabb., 209 S. Helsinki: Mercators Tryckeri. 1958.

Das Buch enthält die Auszüge von 22 Vorträgen in deutscher, englischer oder französischer Sprache. Die Themen gehören allen Gebieten der Mathematik an. Die Berichte zeugen von dem hohen Stand, den die Mathematik in den skandinavischen Ländern erreicht hat. *N. Hofreiter*, Wien

Combinatory Logic. Band I. Von *H. B. Curry* und *R. Feys*, mit zwei Abschnitten von *W. Craig.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XVI, 417 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1958. hfl. 42.—.

Den Grundstein zum Gebäude der kombinatorischen Logik legte *M. Schönfinkel* im Jahre 1924. Seither haben verschiedene Forscher daran gebaut; vor allem sind hier zu erwähnen *H. B. Curry* — einer der Autoren dieses Buches — und *A. Church.* Dadurch ist dieses Gebäude zu einer imposanten Größe angewachsen, und die kombinatorische Logik ist heute eines der wichtigsten Teilgebiete der mathematischen Logik geworden.

Das vorliegende Buch ist der erste Band einer großangelegten Monographie, welche in zwei Bänden das ganze Gebiet systematisch behandeln soll. In wohldurchdachter, ausführlicher und in sich geschlossener Darstellung wird die Theorie von Anfang an entwickelt; viele der Untersuchungen und Resultate des Buches sind neu. Zahlreiche historische Anmerkungen und Literaturhinweise ergänzen den Text. Vor allem beschäftigt sich dieser Band mit der „reinen" (pure) kombinatorischen Logik, welche die formalen Beziehungen der Kombinatoren zueinander untersucht. Es werden sowohl der λ-Formalismus von

A. Church als auch die synthetische Theorie der Kombinatoren eingehend dargestellt und die Äquivalenz dieser beiden Theorien bewiesen. In den drei letzten Kapiteln jedoch werden die Anfangsgründe der „folgernden" (illative) kombinatorischen Logik behandelt, in welcher den Kombinatoren „Bedeutungen" zugeschrieben werden.

Es ist zu hoffen, daß auch der zweite Band in nicht allzu ferner Zeit erscheinen und diese so erfolgreich begonnene Gesamtdarstellung der kombinatorischen Logik zum Abschluß bringen wird. *W. Nöbauer*, Wien

Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Von *K. Menninger*. Mit 294 Textabb., 314 S. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. DM 40.—.

Gegenüber der ersten Auflage (1934) liegt hier eine Neubearbeitung vor, erweitert durch neuen Stoff, neue Einsichten und neue Bilder. Die Zahlen im Zählen und Rechnen der Völker erfahren hier eine entwicklungsgeschichtliche Darstellung von solcher Ausführlichkeit, Anschaulichkeit und Lebendigkeit, daß das Buch den Mathematikern und einem breiten Kreis kultivierter Leser sehr empfohlen werden kann. Das Buch setzt einen Verfasser voraus, der nicht nur in der Geschichte der Mathematik, sondern auch philologisch bewandert ist. Nicht von Mathematik im engeren Sinne handelt dieses Buch, es zeigt vielmehr, wie Zahlwörter, Zahlzeichen und Zahlenrechnen sich in der Geschichte der Völker entwickelt haben. Da gibt es wie auf anderen Gebieten gerade Entwicklungen, aber auch Fehlentwicklungen und abgestorbene Zweige der Entwicklung.

Im ersten Band lesen wir, wie die Zahlwörter bei verschiedenen Völkern nach sehr verschiedenen Grundsätzen gebildet werden (vor allem Stufungen nach 5, 10 und 20 Einheiten, aber auch nach 12 und 60 Einheiten, unter babylonischem Einfluß) und wie aus indogermanischen und anderen Zahlwörtern von heute und einst die Entwicklung des Zählens erschlossen werden kann. Daß die Zahlreihe überhaupt unbegrenzt fortgesetzt werden kann, ist eine erst spät auftretende Erkenntnis bei den Indern und bei *Archimedes* (Sandrechnung). Der zweite Band bringt zunächst Fingerzahlen und Fingerrechnen bei verschiedenen Völkern, dann verschiedene Arten von Zahlzeichen, die Zahlschriften der Goten, der Griechen, der Römer und den Siegeszug der indischen Stellenschrift über Arabien nach Europa, aber auch die seltsamen Zahlsprachen und Zahlschriften des Fernen Ostens. Sehr interessant sind auch die Abschnitte über verschiedene Rechenbretter bei Griechen und Römern, im Mittelalter, in Rußland, China und Japan.

Übersichtliche Zusammenfassungen und Zeittafeln, ein reichhaltiges Verzeichnis des Schrifttums und ein verläßliches Sachverzeichnis erleichtern dem Leser das Eindringen in das umfangreiche Gebiet. *F. Hohenberg*, Graz

Matrizenrechnung. Teil I: Allgemeine Theorie. Von *F. R. Gantmacher*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 36.) Mit 5 Textabb., XI, 324 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 26.80.

Vergleicht man die zahlreichen Lehrbücher über lineare Algebra, so erkennt man sofort, daß das vorliegende Buch auf hohem Niveau geschrieben ist. Vom Leser wird die Determinantentheorie als bekannt vorausgesetzt. Das Ziel ist, die Probleme der Matrizentheorie wie auch ihre mannigfachen Anwendungen umfassend darzustellen. Band I bringt die allgemeine Theorie, während Band II

viele Anwendungen enthalten wird. Die ersten 5 Kapitel umfassen die Grundlagen und einige Anwendungen. Sie bringen eine Einführung in die Matrizenrechnung, den Gaußschen Algorithmus (Eliminationsmethode) mit praktischen Anwendungen, lineare Operatoren im n-dimensionalen Vektorraum, Eigenwertprobleme, charakteristisches Polynom, Minimalpolynom und Matrizenfunktionen. Kapitel VI und VII bringen zwei unabhängige Darstellungen der Elementarteilertheorie; die eine baut auf der Äquivalenz von Polynommatrizen auf (analytische Theorie), während die zweite von Struktureigenschaften linearer Operatoren ausgeht (geometrische Theorie). Kapitel VIII handelt von einigen Typen von Matrizengleichungen, z. B. $AX = XB$, $X^m = A$, $e^X = A$. Die Auflösung erfolgt mit Hilfe der Elementarteilertheorie. Im Kapitel IX werden Eigenschaften der linearen Operatoren untersucht, die mit der Metrik des Raumes zusammenhängen. Ganz naturgemäß ergeben sich damit spezielle Klassen von Matrizen (normale, hermitische, unitäre, symmetrische, schiefsymmetrische, orthogonale Matrizen). Kapitel X handelt von quadratischen Formen, hermitischen Formen und Hankelschen Formen. Als Anwendungen werden kleine Schwingungen von Systemen mit n Freiheitsgraden gebracht. *N. Hofreiter*, Wien

Elementy Algebry Wyzszej. Von *A. Mostowski* und *M. Stark*. (Biblioteka Matematyczna: Tom 16.) 368 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Ceny zl. 32.—.

Dies ist eine breit geschriebene sehr elementare Einführung in die Algebera mit Ausschluß der Galoisschen Theorie. Auf die Begriffe der abstrakten Algebra wird im Hinblick darauf teilweise verzichtet, daß das Buch auch für Studenten des ersten Jahres leicht lesbar sein soll. In den ersten drei Kapiteln werden Dinge wie vollständige Induktion, Definition des Summen- und Produktzeichens, Kombinatorik, polynomischer Lehrsatz, sowie die Eigenschaften der reellen und komplexen Zahlen auseinandergesetzt. Dann folgen zwei Kapitel über Determinanten, lineare Vektorräume und Gleichungen. Kapitel 6 und 7 enthalten die algebraischen Eigenschaften der Polynome einer Veränderlichen, Interpolationsformeln, rationale Funktionen, sowie den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Es folgen Gleichungen mit einer Unbekannten bis zum vierten Grad und in einem weiteren Kapitel Reduzibilität von Polynomen sowie einiges über algebraische und transzendente Zahlen. Bei den im folgenden behandelten Polynomen mit mehreren Variablen und symmetrischen Funktionen finden sich z. B. auch die Tschirnhausentransformation und die Bring-Jerrardsche Normalform der Gleichung 5. Grades. In dem mit „Eliminationstheorie" überschriebenen Kapitel 11 wird auch der Satz von *Bézout* in seiner einfachsten Form hergeleitet. Das Schlußkapitel bringt die Theorie der quadratischen Formen und ein Anhang verschiedene spezielle Sätze über Determinanten und Matrizen, wie z. B. den Satz von *Cayley* und *Hamilton*.

Durch die ausführliche und geschickte Darstellung, welche noch durch anregende Übungsaufgaben ergänzt ist, werden dem Leser viele Dinge beigebracht, die er vielleicht anderwo mit mehr Mühe erarbeiten müßte. *K. Prachar*, Wien

Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique. Von *L. Derwidué*. 431 S. Paris: Masson et Cie, Liège: Sciences et lettres, 1957. Broché fr. 6000.—; Cartonné toile fr. 6600.—.

Das Buch unterscheidet sich von den üblichen Lehrbüchern der Algebra, weil es die praktische Seite viel mehr betont. Das zeigt schon der Anfang, wo das Rechnen mit Tischrechenmaschinen erklärt wird. Dann folgen komplexe

Zahlen. Es werden viel mehr Hilfsmittel der Analysis als sonst üblich herangezogen. Auf die Reinheit der algebraischen Methode wird ganz verzichtet. Inhaltlich ist das Buch sehr reich: Determinanten, lineare Gleichungssysteme, algebraische Gleichungen, Eliminationstheorie, lineare Substitutionen, quadratische Formen, Matrizenrechnung, Eigenwertprobleme, Elementarteilertheorie, Stabilitätskriterien und Gruppentheorie. Es wird einiges aus der Darstellungstheorie der Gruppen geboten, andererseits fehlen manche Beweise von grundlegenden Sätzen der Gruppentheorie. Von der Körpertheorie wird nur sehr wenig gebracht, die Galoische Theorie fehlt ganz. Besonders ausführlich werden die praktische Auflösung von linearen Gleichungssystemen, die praktische Auflösung von algebraischen Gleichungen und die praktische Ermittlung von Eigenwerten und -vektoren behandelt. Dazu wird eine große Anzahl von Methoden geboten und viele Beispiele werden vollständig durchgerechnet. Das Buch ist den Ingenieuren, Physikern und Mathematikern gewidmet. Es bietet ihnen viel Theorie auf knappem Raum und eine große Anzahl bewährter Rechenmethoden. *N. Hofreiter*, Wien

Lineare Algebra. Von *W. Graeub.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band XCVII.) Mit 7 Textabb., XI, 219 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 35.70, Gln. DM 39.—.

In diesem Buch wird die lineare Algebra von Grund auf entwickelt. Der modernen Betrachtungsweise dieses Gegenstandes entsprechend stehen im Mittelpunkt der Darstellung die Begriffe des linearen Raumes und der linearen Abbildung; der Verfasser hat es aber sehr gut verstanden, in der Abstraktion Maß zu halten, und hat sich auch nicht gescheut, auf Verfahren der praktischen Rechnung einzugehen. Der ganze Aufbau des Buches ist wohldurchdacht, und der Stil geradezu mustergültig, so daß der Leser beim Studium wenig Mühe aber großen Genuß haben wird; Vorkenntnisse wird er kaum benötigen; zahlreiche Übungsaufgaben geben ihm Gelegenheit, das Gelernte zu erproben und zu vertiefen. Alles in allem liegt hier ein Werk vor, das sich wirklich würdig in die klassische Tradition der „Gelben Sammlung" einfügt.

Die Auswahl und Anordnung des Stoffes geht aus dem Inhaltsverzeichnis hervor: Lineare Räume. Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme. Determinanten. Orientierte lineare Räume. Multilineare Algebra. Der Euklidische Raum. Lineare Abbildungen Euklidischer Räume. Symmetrische Bilinearfunktionen. Flächen zweiter Ordnung. Unitäre Räume. Invariante Unterräume. *W. Nöbauer*, Wien

Commutative Algebra. Band 1. Von *O. Zariski* und *P. Samuel*, unter der Mitarbeit von *I. S. Cohen.* (University Series in Higher Mathematics.) XI, 329 S. Princeton, N. J.-New York-London-Toronto: D. Van Nostrand Company. 1958. $ 6.95.

Unter den zahlreichen vorhandenen Büchern über Algebra wird dieses Werk eine durchaus eigenständige Stellung einnehmen, wie schon aus dem vorliegenden ersten Band zu erkennen ist. Die Verfasser rücken nämlich jene Zweige der Algebra in den Vordergrund, welche für ihr Hauptarbeitsgebiet, die algebraische Geometrie, von Bedeutung sind. Dieser erste Band beschäftigt sich vor allem mit der Idealtheorie der kommutativen Ringe, während der geplante zweite Bewertungstheorie Polynom- und Potenzreihenringe und lokale Algebra behandeln soll. Das Buch hat durchaus den Charakter eines Lehrbuches, denn es setzt kaum Vorkenntnisse voraus, und die Darstellung ist so breit, daß es leicht

und flüssig gelesen werden kann. Für den Fachmann wären an manchen Stellen Literaturhinweise erwünscht gewesen.

Im ersten Kapitel werden die fundamentalen Begriffe Gruppe, Ring, Körper, Polynomring, Vektorraum usw. eingeführt; bemerkenswert ist die ausführliche Behandlung der Quotientenringe. Das zweite Kapitel bringt die Grundlagen der Körpertheorie unter besonderer Berücksichtigung der transzendenten Erweiterungen und mit einer modernen Darstellung der Differentiationen. Das dritte Kapitel enthält die Theorie der Moduln und Ideale in kommutativen Ringen und behandelt schließlich auch die Begriffe des Tensorproduktes von Ringen und der freien Hülle von Integritätsbereichen. Das vierte Kapitel ist den Noetherschen Ringen gewidmet, während im fünften die Dedekindschen Ringe — welche definiert werden als Integritätsbereiche, in denen jedes Ideal Produkt von Primidealen ist — und ihre Erweiterungen ausführlich untersucht werden.

Inhalt und Form des ersten Bandes berechtigen uns, dem Erscheinen des zweiten mit Interesse und Erwartung entgegenzusehen. *W. Nöbauer*, Wien

Colloque d'Algèbre Supérieure, tenu a Bruxelles du 19 au 22 Décembre 1956. Herausgegeben von: Centre Belge de Recherches Mathématiques. 293 S. Louvain: Ceuterick. 1957. 250 francs belges.

Bei jenem Kolloquium, dessen Vorträge in dem Band wiedergegeben werden, sprachen folgende Damen und Herren: *M.-L. Dubreil-Jacotin* (über Reynolds-Transformationen), *P. Dubreil* (Halbgruppen), *W. Krull* (Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertegruppe), *L. Lesieur* und *R. Croisot* (Noethersche Theorie der Ringe, Halbgruppen und Moduln), *G. Higman* (Burnsidesches Problem), *M. Krasner* (Approximation von Körpern durch Körper der Charakteristik Null), *J. A. Green* (Polynome von Hall), *L. Lombardo-Radice* (algebraisch-geometrische Fragen in projektiven Ebenen), *P. Samuel* (lokale Algebra), *E. Witt* (quadratische Formen), *L. Waelbroeck* (Algebren von regulären Elementen), *J. Tits* (algebraische Analoga der halbeinfachen komplexen Gruppen). *W. Nöbauer*, Wien

A Survey of Binary Systems. Von *R. H. Bruck.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 20; Reihe: Gruppentheorie.) VIII, 185 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geh. DM 36.—.

Die ersten algebraischen Strukturen mit einer zweistelligen Operation, welche systematisch untersucht wurden, waren die Gruppen. Neben den Gruppen gibt es aber noch verschiedenen andere „binäre Systeme", über die in den letzten Jahren eine ausgedehnte Literatur entstanden ist und welche zum Teil auch für andere Gebiete der Mathematik von Bedeutung sind. Ein geschlossener Überblick über den gegenwärtigen Stand der Forschung bei diesen Systemen, wie er hier erstmalig gegeben wird, ist daher sehr willkommen. Naturgemäß ist schon wegen der großen Fülle des zu behandelnden Materials eine ausführliche Darstellung nicht immer möglich, wird jedoch auf den Teilgebieten gegeben, wo schon eine einigermaßen abgerundete Theorie vorliegt, wie etwa bei der Idealtheorie in Halbgruppen oder bei der Homomorphismentheorie der Loops. Von großem Wert ist auch das umfangreiche Literaturverzeichnis, das über 400 Arbeiten anführt.

Das Buch beginnt mit dem allgemeinsten binären System, dem Gruppoid. Ein Gruppoid mit eindeutiger Rechts- und Linksdivision heißt Quasigruppe, eine Quasigruppe mit Einheit heißt Loop. Die Theorie der Loops, wie sie hier

recht ausführlich behandelt ist, zeigt in ihren Begriffsbildungen und Sätzen eine große Ähnlichkeit mit der Theorie der Gruppen. Ein wichtiger Spezialfall der Loops sind die *Moufang*-Loops, welche durch das Erfülltsein der Identität $(xy)\,(zx) = [x(yz)]\,x$ gekennzeichnet sind; ihre Theorie, insbesondere die Theorie der kommutativen *Moufang*-Loops, wird ebenfalls ausführlich dargestellt. Ein Gruppoid, in dem das Assoziativgesetz erfüllt ist, heißt Halbgruppe; auch auf die Theorie der Halbgruppen wird ziemlich gründlich eingegangen.

Man kann sicherlich erwarten und hoffen, daß das Buch die weitere Forschung klärend, vereinheitlichend und richtungsweisend beeinflussen wird.

W. Nöbauer, Wien

Tables of Partitions. Von *H. Gupta, C. E. Gwyther* und *J. C. P. Miller*. (Royal Society Mathematical Tables: 4.) XXXIX, 132 S. Cambridge: At the University Press. 1958. £ 3. 3 s. net.

Dies sind Tafeln für die Anzahl $p(n, m)$ der Partitionen einer natürlichen Zahl n in höchstens m Teile, und Hilfstafeln für die Anzahlen $p_2(n, m)$ und $p_3(n, m)$ gewisser mit Gewichten versehener Partitionen. In einem Einführungskapitel werden die Zusammenhänge zwischen diesen und zahlreichen anderen Partitions-Anzahlen besprochen, z. B. der Anzahl der Partitionen in genau m Summanden, in Summanden, deren größter gerade $= m$ ist, in genau m ungleiche Summanden, usw. Für $n \leqslant 200$ wurde $p(n, m)$ für $1 \leqslant m \leqslant 100$ tabelliert und für $200 < n \leqslant 400$ mit $1 \leqslant m \leqslant 50$, wobei sich z. B. für $p(400, 50)$ eine 19stellige Zahl ergibt. Die Berechnungen wurden von zwei verschiedenen Rechenzentren durchgeführt und erscheinen daher besonders zuverlässig — ein Tafelwerk, für das man der Royal Society und den Verfassern zu besonderem Dank verpflichtet ist.

K. Prachar, Wien

Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen. Von *H. Brandt* und *O. Intrau*. (Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-naturwiss. Kl.: Band 45, Heft 4.) XVII, 261 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Brosch. DM 16.—.

Da die Tabellen der positiven ternären quadratischen Formen von *Seeber* und *Eisenstein* wenig umfangreich sind, so hat sich *O. Intrau* auf Anregung von *H. Brandt* der großen Mühe unterzogen, Tabellen herzustellen, die 36.000 Formen umfassen. Die Koeffizienten der positiven ternären quadratischen Formen werden als rational angenommen. Die Formen werden in üblicher Weise reduziert genannt, wenn das zugehörige Parallelgitter durch die ersten drei Minima erzeugt wird. Das Buch enthält alle reduzierten positiven ternären quadratischen Formen mit den Diskriminanten — 2 bis — 1000. Rechteckige Felder charakterisieren jede Ordnung und ihre Unterteilung in Geschlechter. Die Tabellen enthalten außerdem die Charaktere, die Maße der Geschlechter und die Stammdiskriminanten. Zu jeder Form wird die Anzahl der automorphen Substitutionen angegeben.

N. Hofreiter, Wien

Funktionentheorie. Von *H. Kneser*. (Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher: Band 13.) Mit 31 Textabb., 422 S. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht. 1958. Geb. DM 34.—.

Es mag bei dieser Darstellung des schon so oft in Lehrbüchern behandelten Gebietes besonders hervorgehoben werden, daß sie bei aller bequemen Lesbarkeit immer wieder verschiedene Gesichtspunkte heranzieht und so die vielseitige

Persönlichkeit des Verfassers erkennen läßt. So wird schon relativ früh der Weierstraßsche Vorbereitungssatz gezeigt, wie überhaupt die Funktionen mehrerer Variablen möglichst in die Darstellung einbezogen werden; so wird auch im Anhang der Cauchysche Integralsatz für mehrere Variable gebracht und ein anderer Beweis des Mittag-Lefflerschen Satzes so gegeben, daß er auf mehrere Variable übertragen werden kann.

Von den nicht zu den Grundbegriffen gehörigen Abschnitten möchte ich etwa den über die Riemannsche Zetafunktion, den über die gewöhnlichen und speziell über die hypergeometrischen Differentialgleichungen und bei der konformen Abbildung das Kapitel über die einfach zusammenhängenden Kreisbogenvielecke hervorheben. Im Anhang folgen dann noch Abschnitte über die Einzigkeit des komplexen Zahlensystems, die Zerlegung der Ebene durch einfach geschlossene Streckenzüge, die Eulersche Summenformel und ein Abschnitt über lineare Abbildungen von Vektorräumen.

Für die Studia Mathematica, in deren Rahmen dieses Werk erscheint, ist das Buch ein weiterer Gewinn, das man gern empfehlen wird. *H. Hornich*, Wien

The Taylor Series. An introduction to the theory of functions of a complex variable. Von *P. Dienes*. Mit 67 Textabb., X, 552 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 2.75.

Das Buch ist ein unveränderter Abdruck der ersten 1931 erschienenen Auflage. Es bringt eine Einführung in die Funktionentheorie auf der Grundlage von *Cauchy* und *Weierstraß*. Nach einer breiten Einleitung, in der die notwendigen Hilfsmittel aus der reellen Analysis bereitgestellt werden, werden unendliche Reihen ausführlich dargestellt. Entsprechend dem Aufbau von *Weierstraß* wird eine Funktion durch eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises definiert. Die Erweiterung erfolgt durch analytische Fortsetzung. Dann erst wird die komplexe Differentiation und die komplexe Integration gebracht. Vom Kapitel VIII an dringt das Buch tiefer in die Funktionentheorie ein. Es kommen: der Satz von *Picard*, der Abbildungssatz von *Riemann*, die Darstellung von Funktionen durch Reihen und Integrale, Untersuchungen von *Hadamard* über die Singularitäten von analytischen Funktionen, Überkonvergenz und ihr Zusammenhang mit Lücken nach *Ostrowski*, eine systematische Darstellung von divergenten Reihen, Verhalten von Funktionen in der Nähe des Konvergenzkreises, Zusammenhänge zwischen Divergenz und Singularitäten. Stets wird der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Koeffizienten der Potenzreihen und den Eigenschaften der Summenfunktion betont. Damit wird der reiche Inhalt nur angedeutet. Wenn das Buch kein ausgezeichnetes Werk wäre, hätte gewiß kein Neudruck nach 26 Jahren stattgefunden. *N. Hofreiter*, Wien

Univalent Functions and Conformal Mapping. Von *J. A. Jenkins*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 18; Reihe: Moderne Funktionentheorie.) Mit 6 Textabb., VIII, 169 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geh. DM 34.—.

Diese Monographie gilt in erster Linie den Arbeiten aus dem Gedankenkreis von *Grötzsch*, der wohl als erster systematisch die Theorie der schlichten Funktionen behandelt hat, wobei vor ihm natürlich *Löwner* und später vor allem *Grunsky*, *Schiffer*, *Golusin* u. a. zu nennen sind. Die dabei im Vordergrund stehenden Extremalprobleme werden in ihrer Anwendung, speziell für das Koeffizientenproblem in übersichtlicher Darstellung gebracht. *H. Hornich*, Wien

Multivalent Functions. Von *W. K. Hayman.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 48.) Mit 8 Textabb., VIII, 151 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 27 s. 6 d. net.

Eine sehr dankenswerte zusammenfassende Behandlung der Funktionen, die jeden Wert höchstens p-mal bzw. im Mittel höchstens p-mal annehmen, neben einem kurzen Abriß der schlichten Funktionen (wichtigste Sätze und Löwnersche Theorie), die diesem relativ jungen Gebiet sicher neue Freunde gewinnen wird.
H. Hornich, Wien

Lectures on Ordinary Differential Equations. Von *W. Hurewicz.* Mit 26 Textabb., XVII, 122 S. The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and New York: J. Wiley & Sons, London: Chapmann & Hall. 1958. $ 5.—.

Einleitend hält *S. Lefschetz* einen Nachruf auf den 1956 verunglückten Autor, dessen bedeutendste Arbeiten der Dimensionstheorie und der Theorie der Homotopiegruppen angehörten. Das Buch ist eine Wiedergabe von Vorlesungen, die der Autor an Universitäten in USA. gehalten hat. Sie bieten dem an der Theorie interessierten Leser eine sehr exakte Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie bringen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise in allgemeinen Bereichen, beschreiben die Struktur der Lösungen von linearen Systemen, diskutieren Singularitäten und schließen mit einer geometrischen Theorie der 2-dimensionalen nicht-linearen Systeme (Theorem von *Poincaré* und *Bendixson*). *N. Hofreiter*, Wien

Theory and Problems of Differential Equations. Von *F. Ayres, Jr.* Including 560 Solved Problems. (Schaum's Outline Series.) 296 S. New York: Schaum Publishing Co. 1952. Net price to college bookstores $ 1.90; list price $ 2.95.

Das Buch enthält alle Typen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die in den üblichen Lehrbüchern behandelt werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen Aufzählung von Definitionen, Sätzen und Lösungsmethoden. Daran schließen sich zahlreiche Aufgaben, die meist vollständig durchgerechnet werden. So ist das Buch in erster Linie ein Übungsbuch, das den Studierenden eine wertvolle Ergänzung zu Lehrbüchern ist. Besondere Sorgfalt wurde auf die Auswahl der Aufgaben verwandt. Insbesondere möchte ich die Aufgaben aus Geometrie und Physik hervorheben. *N. Hofreiter*, Wien

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel.* (Sammlung Göschen, Bd. 1059.) 124 S. Dritte, durchgesehene und verbesserte Auflage. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. DM 2.40.

Mit Rücksicht auf die minimalen Änderungen verweise ich auf die Besprechung in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **56**, 174 (1952). *N. Hofreiter*, Wien

Introduction to Difference Equations. With Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology. Von *S. Goldberg.* Mit 9 Textabb., XII, 260 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.75.

An Vorkenntnissen wird nur Elementarmathematik vorausgesetzt. Alle weiteren Hilfsmittel aus der linearen Algebra und der Analysis werden entwickelt. Interessenten des Buches sind: a) Studierende der Mathematik, b) Studierende

der Sozialwissenschaften, die eine leicht verständliche und solide Einführung in die Theorie der Differenzengleichungen bekommen und ihre Anwendbarkeit auf Sozialwissenschaften erproben wollen. Das Buch enthält ausführlich die linearen Differenzengleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, erörtert das Grenzverhalten der Lösungen und bringt im letzten Kapitel auch Randwertaufgaben, erzeugende Funktionen und Matrizenrechnung zur Lösung von einfachen Systemen von Differenzengleichungen. Zahlreich sind die gebotenen Beispiele, die hauptsächlich den Sozialwissenschaften entnommen sind.

N. Hofreiter, Wien

Functionals Analysis and Semi-Groups. Von *E. Hille* und *R. S. Phillips*. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXI). XII, 808 S. Revised Edition. Providence: American Mathematical Society. 1957.

Die erste Auflage des bekannten Werkes, von *E. Hille* alleinverfaßt, erschien 1948. Seither hat die Theorie bedeutende Fortschritte erzielt, vor allem auch durch die Untersuchungen der Verfasser, die eine Neuauflage des Buches erforderlich machten. Die Vermehrung des Stoffes zeigt sich darin, daß jetzt das Buch um 300 Seiten mehr enthält, als die erste Auflage. Es bringt außer der Theorie fast alle Anwendungen der Theorie. Bei dem weiten Anwendungsbereich der Halbgruppen und Banachschen Algebren gibt es fast kein Gebiet der Analysis, welches hier nicht eingeordnet werden kann. Das Buch ist also ein Handbuch, trotzdem hat es den Charakter eines Lehrbuches bewahrt. Dies wird erreicht durch vorbereitende Zusammenfassungen am Beginn jedes Kapitels und einer günstigen Anordnung des Stoffes. Das Werk gliedert sich jetzt in 5 Teile: Funktionalanalysis, Halbgruppen, höhere Theorie der Halbgruppen, spezielle Halbgruppen und Anwendungen, Erweiterungen der Theorie. Das Studium dieses Buches erfordert nur Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung und der einfachsten Kenntnisse aus der linearen Algebra.

E. Hlawka, Wien

Normed Linear Spaces. Von *M. M. Day*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 21, Reihe: Reelle Funktionen, besorgt von *R. P. Halmos*). 139 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 28.—.

Die Theorie der linearen Räume mit Norm, also wenn als vollständig vorausgesetzt, die Theorie der Banachschen Räume, ist erneut eine der Zentren der Forschung. Die zahlreichen Ergebnisse, welche in den letzten Jahren erzielt wurden, haben die Theorie und ihre Anwendungen erweitert und vereinfacht, doch sind die Arbeiten über viele Zeitschriften verstreut. Diese Arbeiten sind auch nicht leicht zu lesen, vor allem durch die Mannigfaltigkeit der verwendeten, oft wechselnden, Begriffsbildungen, die eine Wertung der Ergebnisse erschweren. Der Verfasser hat es nun unternommen, alle Ergebnisse, welche bisher gefunden wurden und von welchen man erwarten kann, daß sie von bleibender Bedeutung sind, zusammenzustellen. So ist ein Buch entstanden, das in knapper, aber klarer Weise, in dieses wichtige und aktuelle Gebiet einführt, als bequemes Nachschlagewerk dienen kann und zu weiteren Untersuchungen anregen wird. Das Buch ist, wie man bei diesem Verlag gewohnt ist, vortrefflich ausgestattet.

E. Hlawka, Wien

Operational Mathematics. Von *R. V. Churchill*. Zweite Auflage. Mit 106 Textabb., IX, 337 S. New York-Toronto-London: McGraw Hill Book Company. 1958. 54/6d.

Das Buch ist ein Lehrbuch über die Theorie und die Anwendungen der Laplacetransformation, die die wichtigste Operatorenmethode ist. Es vermittelt den Studierenden der Mathematik, der Physik und der Technik grundlegende Kenntnisse der Laplacetransformation und legt das Hauptgewicht auf die Anwendungen. Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man viele Probleme der Physik und der Technik lösen, sofern sie auf gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen führen. Besonders ausführlich werden Randwertaufgaben von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplacetransformation gelöst. Das Buch beschränkt sich keineswegs auf Laplacetransformationen im Reellen und stellt zur Bequemlichkeit des Lesers die erforderlichen Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zur Verfügung. An zahlreichen Beispielen aus der Wärmeleitung und den mechanischen Schwingungen wird der vorteilhafte Gebrauch der Laplacetransformation, die eine komplexe Veränderliche enthält, gezeigt. Das letzte Kapitel bringt Fouriertransformationen als weiteres Beispiel von Integraltransformationen. Die gute und ausführliche Darstellung ermöglicht den Studierenden ein klares Verstehen, wie, wann und warum Integraltransformationen angewandt werden. *N. Hofreiter*, Wien

Ebene Inzidenzgeometrie. Von *G. Pickert*. (Schriftenreihe zur Mathematik, Heft 8.) Mit 14 Textabb., 92 S. Frankfurt am Main-Hamburg: Otto Salle Verlag. 1958. DM 6.40.

Der Zweck dieses kleinen Heftchens ist die Illustration des Wesens eines Axiomensystems und dessen, was man unter „more geometrico" zu verstehen habe, an Hand der Inzidenzgeometrie der affinen und projektiven Ebene. Gerade diese durch je drei Axiome erklärten Systeme besitzen die nötige Einfachheit, um die logische Struktur mathematischer Beweise ohne allzu große mathematische Vorkenntnisse klar erkennen zu lassen. Die Darstellung, wohl hauptsächlich für Nichtmathematiker bestimmt, geht daher sachlich nirgends sehr weit (ausgenommen vielleicht der Aufbau der analytischen Geometrie im Rahmen der Inzidenzgeometrie aus dem *Desargues*schen Satz, was algebraisch die Zugrundelegung eines Schiefkörpers bedeutet). Besonders gelungen scheint das Kapitel über endliche affine Ebenen. Durch diese nicht mehr der unmittelbaren Anschauung entsprechenden Modelle der affinen Inzidenzgeometrie wird wohl am deutlichsten die nur implizite Definition der Begriffe „Punkt" und „Gerade" durch das Axiomensystem und die vielseitige Anwendbarkeit eines Systems bloßer Relationen demonstriert. Im letzten Abschnitt wurden die logischen Beweisregeln, soweit sie im Hauptteil des Buches Verwendung finden, zusammengestellt. Dieses Kapitel, wohl auch als Orientierung über die formale Logik verwendbar, weist damit auf den engen Zusammenhang zwischen Mathematik und formaler Logik hin und kann im Leser ein Verständnis dafür erwecken, wie wichtig die formale Logik für eine Untersuchung der Struktur mathematischer Beweise ist. *H. Brauner*, Wien

Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. Von *L. Heffter*. Dritte, wesentlich überarbeitete Auflage. Mit 66 Textabb., 191 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Ln. DM 16.80.

Die ersten Ansätze zu diesem nun in dritter, wesentlich verbesserten Auflage vorliegenden Buche finden sich schon in dem von *L. Heffter* gemeinsam mit *C. Koehler* im Jahre 1905 herausgegebenen „Lehrbuch der analytischen Geometrie I". Der Grundgedanke ist dabei, eine axiomatische Begründung der

projektiven Geometrie zu geben, die nur auf den Inzidenzaxiomen ruht, sowie durch fortschreitende Spezialisierung bis zur euklidischen Geometrie vorzustoßen. Im Gegensatz zu dem 1940 unter gleichem Titel erschienenen Buch wird hier ein vollständiger Aufbau der projektiven Geometrie, und zwar ihrer Grundlagen und ihrer analytischen Behandlung unter Durchführung aller Beweise geboten.

Der erste Abschnitt („Grundlagen der Geometrie") bringt ausgehend von den Inzidenzaxiomen und den auf diese zurückführbaren Anordnungsaxiomen bei Verwendung des Stetigkeitsaxioms von *Dedekind* die für die projektive Geometrie der Grundgebilde I., II. und III. Stufe nötigen Begriffsbildungen. Schon hier sind jene Stellen im Aufbau der projektiven Geometrie fixiert, wo durch Spezialisierung die affine und euklidische Geometrie gewonnen werden können, sowie auf die Abzweigungen zu den nichteuklidischen Geometrien hingewiesen. Das zweite Kapitel („projektive Geometrie") sowie die mit „Parallelgeometrie" und „Orthogonalgeometrie" überschriebenen folgenden Kapitel enthalten eine analytische Behandlung dieser Geometrien, die vor allem die geometrischen Verhältnisse bei weitgehendster Zurückstellung kalkülmäßiger Probleme betont. Gerade in diesen Kapiteln erweist sich die Fähigkeit des Verfassers zu prägnanten und leicht verständlichen Formulierungen, die neben den 66 ausgezeichneten Textfiguren jeden Leser sofort ansprechen.

Im letzten, der nichteuklidischen Geometrie gewidmeten Abschnitt werden zunächst die *Cayley-Klein*schen Modelle besprochen und hier etwa jene Formeln für die Bewegung im Raum und in der Ebene angegeben, die durch Spezialisierung einer gewissen Konstanten den hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Fall umfassen. Die Entwicklungen werden hier bis zu einer nichteuklidischen Trigonometrie, den Kreisen und Kugeln sowie den *Clifford*-Flächen getrieben. Als Abschluß sind jene von den *Klein*schen Modellen verschiedenen Darstellungsgebiete der nichteuklidischen Geometrie entworfen, die von *L. Heffter* im Jahre 1936 publiziert wurden.

Diese von einem Altmeister der Geometrie besorgte Neubearbeitung seines Buches, die in gewisser Hinsicht die Krönung seiner bisherigen Lebensarbeit auf diesem mathematischen Sachgebiet darstellt, wird gewiß viele neue Freunde gewinnen. *H. Brauner*, Wien

Konvexe Polyeder. Von *A. D. Alexandrow.* (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung: Mathematische Monographien, Ed. 8.) Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von *W. Süss.* Mit 161 Textabb., X, 419 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Geb. DM 37.—.

Das Erscheinen dieses Buches ist sehr zu begrüßen. Die Theorie der konvexen Körper verdankt dem Verfasser neue Methoden und wichtige Resultate. Berühmt ist der Satz des Verfassers über die Existenz eines konvexen Polyeders mit gegebenem Netz, um nur ein Beispiel herauszugreifen. Das vorliegende Werk macht nun die Methoden des Verfassers, welche so einfach, so geometrisch und doch so genial sind, bequem zugänglich. Es ist sehr breit geschrieben und setzt nur die einfachsten Mittelschulsätze aus Mathematik voraus. Es kann nicht nur den Studenten, sondern auch den Lehrern an unseren Schulen empfohlen werden und ist für Arbeitsgemeinschaft an unseren Mittelschulen geeignet. Ein herrliches Werk! *E. Hlawka*, Wien

Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà; questioni collegate. Von *F. Severi.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue

Folge: Heft 17; Reihe: Algebraische Geometrie.) VIII, 131 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Steif geheftet DM 23.60.

Der von *Riemann* (1857) angegebene und von *Roch* (1865) vervollständigte Satz bezieht sich auf algebraische Kurven; er gibt die Anzahl der willkürlichen Konstanten an, von denen die allgemeinste rationale Funktion auf der Kurve abhängt, deren Polstellen vorgegeben sind. In seiner projektiven Formulierung handelt es sich um die Dimension der linearen Vollschar, die durch eine Punktgruppe bestimmt ist. Es ist das Verdienst des Verf., bereits vor 50 Jahren die ersten Ansätze zur Verallgemeinerung dieses Satzes auf algebraische Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen gefunden zu haben, nachdem *M. Noether* (1886) eine allerdings unvollständige Formulierung des Satzes für Kurvenscharen auf algebraischen Flächen veröffentlicht hatte. Es zeigte sich aber bald, daß jede Verallgemeinerung erhebliche Schwierigkeiten überwinden muß, ja daß, nur um den Satz exakt aussprechen zu können, viele begriffliche Klärungen notwendig waren oder wenigstens vorausgesetzt werden mußten. Erst in den letzten Jahren ist es gelungen, mit sehr schwierigen Überlegungen vor allem topologischer Natur hier einige Teilergebnisse zu erzielen. Demnach könnte ein unvoreingenommener Beurteiler vermuten, daß die zugrunde liegenden Begriffe und die gewählten Methoden der Sache noch zu wenig angemessen sein dürften.

Die vorliegende Monographie ist in jeder Beziehung außerordentlich aufschlußreich und für die weitere Forschung ganz unentbehrlich. Sie enthält im Zusammenhang mit dem zentralen Problem des Riemann-Rochschen Satzes fast das gesamte moderne Forschungsgebiet der algebraischen Geometrie, und zwar in einer sehr anregenden Darstellung, die von der geschichtlichen Entwicklung ausgehend bis zu den neuesten Ergebnissen vordringt. Jedes Kapitel wird durch eine Zusammenfassung in englischer Sprache eingeleitet. Die Beweise sind meistens in großen Linien skizziert. Der Riemann-Rochsche Satz kann auf mehrere Weisen verallgemeinert werden, und zwar entweder auf lineare Vollscharen von $(r-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten einer V_r, oder allgemeiner auf algebraische und rationale Vollsysteme von k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten ($0 \leqq k \leqq r-1$). Das erfordert zunächst die Klarstellung der Begriffe der algebraischen und der rationalen Äquivalenz, der regulären Systeme, der k-dimensionalen Irregularität einer Mannigfaltigkeit V_r, der kanonischen Systeme aller Stufen und vieles andere, was für die zukünftige Entwicklung der algebraischen Geometrie überhaupt von entscheidender Bedeutung sein wird. Über den gegenwärtigen Stand unseres Wissens und über die vorhandenen Ansätze auf diesem Gebiet gibt *Severis* Monographie die verläßlichste Auskunft.

W. Gröbner, Innsbruck

Reticoli e geometrie proiettive, Convegno internazionale: Palermo, 25.—29. Oktober 1957, Messina, 30. Oktober 1957. Edito dalla *Unione Matematica Italiana* con il contributo del *Consiglio Nazionale delle Richerche*. VI, 139 S. Roma: Edizioni Cremonese, 1958. Lire 1800.—.

Dieser Bericht über eine in Palermo und Messina stattgefundene Tagung betreffend das Sachgebiet der projektiven Geometrie enthält 20 Vortragsauszüge von italienischen, französischen und deutschen Geometern. Diese Sammlung von Vorträgen, die zum überwiegendsten Teil Probleme der Geometrie endlicher projektiver Ebenen betreffen, gestattet einen Einblick in die modernen und aktuellen Fragen dieses klassischen geometrischen Gebietes. *H. Brauner*, Wien

Applications of Tensor Analysis. (Früher: Applications of the Absolute Differential Calculus.) Von *A. J. McConnell.* Mit 43 Textabb., XII, 318 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 1,85.

Diese bekannte Darstellung der Tensoranalysis ist das erstemal 1931 unter anderem Titel erschienen und seither bereits fünfmal aufgelegt worden. Während in den sonst üblichen Darstellungen der Tensorrechnung die Entwicklungen meist in Zusammenhang mit Problemen der Riemannschen Geometrie beziehungsweise der Relativitätstheorie dargestellt werden, ist in diesem Buch der Gedanke verwirklicht, die Tensorrechnung schon wesentlich früher den Studenten als wirksames Rechenmittel in die Hand zu geben. So werden (unter Beschränkung auf den zwei- und drei-dimensionalen Fall) die Formeln der analytischen Geometrie der Geraden, der Ebenen und der Quadriken konsequent unter Verwendung von Tensoren abgeleitet. Der zweite Hauptabschnitt des Buches ist der Kurven- und Flächentheorie im euklidischen dreidimensionalen Raum sowie Problemen der angewandten Mathematik gewidmet. Hier finden sich die Grundgleichungen der Dynamik des Massenpunktes, des starren Körpers und der Flüssigkeiten, sowie eine kurze Behandlung des elektromagnetischen Feldes. Als Anwendung des Formelapparates auf eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit allerdings indefiniter Art wird die spezielle Relativitätstheorie behandelt. Ein Anhang stellt den Zusammenhang mit der Bezeichnung jener Bücher der mathematischen Physik her, in denen orthogonale krummlinige Koordinaten ohne Berücksichtigung der Tensorschreibweise Verwendung finden.

Der Wert dieses sowohl für Studenten und Dozenten interessanten Buches wird durch die fast 700 Aufgaben, von denen die schwierigeren mit kurzen Lösungsanleitungen versehen sind, noch wesentlich gesteigert. *H. Brauner*, Wien

An Introduction to Combinatorial Analysis. Von *J. Riordan.* (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) X, 244 S. New York: John Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 8.50.

Die Aufnahme dieses Buches in die Sammlung des Wiley-Verlages über Statistik zeigt, daß es für Statistiker von Interesse ist. Sind doch Kombinationen Hilfsmittel in der Statistik. Außerdem bringt das Buch einiges über Verteilungen. Mehr aber werden Mathematiker für das Buch übrig haben, und zwar jene, die sich für Kombinatorik, erzeugende Funktionen, Zerfällungen von ganzen Zahlen, Graphen, Bäume und Netze interessieren. Auch Liebhaber der Mathematik kommen auf ihre Rechnung, wenn sie an verschiedenen Arten von Spielen und an lateinischen Rechtecken Freude haben und die mathematischen Grundlagen kennen lernen wollen. Das Buch bringt die Theorie in ausführlicher Darstellung und enthält viele Aufgaben am Ende jedes Kapitels. *N. Hofreiter*, Wien

Traité de Statistique Théorique et Appliquée, Analyse Aléatoire — Algèbre Aléatoire. Von *D. Dugué.* Préface de *G. Darmois.* (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens.) Mit 4 Textabb., XIV, 313 S. Paris: Masson et Cie. 1958. Geb. fr. 5200.—.

Dieses Werk zerfällt in zwei Teile, welche mit „Analyse aléatoire" und „Algèbre aléatoire" überschrieben sind. Es muß gleich gesagt werden, daß es sich dabei um ein großzügig angelegtes Werk handelt, welches viele Dinge enthält, vor deren Darstellung sich die Verfasser ähnlicher Bücher oft gescheut haben. Allerdings muß man zugeben, daß der Verfasser sich mit den Grundlagen der Theorie der zufälligen Größen nicht allzu lange aufgehalten hat und insbesondere die maßtheoretischen Grundlagen nur wenig behandelt.

Im ersten Kapitel wird zunächst der Begriff der zufälligen skalaren oder Vektor-Variablen erklärt (wobei eine solche durch ihre Verteilungsfunktion eingeführt wird). Es folgen verschiedene den Variablen zugeordnete Größen, wie Distanz zweier Variablen (in einem von *Ky-Fan* angegebenen Sinn). Medianwerte, Momente, die von *P. Lévy* eingeführte Konzentrationsfunktion, Regressionsgerade, Kovarianzmatrix und charakteristische Funktion. Besonders die letztere wird genau untersucht und es werden z. B. auch durch die Verteilungsfunktion auszudrückende notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß die charakteristische Funktion im Nullpunkt differenzierbar ist. Die von *Bochner* herrührende Kennzeichnung der charakteristischen Funktion wird ohne Beweis angegeben. Kenntnis der Lebesgueschen Integrationstheorie wird vorausgesetzt; offenbar im Hinblick darauf wird auch S. 22 die Vertauschbarkeit des Grenzüberganges für die T mit der Integration über die x nicht genauer begründet, was für einen Anfänger vielleicht etwas schwierig ist. Beim Beweis der Ungleichung von *Liapounoff* S. 15 wäre vielleicht ein Wort darüber zu sagen, wieso das Maximumprinzip für analytische Funktionen für den dort genannten unendlichen Parallelstreifen richtig bleibt. Kapitel 2 ist mit „Convergences" überschrieben und enthält eine gründliche Diskussion der Verschiedenen Arten von Konvergenz, welche bei Folgen stochastischer Variabler auftreten können: Konvergenz dem Verteilungsgesetz nach, Stochastische Konvergenz (= Konvergenz der Wahrscheinlichkeit nach), Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins und eine noch etwas einschränkendere Art von Konvergenz, die vollständige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins, welche für eine Folge von Variablen X_k dann eintritt, wenn eine Folge von unabhängigen Variablen mit derselben Randverteilung mit Wahrscheinlichkeit Eins konvergiert. S. 41 unten wird der Anfänger einige Zeit nachdenken müssen, bis er erkennt, was dort unter zufälliger Funktion gemeint ist, ein Begriff, der vorher nicht erklärt wurde. Zwei Sätze von *Slutsky* und verschiedene Untersuchungen über die Nichtvereinbarkeit eines „Norm"- bzw. „Abstand"-Begriffes mit verschiedenen Arten der Konvergenz beschließen dieses Kapitel. Vielleicht hätte hier auch noch die Konvergenz im (quadratischen) Mittel Platz finden können. Im darauffolgenden Kapitel werden verschiedenen Ungleichungen bereitgestellt die später benötigt werden, aber auch an sich sehr interessant und zum Teil wenig bekannt sind. Z. B. findet sich hier außer der Kolmogoroffschen Ungleichung auch eine solche von *P. Lévy*, bei der dieselbe Wahrscheinlichkeit durch die Konzentrationsfunktion abgeschätzt wird. Den verschiedenen Arten des Gesetzes der großen Zahlen für Folgen von unabhängigen zufälligen Variablen ist das nächste Kapitel gewidmet. Hier werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen von *Chintschin* für die stochastische Konvergenz, von *Hsu*, *Robbins* und *Erdös* für die vollständige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins, von *Kolmogoroff* für die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins bewiesen, sowie ein Satz von *Lévy* über unendliche Reihen von zufälligen Variablen. Die Sätze vom iterierten Logarithmus und der Satz von *Kolmogoroff-Smirnoff* werden in Kapitel 5 ausführlich behandelt. Besonders wertvoll ist es, daß nun ein Beweis des letzteren in einem Lehrbuch zur Verfügung steht. Die Begründung der Formel (2) auf S. 112 wird dem Anfänger vielleicht nicht sofort gelingen. Das darauffolgende Kapitel bringt Ergebnisse über die Approximation von zufälligen Funktionen durch „zufällige" Polynome und Interpolationsformeln, wobei — wie im übrigen an einigen anderen Stellen des Buches — auch vom Verfasser gefundene Ergebnisse Platz finden. Den Abschluß des ersten Teiles bildet ein Abschnitt, der mit „Estimation — Information" betitelt ist. Hier werden Fragen der Wirksamkeit von Schätzfunktionen und insbesondere das „Maximum-

Likelihood-Prinzip" untersucht, wobei auch die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit Eins (anstelle der weniger besagenden stochastischen Konvergenz) zugrunde gelegt wird. Auf S. 141 wird sich der Anfänger beim Zitat von Theorem XI aus Kapitel 4 fragen, wieso die Existenz des Erwartungswertes des entsprechenden Absolutbetrages nicht gefordert wird.

Der zweite Teil enthält in Kapitel 10 zunächst eine Ableitung des interessanten Satzes von *Lévy-Cramer*, daß, wenn die Summe zweier unabhängiger Variabler normal verteilt ist, auch die beiden Summanden es sind, sowie entsprechender Sätze für Poissonsche und Cauchysche Verteilung, ferner des Satzes von *Marcinkiewicz*, daß in einer charakteristischen Funktion der Form e^P (P — Polynom) P notwendig vom Grad $\leqslant 2$ ist. Im darauffolgenden Kapitel werden die verschiedensten, mit der Normalverteilung zusammenhängenden Verteilungsgesetze untersucht, die mit den Namen „*Student*", *Behrens*, *Fisher*, *Snedecor*, *Wilks*, *Hotelling*, *Wishart*, *Bartlett* verbunden sind und für Varianzanalyse und Regressionstheorie gebraucht werden. Hier ist die prägnante Bezeichnungsweise besonders hervorzuheben, deren Fehlen in anderen Werken oft das Verständnis dieser Dinge erschwert. Der restliche Teil des Buches, auf den wir aus Raummangel nicht mehr genauer eingehen können, behandelt das Planen von Versuchen (Experimental Design) und damit zusammenhängend die Theorie der magischen Quadrate, der endlichen Körper (Galois-Felder) und endlichen projektiven Geometrien mit großer Gründlichkeit.

Die Darstellung ist sehr klar — an einigen wenigen Stellen, wie oben angeführt, etwas knapp — und im übrigen auch mit Druckfehlern behaftet; doch wird dies reichlich dadurch aufgewogen, daß der Verfasser in einer geradezu idealen, konkreten Ausdrucksweise die Dinge immer beim richtigen Namen nennt und in seinem Werk eine ungeheure Fülle von Stoff behandelt. Das Buch ist für jeden, der die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schon kennt, eine hohe (aber nicht zu hohe) Schule für das Verständnis der modernsten Erkenntnisse. *K. Prachar*, Wien

Games and Decisions. Von *R. D. Luce* und *H. Raiffa*. Mit Textabb., XIX, 509 S. New York: John Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1957. $ 8.75.

Über die Theorie der Spiele und der Entscheidungsfunktionen existieren zur Zeit eine Reihe von ausgezeichneten Büchern im angelsächsischen Sprachgebiet, welche jedoch fast durchwegs erhebliche mathematische Kenntnisse voraussetzen und überdies auf Anwendungen wenig eingehen. Das grundlegende Werk von *v. Neumann* und *Morgenstern*, welches zum ersten Mal in umfassender Form die Anwendungen der Spieltheorie auf die Wirtschaftswissenschaften darlegt, ist mathematisch anspruchsvoll. Das vorliegende Buch ist nun bemüht, die Theorie durch möglichste Zurückhaltung auf mathematischem Gebiet und einen „beschreibenden Stil" jenen nahezubringen, welche sich für die Anwendungen in der Sozial- und Wirtschaftswissenschaft interessieren. Dabei ist keineswegs daran gedacht, im Elementaren steckenzubleiben. So werden z. B. in den 14 Kapiteln des Buches u. a. allgemeine n-Personenspiele recht ausführlich untersucht und im Anhang, der seinerseits 8 Abschnitte umfaßt und das mathematische Verständnis des Lesers stärker beansprucht, Spiele mit unendlicher Strategiemenge behandelt. Die Darstellung ist breit und öfter treten Plausibilitätsbetrachtungen an Stelle von mathematischen Beweisen. Trotzdem wird ein Leser, der nicht bereit ist, sich in die mathematische Denkweise einzuleben, nur schwer zum vollen Verständnis des Werkes vordringen können. Das liegt aber wohl in der Natur der Sache. Für den mathematisch besonders

interessierten Leser sind ausreichend viele Literaturhinweise vorhanden. Am Ende der meisten Kapitel befindet sich eine aus wenigen Seiten bestehende Zusammenfassung, welche eine rasche Orientierung erlaubt. Selbstverständlich haben die Verfasser nicht nur referiert, sondern auch eigene Forschungsergebnisse verarbeitet und manches Bekannte in neuem Lichte erscheinen lassen.

Außer dem angeführten Personenkreis kann das Buch auch zweifelsohne jedem Mathematiker empfohlen werden, der einen ersten Überblick über die einschlägigen Probleme gewinnen will. *L. Schmetterer*, Hamburg

Sampling Opinions. An Analysis of Survey Procedure. Von *F. F. Stephan* und *Ph. J. McCarthy*. (A Wiley Publication in Statistics.) Mit 1 Textabb., XXI, 451 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 12.—.

Seit 15 Jahren ist die Meinungs- und Marktforschung besonders in den USA in großem Aufschwung. Für alle, die dafür Interesse haben, auch wenn sie beruflich nichts damit zu tun haben, ist das Buch geschrieben. Die Leser brauchen keine Kenntnisse der mathematischen Statistik zu haben. In leicht verständlicher Sprache werden die Stichprobenverfahren erläutert, die in der Meinungs- und Marktforschung angewandt werden. Auf die vielen in der Praxis auftretenden Schwierigkeiten wird stets hingewiesen. Einen breiten Teil (2. Teil des Buches) nehmen die Berichte über empirische Untersuchungen ein. Sie sind den Nichtmathematikern einleuchtender als theoretische Überlegungen. Im dritten Teil werden die Probleme geschildert, die beim Planen von Stichproben entstehen. Auch wer sich nur für die Ergebnisse der Stichproben interessiert, sollte doch den dritten Teil lesen, um ein besseres Verständnis zu bekommen. Das Buch enthält nur ganz wenige mathematische Formeln und auch diese werden ohne Beweis angegeben. Will der Leser die Formeln nicht nur gebrauchen, sondern auch voll verstehen, dann ist ein ernstes Studium der mathematischen Statistik erforderlich. Die einschlägigen Lehrbücher und Arbeiten werden am Ende jedes Paragraphen angegeben. Solange man nur beschreibende Statistik betreibt, kommt man fast ohne Mathematik ganz gut aus. Wenn man aber erfahren will, wie weit die aus den statistischen Daten gezogenen Schlüsse gelten, wenn man also über die Zuverlässigkeit der Vorhersagen Auskunft bekommen will, dann braucht man Mathematik. DasBuch ist daher kein Ersatz für die Lehrbücher der mathematischen Statistik, was auch von den Verfassern zugegeben wird. Für Mathematiker, die Interesse für angewandte Statistik haben, ist das Buch eine wertvolle Ergänzung nach der praktischen Seite. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematical Foundations of Information Theory. Von *A. I. Khinchin*. Ins Englische übertragen von *R. A. Silverman* und *M. D. Friedman*. 120 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 1.35.

Das Buch enthält die Übersetzungen der zwei bekannten Arbeiten des Verfassers zur Informationstheorie aus Uspechi 1953 und 1956. Diese 120 Seiten liefern die beste Darstellung der mathematischen Theorie, die es gibt.

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schleifingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27–29

Über Strahlflächen von konstantem Drall

Von

H. Brauner, Wien

(*Eingegangen am 19. März 1958*)

Die Strahlflächen von verschwindendem Drall, die *Torsen*, lassen sich leicht klassifizieren und in einheitlicher Weise erzeugen; es ist daher naheliegend, Ähnliches für die *Strahlflächen konstanten Dralls* ($\neq 0$) zu versuchen. Als Beispiele für solche Flächen seien etwa außer den Drehhyperboloiden und den Strahlschraubflächen die von *R. Edlinger* untersuchten Flächen genannt, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehflächen sind [1] und eine algebraische Fläche 3. Grades, nämlich eine den absoluten Kegelschnitt doppelt oskulierende *Cayley*sche Fläche [2, S. 241].

Das Ziel dieser kleinen Note ist es, Erzeugungen von gewissen Normalformen der Strahlflächen konstanten Dralls anzugeben, aus denen dann durch Anwendung von *Mindings*chen Biegungen sämtliche Flächen dieser Art erhalten werden können; außerdem werden eine Reihe von Eigenschaften dieser Flächen sowie Beziehungen zur Kurventheorie besprochen. Die analytische Behandlung der gestellten Frage geschieht unter Verwendung der von *E. Kruppa* [3], [4] begründeten natürlichen Geometrie der Strahlflächen[1], deren für diese Arbeit notwendigen Formeln in Abschnitt 1 zusammengefaßt sind. Unter Verwendung dieses äußerst zweckmäßigen Kalküls werden auch gelegentlich bekannte Sätze aus der Theorie der Strahlflächen kurz bewiesen.

1.

Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t)$ eine Raumkurve c und $\mathfrak{e}(t)$ ein Einsvektor, so stellt

$$\mathfrak{x}(t, v) = \mathfrak{y}(t) + v\,\mathfrak{e}(t) \tag{1}$$

eine Strahlfläche Φ dar mit dem Zentralnormalenvektor

[1] Eine lehrbuchartige Darstellung findet sich in [8].

$$\mathfrak{n} = \frac{\dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|} \tag{2}$$

und dem Zentraltangentenvektor

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|}. \tag{3}$$

Die t-Linien schneiden auf den Erzeugenden (v-Linien) dabei kongruente Punktreihen aus. Für die Striktionslinie s von Φ gilt

$$\mathfrak{s}(t) = \mathfrak{y}(t) - \frac{\dot{\mathfrak{x}}\,\dot{\mathfrak{e}}}{\dot{\mathfrak{e}}^2}\,\mathfrak{e} \tag{4}$$

und für den *Drall d*

$$d = \frac{(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{e}}\,\dot{\mathfrak{y}})}{\dot{\mathfrak{e}}^2}. \tag{5}$$

Wir verwenden i. f. die auf *E. Kruppa* zurückgehende natürliche Geometrie der Strahlflächen, die sich auf das von den Einsvektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$ gebildete Rechtsdreibein stützt, wobei diese Vektoren nun als Funktionen der Bogenlänge u der Striktionslinie s anzusehen sind. Ist u_1 bzw. u_3 die Bogenlänge des sphärischen Bildes von $\mathfrak{e}(u)$ bzw. $\mathfrak{z}(u)$, so heißt $\varkappa = du_1 : du$ die „*Krümmung*" und $\tau = du_3 : du$ die „*Torsion*" der Strahlfläche. Ist ferner $\mathfrak{t}(u)$ der Tangentenvektor der Striktionslinie, so ist $\sigma(u) = \sphericalangle\, \mathfrak{e}\,\mathfrak{t}$ die „*Striktion*". Durch Vorgabe der drei Funktionen $\varkappa(u)$, $\tau(u)$, $\sigma(u)$ ist die Strahlfläche bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt. Für $\sigma = 0$ erhält man die Torsen. Die Koordinatendarstellung von $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ lautet

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{s}(u) + v\,\mathfrak{e}(u) = \int (\mathfrak{e}\cos\sigma + \mathfrak{z}\sin\sigma)\,du + v\,\mathfrak{e}(u); \tag{6}$$

die Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{e}' = \varkappa\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -\varkappa\,\mathfrak{e} + \tau\,\mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z}' = -\tau\,\mathfrak{n} \tag{7}$$

sind analog den *Frenet*schen Formeln gebaut. Für den Drall d gilt

$$d = \frac{\sin\sigma}{\varkappa}. \tag{8}$$

Aus (1) errechnet man die Normalkrümmung $\varkappa_n$, geodätische Krümmung $\varkappa_g$ und geodätische Torsion τ_g der Striktionslinie s zu

$$\varkappa_n = -\tau\sin\sigma + \varkappa\cos\sigma, \quad \varkappa_g = -\sigma', \quad \tau_g = \varkappa\sin\sigma + \tau\cos\sigma \qquad (9_{1,2,3})$$

und für ihre Krümmung K und Torsion T gilt

$$K^2 = \varkappa_n^2 + \varkappa_g^2, \quad T = \tau_g + \frac{\varkappa_g^2}{\varkappa_n^2 + \varkappa_g^2}\left(\frac{\varkappa_n}{\varkappa_g}\right)'. \qquad (10_{1,2})$$

Die *Minding*schen *Biegungsflächen* Φ^* einer Strahlfläche $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ zerfallen in zwei Scharen mit den natürlichen Gleichungen $\Phi_1^*(\varkappa, \tau^*, +\sigma)$ bzw. $\Phi_2^*(\varkappa, \tau^*, -\sigma)$, wobei τ^* eine beliebige Funktion von u ist. Die Flächen Φ_1^* besitzen längs entsprechenden Erzeugenden den gleichen Drall („gleichsinnige" Mindingbiegung), bei Übergang zu den Flächen Φ_2^* wechselt der Drall das Vorzeichen („gegensinnige" Mindingbiegung). Die Flächen Φ_2^* sind zur Fläche $\Phi_2(\varkappa, -\tau, -\sigma)$, die zu Φ gegensinnig kongruent ist, gleichsinnige Mindingssche Biegungsflächen. Wir wollen i. f. unter „Biegung" immer eine gleichsinnige Mindingbiegung verstehen. Insbesondere gilt: *Jede Strahlfläche kann so verbogen werden, daß ihre Striktionslinie Schmieglinie* (nach (9_1): $\tau^* = \varkappa \operatorname{ctg} \sigma$) *oder Krümmungslinie* (nach (9_3): $\tau^* = -\varkappa \operatorname{tg} \sigma$) *wird. Jede Strahlfläche läßt sich in eine konoidale Strahlfläche* ($\tau^* = 0$) *und in eine Strahlfläche mit einem Drehkegel als Richtkegel* ($\tau^* : \varkappa = \text{konst}$) *verbiegen.* Außerdem gilt nach (9_2): *Die Striktionslinie einer Strahlfläche konstanter Striktion ist geodätisch.*

2.

Wir setzen $\Phi(\varkappa, \tau, \sigma)$ als Strahlfläche konstanten Dralls $d(\neq 0)$ voraus, d. h. es gilt nach (8)

$$\varkappa \sigma' \cos\sigma - \varkappa' \sin\sigma = 0. \qquad (11)$$

Die Flächenkurve $v = v(u)$ ist genau dann eine (von den Erzeugenden verschiedene) *Schmieglinie*, wenn — wie man aus (6) errechnet —

$$2\varkappa \sin\sigma \,.\, v' = \varkappa^2 \tau v^2 + (\varkappa\sigma' \cos\sigma - \varkappa' \sin\sigma) v + (\tau \sin\sigma - \varkappa \cos\sigma) \sin\sigma \qquad (12)$$

gilt. Die Tangentenvektoren

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v v' = \mathfrak{e}(\cos\sigma + v') + \mathfrak{n}\varkappa v + \mathfrak{z} \sin\sigma \qquad (13)$$

der Schmieglinien in den Punkten einer Erzeugenden $e_0(u = u_0)$ bestimmen das *oskulierende Hyperboloid* Ω_0 längs e_0, dessen Richtkegel in einem Koordinatensystem (x, y, z), in dem $\mathfrak{e}_0(1, 0, 0)$, $\mathfrak{n}_0(0, 1, 0)$, $\mathfrak{z}_0(0, 0, 1)$ gilt, nach (12) und (13) lautet

$$\varkappa\tau \sin\sigma [x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + 2xz\frac{\varkappa}{\tau} - z^2 \frac{\varkappa}{\tau} \operatorname{ctg}\sigma)] + (\varkappa\sigma' \cos\sigma - \varkappa' \sin\sigma) yz = 0. \qquad (14)$$

Ist die *Striktionslinie von* Φ *Krümmungslinie* ($\tau = -\varkappa \operatorname{tg}\sigma$) und hat Φ

konstanten Drall, so gilt unter Verwendung von (11) für diesen Richtkegel

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x - z \operatorname{ctg} \sigma)^2 = 0, \tag{15}$$

d. h. Ω_0 ist ein *Drehhyperboloid.* Daraus kann man folgern:

Satz 1: *Verbiegt man eine Strahlfläche konstanten Dralls so, daß ihre Striktionslinie Krümmungslinie wird, so sind sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide.*

Diese Flächen hat *R. Edlinger* [1] genauer untersucht und eine kinematische Erzeugung dieser Flächen angegeben. Unter Verwendung seiner Ergebnisse gilt:

Satz 2: *Rollt ein gleichseitiges Paraboloid π auf einer seiner Biegungsflächen ψ, so überstreicht die ψ nicht berührende Scheitelerzeugende von π eine Strahlfläche konstanten Dralls. Jede Fläche konstanten Dralls kann in eine solche Fläche verbogen werden.*

Die Differentialgleichung der *Krümmungslinien* von (6) hat die Bauart

$$f(\varkappa, \sigma)\, v'^2 + g(\varkappa, \tau, \sigma; v)\, v' + (\varkappa^2 v^2 + \sin^2 \sigma)(\varkappa \sin \sigma + \tau \cos \sigma) + \\ + v \cos \sigma (\varkappa \sigma' \cos \sigma - \varkappa' \sin \sigma) = 0, \tag{16}$$

wobei f, g Funktionen der angegebenen Argumente sind. Ist Φ eine Strahlfläche konstanten Dralls und ihre Striktionslinie s eine Krümmungslinie, so wird nach (9_3) und (11) aus (16)

$$v'(f v' + g) = 0, \tag{17}$$

d. h. die v-Linien sind sämtlich Krümmungslinien.

Satz 3: *Jede Strahlfläche konstanten Dralls kann so verbogen werden, daß die Krümmungslinien einer Schar auf den Erzeugenden kongruente Punktreihen ausschneiden*[2].

3.

Ist die *Striktionslinie* s einer Strahlfläche *eine Schmieglinie,* so gilt wegen $\varkappa_n = 0$ nach (9_1) $\tau = \varkappa \operatorname{ctg} \sigma$ und für ihre Torsion T gilt nach (10) [2, S. 147]

$$T = \frac{\varkappa}{\sin \sigma} = \frac{1}{d}. \tag{18}$$

Ist die Striktionslinie einer Strahlfläche Φ eine Schmieglinie konstanter Torsion, so besitzt die Fläche konstanten Drall. Aus (9_2) entnimmt man

[2] Daß diese Eigenschaft den Edlingerflächen zukommt, ist ohne Rechnung in [1, S. 346] bewiesen.

einen Satz von *J. G. Darboux*: *Die Erzeugenden einer Strahlfläche sind längs der Striktionslinie geodätisch parallel.* Weniger bekannt ist die Umkehrung [2, S. 143]: *Sind die Erzeugenden längs einer Flächenkurve c geodätisch parallel, so ist diese die Striktionslinie.* Ist nämlich c gegeben durch $u = u(t)$, $v = v(t)$, so ist $\mathfrak{e}$ längs c geodätisch parallel, wenn $\frac{d\,\mathfrak{e}}{dt}$ parallel zu den Flächennormalen in den Punkten von c ist, also

$$\mathfrak{e}'\,\dot{u} \times (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) = \mathfrak{o} \tag{19}$$

gilt und das liefert nach (6)

$$v\,\varkappa^2\,\mathfrak{e} = \mathfrak{o}, \tag{20}$$

also $v = 0$.

Damit erhält man folgende Erzeugungsweise der Strahlflächen konstanten Dralls:

Satz 4: *Verschiebt man eine Gerade des Schmiegstreifens einer Kurve konstanter Torsion geodätisch parallel, so überstreicht sie eine Fläche konstanten Dralls. Durch Verbiegung von solchen Flächen erhält man sämtliche Flächen konstanten Dralls.*

Damit ist es möglich, eine koordinatenmäßige Darstellung jener *Normalformen* von Flächen konstanten Dralls anzugeben, bei denen die Striktionslinie Schmieglinie ist. Ist $\mathfrak{b}(\gamma)$ ein Einsvektor und γ die Bogenlänge seines sphärischen Bildes, also $\left|\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,\gamma}\right| = 1$ und führt man an Stelle von γ den neuen Parameter

$$u = \frac{1}{T}\,\gamma \tag{21}$$

ein (wobei T eine beliebige Konstante bedeutet), so stellt — wie eine leichte Rechnung lehrt —

$$\mathfrak{z}(u) = \frac{1}{T}\int\left(\mathfrak{b}(u) \times \frac{d\mathfrak{b}}{du}\right) \tag{22}$$

eine Kurve c konstanter Torsion T mit der Bogenlänge u und der Binormalen $\mathfrak{b}$ dar[3]. Soll c Striktionslinie und Schmieglinie einer nach Satz 4 erzeugten Strahlfläche konstanten Dralls $d = \frac{1}{T}$ sein, so besitzen ihre Erzeugenden $\mathfrak{e}$ unter Verwendung der Striktion σ, des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ und des Hauptnormalenvektors $\mathfrak{h}$ von c die Darstellung

[3] Vgl. etwa [5, S. 87].

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{t}\cos\sigma + \mathfrak{y}\sin\sigma, \tag{23}$$

wobei

$$\mathfrak{t} = \frac{1}{T}(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}'),\quad \mathfrak{y} = -\frac{1}{T}\mathfrak{b}' \tag{24}$$

gilt. $\mathfrak{e}$ liegt in der Schmiegebene von c und wird dann längs c geodätisch parallel verschoben, wenn (wegen $\varkappa_n = 0$) für den Winkel σ zwischen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{e}$ gilt

$$\sigma = -\int \varkappa_g\, du = -\int K\, du, \tag{25}$$

wobei $K(u)$ die Krümmung von c ist. Unter Verwendung von (22) folgt

$$K = \left|\frac{\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''}{T}\right| \tag{26}$$

und damit für die Strahlfläche konstanten Dralls d:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}(u,v) = d\int(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}')\,du + v\,d[(\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}')\cos(|d|\int|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''|\,du) + \\ + \mathfrak{b}'\sin(|d|\int|\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}''|\,du)].\end{aligned} \tag{27}$$

Die natürlichen Gleichungen dieser Strahlfläche lauten

$$\varkappa = \frac{1}{d}\sin\sigma,\quad \tau = \frac{1}{d}\cos\sigma,\quad \sigma = -\int K(u)\,du. \tag{28}$$

Ersetzt man τ durch eine beliebige Funktion $\tau^*(u)$, so erhält man alle Strahlflächen konstanten Dralls.

4.

Es sollen nun einige *besondere Strahlflächen konstanten Dralls* untersucht werden.

Besitzt eine Strahlfläche konstanten Dralls eine *geodätische Striktionslinie*, so hat sie nach (9_2) konstante Striktion und damit gilt nach (11)

$$\varkappa'\sin\sigma = 0. \tag{29}$$

Das liefert entweder mit $\sigma = 0$ (und damit $d = 0$) die *Torsen* oder $\varkappa = $ konst. Die Striktionslinie einer Strahlfläche $\Phi(\varkappa = \text{konst.}, \sigma = \text{konst.} \neq 0, \pi/2)$ ist aber eine *Bertramkurve*, wie aus (10) folgt. Solche Strahlflächen sind *Biegungsflächen eines Drehhyperboloids*, da für diese ebenfalls $\varkappa = $ konst. und $\sigma = $ konst $\neq 0, \pi/2$ gilt.

Satz 5[4]: *Die Strahlflächen konstanten Dralls mit geodätischer Striktionslinie sind (für $\sigma \neq 0, \pi/2$) Biegungsflächen eines Drehhyperboloids.*

[4] Vgl. auch [2, S. 146] und [6, S. 90 und S. 105].

Ist eine Strahlfläche *orthoid* ($\sigma = \pi/2$), so folgt aus (10) [6, S. 78]

$$T = \varkappa = \frac{1}{d}, \tag{30}$$

d. h. *die Binormalenfläche einer Kurve konstanter Torsion hat konstanten Drall.* Das liefert in analoger Weise wie bei (27) eine Koordinatendarstellung dieser Flächen in der Form

$$\mathfrak{x}(u, v) = d \int (\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}')\, du + v\, \mathfrak{b}, \tag{31}$$

die deshalb von Bedeutung ist, weil unter diesen Flächen sicher *algebraische* vorkommen (die Ordnung der Binormalenfläche einer algebraischen Kurve der Ordnung n und der Klasse m ist gleich $n + m$)[5].

Für eine orthoide Fläche konstanten Dralls ist nach (30) auch $\varkappa = konstant$. Verbiegt man sie zu einer *konoidalen Fläche* ($\tau = 0$), so hat die neue Fläche die natürlichen Koordinaten $\Phi^*(\varkappa = \text{konst.}, 0, \pi/2)$ und ist daher eine *Wendelfläche.*

Satz 6[4]: *Jede orthoide Strahlfläche konstanten Dralls ist Biegungsfläche einer Wendelfläche.*

Jede Strahlfläche kann zu einer *konoidalen* ($\tau = 0$) verbogen werden. Ist $\varkappa$ die Krümmung, s die Striktionslinie einer konoidalen Strahlfläche konstanten Dralls d, so ist der Zentraltangentenvektor $\mathfrak{z}$ ein konstanter Vektor normal zu Richtebene (die i. f. horizontal gedacht ist) und die Kurve

$$\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{s}(u) - d \int_{u_0}^{u} \varkappa(u)\, du \,.\, \mathfrak{z} \tag{32}$$

ist — wie eine Rechnung sofort zeigt — eine *ebene Kurve* in der durch den Punkt $u = u_0$ der Striktionslinie gehenden horizontalen Ebene. Ihre Tangenten

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{e} \cos\sigma + \mathfrak{z} \sin\sigma - d\,\varkappa\,\mathfrak{z} = \mathfrak{e} \cos\sigma \tag{33}$$

sind zu den Erzeugenden der Strahlfläche parallel; ihre Krümmung hat den Wert

$$K(u) = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - d^2 \varkappa^2}} \tag{34}$$

und für ihre Bogenlänge w gilt

$$K\, dw = \varkappa\, du. \tag{35}$$

---

[5] Die Frage nach den algebraischen Kurven konstanter Torsion wurde von *Darboux* angeregt und u. a. in [9] und [10] behandelt.

Geht man umgekehrt von einer ebenen Kurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(w)$ (Binormalvektor $\mathfrak{b} = \text{konst}$) aus, so ist

$$\mathfrak{x}(w, v) = \mathfrak{y}(w) + d \int_{w_0}^{w} K(w)\, dw \,.\, \mathfrak{b} + v \frac{d\mathfrak{y}}{dw} \tag{36}$$

eine konoidale Strahlfläche mit dem konstanten Drall d und es gilt:

Satz 7: *Trägt man auf den Erzeugenden eines lotrechten Zylinders durch eine in einer horizontalen Ebene liegende Kurve c mit der Krümmung K und der Bogenlänge w von den Punkten von c die Strecken d ∫K dw auf, so erhält man die Striktionslinie einer konoidalen Strahlfläche konstanten Dralls d, deren Erzeugenden zu den Tangenten von c parallel sind. Umgekehrt läßt sich jede konoidale Strahlfläche konstanten Dralls ausgehend von der Normalprojektion ihrer Striktionslinie auf eine Richtebene so erzeugen.*

Diese Konstruktion versagt nur, wenn $K = 0$ oder $K = \infty$ gilt. Für $K = 0$ ist nach (34) $\varkappa = 0$, d. h. es liegt ein *Zylinder* vor; $K = \infty$ führt auf $\varkappa = 1/d$, also eine *Wendelfläche. Die Wendelfläche ist also das einzige gerade Konoid konstanten Dralls.*

Wählt man c insbesondere als *Kreis*, so folgt die bekannte Tatsache: *Der Drall einer offenen geraden Strahlschraubfläche ist gleich dem Schraubparameter.*

5.

Bei jeder Raumkurve c gibt es ∞^1 reelle Geraden und zwei isotrope, die starr mit dem begleitenden Dreibein der Kurve verbunden, bei Bewegung desselben längs c eine *Torse* überstreichen [7]. Wir fragen nach starr mit dem begleitenden Dreibein einer Kurve verbundenen Geraden, die bei *Bewegung des Dreibeins* längs c eine *Strahlfläche konstanten Dralls* ($\neq 0$) überstreichen.

Ist c durch den Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ gegeben — wobei s die Bogenlänge von c ist —, G ein Punkt mit den (festen) Koordinaten p, q, r und sind α, β, γ die (festen) Koordinaten eines Vektors $\mathfrak{e}$ bezüglich des Dreibeins $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ von c, so lautet die von der durch G gehenden, zu $\mathfrak{e}$ parallelen Geraden bei der Bewegung des Dreibeins überstrichenen Strahlfläche

$$\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x}(s) + p\,\mathfrak{t}(s) + q\,\mathfrak{h}(s) + r\,\mathfrak{b}(s) + v[\alpha\,\mathfrak{b}(s) + \beta\,\mathfrak{h}(s) + \gamma\,\mathfrak{b}(s)] = \\ = \mathfrak{y}(s) + v\,\mathfrak{e}(s). \tag{37}$$

Ist $\mathfrak{e}$ ein Einsvektor bzw. ein isotroper Vektor, so gilt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ bzw. } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \tag{38}$$

Berechnet man nach (5) den Drall d von (37), so gilt, wenn K und T die Krümmung bzw. Torsion von c ist

$$AK^2 + BT^2 + CKT + DK + ET = 0, \tag{39}$$

wobei gesetzt wurde

$$\varrho A = q\alpha\gamma - p\beta\gamma - d(\alpha^2 + \beta^2),\ \varrho B = -q\alpha\gamma + r\alpha\beta - d(\beta^2 + \gamma^2),$$
$$\varrho C = q(\alpha^2 - \gamma^2) - p\alpha\beta + r\beta\gamma + 2d\alpha\gamma,\ \varrho D = -\alpha\gamma,\ \varrho E = \beta^2 + \gamma^2). \tag{40}$$

Soll der Drall d von (37) konstant sein, so sind die Koeffizienten in (39) konstant. Besteht zwischen Krümmung und Torsion keine quadratische Beziehung mit konstanten Koeffizienten (*allgemeiner Fall*), so müssen sämtliche Koeffizienten von (39) verschwinden und das liefert unter Beachtung von (38) und (40) nur zwei isotrope Lösungen

$$\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x} \pm i\,d\,\mathfrak{t} + v(\mp i\,\mathfrak{y} + \mathfrak{b}). \tag{41}$$

Satz 8: *Die i. a. einzigen mit dem begleitenden Dreibein einer Kurve c starr verbundenen Geraden, die bei der Bewegung des Dreibeins längs c eine Strahlfläche konstanten Dralls $d(\neq 0)$ überstreichen, sind zwei die Tangente normal schneidende isotrope Geraden, die von der Normalebene den Abstand $\pm id$ und gegen die Schmiegebene die Böschung $\pm i$ besitzen.* Diese beiden Geraden sind übrigens im Abstand $\pm id$ parallel zu jenen beiden isotropen Geraden, die bei der Bewegung Torsen überstreichen.

Darüber hinaus gibt es bei *besonderen Raumkurven*, für die eine Beziehung der Art (39) besteht, noch andere Geraden, die zu Strahlflächen konstanten Dralls führen. Eine genaue Diskussion dieser Verallgemeinerung des Problems der „*Cesàrokurven*" wird an anderer Stelle erfolgen, ein Sonderfall soll hier behandelt werden.

Wir suchen jene Kurven, bei denen im begleitenden Dreibein feste, *zur Tangente parallele Geraden* existieren, die Strahlflächen konstanten Dralls ($\neq 0$) überstreichen. Dazu hat man in (37) $\beta = \gamma = 0$ zu setzen und damit wird aus (39) (für $K \neq 0$)

$$d\,K - q\,T = 0; \tag{42}$$

die Kurve c ist also eine *Böschungslinie* mit der konstanten Böschung

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{T}{K} = \frac{d}{q} \tag{43}$$

gegen die (i. f. horizontal gedachte) Bezugsebene. Alle ∞^2 zu einer

Tangente von c parallelen Geraden erzeugen bei der Bewegung des Dreibeins von c Strahlflächen konstanten Dralls, und zwar stimmt der Drall für je ∞^1 Flächen überein, deren erzeugenden Geraden die Normalebene in einer zur Binormalen parallelen Geraden ($q = q_0$) durchsetzen:

$$\mathfrak{X}(s, v) = \mathfrak{x}(s) + q_0\,\mathfrak{h} + r\,\mathfrak{b} + v\,\mathfrak{t} = \mathfrak{y}(s) + v\,\mathfrak{t}. \tag{44}$$

Die Striktionslinien dieser Flächen lauten unter Verwendung von (4) und (43)

$$\mathfrak{s}(s) = \mathfrak{y}(s) + r\,\mathrm{tg}\,\omega\,.\,\mathfrak{t}, \tag{45}$$

d. h. die Striktionslinien werden von den Punkten jener die Hauptnormale von c schneidenden Geraden erzeugt, die parallel zum *Darboux*-vektor

$$\mathfrak{d} = T\,\mathfrak{t} + K\,\mathfrak{b} = K(\mathrm{tg}\,\omega\,.\,\mathfrak{t} + \mathfrak{b}) \tag{46}$$

der Böschungslinie verläuft und daher lotrecht ist. Die auf diese Weise erzeugten Strahlflächen konstanten Dralls haben denselben Richtkegel wie die Kurve c, also einen Drehkegel (konische Krümmung $\tau : \varkappa = \mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{konst.}$). Windschiefe Strahlflächen konstanter konischer Krümmung mit konstantem Drall nennt *E. Kruppa* „*verallgemeinerte Böschungsflächen*" [3, S. 170].

Ist umgekehrt eine verallgemeinerte Böschungsfläche gegeben mit der Striktionslinie $\mathfrak{s}(u)$, so ist die Kurve

$$\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{s}(u) - d\frac{\varkappa}{\tau}\,\mathfrak{n} \tag{47}$$

eine Böschungslinie mit der Böschung $\mathrm{tg}\,\omega = \dfrac{\tau}{\varkappa}$, wie man leicht bestätigt.

Satz 9: *Jede mit dem begleitenden Dreibein einer Böschungslinie starr verbundene, zur Tangente einer Anfangslage parallele Gerade überstreicht bei Bewegung des Dreibeins längs der Böschungslinie eine verallgemeinerte Böschungsfläche. Die Striktionslinien dieser verallgemeinerten Böschungsflächen werden dabei von den Punkten einer lotrechten Ebenen durch die Hauptnormale der Anfangslage beschrieben. Umgekehrt kann jede verallgemeinerte Böschungsfläche so erzeugt werden.*

Nach **1** kann jede Strahlfläche konstanten Dralls in eine verallgemeinerte Böschungsfläche verbogen werden.

Literatur

[1] *R. Edlinger*, Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 132, 343—351. (1923).

[2] *E. Müller-J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Deuticke. (1931).

[3] *E. Kruppa*, Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzb. Akad. Wiss. Wien 157, 143—176. (1949).

[4] *E. Kruppa*, Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegung der Strahlflächen. Mh. Math. 55, 340—345. (1951).

[5] *K. Strubecker*, Differentialgeometrie I. Sammlung Göschen. (1955).

[6] *W. Schell-E. Salkowski*, Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl. Teubner. (1914).

[7] *E. Salkowski*, Die Cesàroschen Kurven. Sitzb. Akad. Wiss. München 524. (1911).

[8] *E. Kruppa*, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer. (1957).

[9] *E. Fabry*, Sur les courbes algébriques à torsion constante. Ann. de l'Éc. Norm. IX, 177—196. (1892).

[10] *G. Herberich*, Eine neue Klasse von reellen algebraischen Raumkurven konstanter Torsion. Progr. Luitpoldrealschule München. (1904).

Eine topologische Konstante

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 2. April 1958)

Seien $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_s$ stetige eindeutige reelle Funktionen. Jedes f_i und ebenso jedes g_i hänge von r reellen Parametern $x_1, \ldots, x_r$ ab. Der Argumentbereich der Punkte $p = (x_1, \ldots, x_r)$ sei eine im r-dimensionalen Euklidischen Raume gelegene m-dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit M. Es bezeichne $f(p)$ den Punkt $(f_1(p), \ldots, f_s(p))$ und $g(p)$ den Punkt $(g_1(p), \ldots, g_s(p))$ des s-dimensionalen Euklidischen Raumes E_s. Weiter existiere in E_s eine n-dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit N derart, daß der Wertevorrat von f und ebenso von g in N liegt. Hierauf soll die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$f_1(x_1, \ldots, x_r) = g_1(x_1, \ldots, x_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_s(x_1, \ldots, x_r) = g_s(x_1, \ldots, x_r)$$

untersucht werden. Sind etwa die f_i linear und die g_i konstant, so läßt sich das Lösungsgebilde des Systems $\Sigma\, a_{1i}\, x_i = \beta_1, \ldots, \Sigma\, a_{si}\, x_i = \beta_s$ mit elementaren Hilfsmitteln der analytischen Geometrie beschreiben.

Bezeichne A die Menge aller Punkte p aus M mit $f(p) = g(p)$. Die Menge A ist kompakt, wie unten gezeigt wird. Sind $a \neq b$ Punkte aus A und $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine a mit b innerhalb M verbindende Kurve, so mögen a und b zwei *„adäquate"* Punkte inbezug auf (f, g) heißen, *wenn die geschlossene Kurve*

$$(f(c^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau), 1 > \tau \geqslant 0)$$

innerhalb N nullhomolog ist. Man bestätigt leicht: sind a_1, a_2 adäquate Punkte und a_2, a_3 adäquate Punkte von (f, g), so sind auch a_1, a_3 adäquat. Es zerfällt also A in Adäquanzklassen, in Homologieadäquanzen, wie wir auch sagen wollen. Unten wird gezeigt: die Anzahl ζ der Adäquanzklassen von A ist endlich.

Sind $A_1, A_2, \ldots$ die Adäquanzklassen von A, so ist jedes A_i kompakt, und es existiert eine positive Zahl ε, so daß der Abstand $d(A_j, a_k) > \varepsilon$ für alle $j \neq k$. Bezeichnen $B_{m-n}(N)$ die $(m-n)$-dimensionale ganzzahlige Bettigruppe von N und B^0_{m-n} das Nullelement von $B_{m-n}(N)$, so ist unten eine eindeutige Abbildung ψ definiert, die jedem A_i ein Element $\psi(A_i)$ aus $B_{m-n}(N)$ zuordnet. Diejenigen A_i, für die

$$\psi(A) \neq B^0_{m-n},$$

mögen $A_1', A_2', \ldots$ heißen. Und es sei ζ' die Anzahl der A_i'. Dann gilt: *sind f' eine zu f und g' eine zu g homotope Abbildung von M in N, so hat die Gleichung $f'(p) = g'(p)$ wenigstens ζ' Lösungen.*

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, zunächst die Abbildung ψ zu definieren und hierauf zu zeigen, daß die Definition möglich ist, sie beschränkt sich auf gewisse *Existenz*beweise. Die *Eindeutigkeit* der Definition wird in einer Fortsetzung bewiesen. Dabei ergibt sich, daß aus der Eindeutigkeit auch gleichzeitig die Homotopieinvarianz der oben definierten Zahl ζ' folgt. Für die weiteren Überlegungen bieten die Fälle mit $\dim P < \dim Q$ aus dem gleichen Grunde kein Interesse, aus dem etwa die Homotopietheorie der Sphären für Sphären S, T mit $\dim S < \dim T$ gegenstandslos ist.

1. Homologie- und Homotopieadäquanz

Zur Bezeichnungsweise im allgemeinen vergleiche man [3]. Die weiterhin benutzten Simplexe sind offen und gradlinig. Sind A ein solches Simplex und t eine topologische Abbildung von $\overline{A}$ in einen Euklidischen Raum E, so heiße $t(\overline{A} - A)$ Sphäre; wenn t überdies simplizial, so nennen wir $t(A)$ Zelle. Wenn B, C Mengen aus E, so ist $d(B, C)$ der Abstand dieser Mengen und $d(B)$ der Durchmesser von B. Für eindeutige Abbildungen f, f' von B in C bedeute $\sigma(f, f')$ die Menge aller Punkte p aus B mit $f(p) = f'(p)$. *Außer den Zeichen d und σ seien noch m, n, M, N, M^*, N^* bis zum Schluß dieser Arbeit festgelegt*: und zwar m, n, M, N wie in der Einleitung, M^* als eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M und N^* als eine solche von N.

Seien f, f' stetige Abbildungen von M in N und $(f^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine Homotopie stetiger Abbildungen von M in N mit $f^0 = f$, $f^1 = f'$ und den weiteren Eigenschaften:

$$f^0(p) = f^\tau(p) \text{ für alle } \tau, \text{ wenn } f(p) = f'(p);$$
$$f^0(p) \neq f^\tau(p) \text{ für alle } \tau > 0, \text{ wenn } f(p) \neq f'(p).$$

Dann mögen f, f' miteinander „*verwandte*" Abbildungen heißen.

Sind A ein $(m-n)$-Simplex, B ein n-Simplex und $A.B$ ein Punkt a, so existieren Punkte $a_1, \ldots, a_m$ derart, daß die Punkte $a, a_1, \ldots, a_m$ linear unabhängig sind und

$$a_i \in A \text{ für } i \leqslant m-n,\ a_i \in B \text{ für } i > m-n.$$

Weiter seien C ein $A+B$ enthaltendes m-Simplex, D ein n-Simplex, A^* die von $(a\, a_1 \ldots a_{m-n})$ in A, B^* die von $(a\, a_{m-n+1} \ldots a_m)$ in B und C^* die von $(a, a_1 \ldots a_m)$ in C induzierte Orientierung, D^* eine Orientierung von D. Seien ferner f, g stetige Abbildungen von $\overline{C}$ in D mit $\sigma(f,g) = \overline{A}$ und $h(p)$ für $p \in \overline{B} - B$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{D} - D$ aus $g(p)$, schließlich x die von B^* in $\overline{B} - B$ und y die von D^* in $\overline{D} - D$ induzierte Orientierung. Dann heiße der klassische [4] Grad der Abbildung $h: x \to y$ auch der *„Grad"* schlechthin von B^* bezüglich (f, g, C^*, D^*).

Wenn φ, γ stetige Abbildungen von M in N, E ein in $\sigma(\varphi,\gamma)$ gelegenes $(m-n)$-Simplex, E inbezug auf $\sigma(\varphi,\gamma)$ offen und E^* eine Orientierung von E bezeichnen, so heiße der Grad von E^* bezüglich $(\varphi, \gamma, M^*, N^*)$ auch kürzer der Grad von E^* bei (φ,γ).

Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, A die Menge $\sigma(f,g)$, ferner a, b Punkte aus A und existiert in M eine a mit b verbindende Kurve $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ derart, daß

$$(f(c^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau), 1 > \tau \geqslant 0)$$

innerhalb N nullhomolog ist, so ist a ein *„zu b adäquater"* Punkt. Diese Definition ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, vermittelt also eine Klasseneinteilung von A in *Homologie*adäquanzen. Ersetzt man im vorstehenden „homolog" durch „homotop", so ergeben sich *Homotopie*adäquanzen. Diese letzteren werden jedoch im folgenden nicht weiter untersucht; zum Falle $\dim M = \dim N = 2$ vergleiche man auch [5].

Seien f, g stetige Abbildungen von M in N, A eine Adäquanzklasse von (f,g) und U eine in M offene Menge mit $A \subset U$. Jede Adäquanzklasse $\neq A$ von (f,g) sei zu $\overline{U}$ fremd. Nach Satz 3 und Satz 4 gibt es eine mit g verwandte Abbildung γ von M in N derart, daß

$$g \mid M - U = \gamma \mid M - U$$

und daß die Menge $\sigma(f \mid U, \gamma \mid U)$ ein endliches Polyeder P einer Dimension $\leqslant m-n$ ist. Seien K eine simpliziale Zerlegung von P, ferner $A_1, A_2, \ldots$ die $(m-n)$-Simplexe von K, x_i eine Orientierung von A_i und ξ_i der Grad von x_i bei (f,γ). Nach Satz 5 ist

$$(\Sigma\, \xi_i\, x_i) = 0.$$

Somit stellt $\varphi(\Sigma\, \xi_i\, x_i) = \gamma(\Sigma\, \xi_i\, x_i)$ *einen* $(m - n)$*-dimensionalen stetigen ganzzahligen Zyklus in* N *dar. Das durch diesen Zyklus repräsentierte Element der* $(m - n)$*-dimensionalen ganzzahligen Bettigruppe* $B_{m-n}(N)$ *von* N *werde* X *genannt. Setzt man dann*

$$\psi(A) = X,$$

so ist ψ *die in der Einleitung benutzte Abbildung.* Offenbar kann *man* ψ als eine Abbildung von A in $B_{m-n}(N)$ auffassen: Wenn p ein Punkt aus A und A_p das p enthaltende A_i ist, braucht man ja nur $\psi(p) = \psi(A_p)$ zu setzen. Wie man sich leicht überlegt, gibt es eine positive Zahl ε, so daß

$$\psi(p) = \psi(p'), \text{ wenn nur } d(p, p') < \varepsilon.$$

Sind q, q' Punkte aus A mit $\psi(q) \neq \psi(q')$ und $(c^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ eine q mit q' verbindende Kurve in M, ferner Q das $(f(c^\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant 1;\ g(c^\tau), 1 > \tau \geqslant 0)$ enthaltende Element der ersten ganzzahligen Bettigruppe von N, so ist

$$Q \neq 0.$$

Es folgt jedoch aus $\psi(q) = \psi(q')$ nicht, daß q und q' im gleichen A_i liegen. Die Frage, ob man die A_i den Elementen einer gewissen endlichen Gruppe G derart eineindeutig zuordnen kann, daß ψ einen Homomorphismus: $G \to B_{m-n}(N)$ vermittelt (vergleiche hierzu [8]), wird im folgenden nicht mehr behandelt.

Satz 1. Das Lösungsgebilde ist kompakt, jede einzelne Adäquanzklasse ist kompakt.

Beweis. Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, A die Menge $\sigma(f, g)$, a ein Punkt aus $\overline{A}$ und ε eine positive Zahl, so gibt es einen Punkt a' in A mit $d(f(a), f(a')) < \varepsilon$ und $d(g(a), (g(a')) < \varepsilon$. Alsdann ist $d(f(a), g(a)) \leqslant \leqslant d(f(a), f(a')) + d(f(a'), g(a')) + d(g(a'), g(a))$, wegen $f(a') = g(a')$ daher $d(f(a), g(a)) < 2\,\varepsilon$ unabhängig von der besonderen Wahl der Zahl ε, somit $f(a) = g(a)$.

Seien nun B eine Adäquanzklasse von (f, g) und b ein Punkt aus $\overline{B}$. Dann existieren eine n-Zelle N_1 in N, ein Punkt b' in B und eine b, b' verbindende Kurve C in M, so daß

$$f(C) + g(C) \subset N_1.$$

Man braucht nur ein b' mit hinreichend kleinem $d(b, b')$ zu wählen. Die geschlossene Kurve $f(C) + g(C)$ ist innerhalb N_1 nullhomotop, also

gehören b und b' zur gleichen Adäquanzklasse, daher $b \in B$, wie behauptet.

Satz 2. Die Anzahl der Adäquanzklassen ist endlich.

Beweis. Seien also wieder f, g stetige Abbildungen von M in N und A die Menge $\sigma(f, g)$. Es bedeute $B(p)$ für jeden Punkt p aus A die p enthaltende Adäquanzklasse. Dann wollen wir zunächst zeigen: es gibt eine positive Zahl ε derart, daß

$$B(p) = B(p') \text{ für alle } p,\ p' \text{ mit } d(p, p') < \varepsilon.$$

Offenbar existiert eine positive Zahl δ, so daß zu jeder Teilmenge N_1 von N mit $d(N_1) < \delta$ eine n-Zelle N_2 mit $N_1 \subset N_2 \subset N$ existiert.

Hierauf gibt es eine positive Zahl ε mit der Eigenschaft: sind p, p' Punkte aus A und $d(p, p') < \varepsilon$, so liegt in M eine p und p' verbindende Kurve C mit $d(f(C) + g(C)) < \delta$. Nach der Erklärung von δ gibt es daher weiter eine n-Zelle N_3, so daß $f(C) + g(C) \subset N_3 \subset N$. Daher ist die geschlossene Kurve $f(C) + g(C)$ in N nullhomotop, mithin p zu p' adäquat.

Angenommen nun, es seien $A_1, A_2, \ldots$ paarweis verschiedene abzählbar unendlich viele Adäquanzklassen von A. Bedeutet hierauf a_i einen Punkt aus A_i, so gibt es einen Punkt a in A, der Häufungspunkt der a_i ist. Dann liegt aber in jeder Nähe von a ein Punkt a' mit $B(a) \neq B(a')$: ein Widerspruch zur Erklärung von ε.

2. Geometrische Approximation der Adäquanzklassen

Bolzanoscher Nullstellensatz, Brouwerscher Fixpunktsatz und Abwandlungen des letzteren (vergleiche etwa [1]) gestatten Verallgemeinerungen auf Mannigfaltigkeiten und Kompakten. Auch unser obige Satz läßt sich als eine Verallgemeinerung der vorgenannten klassischen Sätze deuten. — Die Adäquanzklassen, die kompakte Mengen sind, sollen zunächst durch Polyeder einer Dimension $\leqslant m - n$ approximiert werden.

Satz 3. Seien U eine in M offene Menge, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N mit $\sigma(f, g) \neq 0$ und $\sigma(f \mid \overline{U} - U, g \mid \overline{U} - U) = 0$. Dann gibt es eine stetige Abbildung γ von M in N mit $d(g, \gamma) < \varepsilon$ und $g \mid \overline{U} - U = \gamma \mid \overline{U} - U$ derart, daß $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqslant m - n$.

Beweis. Bezeichne A die Menge $\sigma(f, g)$. Nach Hilfssatz 1 existieren eine in M offene Menge V, so daß $A \subset V \subset U$ und $\overline{V}$ ein endliches Polyeder ist, und eine simpliziale Zerlegung K von $\overline{V}$ mit der Eigen-

schaft: zu jedem Simplex S aus K gibt es eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens

$$dZ(S) < \varepsilon,\ f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$$

und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Die in V gelegenen nichtleeren Simplexe aus K ordnen wir so in eine Reihe $S_1, S_2, \ldots, S_r$, daß für alle i die Beziehung

$$\dim S_i \leqslant \dim S_{i+1}$$

gilt. Weiter setzen wir $\gamma \mid \overline{U} - V = g \mid \overline{U} - V$. Wegen $\dim S_1 = 0$ ist $Z(S_1) - f(S_1) \neq 0$. Sei $\gamma_1(S_1)$ ein Punkt aus $Z(S_1) - f(S_1)$ und $\gamma_1 \mid \overline{V} - V = g \mid \overline{V} - V$.

Es bedeute nun j eine der Zahlen $1, \ldots, r-1$. Wir machen die für $j = 1$ richtige Annahme, es existiere eine stetige Abbildung

$$\gamma_j : (\overline{V} - V) + \Sigma_{i=1}^{j} S_i \to N,$$

die auf $\overline{V} - V$ mit g übereinstimmt und die weiteren Eigenschaften (1_j) bis (3_j) hat.

(1_j). Für alle i ist $\gamma_j(S_i) \subset Z(S_i)$.

(2_j). Es ist $\sigma(f, \gamma_j)$ ein endliches Polyeder P.

(3_j). Wenn $\dim S_i < n$, so ist $P \,.\, S_i$ leer. Wenn $\dim S_i \geqslant n$, so ist $\dim P.S_i \leqslant (\dim S_i) - n$.

Auf $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ ist γ_j erklärt. Sind $T_1, T_2, \ldots$ die in $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ gelegenen Simplexe aus K, so ist

$$\gamma_j(T_i) \subset Z(T_i) \text{ für alle } i.$$

Andererseits ist $Z(T_i) \subset Z(S_{j+1})$ für alle i. Mithin

$$\gamma_j(\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}) \subset Z(S_{j+1}).$$

Wegen (2_j) ist die Menge B aller Punkte p aus $\overline{S}_{j+1} - S_{j+1}$ mit $f(p) = \gamma_j(p)$ ein endliches Polyeder.

Wenn $\dim S_{j+1} \leqslant n$, so ist B nach (3_j) leer; in allen übrigen Fällen gilt nach (3_j) die Ungleichung

$$\dim B \leqslant (\dim S_{j+1}) - (n+1).$$

Wir wenden nunmehr den nachstehenden Hilfssatz 2 an.

Dieser liefert eine stetige Abbildung φ von $\overline{S}_{j+1}$ in $Z(S_{j+1})$, die auf $\overline{Z}_{j+1} - Z_{j+1}$ mit γ_j übereinstimmt und die weiteren Eigenschaften hat: die Menge C aller Punkte $p \in \overline{S}_{j+1}$ mit $f(p) = \varphi(p)$ ist ein endliches Polyeder; für $\dim S_{j+1} < n$ ist C leer, sonst

$$\dim C \leqslant (\dim B) + 1.$$

Setzt man hierauf $\gamma_{j+1}(p) = \gamma_j(p)$ in allen Punkten p, für die $\gamma_j(p)$ definiert ist, und $\gamma_{j+1} \mid \overline{S}_{j+1} = \varphi$, so ist

$$\gamma_{j+1} : (\overline{V} - V) + \Sigma_{i=1}^{j+1} S_i \to N$$

eine stetige Abbildung, die die Eigenschaften (1_{j+1}) bis (3_{j+1}) hat.

Sei $\gamma \mid \overline{V} = \gamma_r$. Da $g(\overline{S}) + \gamma(\overline{S}) \subset Z(S)$ und $dZ(S) < \varepsilon$ für jedes Simplex S aus K, ist $d(g, \gamma) < \varepsilon$. Wegen (2_r) und (3_r) ist $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leqq m - n$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Hilfssatz 1. Seien U eine in M offene Menge, ε eine positive Zahl und f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N mit $f(p) \neq g(p)$ für alle Punkte $p \in \overline{U} - U$. Dann existieren eine in M offene Menge V, so daß $\sigma(f, g) \subset V \subset U$ und $\overline{V}$ ein endliches Polyeder ist, und eine simpliziale Zerlegung K von $\overline{V}$ mit der Eigenschaft: zu jedem Simplex S aus K gibt es eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens

$$dZ(S) < \varepsilon, \quad f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$$

und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Beweis. Wenn die Menge $\sigma(f, g)$, die auch A heiße, leer, so ist nichts weiter zu beweisen. Seien nun $A \neq 0$ und r die Anzahl der echten Seiten eines n-Simplexes.

Dann gibt es Zahlen $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_m < \varepsilon$, die die Eigenschaften haben: wenn i eine der Zahlen $0, \ldots, m - 1$ und N_1 eine Teilmenge von N mit $d(N_1) < (r + 1)\, \varepsilon_i$, so existiert eine n-Zelle N_2 in N mit

$$N_1 \subset N_2 \text{ und } d(N_2) < \varepsilon_{i+1}.$$

Man braucht nur für alle i die Zahl ε_i hinreichend klein gegenüber ε_{i+1} zu wählen.

Sind nun V eine in M offene Menge mit $A \subset V \subset U$, $\overline{V}$ ein endliches Polyeder, K eine hinreichend feine simpliziale Zerlegung von $\overline{V}$ und V eine hinreichend gute Approximation von A, so erfüllt jedes Simplex S aus K die Relation

$$d(f(S) + g(S)) < \varepsilon_0,$$

und es gilt außerdem: zu jedem Eckpunkt e von K gibt es eine n-Zelle $Z(e)$ in N mit $f(e) \in Z(e)$, $g(e) \in Z(e)$ und $dZ(e) < \varepsilon_0$.

Sei j eine der Zahlen $0, \ldots, m - 1$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, zu jedem Simplex S aus K mit $\dim S \leqq j$ existiere eine n-Zelle $Z(S)$ in N, so daß erstens $dZ(S) < \varepsilon_j$, $f(\overline{S}) + g(\overline{S}) \subset Z(S)$ und zweitens $Z(S') \subset Z(S)$ für jede Seite S' von S.

Hierauf bezeichne S_{j+1} ein $(j+1)$-Simplex aus K, und es seien S^i_{j+1} die echten Seiten von S_{j+1}. Dann hat die Menge

$$f(S_{j+1}) + g(S_{j+1}) + \Sigma_i Z(S^i_{j+1})$$

einen Durchmesser $< \varepsilon_0 + r\,\varepsilon_j < (r+1)\,\varepsilon_j$. Also gibt es in N eine n-Zelle $Z(S_{j+1})$, die die vorgenannte Menge enthält und einen Durchmesser $< \varepsilon_{j+1}$ hat.

Somit sind V und K von der verlangten Art.

Hilfssatz 2. Seien α, β natürliche Zahlen, A ein α-Simplex, B der β-dimensionale Euklidische Raum, ferner f, g stetige Abbildungen von $\overline{A}$ in B und $\sigma(f \mid \overline{A} - A,\ g \mid \overline{A} - A)$ ein endliches Polyeder C. Wenn $\alpha \leqslant \beta$, so sei C leer. Dann existiert eine stetige Abbildung γ von $\overline{A}$ in B mit $g \mid \overline{A} - A = \gamma \mid \overline{A} - A$ und den weiteren Eigenschaften: für $\alpha < \beta$ ist $\sigma(f, \gamma)$ leer, sonst ist $\sigma(f, \gamma)$ ein endliches Polyeder D und dim D = $= (\dim C) + 1$.

Beweis. Zunächst seien q ein Punkt aus A und $\gamma^*(q) = f(q)$; für $p \in \overline{A} - q$ weiter $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{A} - q$ aus q und $\lambda(p)$ die Zahl $d(p, q) \,/\, (d(p, q) + d(p, \overline{A} - A))$, alsdann $\gamma^*(p)$ der Punkt $f(p) + \lambda(p)\,(gw(p) - fw(p))$.

Wenn $\alpha \geqslant \beta$, so kann man $\gamma = \gamma^*$ setzen.

Sei nunmehr $\alpha < \beta$. Dann ist $\sigma(f, \gamma^*) = q$.

Es bedeute A_q ein α-Simplex mit $q \in A_q$ und $\overline{A}_q \subset A$. Für alle Punkte p aus $\overline{A}$ seien $\mu(p)$ die Zahl

$$d(p,\ q + (\overline{A} - A)) \,/\, [d(p, q + (\overline{A} - A)) + d(p, \overline{A}_q - A_q)]$$

und $\delta(p)$ die Zahl $d(f(p), f^*(p))$. Hierauf setzen wir $\gamma'(q) = \gamma^*(q)$, für $p \in \overline{A} - q$ weiter

$$\gamma'(p) = f(p) + \frac{1}{\delta(p)}\,(\gamma^*(p) - f(p))\,[\mu(p) + (1 - \mu(p))\,\delta(p)].$$

Dann stimmen die Abbildungen g und γ' auf $\overline{A} - A$ überein, es ist $\sigma(f, \gamma') = q$ und

$$d(f(p),\ \gamma'(p)) = 1 \text{ für } p \in \overline{A}_q - A_q.$$

Man kann nun zunächst $\gamma \mid \overline{A} - A_q = \gamma' \mid \overline{A} - A_q$ setzen.

Bedeutet S die $(\beta - 1)$-dimensionale Einheitssphäre, so wird durch $\varphi(p) = \gamma'(p) - f(p)$, $p \in \overline{A}_q - A_q$, eine stetige Abbildung φ der $(\alpha - 1)$-Sphäre $\overline{A}_q - A_q$ in S bestimmt. Wegen $\alpha < \beta$ ist φ unwesentlich. Daher gibt es eine stetige Abbildung

$$\varphi' : \overline{A}_q \to S,$$

die auf $\overline{A}_q - A_q$ mit φ übereinstimmt. Hierauf kann man $\gamma(p) = f(p) + \varphi'(p)$ für $p \in \overline{A}_q$ setzen.

Man bestätigt leicht:

Satz 4. Zu jeder stetigen Abbildung f von M in N existiert eine positive Zahl ε derart, daß jede stetige Abbildung f' von M in N, für die $d(f, f') < \varepsilon$ gilt, mit f verwandt ist.

3. Repräsentation der Homologieadäquanzen durch (m—n)-Zyklen

Die schon eingangs definierten Adäquanzklassen sollen nun durch ganzzahlige $(m - n)$-dimensionale endliche Euklidische Zyklen approximiert werden. Auf die Möglichkeit, die Adäquanzklassen als unendliche Vietoriszyklen [10] oder als singuläre Zyklen [9] zu deuten, sei wenigstens hingewiesen.

Satz 5. Seien U eine in M offene Menge, P ein in U gelegenes $(m - n)$-dimensionales endliches Polyeder, K eine simpliziale Zerlegung von P, weiter $A_1, A_2, \ldots$ die $(m - n)$-Simplexe von K und x_i eine Orientierung von A_i. Ferner seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{U}$ in N, $\sigma(f, g) = P$ und ξ_i der Grad von x_i bei (f, g). Dann ist $\Sigma\, \xi_i\, x_i$ ein $(m - n)$-dimensionaler ganzzahliger Zyklus.

Beweis. Bezeichnet B ein $(m - n - 1)$-Simplex aus K, das Seite von wenigstens einem A_i ist, so seien $A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}$ die A_i mit B als Seite, ferner y_{j_i} die von x_{j_i} in B induzierte Orientierung. Es bedeute y eine weitere Orientierung von B, und es sei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem y und y_{j_i} gleich orientiert sind oder nicht. Zum Nachweis von Satz 5 ist dann zu zeigen, daß

$$\Sigma_i\, \varepsilon_i\, \xi_{j_i} = 0.$$

Die letztere Gleichung folgt, wenn $r = 1$, aus Satz 6, wenn $r > 1$, aus Satz 7.

Satz 6. Seien S ein m-Simplex, T ein n-Simplex, A ein $(m - n)$-Simplex, B eine $(m - n - 1)$-Seite von A und $A + B \subset S$. Ferner seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in $\overline{T}$ mit $\sigma(f, g) = \overline{A}$. Dann ist der Grad von A bei (f, g) gleich Null.

Beweis. Ist q ein Punkt aus A, so gibt es von τ stetig abhängende n-Simplexe C^τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, in S derart, daß $\overline{A}.(\overline{C}^\tau - C^\tau) = 0$ für alle τ, $\overline{A}.C^0$ leer und $\overline{A}.C^1 = q$. Für alle (p, τ) mit $p \in \overline{C}^\tau - C^\tau$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ sei $h^\tau(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$. Dann

ist die Abbildung $h^0 : \overline{C}^0 - C^0 \to \overline{T} - T$ unwesentlich, daher auch h^1 unwesentlich und also Satz 6 richtig.

Satz 7. Seien S ein m-Simplex, T ein n-Simplex, B ein $(m-n-1)$-Simplex in S und $A_1, A_2, \ldots$ endlich viele paarweis zueinander fremde $(m-n)$-Simplexe aus S mit B als gemeinsamer Seite, ferner A_i^*, B^*, S^*, T^* beziehungsweise eine Orientierung von A_i, B, S, T, schließlich B_i^* die von A_i^* in B induzierte Orientierung. Weiter seien f, g stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in $\overline{T}$, $\sigma(f, g) = \Sigma \overline{A}_i$ und α_i der Grad von A_i^* bezüglich (f, g, S^*, T^*). Dann ist

$$\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0,$$

wobei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem B^* und B_i^* gleich orientiert sind oder nicht.

Beweis. Es liege S in dem m-dimensionalen Euklidischen Raume E, seien H eine B enthaltende $(m-1)$-dimensionale Ebene und H_1, H_2 die beiden offenen Halbräume, aus denen $E - H$ besteht. Man kann annehmen, daß

$$A_1 \subset H_1 \text{ und } A_i \subset H_2 \text{ für } i > 1.$$

Es läßt sich weiter annehmen, daß die Trägerebene von ΣA_i die Dimension $m - n + 1$ hat.

Hierauf existieren ein $(n+1)$-dimensionaler offener Würfel U in S und einander gegenüberliegende offene n-Seiten V, W von U mit den Eigenschaften: der Mittelpunkt q von U liegt in B, für alle i ist der Durchschnitt $A_i . (\overline{U} - U)$ ein Punkt a_i, ferner

$$a_1 \in V \text{ und } a_i \in W \text{ für } i > 1.$$

Weiter sei jedem a_i eine Euklidische $(n-1)$-Sphäre X_i mit a_i als Mittelpunkt zugeordnet, so daß

$$X_1 \subset V \text{ und } X_i \subset W \text{ für } i > 1$$

und daß die $X_1, X_2, \ldots$ paarweis zueinander fremd sind. Für $p \in X_i$ sei $h_i(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$.

Es bezeichne U^* eine Orientierung von U und W^* die von U^* in W induzierte Orientierung. Ist Y_i die konvexe Hülle von X_i und Y_i^* die von U^* in Y_i induzierte Orientierung, so bedeute X_i^* die von Y_i^* in X_i induzierte Orientierung. Seien T' die von T^* in $\overline{T} - T$ induzierte Orientierung und ξ_i der Grad der Abbildung

$$h_i : X_i^* \to T'.$$

Dann gilt, wie wir nunmehr zeigen wollen, $\xi_1 = -\Sigma_{i>1} \xi_i$. Auf die letzte

Gleichung soll anschließend die Beziehung $\Sigma\, \alpha_i\, \varepsilon_i = 0$ zurückgeführt werden.

Für jeden Punkt p aus $\overline{W} - W$ bezeichne $h(p)$ die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$. Seien W' die von W^* in die $(n-1)$-Sphäre $\overline{W} - W$ induzierte Orientierung und ξ der Grad der Abbildung

$$h: W' \to T'.$$

Da die Punkte $a_2, a_3, \ldots$ die einzigen Punkte p aus $\overline{W}$ mit $f(p) = g(p)$ sind, ist

$$\xi = \Sigma_{i>1}\, \xi_i,$$

das heißt der Grad von h gleich der Summe der Grade der Abbildungen $h_2, h_3, \ldots$

Offenbar gibt es auf $\overline{U} - U$ von τ stetig abhängende $(n-1)$-Sphären $(Z^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ mit $Z^0 = X_1, Z^1 = \overline{W} - W$ und der Eigenschaft, daß $f(p) \neq g(p)$ in allen (p, τ), für die $p \in Z^\tau$ und $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Bezeichnet daher $h^\tau(p)$ in allen (p, τ) der vorgenannten Art die Projektion von $f(p)$ auf $\overline{T} - T$ aus $g(p)$, so ist $h^0 = h_1$ und $h^1 = h$. Wenn W'' die von $X_1{}^*$ vermöge $(Z^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ in $\overline{W} - W$ induzierte Orientierung, so gilt

$$W' = -\, W''.$$

Der Grad ändert sich längs der Homotopie $(h^\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ nicht. Mithin

$$\xi_1 = -\, \xi,$$

somit $\xi_1 = -\, \Sigma_{i>1}\, \xi_i$, wie behauptet.

Sind $n_1 + n_2 = n_3$ natürliche Zahlen, S_i ein n_i-Simplex, p ein Punkt aus S_3, der Durchschnitt $S_1 \,.\, S_2 = p$, $S_1 + S_2 \subset S_3$, weiter

$$p, p_1, p_2, \ldots, p_{n_3}$$

linear unabhängige Punkte mit $p_i \in S_1$ für $i \leqslant n_1$ und $p_i \in S_2$ für $i > n_1$, ferner $S_1{}^*$ die Orientierung $(p\, p_1 \ldots p_{n_1})$ von S_1, $S_2{}^*$ die Orientierung $(p\, p_{n_1+1} \ldots p_{n_3})$ von S_2 und $S_3{}^*$ die Orientierung $(p\, p_1 \ldots p_{n_3})$ von S_3, so heiße $S_1{}^*$ auch „die von $(S_2{}^*, S_3{}^*)$ in S_1 induzierte Orientierung".

Wenn A_j eines der Simplexe A_i und $A_j{}^*$ durch die entgegengesetzte Orientierung ersetzt wird, so wechselt sowohl α_j wie ε_j das Vorzeichen. Zum Beweis der Gleichung $\Sigma\, \alpha_i\, \varepsilon_i = 0$ kann man daher statt der vorgegebenen Orientierungen $A_i{}^*$ auch andere Orientierungen der A_i zugrundelegen.

Dies soll nun geschehen: Es sei A_i' die von $(Y_i{}^*, S^*)$ in A_i induzierte Orientierung und α_i' der Grad von A_i' bezüglich (f, g, S^*, T^*). Dann ist

$$\alpha_i' = \xi_i \text{ für alle } i, \text{ also } \alpha_1' = -\, \Sigma_{i>1}\, \alpha_i'.$$

Bedeutet B_i' die von A_i' in B induzierte Orientierung, so ist

$$B_1' = -B_i' \text{ für } i > 1.$$

Wenn ε_i' gleich 1 oder -1, je nachdem B^* und B_i' gleich orientiert sind oder nicht, so ist daher weiter

$$\varepsilon_1' = -\varepsilon_i' \text{ für } i > 1,$$

mithin $\Sigma \alpha_i' \varepsilon_i' = 0$ oder $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = 0$, was zu beweisen war.

Sind f, g stetige Abbildungen von M in N, so entspricht ihnen nach den Ausführungen der Einleitung ein gewisser sämtliche Adäquanzklassen repräsentierender $(m-n)$-Zyklus. Sind nun f' eine zu f und g' eine zu g homotope Abbildung, so entspricht auch dem Abbildungspaar (f, f') ein $(m-n)$-Zyklus z_f und dem Paar (g, g') ein $(m-n)$-Zyklus z_g. Hierauf erhebt sich die Frage, ob z_f und z_g homolog sind, wenn f und g homolog. Wenn $g(M)$ ein Punkt aus N, so gelangt man zu Fragen, die für die Ebene mit Problemen aus [6] und [7] verwandt sind. Die obige Voraussetzung, M und N seien orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeiten, dient lediglich dem Zwecke, die folgenden Beweise abzukürzen; wenn man allgemeinere Mengen zugrundelegt, etwa Retrakte im Sinne von [2], bleiben die obigen Sätze mutatis mutandis richtig.

Literatur

[1] *G. Aumann:* Reelle Funktionen. Berlin (1954), 192–196.

[2] *K. Borsuk:* Sur les rétractes. Fund. Math. 17 (1931), 152–170.

[3] *N. Bourbaki:* Topologie générale, Dictionnaire. Actualités Sci. et Ind. 1084 (1949), 73–99.

[4] *L. E. J. Brouwer:* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71 (1912), 97–115.

[5] *S. Bundegaard* und *J. Nielsen:* Vereinheitlichte Beweise einiger Sätze aus der Flächentopologie. Mat. Tidsskr. B (1946), 1–16.

[6] *M. Dolcher:* Due teoremi sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni piane continue. Rend. Mat. Padova 17 (1948), 97–101.

[7] *T. Rado* und *P. V. Reichelderfer:* Continuous Transformations in Analysis. Grundlehren d. math. Wiss. 75 (1955).

[8] *B. Segre:* Lezioni di geometria moderna. Bologna (1948), 22–30.

[9] *H. Seifert* und *W. Threlfal:* Lehrbuch der Topologie. Leipzig (1934).

[10] *L. Vietoris:* Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. 97 (1927), 454–472.

On the Minimum Order of Graphs with Given Automorphism Group*

By

Gert Sabidussi, New Orleans, La., USA.

(*Received May 16, 1958*)

1. Introduction

Given a finite group G define $\alpha(G)$ to be min $\alpha_0(X)$, the minimum taken over all graphs X whose automorphism group $G(X)$ is isomorphic to G ($\alpha_0(X)$ denotes the number of vertices of X). By a *graph* X we mean a *finite* set $V(X)$ (the set of *vertices* of X) together with a set $E(X)$ (the set of *edges* of X) of unordered pairs of *distinct* elements of $V(X)$. We shall indicate unordered pairs by brackets. The automorphism group of a graph X, i. e. the group of all one-one functions φ of $V(X)$ onto $V(X)$ such that $[x, y] \varepsilon E(X)$ implies $[\varphi x, \varphi y] \varepsilon E(X)$, will be denoted by $G(X)$.

It is known ([1], p. 377) that

$$\alpha(G) = O(mn),$$

where m is the order of G, and n is the minimal number of generators of G. More precisely, $\alpha(G) \leqq 2\,mn$, if $n \geqq 2$. By refining the method of [1] we shall prove:

Theorem 1: $\alpha(G) = O(m \log n)$.

In view of the fact that $n = O(\log m)$ (cf. [1], p. 378) we have:

Corollary: $\alpha(G) = O(m \log \log m)$.

The proof consists of constructing a graph X such that $G(X) \cong G$, and $\alpha_0(X) = O(m \log n)$. Concerning the construction of X two facts should be emphasized. First, our method always yields a result of the form $\alpha(G) \leqq m\,f(n)$. Hence, no matter how effectively $f(n)$ can be improved upon, one cannot hope to obtain anything like a best possible

* Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America.

estimate (for the symmetric group S_m of order $m!$, $\alpha(S_m) = m$, while our method gives $\alpha(S_m) \leqq m!\, f(2)$). Second, it appears that the result $f(n) = O(\log n)$ cannot be further refined in any substantial way; for instance, it seems to be impossible to obtain $f(n) = O(\log \log n)$.

In the simple case that G is the cyclic group Z_m of order m it is known ([1], p. 371) that $\alpha(Z_3) \leqq 10$, and $\alpha(Z_m) \leqq 3\,m$ if $m \geqq 4$.
With little effort one obtains:

Theorem 2:

$$\alpha(Z_m) = \begin{cases} 2, & \text{if } m = 2 \\ 3\,m, & \text{if } m = 3, 4, 5 \\ 2\,m, & \text{if } m = p^e \geqq 7, \text{ where } p \text{ is prime} \\ \alpha(Z_{p_1^{e_1}}) + \ldots + \alpha(Z_{p_r^{e_r}}), & \text{if } m = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}, \\ \text{where } p_1, \ldots, p_r \text{ are distinct primes.} & \end{cases}$$

2. Proof of Theorem 1

Let w be a given positive integer. By $M_1, \ldots, M_r$, $r = 2^w - 1$, denote the non-empty subsets of the set $M = \{1, \ldots, w\}$, and form all products $M_{i_k} \times M_{j_k}$, $1 \leqq i_k \leqq r$, $1 \leqq j_k \leqq r$, $k = 1, \ldots, r^2$. Given a finite group G of order m, let w be the smallest positive integer for which $r^2 \geqq n$, where n is the minimum number of generators of G. Clearly $w = O(\log n)$.

Now let $\{h_1, \ldots h_n\}$ be a set of generators of G, and define a graph X as follows:

$$V(X) = \{(g, i) \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w\} \cup \{(g, i') \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w + 1\},$$

$$\begin{aligned} E(X) = {} & \{[(g, i), (g, i')] \mid g \in G, 0 \leqq i \leqq w\} \cup \\ & \{[(g, i - 1), (g, i')] \mid g \in G, 1 \leqq i \leqq w + 1\} \cup \\ & \{[(g, 0), (g', 1)], [(g, 1), (g', 1)], [(g, (w + 1)'), (g', (w + 1)')] \mid \\ & g \in G, g' = gh_k, \ 1 \leqq k \leqq n\} \cup \\ & \{[(g, x), (g', y)] \mid g \in G, g' = gh_k, (x, y) \in M_{i_k} \times M_{j_k}, 1 \leqq k \leqq n\}. \end{aligned}$$

Note that $\alpha_0(X) = m(2\,w + 3) = O(m \log n)$. It remains to prove that $G(X) \cong G$. For any $g' \in G$ define $\varphi_{g'} : V(X) \to V(X)$ by $\varphi_{g'}(g, x) = (g'\,g, x)$, $g \in G$. Then clearly $G' = \{\varphi_{g'} \mid g' \in G\}$ is a subgroup of $G(X)$ isomorphic to G.

It is immediate from the definition of X that each $(g, 0')$, $g \in G$, is of degree 1; (g, x'), where $g \in G$, $x = 1, \ldots, w + 1$, is of degree 2; all other vertices of X are of degree $\geqq 2$. Let $\varphi \in G(X)$. Then $\varphi(g, 0')$ is of degree 1; hence $\varphi(g, 0') = (g', 0')$ for some $g' \in G$. $(g, 0)$ is the only vertex of X joined with $(g, 0')$. Likewise, $(g', 0)$ is the only vertex joined

with $(g', 0')$. Hence $\varphi(g, 0) = (g', 0)$. This in turn implies $\varphi(g, 1') = (g', 1')$, etc., and we obtain $\varphi(g, x) = (g', x)$ for all $x = 0', 0, 1', 1, \ldots, w, (w+1)'$. The crucial fact here is that at least every other vertex in the sequence $(g, 0'), (g, 0), (g, 1'), (g, 1), \ldots, (g, w), (g, (w+1)')$ is of degree 2.

Now let $\varphi \in G(X)$ be such that $\varphi(g, 0') = (g, 0')$ for some fixed $g \in G$. By the previous argument, $\varphi(g, x) = (g, x)$, $x = 0', 0, \ldots, w, (w+1)'$. Suppose $g', g'' \in G$ are such that $[(g, 1), (g', 1)]$ and $[(g, 1), (g'', 1)]$ are edges of X, and suppose that $\varphi(g', 1) = (g'', 1)$. Then either $g' = gh_k$, $g'' = gh_{k'}$ or $g' = gh_k^{-1}$, $g'' = gh_{k'}^{-1}$. Assume $g' = gh_k$. Then $\varphi(g', 1) = (g'', 1)$ implies $\varphi[(g, 0), (g', 1)] = [(g, 0), (g'', 1)] \in E(X)$. Hence by definition of $E(X)$, $g'' = gh_{k'}$. Similarly, if $g' = gh_k^{-1}$. Now $g' = gh_k$, $g'' = gh_{k'}$, and $g' = gh_k^{-1}$, $g'' = gh_{k'}^{-1}$ each imply $M_{i_k} = M_{i_{k'}}$, $M_{j_k} = M_{j_{k'}}$, whence $k = k'$, so that $g' = g''$. This shows that if (g', y) is joined with some (g, x) then (g', y) is invariant under φ. An inductive argument then proves that φ is the identity on the whole set $V(X)$.

Let $\psi \in G(X)$, $(g, x) \in V(X)$, then in view of the fact that $\psi(g, x) = (g', x)$ there is a $g'' \in G$ such that $\varphi_{g''} \psi(g, x) = (g, x)$. Hence $\varphi_{g''} \psi = 1$, so that $\psi \in G'$. Hence $G(X) = G' \cong G$.

3. Proof of Theorem 2

In view of the triviality of $\alpha(Z_2) = 2$, we can assume that $m \geqq 3$.

Case (1): $m = p^e \geqq 7$. Let $X(m)$ be the following graph:

$$V(X(m)) = \{1, \ldots, m, 1', \ldots, m'\},$$

$$E(X(m)) = \{[i, i+1], [i, i'], [i+1, i'], [i-2, i'] \mid 1 \leqq i \leqq m\},$$

where addition is modulo m.

Clearly $\psi: V(X(m)) \to V(X(m))$ given by $\psi\, i = i + 1$, $\psi\, i' = (i+1)'$, $i = 1, \ldots, m$, is an automorphism of $X(m)$; hence $G(X(m))$ contains a subgroup isomorphic to Z_m.

Note that the m-circuit C formed the vertices $1, \ldots, m$ is the only m-circuit of $X(m)$ whose vertices are of degree 5 in $X(m)$. Hence C remains invariant under all automorphisms of $X(m)$. In particular, if $\varphi \in G(X(m))$ is such that $\varphi\, i_0 = i_0$ for some $i_0 \in V(C)$, then either $\varphi \mid C = 1$ or $\varphi(i_0 + j) = i_0 - j$, $j = 1, \ldots, m$. Note that all 3-circuits of $X(m)$ are of the form $i, i+1, i'$, $1 \leqq i \leqq m$. Hence if $\varphi(i_0 + j) = i_0 - j$ it follows that $\varphi\, i_0' = (i_0 - 1)'$. But then $\varphi[i_0', i_0 - 2] = [(i_0 - 1)', i_0 + 2] \in E(X(m))$, a contradiction since $m \geqq 7$. Hence $\varphi \mid C = 1$, and therefore $\varphi = 1$. It follows that $G(X(m)) \cong Z_m$. $\alpha_0(X(m)) = 2m$, hence $\alpha(Z_m) \leqq 2m$.

To complete the proof that $\alpha(Z_m) = 2\,m$ assume that there is a graph Y with $G(Y) \cong Z_m$ and $\alpha_0(Y) < 2\,m$. Since $m = p^e$ it follows that if $\varphi \in G(Y)$ and $y \in V(Y)$, then either $y, \varphi\,y, \ldots, \varphi^{m-1}\,y$ are all distinct, or else $\varphi\,y = y$. In either case $G(Y) \cong D_{2m}$ (= the dihedral group of order $2\,m$), a contradiction. Hence $\alpha(Z_m) = 2\,m$.

Case (2): $m = 3, 4, 5$. Here we define $X(m)$ by

$$V(X(m)) = \{1, \ldots, m, 1', \ldots, m', 1'', \ldots, m''\},$$

$$E(X(m)) = \{[i, i+1], [i, i'], [i+1, i'], [i', i''], [i'', (i+1)''], [i'', i+1] \mid 1 \leqq i \leqq m\} \qquad \text{(addition modulo } m\text{)},\ m = 3, 4, 5.$$

Obviously $\alpha_0(X(m)) = 3\,m$. The proof that $G(X(m)) \cong Z_m$, and that $\alpha(Z_m) = 3\,m$ is similar to that in case (1).

Case (3): $m = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$. Consider the graph

$$X = X(p_1^{e_1}) + \ldots + X(p_r^{e_r}).$$

Since $X(m)$ and $X(m')$ are non-isomorphic whenever $m \neq m'$, it follows that

$$G(X) \cong G(X(p_1^{e_1})) \times \ldots \times G(X(p_r^{e_r})) \cong Z_{p_1^{e_1}} \times \ldots \times Z_{p_r^{e_r}} \cong Z_m.$$

Hence

$$\alpha(Z_m) \leqq \sum_{i=1}^{r} \alpha_0(X(p_i^{e_i})) = \sum_{i=1}^{r} \alpha(Z_{p_r^{e_r}}),$$

and an argument analogous to that in case (1) then shows that there is actual equality.

References

[1] *Frucht, R.*, Graphs of degree 3 with given abstract group. Canad. J. Math. **1** 365—378. (1949).

On Some Moments and Distributions Occurring in the Theory of Linear Stochastic Processes — II

By

Z. A. Lomnicki and **S. K. Zaremba**

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Received June 2nd, 1958)

13. Introduction to the second part

In the introduction to the first part* of the present paper the authors, mentioning the method of m-dependent variables as an alternative to their own line of attack, expressed the view, borne out by the subsequent publication of a very ingenious note by *Parzen* [26], that this method was capable of yielding further results concerning the various asymptotic distributions which arise in the theory of linear stochastic processes. Nevertheless, quite apart from the drawbacks which were pointed out in Section 1, and are inherent in the use of m-dependent variables, it is not quite clear how this method could be applied to statistics which, like most of those treated below, are much more complex than the expressions apparently contemplated by Parzen. On the other hand, a certain streamlining of the approach developed in Part I makes it possible to obtain the asymptotic moments and distributions of such statistics without making efforts greatly in excess of those which, in any case, would be required to obtain their asymptotic variances and covariances, while, owing to the device introduced in Section 8, higher moments of the random variables generating the process need not be postulated, unless higher moments of the relevant statistics are required.

This second part is entirely devoted to statistics containing unbounded numbers of sample covariances. Whereas the few expressions of this kind considered in Part I (namely in Section 10) could be dealt with

* Vol. 61 (1957), pp. 318—358. Sections, propositions, and formulae, as well as references to the literature, are numbered here in continuation of Part I.

by means of Theorem 6.2, the cases treated below require a more thorough analysis of the remainder terms of the moments. In particular, the two sections which follow discuss, in their whole generality, the truncated and "raw" periodograms, and also their reduced versions, which are obtained by substituting, in them, the autocorrelation function for the covariance function. The next object of study is the mean, over the frequency range, of the squared difference between the spectral density function and the truncated, or the "raw", periodogram. This statistic represents, in the space of trigonometric series, a natural norm of the difference of the pair of functions in question, and was proposed as a figure of merit of the corresponding estimate [14]; in both cases this norm is found to be asymptotically normally distributed.

The arguments and computations used to obtain these results are further applied to the study of estimators of the infinite sum of the squared covariances of a process:

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_q^2 = \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)]^2 \, d\omega \tag{13.1}$$

[where $F'(\omega)$ is the spectral density function, given by (10.1)]. Although *Grenander* and *Rosenblatt* [7], when defining a class of estimators of this quantity, appeared to have in mind only the establishment of confidence bands for the incomplete integral of the periodogram, it is felt that in assessing the real importance of $\mathfrak{S}_2$ the emphasis should be laid elsewhere: Heuristically speaking, when the estimation of the spectral density function of a process is attempted by means, for instance, of the truncated periodogram, it is clearly desirable to include in the estimate terms depending on relatively trustworthy estimates of covariances, and to exclude those in which the sample covariances are predominantly spurious. Since the variances of the sample covariances tend to increase for large lags, while the "true" covariances are assumed to tend to 0, the best truncation point of the periodogram corresponds to the lag for which the standard deviation of the sample covariances overtakes their expectation [14]. It is also easily seen that the periodogram truncated at the wrong point is capable of being, in a sense, an arbitrarily bad estimator of the spectral density function, and that any alternative type of estimator is bound to depend on some parameter, the choice of which is as critical as that of the number of terms in the truncated periodogram. Unless some *a priori* information about the parameters of the process is given, it is, therefore, essential to be

able to estimate the variances of the sample covariances. But, according to well-known formulae [cf. e.g. Theorem 5.1],

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}(N-|k|)\ \mathrm{var}\ C_{k,N}=\mathfrak{S}_2,$$

where $C_{k,N}$ are the sample covariances defined by (6.7); hence the crucial importance of $\mathfrak{S}_2$ in statistical spectral analysis.

While *Grenander* and *Rosenblatt* (*loc. cit.*), confining themselves to questions of consistency, only showed that the estimators proposed by them tended to $\mathfrak{S}_2$ in probability, it will be proved here that these estimators are asymptotically normally distributed with variances inversely proportional to the sample sizes. However, these estimators depend on two arbitrary parameters, and their bias is not always acceptable; these serious drawbacks will be avoided by introducing an alternative estimator, which will be shown to be also asymptotically normal, with a variance of the same order of magnitude as that of the expressions mentioned above. Analogous estimation problems connected with the reduced spectrum are solved with little additional effort. Separate publications will deal with applications of these results to the difficult problems of estimating the spectral density function of a process, and of testing the fit of a spectrum which is given *a priori*.

14. The moments and distributions of some estimators of the spectral density function and of certain related expressions

In what follows it is assumed, as before, that x_t is given by

$$x_t=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_{t-k}\,\varepsilon_k \qquad (t=0,\pm 1,\pm 2,\ldots) \tag{2.1}$$

with $h_i=0$ whenever $i<0$, $\Sigma\,|h_k|$ being convergent, and ε_t $(t=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ being random variables. The process will be said to satisfy the condition $H_{2Q}(Q\geq 1)$ if there exists a numerical sequence $\mu_1=0,\mu_2,\ldots,\mu_{2Q}$ such that

$$E(\varepsilon_{t(1)}^{\nu(1)}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_{t(s)}^{\nu(s)})=\mu_{\nu(1)}\cdot\ldots\cdot\mu_{\nu(s)}$$

whenever $\nu(1),\ldots,\nu(s)>0$ and $\nu(1)+\ldots+\nu(s)\leq 2Q$; this is the condition of applicability of Lemma 2.1. If, moreover, the process is strictly stationary, the ε's being independent, $\{x_t\}$ will be said to satisfy the condition H_{2Q}^*; with $Q=2$, this is the condition of validity of Theorem 8.1.

The estimators of the spectral density function $F'(\omega)$ of $\{x_t\}$ which are treated below are all of the type (mentioned in Section 10) of

$$Z'_N(\omega) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}\, C_{k,N} \cos 2\pi k\omega, \tag{14.1}$$

where $\{C_{k,N}\}$ are given by (6.7), and $\{\lambda_{k,N}\}$ are suitably chosen functions of k and N which, in any case, satisfy $\lambda_{-k,N} = \lambda_{k,N}$ and $|\lambda_{k,N}| \leq 1$. In particular, if

$$\lambda_{k,N} = \begin{cases} 1 - N^{-1}|k| & \text{when } |k| \leq \nu; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{14.2}$$

$Z'_N(\omega)$ becomes the truncated periodogram $T_N^{(\nu)}(\omega)$. It will be remembered [14] that $T_N^{(\nu)}(\omega)$ is a consistent estimator $F'(\omega)$ if, and only if,

$$\nu \to \infty \text{ and } \nu/N \to 0 \text{ when } N \to \infty. \tag{14.3}$$

Under the additional hypothesis (which, however, can be easily dispensed with) that $h_k = O(k^{-2})$, and assuming $H_4{}^*$ (which can be immediately relaxed to H_4), *Grenander* and *Rosenblatt* ([24], p. 148) computed the variance of the truncated periodogram at any frequency. They pointed out its exceptional behaviour at zero frequency, but failed to perceive that the same thing happened at the ends of the frequency range, i.e. at $\omega = \pm\frac{1}{2}$ according to our notations, and $\lambda = \pm\pi$ according to theirs; indeed, in their formula for $w_N(x)$ given in the middle of the page, the two fractions in brackets are equal not only when $\lambda = 0$, but also when $\lambda = \pm\pi$, so that, in the latter case

$$w_N(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin[(m+\frac{1}{2})(x-\pi)]}{\sin(\frac{1}{2}(x-\pi))},$$

which, introduced into the formula given on p. 134 of the same book, doubles the value of the variance. Using the same kind of method, one can readily prove that the values of the periodogram corresponding to different frequencies are asymptotically uncorrelated. Thus H_4 and (14.3) entail

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N \operatorname{cov}[T_N^{(\nu)}(\omega_1), T_N^{(\nu)}(\omega_2)]}{2\nu+1} = \begin{cases} 2[F'(\omega_1)]^2 & \text{if } |\omega_1| = |\omega_2| = 0 \text{ or } \frac{1}{2}; \\ [F'(\omega_1)]^2 & \text{if } 0 \neq |\omega_1| = |\omega_2| \neq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{if } |\omega_1| \neq |\omega_2|. \end{cases} \tag{14.4}$$

Proposition 14.1. Under the assumption $H_{2Q}(Q \geq 2)$ if, moreover, (14.3) holds, and if a finite set $\{\omega_2, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies is given, the random variables

$$(2\nu + 1)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}} \{ T_N^{(\nu)}(\omega_i) - E[T_N^{(\nu)}(\omega_i)] \} \quad (i = 1, \ldots, s) \qquad (14.5)$$

have univariate and mixed moments up to the order Q tending, when $N \to \infty$, to the corresponding moments of the normal multivariate distribution specified by (14.4).

Proof. Any of the moments under consideration is a linear combination of multivariate and mixed moments of $C_{0,N}, \ldots, C_{\nu,N}$. According to Theorem 6.2, each of these moments is composed of a main part, explicitly given by (6.8), and of some remainder terms; it was observed in Section 7 that these main parts were equal to the corresponding moments of the normal multivariate distribution determined by the second moments. Hence these main parts add up to values which would be obtained for the moments of (14.5) if the sample covariances, and, therefore, also (14.5), were exactly normally distributed. What remains to be proved is only that the sum of the remainder terms multiplied by $(2\nu + 1)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}$ tends to 0 as $N \to \infty$.

As shown in Sections 5 and 6, every moment of $C_{0,N}, \ldots, C_{\nu,N}$ of order $n (n \leq Q)$ is the sum of a number (independent of N) of terms, each of which can be factorized into a product of multiple sums with respect to a total of n variables, which will be denoted as before by $\beta(1), \ldots, \beta((2)$. Each of the irreducible factors is homogeneous of a necessarily even degree in the h's, the overall degree of each term being $2n$. It was further shown that terms containing quadratic factors cancelled out exactly, while products of quartic terms formed the main parts of the moments. Hence each remainder term contains at least one irreducible factor of degree not lower than 6, and no factor of a degree lower than 4.

Clearly, the absolute value of the sum of the remainder terms will not decrease if, in each of them, the cosines are omitted and the h 's are replaced by their absolute values. It is now convenient to group together similar terms arising out of the various individual moments of sample covariances. Thus the number of lumped remainder terms becomes independent of N, while in each of them the sum is taken not only with respect to $\beta(1), \ldots, \beta(n)$, but also with respect to a new set of dummy variables, which will be denoted by $k(1), \ldots, k(n)$, and will be associated with the respective β 's by forming arguments $\beta(i) + |k(i)|$ in the V's [cf. (3.1)]. Clearly, the summation with respect to $k(i), \ldots, k(n)$ does not affect the factorization of the various terms of the moments, as discussed in Sections 5 and 6.

The numerical coefficient of any these terms being $N^{-n/2}(2\nu+1)^{-n/2}$, it can be apportioned among its factors by providing a factor of degree $2m$ in the h's with a coefficient $N^{-m/2}(2\nu+1)^{-m/2}$. If $\beta(i)+|k(i)|$ appears, as an argument, in one of the V's, and $\beta(i)$ in another, $k(i)$ will be said to form a *link* between these two V's. Since the factors are assumed to be irreducible, given a factor composed of a number, say δ, of V's, it is always possible to choose $\delta-1$ k's so that, the V's being suitably ordered, each successive V should be connected with a preceding V by means of one of these links.

Any sequence of $2m$ integers being given, it is proposed to find an upper bound for the number of times the product of h's with these index values can repeat itself in the factor under consideration. The value of any of the arguments of the first V determines those of all the other arguments of this particular V; if, moreover, the value of a link with another V is given, its arguments are also determined, and so on. It follows that no sequence of index values of the h's appears more than $N(2\nu+1)^{\delta-1}$ times in the factor in question, which, consequently, does not exceed

$$N^{1-\frac{m}{2}}(2\nu+1)^{\delta-\frac{m}{2}-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|h_k|\right)^{2m}=(2\nu+1)^{\delta-m}\left(\frac{2\nu+1}{N}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|h_k|\right)^{2m} \tag{14.6}$$

Since, evidently, $\delta \leq m$, in view of (14.3), this shows that the factor is bounded in any case and tends to 0 if $m>2$; consequently, each remainder term, shown to contain at least one factor with $m>2$, necessarily tends to 0 when $N \to \infty$. Hence the proof is complete.

Pursuing a line of argument similar to that adopted in Section 10, we obtain the following:

Corollary 14.2. Under the assumptions H_4^*, if (14. 3) holds, given any set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint probability distribution of the variables (14.5) tends to the normal multivariate distribution specified by (14.4).

Remark 14.3. The preceding arguments can be applied to any estimator of the type of (14.1) having a variance of the order of m/N, where m is the number of coefficients $\lambda_{k,N}$ which differ from 0. Thus it can be concluded without further deliberation that the "smoothed periodogram" proposed by *Bartlett* [20] and the estimator suggested by *Tukey* [27] are each asymptotically normally distributed under the assumptions H_4^*, provided that the parameters satisfy the necessary and sufficient conditions of consistency [14]. The covariances of these

estimators can be obtained from a general formula given by Parzen [25]. However, in the discrete-parameter case — the only one with which we are concerned here — this formula should be corrected in the same way as the expression given by *Grenander* and *Rosenblatt* for the variance of the truncated periodogram (see above). The same correction applies to the treatment of all the other estimators of the spectral density by the two last-mentioned authors [6, 24].

Remark 14.4. The second condition (14.3) is essential for the asymptotic normality of the truncated periodogram. Indeed, following a neat heuristic argument devised by *Bartlett* [21] it can be proved that, under the assumption H_4^*, if, moreover, the process $\{\varepsilon_t\}$ is Gaussian, the periodogram has, in the limit, a χ^2 distribution with two degrees of freedom when it is divided by half its expectation and is taken at any frequency different from 0 and from $\frac{1}{2}$. At the exceptional frequencies the periodogram is equal to the square of $x_1 + \ldots + x_N$ and $x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^N x_N$ respectively. Concequently, as pointed out in a private conversation by *G. M. Jenkins*, at these frequencies the periodogram divided by its expectation has a χ^2 distribution with *one* degree of freedom. This, incidentally, shows that the expression obtained by *Grenander* [6] for the variance of the periodogram admits the same kind of exception at the ends of the frequency range as at zero frequency; his initial mistake is similar to that which affects the treatment of various estimators of the spectral density function in the subsequent papers discussed above.

Remark 14.5. It is now perfectly easy to extend the preceding result first to any process satisfying H_∞^*, and then, by the device introduced in Section 8, to any process satisfying H_4^*. Indeed, under H_∞^*, the argument used in the proof of Proposition 14.1 still shows that, in an arbitrary term of the exact expression for a moment of the periodogram, any factor of degree 2 m in the h's and formed by δ V's is bounded by (14.6) and, therefore, tends to O unless $\delta = m$. But if $\delta = m$, all the V's are necessarily V_2's and no cumulant other than $\varkappa_2$ is involved; this implies that the limits of the moments, and, consequently, also the limiting distribution (here obviously determined by the moments), are independent of the shape of the distribution of the ε's.

15. Some expressions connected with the reduced spectrum

In various connections (cf. e.g. [22]) it has been thought useful to consider, beside the spectral density and distribution functions, their

reduced versions, which differ from them by having $\{\varrho_k\}$ substituted for $\{R_k\}$ in their expressions (cf. Sections 9 and 10). It is, then, natural to introduce the reduced truncated periodogram,

$$p_N^{(\nu)}(\omega) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) r_{k,N} \cos 2\pi k\omega = \frac{T_N^{(\nu)}(\omega)}{C_{0,N}}$$

as an estimator of the reduced spectral density function

$$f'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k \cos 2\pi k\omega = \frac{F'(\omega)}{R_0};$$

there is no difficulty in showing that, here, the consistency conditions are still given by (14.3).

Proposition 15.1. Under the assumptions H_4^* and (14. 3), if

$$f'_{N,\nu}(\omega) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \varrho_k \cos 2\pi k\omega,$$

given any finite set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint probability distribution of the random variables

$$(2\nu + 1)^{-1/2} N^{1/2}[p_N^{(\nu)}(\omega_i) - f'_{N,\nu}(\omega_i)] \qquad (i = 1, \ldots, s) \qquad (15.1)$$

tends, when $N \to \infty$, to the normal multivariate distribution specified by: zero means; zero covariances when the frequencies differ in absolute value; and variances equal to $2[f'(\omega_i)]^2$ for $\omega_i = 0$ or $\pm 1/2$ and to $[f'(\omega_i)]^2$ for any other frequency [obviously, if $\omega_i = -\omega_i$, the covariance is equal to the variance of (15.1) at any of these two frequencies]. Moreover, under the assumptions H_{8m}^*, the univariate and mixed moments of (15.1) of orders lower than $2m$ tend to the respective moments of this distribution.

Proof. Clearly,

$$(2\nu + 1)^{-1/2} N^{1/2} [p_N^{(\nu)}(\omega_i) - f'_{N,\nu}(\omega_i)] =$$
$$= \frac{(2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2}\{T_N^{(\nu)}(\omega_i) - E[T_N^{(\nu)}(\omega_i)]\} - (2\nu+1)^{-1/2} N^{1/2} f'_{N,\nu}(\omega_i) \cdot (C_{0,N} - R_0)}{C_{0,N}}.$$

The moments of the first term of the numerator are given in Proposition 14.1, while these of the second term obviously tend to 0 when $N \to \infty$. Owing to the *Hölder* inequality, it follows that, under the assumptions H_∞^*, all the moments of the numerator tend to values corresponding to the normal distribution specified by (14.4), so that the limiting distribution of the numerator is the same as that of (14.5). An easy application of the device introduced in Section 8 extends the validity of

this conclusion to the case when only H_4^* is assumed. On the other hand,

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} C_{\nu,N} = R_0.$$

Consequently, according to a much-quoted proposition given by *Cramér* (cf. [2], Section 20.6), the distribution of (15.1) tends to the limit specified above.

The proof of the convergence of the moments of (15.1) of order lower than $2m$ to the stated limits is a straightforward application of Proposition 9.3. In comparison with the proof of Proposition 9.4, the difference is due to the fact that now the random variables under consideration are bounded by a quantity which is $O(N^{1/2}\nu^{1/2})$, and, therefore, $o(N)$, instead of $O(N^{1/2})$; hence, in order to prove the boundedness of the $2m$-th moments of (15.1), we need $P(\bar{\epsilon}) = O(N^{-2m})$, which requires H_{8m}. The upper bound of the variables being not $O(N)$, but $o(N)$, there would be little difficulty in proving, by an argument *ad hoc*, that under H_{8m} the $2m$-th moments of (15.1) also tend to the corresponding limits.

The same kind of argument applies to the reduced periodogram itself, and to its incomplete integral. In the first case, the bounds of the variables are clearly $O(N)$, and in the second they are $O(N^{1/2})$, since the incomplete integrals both of the reduced periodogram and of the reduced spectral density function are necessarily contained between 0 and 1 as a result of the non-negative character of the integrands. Hence the assumptions required for the validity of the statements about the moments are H_{8m}^* in the first case and H_{4m}^* in the second, and we have:

Proposition 15.2. Under the assumptions H_4^*, when $N \to \infty$, the probability distribution of $2[f'(\omega)]^{-1} p_N^{(N-1)}(\omega)$ tends to a χ^2 distribution with two degrees of freedom provided that $0 < |\omega| < 1/2$, while for $\omega = 0$ and for $\omega = \pm 1/2$, the distribution of $[f'(\omega)]^{-1} p_N^{(N-1)}\omega$ tends to a χ^2 distribution with one degree of freedom. Mereover, under the assumptions H_{8m}^*, the univariate moments of orders lower than $2m$ of these random variables tend to the respective moments of their limiting distributions.

Proposition 15.3. Under the assumptions H_4^*, given any finite set $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ of frequencies, the joint distribution of the random variables

$$N^{1/2}\{\int_0^{\omega_i} p_N^{(N-1)}(\omega)\,d\omega - \int_0^{\omega_i} f'_{N,N-1}(\omega)\,d\omega\} \quad (i = 1, \ldots, s) \qquad (15.2)$$

tends, when $N \to \infty$, to the normal multivariate distribution specified by zero means and by a covariance matrix $|| c_{i,j} ||$, where

$$c_{i,j} = \int_0^{\min(\omega_i, \omega_j)} [f'(\omega)]^2 \, d\omega - \{\int_0^{\omega_j} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{\omega_i} [f'(\omega)]^2 \, d\omega -$$

$$- \{\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{\omega_j} [f'(\omega)]^2 \, d\omega + \{\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega\} \{\int_0^{\omega_j} f'(\omega) \, d\omega\} \int_0^{1/2} [f'(\omega)]^2 \, d\omega.$$

Moreover, under the assumptions H^*_{4m}, the random variables (15.2) have multivariate and mixed moments of orders lower than $2m$ tending to the respective moments of the aforesaid distribution.

The formula for the covariances can be obtained from (10.5) by noting that

$$\int_0^{\omega_i} p_N^{(N-1)}(\omega) \, d\omega - \int_0^{\omega_i} f'_{N,N-1}(\omega) \, d\omega =$$

$$= \frac{E[\Phi_N(1/2)\{\Phi_N(\omega_i) - E[\Phi_N(\omega_i)]\}] - E[\Phi_N(\omega_i)]\{\Phi_N(1/2) - E[\Phi_N(1/2)]\}}{R_0 \, C_{0,N}},$$

where $\Phi_N(\omega)$, as defined by (10.4), is the incomplete integral of the periodogram. Unlike the similar fractions which have to be considered in the treatment of $p_N^{(\nu)}$ and $p_N^{(N-1)}$, this expression has a numerator, the second part of which is no longer negligible in comparison with the first; the presence of this part accounts for the cancellation of the term in $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ in the asymptotic covariances. In particular, by slightly transforming the relevant elements of the covariance matrix, we find the symmetric formula

$$c_{i,i} = [\int_{\omega_i}^{1/2} f'(\omega) \, d\omega]^2 \int_0^{\omega_i} [f'(\omega)]^2 \, d\omega + [\int_0^{\omega_i} f'(\omega) \, d\omega]^2 \int_{\omega_i}^{1/2} [f'(\omega)]^2 \, d\omega,$$

which corresponds to the asymptotic variance obtained by *Bartlett* [22] for discrete sums approximating the incomplete integral of $p_N^{(N-1)}(\omega)$.

16. The figure of merit of an estimator of the spectral density function: Preliminary remarks

If $Z'_N(\omega)$ is any estimate of the spectral density function $F'(\omega)$, the integral

$$M[Z'_N(\omega)] = \int_{-1/2}^{1/2} [Z'_N(\omega) - F'(\omega)]^2 \, d\omega \tag{16.1}$$

can be regarded as a figure of merit of this estimate (cf. Section 13). If $Z'_N(\omega)$ is of the form of (14.1), clearly

$$M[Z'_N(\omega)] = \sum_{k=1-N}^{N-1} (\lambda_{k,N} C_{k,N} - R_k)^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2,$$

or

$$M[Z'_N(\omega)] = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 (C_{k,N} - R_k)^2 - 2 \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k (C_{k,N} - R_k) + \\ + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \lambda_{k,N})^2 R_k^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2, \tag{16.2}$$

and consequently

$$E\{M[Z'_N(\omega)]\} = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \operatorname{var} C_{k,N} + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \lambda_{k,N})^2 R_k^2 + 2 \sum_{k=N}^{\infty} R_k^2. \tag{16.3}$$

In the last expression, the first term represents the mean, over the frequencies, of the variance of the estimator, while the sum of the remaining two terms is the mean of the squared bias. Both these parts are equally important, since the problem of optimizing an estimator is essentially one of finding the most advantageous balance between variance and bias. This problem, however, will form the subject of a further paper; now we are aiming at finding the asymptotic distribution of $M[Z'_N(\omega)]$ about its expectation, at least for some types of estimator.

According to (16.2),

$$M[Z'_N(\omega)] - E\{M[Z'_N(\omega)]\} = [\Delta_N - E(\Delta_N)] - 2\,\Theta_N,$$

where

$$\Delta_N = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 (C_{k,N} - R_k)^2; \quad E(\Delta_N) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \operatorname{var} C_{k,N} \tag{16.4}$$

and

$$\Theta_N = \sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k (C_{k,N} - R_k). \tag{16.5}$$

The relative importance of these two terms varies with the type of estimator, Θ_N being non-negligible when the estimator admits comparatively large values of $\lambda_{k,N}(1 - \lambda_{k,N}) R_k$. For instance, in the case of the "smoothed periodogram" with an optimum number of terms (cf. e.g. [14]), it is easily seen that var Θ_N and var Δ_N are of the same order of magnitude, namely $O(N^{-8/5})$. Since, however, even with an optimum choice of parameter values, estimators of this type are bound to combine a large bias with a large variance, their detailed study is of doubtful interest; in what follows, we shall concentrate on the truncated periodogram, which was shown to be capable of becoming near-optimum.

Lemma 16.1. Under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 2)$ if $Z'_N(\omega) = T_N^{(\nu)}(\omega)$, ν satisfying the first, but not necessarily the second, condition (14.3),

$$\lim_{N\to\infty} E[N(2\nu+1)^{-1/2}\,\Theta_N]^n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, Q),$$

and in particular

$$\text{l.i.m.}_{N\to\infty}\, N(2\nu+1)^{-1/2}\,\Theta_N = 0.$$

Proof. As shown in Theorem 6.2, if $n \leq Q$, there exists a number B_n such that for any set of integers $k(1), \ldots, k(n)$,

$$\left| E\left\{\prod_{i=1}^{n}[N - |k(i)|]^{1/2}\,[C_{k(i),N} - R_{k(i)}]\right\}\right| \leq B_n.$$

Consequently, noting that now $1 - \lambda_{k,N} = \dfrac{\nu}{N}\cdot\dfrac{|k|}{\nu}$, we find

$$|E[N(2\nu+1)^{-1/2}\,\Theta_N]^n| \leq \frac{N^{n/2}}{(2\nu+1)^{n/2}}\left(\frac{\nu}{N}\right)^n B_n\left\{\sum_{k=-\nu}^{\nu}\frac{|k\,R_k|}{\nu}\right\}^n.$$

But the coefficient in front of the term in curly brackets is bounded, while the sum inside is the difference between an ordinary partial sum of $\Sigma|R_k|$ and the corresponding partial *Cesàro* sum, and, therefore, tends to 0 when $N \to \infty$. Thus the proof is complete.

On the other hand, it will be seen that the asymptotic distribution of $N(2\nu+1)^{-1/2}\,\Delta_N$ with $Z'_N(\omega) = T_N^{(\nu)}(\omega)$ is normal with a finite positive variance, so that, as a consequence of the preceding lemma, Θ_N can be neglected in the study of the random variable $M[T_N^{(\nu)}(\omega)]$. Following the established pattern, wo shall first compute the central moments of Δ_N; the first step will consist of determining the cancellations which occur in these moments.

In the following argument, no assumptions whatever are necessary concerning the numbers $\{\lambda_{k,N}\}$, and the sample size can be regarded as a constant. According to (16.4),

$$E[\Delta_N - E(\Delta_N)]^n = \sum_{k(1),\ldots,k(n)=1-N}^{N-1} E\left\{\prod_{i=1}^{n}\lambda^2_{k(i),N}[(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2 - \operatorname{var} C_{k(i),N}]\right\} = \tag{16.6}$$

$$= \sum_{k(1),\ldots,k(n)=1-N}^{N-1}\ \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\left[\prod_{i=n-s+1}^{n}\lambda^2_{k(i),N}\operatorname{var} C_{k(i),N}\right] E\left[\prod_{i=1}^{n-s}\lambda^2_{k(i),N}(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2\right],$$

where, in the last line, the first term in square brackets and the expectation ought to be replaced by 1 when $s = 0$ and when $s = n$ respectively. For any fixed set of values of $k(1), \ldots, k(n)$, Formula (5.7), as

re-interpreted in Section 6, can be applied to the last expectation. Now, however, the sum is taken with respect to $k(1), \ldots, k(n)$ as well, and to each of these variables there correspond two summation variables of (5.7), henceforth denoted by $\alpha(i)$ and $\beta(i)$ with the appropriate value of i ($i = 1, \ldots, n - s$). As in Section 5, in a formula which needs not be written explicitly and represents the value of

$$E[\prod_{i=1}^{n-s} \lambda^2_{k(i),N}(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2], \tag{16.7}$$

the symbols of summation with respect to y and z can be put first. Then each term under this double sum is itself a multiple sum in $k(1), \ldots, k(n-s), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-s), \beta(1), \ldots, \beta(n-s)$, which, in general, can be factorized. Since, for each value of i the arguments $\alpha(i), \alpha(i) + |k(i)|, \beta(i), \beta(i) + |k(i)|$ must appear in V's belonging to the same factor, the degre of each factor in the h's is necessarily a multiple of 4; however, it will be seen that all the quartic factors cancel out when the sum is taken with respect to s.

The nature of a factor depends both on the partition and on the class $\mathfrak{A}^z_{4(n-s),y}$ of permutations of the indices of the h's but, when the summation variables appearing in the factor are determined, its precise shape has no bearing on the other factors of the product. Thus all the factors corresponding to a given set of summation variables can be grouped together to form one factor. This applies, in particular, to quartic factors, and it is easy to see that any quartic factor takes the shape of

$$\sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda^2_{k,N} \operatorname{var} C_{k,N}. \tag{16.8}$$

Given any integers q and s such that $n \geq q \geq s \geq 0$, consider all the terms corresponding to the given value of s and in which the expression for (16.7) contains exactly $q - s$ factors equal to (16.8). The remaining (in general not irreducible) factor is equal, in each case, to an expression which will be denoted by φ_{n-q}, and differs from

$$\sum_{k(1),\ldots,k(n-q)=1-N}^{N-1} E\{\prod_{i=1}^{n-q}[\lambda^2_{k(i),N}(C_{k(i),N} - R_{k(i)})^2]\}$$

only in having the terms with quartic factors removed. The number of terms of (16.6) of the type under consideration is, clearly, equal to the number of ways in which $q - s$ variables $k(i)$ can be chosen out a set of $n - s$, i.e. to $\binom{n-s}{q-s}$. Excluding the numerical coefficient $(-1)^s \binom{n}{s}$, each of these terms, irrespective of the value of s, is equal to

$$[\sum_{k=1-N}^{N-1} \lambda_{k,N}^2 \text{ var } C_{k,N}]^q \varphi_{n-q}. \tag{16.9}$$

Collecting all the terms corresponding to a given q and to $s = 0, \ldots, q$, and counting them with their numerical coefficients, as well as with their respective numbers of repetitions, we obtain (16.9) multiplied by

$$\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{n}{q} \binom{n-s}{q-s},$$

which is identically equal to 0 according to Lemma 2.3. Thus, in (16.6), all the terms corresponding to positive values of s cancel out exactly with all those terms corresponding to $s = 0$ which admit factors of degree 4 in the h's when the sum with respect to $\alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n), k(1), \ldots, k(n)$ is factorized.

17. Asymptotically vanishing terms in the moments of $\Delta_{N,\nu}$

At this stage it will be convenient to assume that $\lambda_{k,N}$ are given by (14.2) although the reasoning would still be valid if these coefficients were only assumed to vanish when $|k| > \nu$, and to remain collectively bounded when divided by $1 - N^{-1}|k|$. In the main part of the crucial argument below, only the first condition (14.3) will be postulated. In order to make the notations more precise, we shall now write $\Delta_{N,\nu}$ instead of Δ_N. The exact expression for any moment of $\Delta_{N,\nu}$ was described in the preceding section; it is a sum of a fixed number of terms, each of which is a multiple sum in $k(1), \ldots, k(n), \alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, and in general can be factorized in some way. Clearly, we need to take into account the normalizing coefficient, which did not matter so long as we were concerned with exact cancellations only, and which is $N^n(2\nu+1)^{-n/2}$ when n is the order of the moment under consideration. But in the sum representing $\Delta_{N,\nu}$, $C_{k,N}^2$ is multiplied by $(1 - N^{-1}|k|)^2$ and contains the numerical factor $(N-|k|)^{-2}$; since $(1-N^{-1}|k|)^2 (N-|k|)^{-2} = N^{-2}$, these factors transform the coefficient $N^n(2\nu+1)^{-n/2}$ into $N^{-n}(2\nu+1)^{-n/2}$. In each of the terms in question, this overall coefficient can be apportioned among the factors, so that a factor of degree $4m$ in the h's should be multiplied by $N^{-m}(2\nu+1)^{-m/2}$. It will be seen that with such a coefficient every factor remains bounded, so that if any of them tends to 0, the whole term containing it vanishes in the limit.

Since this is not likely to lead to misunderstandings, the term "factor" will be applied both to the factors of the multiple sums in $k(1), \ldots, k(n), \alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, and to the corresponding

factors of the summands. We shall describe as *sub-factors* those factors of the summand which correspond to factors of the multiple sum when the summation is applied to $\alpha(1), \ldots, \alpha(n), \beta(1), \ldots, \beta(n)$, but not to $k(1), \ldots, k(n)$. In what follows, factors and sub-factors will be always understood to be irreducible. Obviously, every factor is composed of one, ore more, sub-factors; in the former case, the sub-factor concerned will be called *improper*. While, as remarked in the preceding section, the degree of a factor is necessarily a multiple of 4, that of a sub-factor only needs to be even. Terms containing quadratic sub-factors were shown in Sections 5 and 6 to cancel out, and the cancellation of terms with quartic factors was demonstrated in the preceding section. Thus, in the remaining terms, sub-factors are of degree at least 4, and factors of degree at least 8. However, it will be shown *inter alia* that factors of degree higher than 8 vanish in the limit.

Any factor of degree $4m$ is an infinite sum of products of $4m$ h's, in which some sequences of indices appear more than once; if p is an upper bound of the numbers of such repetitions, in view of the convergence of $\Sigma \mid h_k \mid$, the factor is $O[p N^{-m}(2\nu + 1)^{-m/2}]$. Hence the importance of finding suitable values of p, which is the goal of the argument below. As in Section 14, the variable $k(i)$ will be said to form a *link* between two V's (which are then necessarily contained in the same sub-factor) if, $\gamma(i)$ standing either for $\alpha(i)$ or for $\beta(i)$, $\gamma(i)$ appears as an argument in one of these V's, and $\gamma(i) + \mid k(i) \mid$ in the other. Thus a subfactor can be interpreted topologically as a graph in which the V's form the vertices, and the links are the sides. It follows from the definition of a sub-factor that such a graph is necessarily connected; it may even be possible to remove from it, without destroying its connectedness, the sides which correspond to a suitable set of links. Assuming the sub-factors to be given in some order, such a (possibly empty) set of *redundant* links will be chosen in connection with each successive sub-factor, subject to the condition that if the sub-factor contains k's chosen as redundant in connection with any of the preceding sub-factors, then none of the k's which appeared in any of the preceding sub-factors should be designated as redundant.

Assume that we are given the sequence of index values of a product of h's forming a term of the factor under consideration. This, evidently, determines the differences of arguments within any of the corresponding V's. If, mereover, the k's appearing in a sub-factor are given, with the possible exception of these which were found redundant in connection

with it, then the difference of any two arguments of V's within this sub-factor is determined. Owing to the restrictions which were placed on the designation of redundant k's, it follows that their absolute values can be ultimately expressed as linear functions of the absolute values of the non-redundant k's appearing in the same factors. Thus, apart from the signs of the redundant k's, the values of all the summation variables producing a given sequence of index values of the h's are determined if we are given the values of one of the α's and β's in each sub-factor, as well as the values of all the non-redundant k's. Consequently, since each of the k's can take $2\nu+1$ values, and each of the α's and β's at most N values, we can make

$$p = N^{\mu}(2\nu + 1)^{\Lambda}\, 2^{\varrho},$$

where μ is the number of sub-factors, Λ the total number of non-redundant k's in the factor, and ϱ the number of redundant k's; however, the factor 2^{ϱ} can be neglected as being independent of N.

Thus the order of magnitude of a factor of degree $4m$ with its normalizing coefficient is not bigger than that of

$$N^{\mu-m}(2\nu + 1)^{\Lambda-m/2}. \tag{17.1}$$

This number can be factorized according to the decomposition of the factor into sub-factors by associating the number

$$N^{1-r}(2\nu + 1)^{\lambda-r/2} \tag{17.2}$$

with any sub-factor of degree $4r$ containing λ non-redundant k's if each of these appearing in the sub-factor only once is counted as one-half; it will be seen that (17.2) is always bounded.

Since necessarily $\lambda \leq r$, (17.2) cannot exceed

$$N^{1-r}(2\nu + 1)^{r/2} = N^{1-r/2}[(2\nu+1)/N]^{r/2},$$

which shows that the number associated with a sub-factor of degree higher than 8 tends to 0 in any case, while the number associated with an octic sub-factor is always bounded and tends to 0 if $\nu/N \to 0$. In a sextic sub-factor, $r = 3/2$, and if none of the k's appearing in it was designated as redundant in connection with preceding sub-factors, a redundancy can casily be found now. This is obvious if the factor is made up of one, or two, V's; otherwise, it is a product of three V's, the corresponding graph is a triangle, at least one of the k's involved appears here only once, and this k can be declared redundant. Hence, with $\lambda \leq 1$, (17.2) does not exceed

$$N^{-1/4}(2\nu + 1)^{1/4} = N^{-1/4}[(2\nu + 1)/N]^{1/4},$$

which tends to 0. Finally, a quartic sub-factor is composed either of one V_4 or of two V_2's connected by two links formed by different k's, since otherwise the sub-factor would form a quartic factor; then again, if neither of the two k's was previously found redundant, either can be designated as such, making $\lambda = 1/2$ and (17.2) equal to 1. Thus (17.2) is bounded for every sub-factor, and the only sub-factors for which this quantity does not vanish in the limit are either quartic or octic; however, the number associated with the latter also tends to 0 if $\nu/N \to 0$.

Considering quartic sub-factors, we can exclude any of them which is formed by one V_4, for such a sub-factor could be put first in the factor, and then both k's in it could be designated as redundant, making (17.2) equal to $(2\nu + 1)^{-1/2}$. Eventually, we are left only with proper sub-factors each of which is formed by two V_2's. But factors composed of them still tend to 0 unless they are composed of exactly two sub-factors. Indeed, the sub-factors can always be ordered so that while one of the k's, say $k(i)$, appears in the first and last sub-factors, every other k appears in two consecutive ones; but then $k(i)$ can be regarded as the only non-redundant k in the whole factor, so that, with $\Lambda = 1$ and $\mu = m$ [cf. (17.1)], the order of magnitude of the whole factor is that of $(2\nu + 1)^{1-m/2}$.

It should be noted that discussion of quartic sub-factors which was carried out above did not depend on ν/N tending to 0 when $N \to \infty$. However, if this condition is not satisfied, octic sub-factors have to be taken into account as well. Clearly, the number (17.2) associated with such a sub-factor tends to 0 if there is any redundancy in the k's involved. This excludes, in the limit, octic sub-factors containing k's designated as redundant in connection with any preceding factor. Among the others, these which contain fewer than three V's require only one link, so that a redundant k can always be found.

There remain to be considered octic sub-factors composed of three, or four, V's; it will be seen that the corresponding factor tends to 0 in the limit unless the sub-factor is improper, so that even if ν/N does not tend to 0 we are left, in the limit, only with octic factors. Indeed, if the sub-factor is composed of four V's, which are necessarily V_2's, the corresponding graph is a quadrilateral; unless the sub-factor is improper, at least two sides are formed by k's appearing in the sub-

factor only once, and any of these can be designated as redundant. If the sub-factor is composed of three V's, only two links are required to make the graph connected; consequently, if the sub-factor is proper, one of the three, of four, k's appearing in it can be regarded as redundant.

In the case of an improper octic sub-factor made up of four V_2's, clearly, neither of the two k's can be redundant. If the factor is composed of three V's, one of the two k's may form links between one of the V's and the remaining two, and then the other k can be recognized as redundant, causing the factor to vanish in the limit. This, however, is not necessarily the case; if, neglecting the k's, the factor can be written as

$$V_2[\alpha(i), \beta(i)]\ V_4[\alpha(i), \beta(i), \alpha(j), \beta(j)]\ V_2[\alpha(j), \beta(j)], \tag{17.3}$$

there is no redundancy of the type proviously contemplated, and it is easy to see that this is the only scheme involving three V's which can produce an asymptotically non-vanishing factor.

18. The moments and the asymptotic distribution of $M[T_N^{(\nu)}(\omega)]$

Further considerations will be facilitated by the following two lemmas:

Lemma 18.1. If the multiple series

$$\sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} a_{k(1), \ldots, k(n)}$$

is absolutely convergent, and if the coefficients $c^{(N)}_{k(1), \ldots, k(n)}$ are collectively bounded and tend, with $N \to \infty$, to limits respectively denoted by $c_{k(1), \ldots, k(n)}$, then

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} c^{(N)}_{k(1), \ldots, k(n)}\ a_{k(1), \ldots, k(n)} = \sum_{k(1), \ldots, k(n)=-\infty}^{+\infty} c_{k(1), \ldots, k(n)}\ a_{k(1), \ldots, k(n)}$$

Lemma 18.2. The series

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \quad \text{and} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k$$

being absolutely convergent, let

$$A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, e^{2\pi i k\omega} \quad \text{and} \quad B(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, e^{2\pi i k\omega};$$

then, for any two non-negative integers m and n,

$$\int_{-1/2}^{1/2} [A(\omega)]^m [B(\omega)]^n\, d\omega = \sum_{\substack{k(1), \ldots, k(m+n)=-\infty \\ [k(1)+\ldots+k(m+n)=0]}}^{+\infty} A_{k(1)} \cdots A_{k(m)}\, B_{k(m+1)} \cdots B_{k(m+n)}.$$

Proofs. The proof of the first of these propositions is obvious; that of the second follows immediately from the identity

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [A(\omega)]^m [B(\omega)]^n \, d\omega =$$

$$= \sum_{k(1), \ldots, k(m+n) = -\infty}^{+\infty} A_{k(1)} \cdots A_{k(m)} \cdot B_{k(m+1)} \cdots B_{k(m+n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i[k(1)+\ldots+k(m+n)]\omega} \, d\omega.$$

Corollary 18.3. Since (10.1) can be re-written as

$$F'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \, e^{2\pi i k \omega}, \tag{18.1}$$

by slightly rearranging the multiple sum in Lemma 18.2, and by taking into account the identity $R_{-k} = R_k$, we find, in particular,

$$\mathfrak{S}_4 = \sum_{p, q, s = -\infty}^{+\infty} R_p \, R_{p+s} \, R_q \, R_{q+s}, \tag{18.2}$$

where

$$\mathfrak{S}_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [F'(\omega)^n \, d\omega \qquad (n = 1, 2, \ldots,). \tag{18.3}$$

It was shown, in the proceding two sections, how various terms of the expression for the moments of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})]$ either cancel out exactly or vanish in the limit. Assuming that $\nu/N \to 0$, we are left with terms in which every factor is a product of two quartic sub-factors either of which is composed of two V_2's. Obviously, it can be assumed that the summation variables involved in the given factor are $k(1)$, $k(2)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$ and $\beta(2)$. If $\gamma(1)$ stands for $\alpha(1)$ or for $\beta(1)$, and $\gamma(2)$ stands independently for $\alpha(2)$ or $\beta(2)$, the arguments of the two V_2's forming any of the two sub-factors can be denoted by $\gamma(1)$, $\gamma(1) + |k(1)|$, $\gamma(2)$, and $\gamma(2) + |k(2)|$. Then, incorporating the cumulants in the summand [cf. (3.1)], and remembering that the sub-factor is necessarily irreducible, we find that it is bound to take one of the following two forms:

(a) $R_{\gamma(1)-\gamma(2)} \, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|-|k(2)|}$;

(b) $R_{\gamma(1)-\gamma(2)-|k(2)|} \, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|}$.

If, in a given term of the factor, the sequence of the index values of the R's is given, $|k(1)| - |k(2)|$ is determined when a sub-factor of the first type is included, and $|k(1)| + |k(2)|$ is determined when there is a sub-factor of the second type. Consequently, if both types of sub-factor are combined in a factor, the sequence of index values of the

R's determines both $|k(1)|$ and $|k(2)|$. It follows that, then, a given product of four R's taken in a given order repeats itself in the factor at most as many times as a given combination of values of $\alpha(1) - \alpha(2)$ and $\beta(1) - \beta(2)$ or of $\alpha(1) - \beta(2)$ and $\beta(1) - \alpha(2)$ within the range of the summation variables, i.e. certainly not more than N^2 times, which, owing to the presence of the numerical coefficient $N^{-2}(2\nu + 1)^{-1}$, makes the factor $O(\nu^{-1})$. Thus we need to consider only those factors in which both sub-factors are of the same type.

By substituting $\gamma(2) - |k(2)|$ for $\gamma(2)$, which merely shifts the range of $\gamma(2)$, we can re-write (b) as

$$\text{(b')} \qquad R_{\gamma(1)-\gamma(2)}\, R_{\gamma(1)-\gamma(2)+|k(1)|+|k(2)|}.$$

Since, under the Σ symbol, $\alpha(i)$ and $\beta(i)$ are interchangeable, the summand of any facter composed of two sub-factors of this type can be represented as

$$R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}, \tag{18.4}$$

where

$$\alpha(1) - \alpha(2) = p;\ \beta(1) - \beta(2) = q;\ |k(1)| + |k(2)| = s \tag{18.5}$$

Thus, if $c^{(N)}_{p,q,s}$ is $N^{-2}(2\nu + 1)^{-1}$ times the number of solutions of (18.5) in integers within the combined range of the summation variables $k(1)$, $k(2)$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$, $\beta(2)$, the factor, with its numerical coefficient, equals

$$\sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} c^{(N)}_{p,q,s}\, R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}. \tag{18.6}$$

But it is easily verified that

$$0 \leq c^{(N)}_{p,q,s} \leq 2 \max\{0,\ \min[(2s+1)(2\nu+1)^{-1}, 1]\}$$

so that

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 0$$

for any p, q, and s. Hence, in view of the collective boundedness of $c^{(N)}_{p,q,s}$ and of the absolute convergence of $\Sigma R_p\, R_{p+s}\, R_q\, R_{q+s}$ (which follows from that of ΣR_k), according to Lemma 18.1, any factor composed of two sub-factors of the type of (b) tends to 0 as $N \to 0$.

In the end, we are left only with factors composed of pairs of sub-factors of the type of (a). Every term of the summand can again be represented by (18.4), where, instead of (18.5),

$$\alpha(1) - \alpha(2) = p;\ \beta(1) - \beta(2) = q;\ |k(1)| - |k(2)| = s; \tag{18.7}$$

and the solutions of this system of equations are subject to the inequalities

$$|k(i)| \leq \nu;\ 1 \leq \alpha(i) \leq N - |k(i)|;\ 1 \leq \beta(i) \leq N - |k(i)|\ (i=1, 2). \quad (18.8)$$

If $c^{(N)}_{p,q,s}$ is the number of these solutions divided by $N^2(2\nu+1)$, so that, again, the factor can be represented by (18.6), clearly

$$0 \leq c^{(N)}_{p,q,s} \leq 2.$$

Hence these coefficients are collectively bounded. Closer bounds for them can be obtained as follows. Regarding p, q, and s as constants, we can always assume $\nu > |s| + \max(|p|, |q|)$, since $\nu \to \infty$. Initially suppose $s \geq 0$. Then (18.7) and (18.8) entail $s-\nu \leq k(2) \leq \nu - s$, and to every value of $k(2)$ there correspond two values of $|k(1)|$, unless $k(2) = s = 0$, in which case $k(1) = 0$ is the only possible value. On the other hand, given $k(1)$ and $k(2)$, each of the first two equations (18.7) admits, independently of the other, between

$$N - |k(2)| - r - s \text{ and } N - |k(2)| - s$$

solutions, where $r = \max(|p|, |q|)$. Thus the total number of solutions of (18.7) is contained between

$$\sum_{k(2)=s+r-\nu}^{\nu-s-r} (N-s-r-|k(2)|)^2 - (N-r)^2 \text{ and } 2\sum_{k(2)=s-\nu}^{\nu-s} (N-s-|k(2)|)^2.$$

It is easy to see that the case of negative values of s is covered by substituting $|s|$ for s. Assuming that ν/N tends to some limit, the limit of $c^{(N)}_{p,q,s}$ can be obtained by evaluating the two sums, dividing them by $N^2(2\nu+1)$, and passing to the limit, which is the same for both; the result is

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 2 - 2\lim \frac{\nu}{N} + \frac{2}{3}\left[\lim_{N\to\infty} \frac{\nu}{N}\right]^2 \quad (18.9)$$

for any p, q, and s.

Up to this point, the discussion of the types of factor considered in this section did not depend on any assumptions about ν, apart from that of its tending to infinity with N, and, in order to justify (18.9), we only needed the existence of a limit of ν/N. However, we are more particularly concerned with the case when this limit is 0. Then (18.9) becomes

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = 2 \qquad (p, q, s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

and according to Lemma 18.1 and Corollary 18.3, the factor tends to $2\,\mathfrak{S}_4$.

The limits of the moments of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})]$ are now easily found if we note that the odd moments cannot contain

terms exclusively composed of octic factors, that for even values of n, there are $n!/[2^{n/2}(n/2)!]$ ways of grouping $k(1), \ldots, k(n)$ into $n/2$ pairs, and that, finally, given i and j, there are two ways of forming a factor of the type considered above with the summation variables $k(i)$, $k(j)$, $\alpha(i)$, $\alpha(j)$, $\beta(i)$, $\beta(j)$, since the sub-factors contain respectively either the pairs

$$\{\alpha(i), \alpha(j)\} \text{ and } \{\beta(i), \beta(j)\} \text{ or } \{\alpha(i), \beta(j)\} \text{ and } \{\beta(i), \alpha(j)\}.$$

By using the device introduced in Section 8, conclusions about the limiting probability distribution can be extended to the case when the ε's are not assumed to have moments of orders higher than 8. Thus we have the following:

Proposition 18.4. Under the assumptions H_8^*, if (14.3) holds, the distribution of

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,[\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})] \tag{18.10}$$

tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with zero mean and variance $4\,\mathfrak{S}_4$. Moreover, if the assumptions $H_{4Q}(Q \geq 2)$ are substituted for H_8^*, the moments of this random variable up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Owing to Lemma 16.1, we can, finally, draw the following conclusion:

Proposition 18.5. The preceding proposition holds if (18.10) is replaced by

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,\{M[T_N^{(\nu)}(\omega)] - E[M[T_N^{(\nu)}(\omega)]]\}.$$

There would be no difficulty in extending this result to

$$N(2\nu+1)^{-1/2}\,\{M[Z'_N(\omega)] - E[M[Z'_N(\omega)]]\},$$

with $\lambda_{k,N}$ given by (10.13) and $\nu = [\log_{1/\varrho} N]$. Clearly, the rapidity of convergence, both of distributions and of moments, is conditioned by the rapidity with which $\nu \to \infty$; consequently, either convergence must be expected to be slow.

19. The asymptotic distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$

In view of several applications which follow, it is now proposed to extend the scope of the investigation of $\Delta_{N,\nu}$ to the case when ν/N tends to a limit different from 0. Obviously, it suffices to deal with the case when $\nu = [\theta N]$, where θ is a positive constant which cannot exceed 1. If, for the sake of convenience, we make $C_{N,N} = 0$ (any other constant would do), $\Delta_{N,N}$ becomes meaningful and equal to $\Delta_{N,N-1}$, so that the most important case of $\nu = N-1$ corresponds to $\theta = 1$. The nor-

malizing coefficient $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}$ becomes equivalent to $N^{\frac{1}{2}}(2\theta)^{-\frac{1}{2}}$, but it is more convenient to make it now simply $N^{\frac{1}{2}}$.

The discussion carried out in Section 17 still applies, and the only terms, in the moments of

$$N^{\frac{1}{2}}\,[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]})], \tag{19.1}$$

which do not vanish in the limit are these which factorize into octic factors. All these factors corresponding to a given set of summation variables, say $\{k(1), k(2), \alpha(1), \alpha(2), \beta(1), \beta(2)\}$, can be lumped together into one factor, which, clearly, represents the variance of (19.1). Repeating the argument leading to Proposition 18.4, one can see that asymptotic normality of (19.1) will be proved as soon as it is proved that its variance tends to a finite limit. But the lumped octic factor under consideration is composed of two kinds of expression: Those which can be split into two sub-factors, and those which cannot. The former were discussed in detail in the preceding section. Now (18.9) becomes,

$$\lim_{N\to\infty} C^{(N)}_{p,q,s} = 2 - 2\theta + \frac{2}{3}\theta^2.$$

Considering that two factors of the type under consideration can be formed with a given set of summation variables, and that the normalizing factor of an octic term has been multiplied by 2θ, we obtain now, as a total contribution of this type of factor, the quantity

$$(8\theta - 8\theta^2 + \frac{8}{3}\theta^3)\,\mathfrak{S}_4. \tag{19.2}$$

However, when ν/N no longer tends to 0, we must also take into account the improper octic sub-factors. As shown in Section 17, the only ones which do not vanish in the limit are composed either of four V_2's or of two V_2's and one V_4. In the former case, the sub-factors can be represented as quadrilaterals, each of the two k's forming two sides. Hence this case splits into two: (i) when these two sides are adjacent; and (ii) when they are opposite each other.

In the first case, taking into account the cumulants, but ignoring the precise positions of $|\,k(1)\,|$ and $|\,k(2)\,|$, and subject to permutations within each of the two pairs $\{\alpha(1), \beta(1)\}$ and $\{\alpha(2), \beta(2)\}$, we are necessarily confronted with the scheme

(i) $\qquad R_{\alpha(1)-\alpha(2)}\,R_{\alpha(2)-\beta(2)}\,R_{\beta(2)-\beta(1)}\,R_{\beta(1)-\alpha(1)}.$

Clearly, the sum of the indices of the R's is bound to be one of the following expressions: $\pm|\,k(1)\,|, \pm|\,k(2)\,|, \pm|\,k(1)\,| \pm|\,k(2)\,|, 0$. Except in

the last case, given the sequence of the four index values of the R's, the values of two summation variables determine those of the others, so that, in view of the numerical coefficient N^{-3} belonging to the factor, this factor becomes $O(N^{-1})$.

Both $|k(1)|$ and $|k(2)|$ cancel out in the sum of the indices of the R's if, and only if, each of the k's appears once in the first and once in the second term of a difference forming such an index. Thus (i) yields four types of expression, namely:

(ia) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|-|k(2)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)+|k(2)|-|k(1)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(ib) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)-|k(1)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(ic) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$;

(id) $R_{\alpha(1)-\alpha(2)-|k(2)|}\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(2)-\beta(1)+|k(2)|}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}$.

The permutations within the pairs $\{\alpha(1), \beta(1)\}$ and $\{\alpha(2), \beta(2)\}$ double the number of terms, Permuting the values 1 and 2 of i in $\alpha(i)$, $\beta(i)$, and $k(i)$ does not increase the number of terms, since it leaves (ia) and (ic) invariant and permutes (ib) with (id). Thus we have to consider two expressions of each of the types of (ia) and (ic), and four of the type of (ib).

Each of the expressions can be represented as

$$R_s\, R_p\, R_{-s-p-q}\, R_q. \tag{19.3}$$

In the cases (ia), (ib), (ic) we have respectively

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + |k(1)| - |k(2)|; \tag{19.4}$$

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + k(1)|; \tag{19.5}$$

$$p = \alpha(2) - \beta(2);\ q = \beta(1) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2); \tag{19.6}$$

and the number of solutions, in integers, of each of these three systems of equations, subject to the inequalities

$$|k(i)| \leq [\theta N];\ 1 \leq \alpha(i) \leq N - |k(i)|;\ 1 \leq \beta(i) \leq N - |k(i)| \quad (i = 1, 2), \tag{19.7}$$

is the number of repetitions of (19.3) in the corresponding sum. This number, multiplied by the coefficient N^{-3} belonging to octic factors, will be denoted by $c^{(N)}_{p,q,s}$.

In the case of either (19.4) or (19.6), if $k(1)$ and $k(2)$ are given, and $k = \max[|k(1)|, |k(2)|]$, the number of solutions in $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, $\beta(1)$, $\beta(2)$ is easily seen to be contained between $N - k - |p| - |q| - |s|$ and $N - k$, while the number of sets of values of $k(1)$ and $k(2)$ corresponding to a given non-negative k is max $(8k, 1)$. Hence

$$\lim c^{(N)}_{p,q,s} = 4\,\theta^2 - \frac{8}{3}\,\theta^3. \tag{19.8}$$

Consequently, according to (18.3) and to Lemmas 18.1 and 18.2, with $A_k = B_k = R_k$ in the latter, the joint contribution to the variance of (19.1) of the four terms of the types of (ia) or (ic) tends to

$$(16\,\theta^2 - \frac{32}{3}\,\theta^3)\,\mathfrak{S}_4.$$

As a result of the asymmetry in the third equation (19.5), when $k(1)$ and $k(2)$ are given, the number of solutions of these equations is readily found to be contained between $N - K - |p| - |q| - |s|$ and $\max\{0, N - K + |s|\}$, where $K = |k(1)| + |k(2)|$, and the number of pairs of values of $k(1)$ and $k(2)$ corresponding to a given K is 1 if $K = 0$, $4K$ if $0 < K \leq [\theta N]$, and $4\{2[\theta N] - K + 1\}$ if $[\theta N] < K \leq 2[\theta N]$, so that

$$\lim_{N\to\infty} c^{(N)}_{p,q,s} = \begin{cases} 4\,\theta^2(1-\theta) & \text{if } 0 < \theta \leq \tfrac{1}{2}; \\ \tfrac{4}{3}\,\theta^3 - 4\,\theta^2 + 4\,\theta - \tfrac{2}{3} & \text{if } \tfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases} \tag{19.9}$$

Therefore, the joint contribution of all the terms corresponding to the scheme (i) amounts to the product of $\mathfrak{S}_4$ by:

$$\left.\begin{array}{ll} 32\,\theta^2 - \tfrac{80}{3}\,\theta^3 & \text{if } 0 < \theta \leq \tfrac{1}{2}; \\ -\tfrac{8}{3} + 16\,\theta - \tfrac{16}{3}\,\theta^3 & \text{if } \tfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{array}\right\} \tag{19.10}$$

Now we can pass to the case of an improper octic sub-factor represented by a quadrilateral in which the two sides corresponding to the same k are opposite each other. Clearly, the scheme is bound to be

(ii) $V_2[\alpha(1), \alpha(2)]\ V_2[\alpha(2), \beta(1)]\ V_2[\beta(1), \beta(2)]\ V_2[\beta(2), \alpha(1)]$,

and this is invariant with respect to the permutations considered in connection with (i). For the same reasons as before, the k's can take only four combined positions if the factor does not vanish in the limit, and it is easy to verify that the corresponding four expressions are transformed into each other by the group generated by the permutations of $\alpha(1)$ with $\beta(1)$ and of $\alpha(2)$ with $\beta(2)$. Thus we have four terms of the summand which yield the same sum and are exemplified by

$$R_{\alpha(1)-\alpha(2)+|k(1)|}\ R_{\alpha(2)-\beta(1)+|k(2)|-|k(1)|}\ R_{\beta(1)-\beta(2)-|k(2)|}\ R_{\beta(2)-\alpha(1)},$$

which is nothing else but (19.3) with

$$p = \alpha(2) - \beta(1) + |k(2)| - |k(1)|;\ q = \beta(2) - \alpha(1);\ s = \alpha(1) - \alpha(2) + |k(1)|,$$

the ranges of the variables being still defined by (19.7). This system of

equations behaves very much like (19.5), and the number of solutions is found in the same way, so that (19.9) still holds. In consequence, the joint contribution of the four terms under consideration to the limiting variance of (19.1) is again

$$\left.\begin{array}{ll} 16\,(\theta^2-\theta^3)\,\mathfrak{S}_4 & \text{if } 0>\theta\leq \tfrac{1}{2};\\ (-\tfrac{8}{3}+16\,\theta-16\,\theta^2+\tfrac{16}{3}\,\theta^3)\,\mathfrak{S}_4 & \text{if } \tfrac{1}{2}\leq\theta\leq 1.\end{array}\right\} \tag{19.11}$$

It remains to consider the improper octic sub-factors composed of three V's and covered by the scheme of (17.3). For reasons similar to those which applied to the case of products of four V_2's in factors which do not vanish in the limit, the k's can take only four sets of combined positions, so that we are left with four terms which, including the cumulants, can be represented as follows:

(iiia) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}\, V_4[\alpha(1)-\beta(2)+|\,k(1)\,|-|\,k(2)\,|,$
$\beta(1)-\beta(2)+|\,k(1)\,|-|\,k(2)\,|,\ \alpha(2)-\beta(2),\ 0];$

(iiib) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}\, V_4[\alpha(1)-\beta(2)+|\,k(1)\,|,\ \beta(1)-\beta(2)+|\,k(1)\,|,$
$\alpha(2)-\beta(2),\ 0];$

(iiic) $\varkappa_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}\, V_4[\alpha(1)-\beta(2),\ \beta(1)-\beta(2),\ \alpha(2)-\beta(2),\ 0];$

(iiid) $k_4\, R_{\alpha(2)-\beta(2)}\, R_{\beta(1)-\alpha(1)}\, V_4[\alpha(1)-\beta(2)-|\,k(2)\,|,\ \beta(1)-\beta(2)-$
$-|\,k(2)\,|,\ \alpha(2)-\beta(2),\ 0].$

It is easy to see that contribution of (iiid) is the same as that of (iiib), and that each of these expressions is equal to

$$\varkappa_4\, R_p\, R_q\, V_4[p+s,\ p+q+s,\ p,\ 0] \tag{19.12}$$

with p, q, and s given by (19.4), (19.5), and (19.6) for (iiia), (iiib), and (iiic) respectively. Thus the number of repetitions of (19.12) in each of the sums in question is the same as that of (19.3) in the corresponding sums of (ia), (ib), and (ic), and since the numbers of sums are now halved, we find, in the limit, the sum of (19.12) for all values of p, q, and s, multiplied by one-half of (19.10). But the sum of (19.12) is easily found to be $\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2$. Thus the total contribution of the terms of the type of (iii) is

$$\left.\begin{array}{ll} (16\,\theta^2-\tfrac{40}{3}\,\theta^3)\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2 & \text{if } 0<\theta\leq\tfrac{1}{2};\\ (-\tfrac{4}{3}+8\,\theta-\tfrac{8}{3}\,\theta^3)\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2 & \text{if } \tfrac{1}{2}\leq\theta\leq 1.\end{array}\right\} \tag{19.13}$$

Adding together the contributions (19.2), (19.10), (19.11) and (19.13), we find

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} \Delta_{N,[\theta N]} = \begin{cases} (8\theta+40\theta^2-40\theta^3)\,\mathfrak{S}_4+(16\theta^2-\frac{40}{3}\theta^3)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \\ \qquad\qquad \text{if } 0<\theta\leq \tfrac{1}{2}; \\ (-\tfrac{16}{3}+40\theta-24\theta^2+\tfrac{8}{3}\theta^3)\,\mathfrak{S}_4+ \\ \quad +(-\tfrac{4}{3}+8\theta-\tfrac{8}{3}\theta^3)\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \text{ if } \tfrac{1}{2}\leq\theta\leq 1; \end{cases} \tag{19.14}$$

and in particular

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} \Delta_{N,N-1} = \frac{40}{3}\,\mathfrak{S}_4 + 4\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2. \tag{19.15}$$

In view of the remarks made at the beginning of the present section, this leads to the following conclusion:

Proposition 19.1. Under the assumptions H_8^*, if $0<\theta\leq 1$, the distribution of (19.1) tends, when $N\to\infty$, to a normal distribution with a zero mean and with a variance given by (19.14) or, for $\theta=1$, by (19.15). Moreover, under the assumptions $H_{4Q}(Q\geq 1)$, the moments of (19.1) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Remark 19.2. It is easy to verify that

$$\lim_{N\to\infty} E(\Delta_{N,[\theta N]}) = (2\theta-\theta^2)\,\mathfrak{S}_2, \tag{19.16}$$

and, in particular,

$$\lim_{N\to\infty} E(\Delta_{N,N-1}) = \mathfrak{S}_2. \tag{19.17}$$

But $\Delta_{N,N-1}$ is the mean, over the frequencies, of the squared difference between the periodogram $I_N(\omega)$ and its expectation. Since, under our assumptions, $E[I_N(\omega)]\to F'(\omega)$ uniformly in ω, it follows that the mean, over the frequencies, of the squared difference between the periodogram and the "true" spectral density function tends in the mean to the constant $\mathfrak{S}_2$. Thus, in particular, we arrive at the not altogether unexpected conclusion that, as the sample size increases, the periodogram becomes less and less likely to yield, even by accident, a reasonably good estimate of the spectral density function.

20. An estimator of $\mathfrak{S}_2$ proposed by Grenander and Rosenblatt

In what follows, a numerical sequence whose general term is, say, $B_k(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ will be denoted by the same letter without the lower index, i.e. in this case by B. The following proposition, also

useful in some other contexts, and for this reason expressed in its whole generality, will play an important part in the discussion of various estimators of $\mathfrak{S}_2$:

Proposition 20.1. Make, generally,

$$\Psi_{N,\nu}(B) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 B_k(C_{k,N} - R_k), \tag{20.1}$$

and assume that, for $u = 1, \ldots, m$, the sequence $A^{(u)}$ satisfies $A^{(u)}_{-k} = A^{(u)}_k$, the corresponding series being absolutely convergent. Let ν be an arbitrary function of N subject only to the condition that it should take integral values smaller than, or equal to, N, and that it should tend to infinity with N. Then, under the assumptions H_4*, the joint probability distribution of the random variables

$$N^{1/2}\, \Psi_{N,\nu}(A^{(u)}) \qquad (u = 1, \ldots, m) \tag{20.2}$$

tends, for $N \to \infty$, to a normal multivariate distribution with zero means and with covariances determined by

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_k R_k] [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A^{(v)}_k R_k] + 2 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_p A^{(v)}_q R_{p+s} R_{q+s}. \tag{20.3}$$

Moreover, under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 2)$ substituted for H_4*, when $N \to \infty$, the moments of (20.2) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Proof. Clearly, $E[\Psi_{N,\nu}(A^{(u)})] = 0$, and

$$N \operatorname{cov}[\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \sum_{k,l=-\nu}^{\nu} A^{(u)}_k A^{(v)}_l (1 - \frac{|k|}{N})^2 (1 - \frac{|l|}{N})^2 N \operatorname{cov}(C_{k,N}, C_{l,N}).$$

Since the coefficients $A^{(u)}_k A^{(v)}_l$ are collectively bounded and since

$$\lim_{N\to\infty} (1 - \frac{|k|}{N})^2 (1 - \frac{|l|}{N})^2 N \operatorname{cov}(C_{k,N}, C_{l,N}) =$$

$$\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_k R_l + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q R_{q+k-l} + R_{q+k} R_{q-l})$$

(cf. Sections 5 and 6), we find, according to Lemma 18.1

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Psi_{N,\nu}(A^{(u)}), \Psi_{N,\nu}(A^{(v)})] =$$

$$= \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_k A^{(v)}_l [\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_k R_l + \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (R_q R_{q+k-l} + R_{q+k} R_{q-l})],$$

which is equivalent to (20.3), since

$$\sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_q R_{q+k-l} = \sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_{q+k} R_{q-l} = \sum_{k,l,q=-\infty}^{+\infty} A_k^{(u)} A_l^{(v)} R_{k+q} R_{l+q}.$$

Higher univariate and mixed moments of (20.2) can be computed in the same way, and since the asymptotic values of the moments of the sample covariances are those of a normal multivariate distribution, the resulting limits of the various moments of (20.2) are necessarily those of another normal multivariate distribution. Hence the normality of the corresponding distribution itself; this conclusion is extended, by means of the device introduced in Section 8, to the case when only H_4^* is assumed.

By making $m = 1$, $A^{(1)} = R$, we obtain the following:

Corollary 20.2. Under the assumptions H_4^*, ν tending to infinity with N, the distribution of $N^{1/2} \Psi_{N,\nu}(R)$ tends to a normal distribution with a zero mean and with a variance equal to

$$\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2^2 + 2 \mathfrak{S}_4;$$

under the assumptions $H_{2Q}(Q \geq 1)$, the moments of $N^{1/2} \Psi_{N,\nu}(R)$ up to the order Q tend, when $N \to \infty$, to the corresponding moments of this distribution.

Grenander and *Rosenblatt* [7, 24] proposed, as an estimator of $\mathfrak{S}_2$, the statistic

$$G_{N,\nu} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 C_{k,N}^2, \tag{20.4}$$

with

$$\nu = [K N^{\alpha}], \tag{20.5}$$

where K and α were positive constants, of which α had to be smaller than 1. Assuming H_8^* and $h_k = 0(k^{\beta})$ with $\beta < -1$, they proved

$$\operatorname*{plim}_{N \to \infty} G_{N,\nu} = \mathfrak{S}_2.$$

However, on the basis of the preceding results, there is no difficulty in obtaining the precise assymptotic distribution of $G_{N,\nu}$; at the same time, (20.5) can be replaced by the more general condition (14.3), and the additional assumption concerning the h's can be dropped altogether.

Obviously,

$$G_{N,\nu} - E(G_{N,\nu}) = \Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu}) + 2 \Psi_{N,\nu}(R);$$

according to Proposition 18.4 and Corollary 20.2, $\Delta_{N,\nu} - E(\Delta_{N,\nu})$ is

asymptotically negligible in comparison with $2\,\Psi_{N,\nu}(R)$, and this leads to:

Proposition 20.3. Under the assumptions $H_8{}^*$ and (14.3), the distribution of $N^{1/2}[G_{N,\nu} - E(G_{N,\nu})]$ tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with zero mean and variance $8\,\mathfrak{S}_4 + 4\,\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2{}^2$, the moments up to the order Q behaving accordingly if H_{8Q} holds.

Unfortunately, the bias of $G_{N,\nu}$ is much less satisfactory than its scatter. We have

$$E(G_{N,\nu}) - \mathfrak{S}_2 =$$

$$= \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \operatorname{var} C_{k,N} - \sum_{k=-\nu}^{\nu} [1 - (1 - \frac{|k|}{N})^2]\, R_k^2 - 2 \sum_{k=\nu+1}^{\infty} R_k^2. \qquad (20.6)$$

Of these three terms, the middle one is the least alarming. It is easily seen to be smaller, in absolute value, than

$$\frac{4}{N} \sum_{k=1}^{\nu} k\, R_k^2;$$

thus, if $\Sigma\, |k|\, R_k{}^2$ converges, which is a mild additional assumption, this term is $O(N^{-1})$, and, therefore, asymptotically negligible in comparison with the standard deviation of $G_{N,\nu}$.

The first term of the bias is easily seen to be $O(\nu/N)$. If (20.5) holds, this becomes $O(N^{\alpha-1})$, which is negligible in comparison with the standard deviation of the estimator only if $\alpha < 1/2$, although it should be remembered that if $\mathfrak{S}_2$ is estimated on the basis of several independent samples of the same process, the relative importance of the bias increases accordingly.

The third term of (20.6) can be the most important of the three. If R_k is of the order of $k^{-(1+\delta)}$, the term in question is of the order of $\nu^{-(1+2\delta)}$, i.e. of $N^{-\alpha(1+2\delta)}$ if (20.5) holds. Therefore, if α is to be chosen independently of the process to which $G_{N,\nu}$ is applied, and so as to make the third bias term negligible in comparison with $[\operatorname{var} G_{N,\nu}]^{1/2}$ whenever there exists a positive δ for which $R_k = O(k^{-(1+\delta)})$, we must make $\alpha \geq 1/2$. This is incompatible with the requirement arising out of the consideration of the first bias term. It might be argued that cases where $\Sigma\, R_k$ converges extremely slowly are of little importance in practice, and that assuming a positive lower bound for δ would make it possible to chose α so as to make all the three bias terms relatively negligible. However, there are further difficulties.

Even if α is determined once and for all, $[K N^{\alpha}]$ is still any integer so long as K has not been specified. If the value of K were to be chosen on the basis a preliminary inspection of the sample available, this would thoroughly change the character of the estimator by introducing another level of estimation, even if no formalized procedure were adopted. We should, therefore, assume that the value of K is specified in advance, without paying any attention to the sample to be analyzed. Asymptotically, the result would be satisfactory irrespective of the choice of value for K, subject to the limitations pointed out above. Nevertheless, it should be borne in mind that asymptotic properties of estimators are useful only insomuch as they can be regarded as approximately applying to samples of reasonable size, i.e. such as can be profitably treated by methods of Mathematical Statistics. But the desirable asymptotic properties deduced above for $G_{N,\nu}$ do not fulfil this requirement. The bias may exceed the standard deviation, and indeed its ratio to the "true" value of $\mathfrak{S}_2$ can be arbitrarily near to -1, however "reasonable" the sample size may be.

This can best be seen as follows: Consider a continous-parameter process sampled at regular intervals, and suppose that this operation yields linear processes; according to *Doob* [23], this is bound to happen, at least approximately, if the original process is Gaussian, so that, then, the presently developed theory can be applied. Now assume that, instead of one sampling, we have an infinite sequence of them, corresponding to a sequence of sampling interval lengths tending to 0. An infinity of discrete-parameter processes is thus generated, and the samples which correspond to a fixed sample of the continuous-parameter process ought to be regarded as approximately equally "reasonable". But if the continuous parameter is regarded as measuring time, then the lengths of time corresponding to $\nu = [K N^{\alpha}]$ with the same K and α shrink to 0 with the sampling interval, so that

$$-2 \sum_{k=\nu+1}^{\infty} R_k^2 / \mathfrak{S}_2 \to -1.$$

The only way of meeting this objection is to have ν/N tending to a positive limit, by making $\nu = [\theta N]$ with $0 < \theta \leq 1$. Theoretically, the most satisfactory solution is to make $\theta = 1$, but since the computations are substantially reduced by taking a smaller value of θ, the general case will be treated. It may be reasonable to say that unless the covariances become collectively negligible for lags exceeding, for

instance, one-tenth of the sample size, no statistical analysis is worthwhile; then we can decide a priori to make $\theta = 1/10$. Of course, now the first term of (20.6) has to be taken into account; it is nothing else but $E(\Delta_{N,[\theta N]})$, which is asymptotically given by (19.16). Thus

$$\lim_{N\to\infty} E(G_{N,[\theta N]}) = (1 + 2\theta - \theta^2)\,\mathfrak{S}_2,$$

the difference between $E(\Delta_{N,[\theta N]})$ and its limit being easily seen to be $O(N^{-1})$ whenever $\Sigma\,|k|\,R_k$ converges, and being, in any case, asymptotically insensitive to a shortening of the sampling intervals.

It is, therefore, proposed to take

$$S_{N,[\theta N]} = (1 + 2\theta - \theta^2)^{-1} \sum_{k=-[\theta N]}^{[\theta N]} (1 - \frac{|k|}{N})^2\, C_{k,N}^2 \tag{20.7}$$

with any positive θ not exceeding 1, or, more particularly,

$$S_{N,N-1} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2\, C_{k,N}^2, \tag{20.8}$$

as an estimator of $\mathfrak{S}_2$. According to what has been said, the bias of this estimator can be regarded as comparatively negligible. On the other hand,

$$S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]}) =$$
$$= (1 + 2\theta - \theta^2)^{-1}\,[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]}) + 2\,\Psi_{N,[\theta N]}(R)]. \tag{20.9}$$

Both parts of the expression in square brackets were investigated above; however, in order to obtain the asymptotic distribution of their sum, we shall have to determine the asymptotic joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$ and $\Psi_{N,[\theta N]}(R)$.

21. The asymptotic joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(1)}), \ldots, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(m)})$

Proposition 21.1. Under the assumptions of Proposition 20.1, with H_8^* substituted for H_4^*, θ satisfying $0 < \theta \leq 1$, the joint distribution of (19.1) and (20.2) tends, when $N \to \infty$, to a normal multivariate distribution with zero means and with covariances given by (19.14), (20.3), and

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}\,[\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(u)})] =$$
$$= (2\theta - \theta^2)\,[4 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\, R_p\, R_q\, R_{-p-q-s} + 2\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\, R_s]. \tag{21.1}$$

Moreover, when the assumptions $H_{4Q}(Q \geq 2)$ are substituted for H_8*, the univariate and mixed moments of (19.1) and (20.2) up to the order Q tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

Proof. The distribution under consideration will be deduced from its moments; the univariate moments of (19.1), as well as all the moments of (20.2), were obtained in the preceding two sections, so that we only need to find those moments which involve both (19.1) and at least one of the variables (20.2). Following the same procedure as in Section 19, and using formulae established in Sections 5 and 6, we can express the moments under consideration as sums of terms each of which is a multiple sum of products of V's with the appropriate cumulants and numerical coefficients, now also multiplied by the corresponding products of A's. The summation variables, clearly, include a number of k's equal to the overall order of the moment. Those k's which appear as indices of the A's will be described, in this section, as being *of the first kind*, and all the others, whose presence is due to $\Delta_{N,[\theta N]}$, as being *of the second kind*. If $k(i)$ is of the second kind, it is associated with two other summation variables in the same way as all the k's were in Section 19; these further summation variables, now also described as being of the second kind, will be denoted by $\alpha(i)$ and $\beta(i)$. If $k(i)$ is of the first kind, it is obviously associated, in a similar way, with only one other summation variable, which will be denoted by $\alpha(i)$ and described as being of the first kind. In order to simplify the language, it is proposed to describe the h's themselves as being of the first, or second, kind in accordance with the kind of summation variables which form their indices.

In general, the various terms composing any of the moments under consideration can be factorized, and in each of the factors some of the k's can be regarded as redundant. Each term of such a multiple sum is a product of h's, and now also of A's; since the knowledge of the sequence of index values of the A's and h's includes the knowledge of the values of the k's of the first kind, these can be regarded as redundant by an obvious extention of the definition of redundancy given in Section 17.

Let $n(1)$ be the order of the moment in the Ψ's, and $n(2)$ that in $\Delta_{N,[\theta N]}$; every term contains, then, $2\,n(1)$ h's of the first kind and $4\,n(2)$ of the second, while the normalizing coefficient is $N^{\frac{1}{4}[n(1)+n(2)]}$. On the other hand, if we include the corresponding coefficients $1 - N^{-1}\,|\,k\,|$ in the C's, the denominators of the sample covariances

contribute $N^{-n(1)-2n(2)}$. A similar coefficient remains attached to each A, but it can be omitted as having no bearing on the limit of the whole sum. Thus the numerical coefficient in front of each term of the moment is $N^{-\frac{1}{2}n(1)-\frac{1}{2}n(2)}$. As previously done on similar occasions, this coefficient can be apportioned among the sub-factors. If, changing the notations, we now assume that the sub-factor, and not the term, is of degree $2\,n(1)$ in the h's of the first kind, and $4\,n(2)$ in those of the second kind, so that $n(2)$ is no longer necessarily an integer, but is bound to be a multiple of $\frac{1}{2}$, the corresponding coefficient has still the same form, and the order of magnitude associated with the sub-factor is equal to this coefficient multiplied by a power of N with an exponent exceeding 1 by the number of non-redundant k's in the sub-factor, those which appear only once being counted as halves (cf. Section 17). For sub-factors containing h's of one kind only, this coefficient is always bounded, since these are the sub-factors which arise in the previously computed moments; they were examined in detail in the case of $\Delta_{N,\nu}$ in Section 17, while in the case of Ψ's sub-factors coincide with factors and indeed differ from those considered in Section 5 and 6 only by the accretion of the corresponding A's and the summation with respect to the k's which, here, does not influence the respective orders of magnitude. If $n(1) = 1$ and $n(2) = \frac{1}{2}$, it is esay to verify that the k of the second kind is necessarily redundant, so that the order of magnitude associated with the sub-factor is that of $N^{-\frac{1}{4}}$. Otherwise, if $n(1)$ and $n(2)$ are both positive, we have $n(1) \geq 1$ and $n(2) \geq 1$, and, in view of the redundancy of all the k's of the first kind, even if there is no redundancy among those of the second kind, the order of magnitude attached to the sub-factor is $N^{1-\frac{1}{2}[n(1)+n(2)]}$, which tends to 0 unless $n(1) = n(2) = 1$, and remains bounded if $n(1) = n(2) = 1$.

However, this order of magnitude is lowered if at least one of the k's of the second kind is redundant. But there is no difficulty in seeing that if the sub-factor is proper, such a redundancy must arise. Thus we are left with improper sub-factors which are quadratic in the h's of the first kind, and quartic in those of the second. The sum of all such factors corresponding to a given set of summation variables, say $k(1)$, $\alpha(1)$, $k(2)$, $\alpha(2)$, $\beta(2)$, is, clearly, nothing else but

$$N \operatorname{cov} [\Delta_{N,[\theta N]}, \Psi_{N,[\theta N]}(A^{(u)})], \tag{21.2}$$

and from considerations similar to those adduced before it follows that if (21.2), with $u = 1, \ldots, m$, tend to definite limits, higher moments

tend to the respective moments of the multivariate normal distribution defined by these limiting values of the covariances. The conclusion is that the limiting joint distribution of (19.1) and (20.2) is normal, the case when not all the moments of the ε's exist being taken care of by the device introduced in Section 8; there remains only to find the limit of the covariances.

The summand in each of the terms of the exact expression for (21.1) is a product of V's with indices adding up to 6. But if this product reduces to one V_6, then, clearly, not only $k(1)$, but also $k(2)$ is redundant, and such a term tends to 0; the same remark can easily be seen to apply to a product of two V_3's. Moreover, in the case of a product of one V_2 and one V_4, $k(2)$ is still redundant unless it forms two links between the two V's. Finally, when we have three V_2's, the graph corresponding to the factor (cf. Section 17) is necessarily a triangle, since otherwise quadratic sub-factors would be formed, and these are known to cancel out. Thus we are left with the following two schemes, in which, for the time being, the positions of $|\,k(1)\,|$ and $|\,k(2)\,|$ are ignored.

(i) $A^{(u)}_{k(1)}\, V_2[\alpha(1), \alpha(2)]\, V_2[\alpha(2), \beta(2)]\, V_2[\beta(2), \alpha(1)]$;

(ii) $A^{(u)}_{k(1)}\, V_4[\alpha(1), \alpha(1), \alpha(2), \beta(2)]\, V_2[\alpha(2), \beta(2)]$.

With the first scheme, $|\,k(1)\,|$ may appear in either extreme V_2, but one case is transformed into the other by permuting $\alpha(2)$ with $\beta(2)$, so that we can assume, for instance, that $|\,k(1)\,|$ appears at the end, and then double the number of terms. If the value of $|\,k(2)\,|$ cannot be deduced from the sequence of index values of the h's in a given term of the sum, it can be seen in the same way in which it was demonstrated before that $|\,k(2)\,|$ can take only two combined positions out of the four possible. Thus, if we include the cumulants, a summand following the scheme (i) takes each of the following two forms twice

(ia) $A^{(u)}_{k(1)}\, R_{\alpha(2)-\alpha(1)}\, R_{\beta(2)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(1)-\beta(2)+|\,k(1)\,|}$;

(ib) $A^{(u)}_{k(1)}\, R_{\alpha(2)-\alpha(1)+|\,k(2)\,|}\, R_{\beta(2)-\alpha(2)}\, R_{\alpha(1)-\beta(2)-|\,k(2)\,|+|\,k(1)\,|}$.

In both cases, the summand can be represented as

$$A^{(u)}_s\, R_p\, R_q\, R_{-p-q-|\,s\,|}, \tag{21.4}$$

with

$$s = k(1);\ p = \alpha(2) - \alpha(1);\ q = \beta(2) - \alpha(2) \tag{21.5}$$

in the first case, and

$$s = k(1);\ p = \alpha(2) - \alpha(1) + |\,k(2)\,|;\ q = \beta(2) - \alpha(2) \tag{21.6}$$

in the second, always subject to the inequalities

$$1 \leq \alpha(1) \leq N - |k(1)|;\ 1 \leq \alpha(2) \leq N - |k(2)|;$$
$$1 \leq \beta(2) \leq N - |k(2)|;\ |k(1)|, |k(2)| \leq \theta N. \tag{21.7}$$

Remembering the factor N^{-2} in front of the sums, the limit of the corresponding term in (21.2) can be obtained by applying Lemma 18.1 to the absolutely convergent sum of (21.4), $c^{(N)}_{p,q,s}$ being now N^{-2} times the number of solutions, in integers, of (21.5) for (ia) and (21.6) for (ib), in both cases subject to the inequalities (21.7). In either case, given $k(2)$, and assuming $|s| \leq \theta N$, the number of solutions is contained between $N - |k(2)| - |p| - |q| - |s|$ and $N - |k(2)|$. Consequently,

$$c^{(N)}_{p,q,s} \to 2\theta - \theta^2. \tag{21.8}$$

Thus the joint contribution of the four terms which are covered by the scheme (i) tends to

$$4(2\theta - \theta^2) \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_s R_p R_q R_{-p-q-|s|}.$$

But, for any s,

$$\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} R_p R_q R_{-p-q-|s|} = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} R_p R_q R_{-p-q-s},$$

so that the previous expression can be represented as

$$4(2\theta - \theta^2) \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} A^{(u)}_s R_p R_q R_{-p-q-s}. \tag{21.9}$$

In the case of the second scheme, in view of the symmetry of the V's with respect to their arguments, permutations of $\alpha(1)$ with $\alpha(1) + |k(1)|$ do not create further terms, while, in the terms which do not vanish in the limit, there are only two possible combined positions of $|k(2)|$. Consequently, we have the following two terms:

(iia) $\varkappa_4 A^{(u)}_{k(1)} R_{\beta(2)-\alpha(2)} V_4[\alpha(2) - \alpha(1), \beta(2) - \alpha(1), 0, |k(1)|]$;

(iib) $\varkappa_4 A^{(u)}_{k(1)} R_{\beta(2)-\alpha(2)} V_4[\alpha(2) - \alpha(1) + |k(2)|, \beta(2) - \alpha(1) + |k(2)|, 0, |k(1)|]$.

Both are of the form of

$$\varkappa_4 A^{(u)}_s R_q V_4[p, p+q, 0, |s|]$$

with p, q, and s given by (21.5) in the first case, and by (21.6) in the second; following the same method as before, we find that the joint contribution of (iia) and (iib) to the variance tends to

$$2\,(2\,\theta-\theta^2)\,\varkappa_4 \sum_{p,\,q,\,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\,R_q\,V_4[p,\,p+q,\,0,\,|\,s\,|\,] =$$

$$= 2(2\,\theta-\theta^2)\,\varkappa_4 \sum_{p,\,q,\,s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\,R_q\,V_4[p,\,p+q,0,s] = 2(2\,\theta-\theta^2)\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s^{(u)}\,R_s,$$

and adding this contribution to (21.9), we find (21.1). Hence the proof is complete.

Corollary 21.2. Under the assumptions $H_8{}^*$ if $0 < \theta \leq 1$, the joint distribution of $N^{1/2}[\Delta_{N,[\theta N]} - E(\Delta_{N,[\theta N]})]$ and $N^{1/2}\,\Psi_{N,[\theta N]}(R)$ tends to a normal bivariate distribution with zero means, variances given by (19.14) and by Corollary 20.2, and a covariance determined by

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}\,[\Delta_{N,[\theta N]},\,\Psi_{N,[\theta N]}(R)] = (2\,\theta-\theta^2)\,(4\,\mathfrak{S}_4 + 2\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2); \qquad (21.10)$$

in particular, if $\theta = 1$, (19.14) becomes (19.15), and (21.10) simplifies to

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}\,[\Delta_{N,N-1},\,\Psi_{N,N-1}(R)] = 4\,\mathfrak{S}_4 + 2\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2. \qquad (21.11)$$

22. The asymptotic distribution of $S_{N,[\theta N]}$ and of some statistics connected with the reduced spectrum

Owing to (20.9), the asymptotic distribution and moments of $S_{N,[\theta N]}$ are implicit in Corollary 21.2; thus we have the following:

Proposition 22.1. Under the assumptions $H_8{}^*$, if $0 < \theta \leq 1$, the distribution of $N^{1/2}[S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]})]$ tends to a normal distribution with a zero mean and with a variance equal to

$$\frac{8+40\,\theta+24\,\theta^2-40\,\theta^3}{(1+2\,\theta-\theta^2)^2}\,\mathfrak{S}_4 + \frac{4+16\,\theta+8\,\theta^2-{}^{40}/_3\,\theta^3}{(1+2\,\theta-\theta^2)^2}\cdot\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \text{ when } \theta \leq 1/2;$$

and to

$$\frac{{}^8/_3+72\,\theta-40\,\theta^2+{}^8/_3\,\theta^3}{(1+2\,\theta-\theta^2)^2}\,\mathfrak{S}_4 + \frac{{}^8/_3+24\,\theta-8\,\theta^2-{}^8/_3\,\theta^3}{(1+2\,\theta-\theta^2)^2}\cdot\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2 \text{ when } \theta \geq 1/2;$$

under the assumptions $H_{4m}(m > 1)$, the moments of $N^{1/2}[S_{N,[\theta N]} - E(S_{N,[\theta N]})]$ up to the order m tend to the corresponding moments of the distribution specified above.

It is, in general, remarkable how little this asymptotic variance is affected by the choice of θ; in particular, the differences in the coefficient of $\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2$ are practically negligible. The analytic continuity of each of the coefficients of $\mathfrak{S}_4$ and of $\varkappa_4\,\varkappa_2^{-2}\,\mathfrak{S}_2^2$ is broken at the point

$\theta=\frac{1}{2}$, but the discontinuity appears only in the third derivatives. Each of these coefficients has a unique maximum in the interval [0, 1]; in either case, this maximum occurs not far from the middle of the interval, but while the coefficient of $\mathfrak{S}_4$ has a maximum at $\theta = 0.537766\ldots$, the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$ takes its greatest value when

$$\theta = (-2+\sqrt{19})/5 \simeq 0.47178.$$

The numerical values of the two coefficients are tabulated below:

	Coefficient of $\mathfrak{S}_4$	Coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$	Remarks
0	8	4	Limiting case; the first two derivatives of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$ vanish.
0.1000	8.6152	4.0016	
0.2000	8.9965	4.0081	
0.3000	9.2452	3.0174	
0.4000	9.3992	4.0251	Maximum of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$.
0.4718	9.4583	4.0277	
0.5000	9.4694	4.0272	Break in analytic continuity.
0.5378	9.4744	4.0253	Maximum of the coefficient of $\mathfrak{S}_4$.
0.6000	9.4644	4.0202	
0.7000	9.4244	4.0109	
0.8000	9.3794	4.0039	
0.9000	9.3459	4.0006	The first two derivatives of the coefficient of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}\, \mathfrak{S}_2^2$ vanish.
1.0000	$28/3 = 9.333$	4.3	

Obviously, in practical applications, θ will be made either small or equal to 1. In the latter case, the formulae simplify greatly, yielding

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} S_{N,N-1} = \frac{28}{3}\,\mathfrak{S}_4 + 4\,\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\,\mathfrak{S}_2^2. \tag{22.1}$$

Considerations similar to those of Section 15 can now be extended to further statistics connected with the reduced spectrum. In the first place, it is easy to see that if we introduce

$$m[p_N^{(\nu)}(\omega)] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [p_N^{(\nu)}(\omega) - f'(\omega)]^2\, d\omega$$

as a figure of merit of $p_N^{(\nu)}(\omega)$ regarded as an estimator of $f'(\omega)$, assuming only that ν tends to infinity with N, and if we make

$$\delta_{N,\nu} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} (1 - \frac{|k|}{N})^2\, (r_{k,N} - \varrho_k)^2,$$

the asymptotic distribution of $m[p_N^{(\nu)}(\omega)]$ is the same as that of $\delta_{N,\nu}$. But

$$N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\,[\delta_{N,\nu} - R^{-2}\,E(\Delta_{N,\nu})] = \frac{N}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\frac{R_0^2\,\Delta_{N,\nu} - C_{0,N}^2 E(\Delta_{N,\nu}) - 2R_0\Psi_{N,\nu}(R)(C_{0,N}-R_0) + (C_{0,N}-R_0)^2\Sigma(1-N^{-1}|k|)^2 R_k^2}{R_0^2\,C_{0,N}^2},$$

and the last two terms of the numerator clearly tend to 0 in the mean, even when multiplied by the normalizing factor in front of the fraction. Thus the asymptotic distribution of the expression above is the same as that of

$$\frac{N}{(2\nu+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{R_0^2[\Delta_{N,\nu}-E(\Delta_{N,\nu})] - 2R_0E(\Delta_{N,\nu})(C_{0,N}-R_0) - E(\Delta_{N,\nu})(C_{0,N}-R_0)^2}{R_0^2\,C_{0,N}^2}.$$

Here, again, the last term is asymptotically negligible in any case, while, as a consequence of $E(\Delta_{N,\nu}) = O(\nu/N)$, the second term is also negligible whenever $\nu/N \to 0$. Hence the following:

Proposition 22.2. Under the assumptions $H_8{}^*$, if (14.3) holds, the distributions of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\{m[p_N^{(\nu)}(\omega)] - R_0^{-2}\,M[T_N^{(\nu)}(\omega)]\}$ and of $N(2\nu+1)^{-\frac{1}{2}}\,[\delta_{N,\nu} - R_0^{-2}\,E(\Delta_{N,\nu})]$ both tend, when $N\to\infty$, to a normal distribution with a zero mean and a variance equal to $4\,\mathfrak{f}_4$, where

$$\mathfrak{f}_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[f'(\omega)]^n\,d\omega = \sum_{k(1)+\ldots+k(n)=0} \varrho_{k(1)}\cdots\varrho_{k(n)} = R_0^{-n}\,\mathfrak{S}_n \quad (n=2,3,\ldots). \tag{22.2}$$

Moreover, under the assumptions H_{12m}^*, these two statistics have finite moments of all the orders lower than $2m$, and, when $N\to\infty$, these moments tend to the respective moments of the aforesaid distribution.

The last conclusion is based on the fact that the expressions are $o(N^{9/5})$. There would be no difficulty in extending this investigation to the case when $\nu = [\theta N]$. However, it may be more interesting directly to study an estimator of $\mathfrak{f}_2$, which, in the case of the reduced spectrum, plays the part previously played by $\mathfrak{S}_2$. Such an estimator is given by the formula

$$s_{N,[\theta N]} = C_{0,N}^{-2}\,S_{N,[\theta N]}.$$

Its properties depend on the joint distribution of $\Delta_{N,[\theta N]}$, $\Psi_{N,[\theta N]}(R)$, and $C_{0,N}$. Their asymptotic joint distribution is implicitly specified by Propositions 19.1, 20.1 and 21.1, since clearly, $C_{0,N}-R_0 = \Psi_{N,[\theta N]}(U)$ where $U_0 = 1$ and $U_k = 0$ whenever $k \neq 0$. Thus, for any θ such that $0 < \theta \leq 1$, the distribution in question is normal, and its variances

and covariances are given by (19.14), by Corollaries 20.2 and 21.2, and by the following three relations:

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}(\Delta_{N,[\theta N]}, C_{0,N}) = (2\theta - \theta^2)(4\mathfrak{S}_3 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2); \tag{22.3}$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}[\Psi_{N,[\theta N]}(R), C_{0,N}] = 2\mathfrak{S}_3 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2; \tag{22.4}$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} C_{0,N} = 2\mathfrak{S}_2 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0^2. \tag{22.5}$$

Hence also, in view of (20.9), the asymptotic joint normality of $S_{N,[\theta N]}$ and $C_{0,N}$, with

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}(S_{N,[\theta N]}, C_{0,N}) = 4\mathfrak{S}_3 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \mathfrak{S}_2 \tag{22.6}$$

irrespective of the particular value taken by θ.

Now, clearly

$$s_{N,N-1} - \frac{E(S_{N,N-1})}{R_0^2} = \frac{R_0^2[S_{N,N-1} - E(S_{N,N-1})] - 2R_0 E(S_{N,N-1})(C_{0,N} - R_0) - E(S_{N,N-1})(C_{0,N} - R_0)^2}{R_0^2 C_{0,N}^2},$$

the last term in the numerator being asymptotically negligible in comparison with the first two. Hence the following:

Proposition 22.3. Under the assumptions H_8^*, the distribution of

$$N^{1/2}[s_{N,N-1} - R_0^{-2} E(S_{N,N-1})] \tag{22.7}$$

tends, when $N \to \infty$, to a normal distribution with a zero mean and a variance equal to

$$^{28}/_3 \int_4 - 16 \int_2 \int_3 + 8 \int_2^3. \tag{22.8}$$

Moreover, under the assumptions $H_{12m}^*(m > 1)$, (22.7) has finite moments of every order lower than $2m$, and these moments tend to the respective moments of the aforesaid distribution.

Since, according to the Schwarz inequality, $\int_3 \leq \int_4^{1/4} \int_2^{1/4}$, (22.8) is bigger than, or equal to, $^4/_3 \int_4$, the equality taking place if, and only if, $f'(\omega) = 1$ everywhere, in which case this reduces to 4/3. It is remarkable that this asymptotic variance is independent of $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ (cf. *Bartlett's* guess [22]). However, if the same argument is applied to $s_{N,[\theta N]}$ with $\theta < 1$, which presents no difficulty, in the resulting formula, which is rather cumbersome, a term in $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ will reappear, though with a

very small coefficient, the whole difference in comparison with $\lim N \operatorname{var} s_{N,N-1}$ being due to the change in $\lim N \operatorname{var} S_{N,[\theta N}$ when θ is no longer equal to 1.

23. Acknowledgements

The authors wish wholeheartedly to thank Mr. J. D. North, Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd., for his continuing patronage of their work, and for his permission to publish the results of their research.

References

[2] *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.

[6] *U. Grenander*, "On empirical spectral analysis of stochastic processes", Ark. Mat., Vol. 1 (1951), pp. 503—531.

[7] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, "Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes", Ann. Math. Stat., Vol. 24. (1953), pp. 537—558.

[14] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "On estimating the spectral density function of a stochastic process", J. Roy, Statist. Soc., Ser. B, Vol. 19 (1957), pp. 13—37.

[20] *M. S. Bartlett*, "Smoothing periodograms from time series with continuous spectra", Nature, Vol. 161 (1948), pp. 686—687.

[21] *M. S. Bartlett*, "Periodogram analysis and continuous spectra", Biometrika, Vol. 37 (1950), pp. 1—16.

[22] *M. S. Bartlett*, "Problèmes de l'analyse spectrale des séries temporelles stationnaires", Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, Vol. 3 (1954), pp. 119—134.

[23] *J. L. Doob*, "Time series and harmonic analysis", Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, edited by J. Neyman, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1949, pp. 303—343.

[24] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, Statistical analysis of stationary time series, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[25] *E. Parzen*, "On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series", Ann. Math. Stat., Vol. 28 (1957), pp. 329—348.

[26] *E. Parzen*, "A central limit theorem for multilinear stochastic processes", Ann. Math. Statist., Vol. 28 (1957), pp. 252—255.

[27] *J. W. Tukey*, "The sampling theory of power spectrum estimates", Symposium on Application of Autocorrelation Analysis to Physical Problems, Woods Hole, Mass., 13—14 July 1949, Office of Naval Research, Dept. of Navy, Washington D. C.

Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen

Von

Walter Kautny, Wien

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 25. Juni 1958)

§ 1. Einleitung

Als „*harmonischer Umschwung*" wird jene Raumbewegung bezeichnet, die sich aus einer gleichförmigen Drehung um eine Achse z und einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse zusammensetzt. Unter Verwendung des Drehwinkels σ als Parameter kann diese Bewegung in Zylinderkoordinaten r, φ, z durch

$$r = r_0,\ \varphi = \varphi_0 + \sigma,\quad z = z_0 + h \,.\, \sin n\sigma \tag{1}$$

beschrieben werden; die positiv vorausgesetzten Konstanten h und n werden die Amplitude bzw. Frequenz des Umschwungs genannt. Es handelt sich um eine naheliegende Verallgemeinerung des durch $n = 1$ gekennzeichneten „vollkommen steilen Umschwungs" von *Mannheim-Darboux* mit lauter Ellipsen als Bahnkurven.

In einer vorangegangenen, im folgenden kurz mit „I" zitierten Arbeit[1] wurden vor allem die Punktbahnen („Umschwungkurven") und die von mitgenommenen Ebenen eingehüllten abwickelbaren Flächen („Umschwungtorsen") studiert. Die vorliegende Mitteilung ist nun den durch eine umschwingende Gerade erzeugten (windschiefen) Strahlflächen gewidmet, die „*Umschwungstrahlflächen*" genannt werden. Diese speziellen Flächen, die für rationale Frequenz n rational-algebraisch ausfallen, sind durch verschiedene bemerkenswerte Eigenschaften und großen Formenreichtum ausgezeichnet, gestatten jedoch

[1] *W. Kautny*, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Mh. Math. **60** (1956), 66–82.

infolge ihres einfachen gemeinsamen Entstehungsgesetzes eine ins Detail gehende Untersuchung im kleinen wie im großen.

An bekannten Flächen finden sich unter ihnen für $n = 2$ das Plückerkonoid und für $n = 1$ gewisse metrisch spezielle Strahlflächen 4. Grades, die bereits von *J. Krames* untersucht und „Θ-Flächen" genannt worden sind[2].

§ 2. Klassifikation

Es soll zunächst mittels $x = r.\cos\sigma$, $y = r.\sin\sigma$ zu kartesischen Koordinaten übergegangen werden. Die Bewegungsgleichungen (1) nehmen dann folgende Form an:

$$x = x_0\cos\sigma - y_0\sin\sigma,\quad y = x_0\sin\sigma + y_0\cos\sigma,\quad z = z_0 + h\,.\,\sin n\sigma. \tag{2}$$

Da zwei einem Umschwung unterworfene Geraden, die gegenüber der Achse z dieselbe, durch Abstand a und Winkel $\beta \neq 0$ gekennzeichnete Lage besitzen, kongruente Strahlflächen erzeugen, so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, die zu $\sigma = 0$ gehörige Anfangslage g_0 als normale Treffgerade der x-Achse anzunehmen. Ihre Darstellung lautet dann mit Verwendung eines Längenparameters v und der Abkürzung $\operatorname{ctg}\beta = b$:

$$x_0 = a,\quad y_0 = v,\quad z_0 = b.v. \tag{3}$$

Eintragung in (2) liefert eine *Parameterdarstellung der Umschwungstrahlfläche* mit σ und v als Flächenparametern:

$$x = a\,.\,\cos\sigma - v\,.\,\sin\sigma,\quad y = a\,.\,\sin\sigma + v\,.\,\cos\sigma,\quad z = b\,.\,v + h\,.\,\sin n\sigma. \tag{4}$$

Die zugehörigen Parameterlinien $\sigma = \text{const}$ sind die geradlinigen *Erzeugenden* g der Fläche, während durch $v = \text{const}$ die auf der Fläche verlaufenden *Umschwungbahnen* der einzelnen Punkte von g_0 gekennzeichnet sind.

Nach dem Vorbild der Strahlschraubflächen[3] kann auch hier folgende Typenunterscheidung vorgenommen werden: Eine Umschwungstrahlfläche soll „*geschlossen*" oder „*offen*" heißen, je nachdem ihre Erzeugenden die Achse schneiden oder nicht; ferner soll sie „*gerade*" oder „*schief*" genannt werden, je nachdem die Erzeugenden mit der Achse einen rechten Winkel einschließen oder nicht. Dementsprechend ergeben sich vier wesentlich verschiedene Typen:

---

[2] *J. Krames*, Über die durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugten Regelflächen Θ. Jahresber. DMV **50** (1940), 58–65.

[3] *E. Müller* und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Leipzig u. Berlin, 1936, S. 201.

1. Schiefe offene Umschwungstrahlflächen ($a \neq 0, b \neq 0$; Abb. 1),

2. schiefe geschlossene Umschwungstrahlflächen ($a = 0, b \neq 0$; Abb. 2),

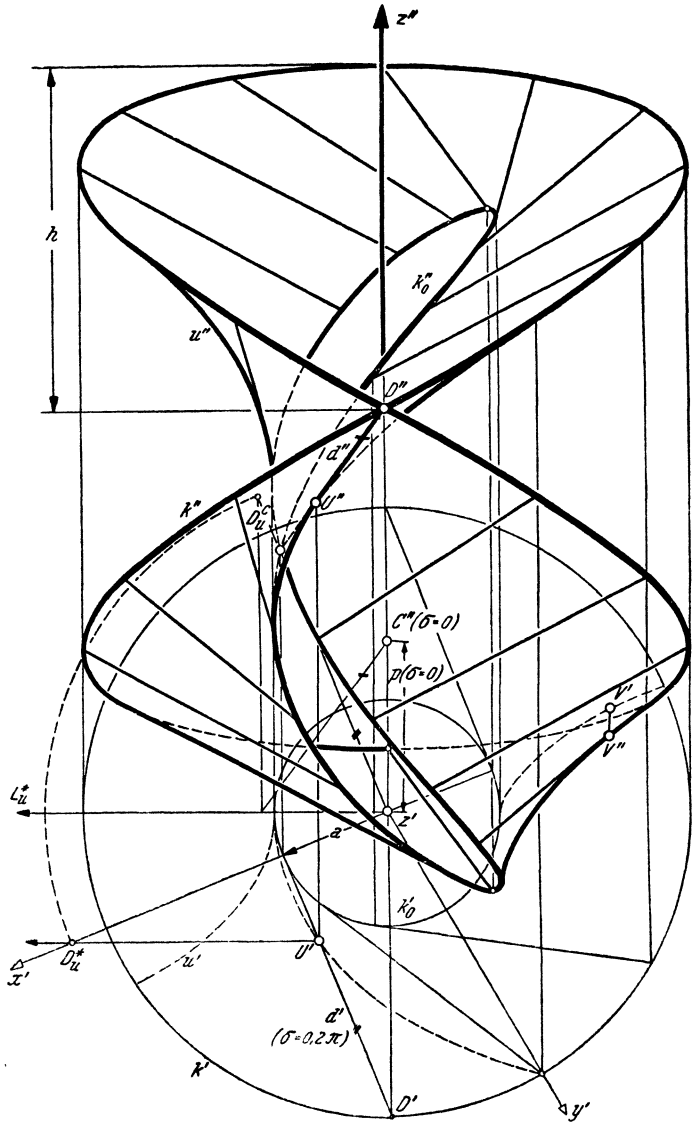

Abb. 1. Schiefe offene Umschwungstrahlfläche 6. Ordnung; $n = 1/2$, $b = 1/2$. Selbstschnitt: Doppelerzeugende d und Kurve 7. Ordnung

3. gerade offene Umschwungstrahlflächen ($a \neq 0, b = 0$; Abb. 3),
4. gerade geschlossene Umschwungstrahlflächen („Umschwungwendelflächen") ($a = 0, b = 0$; Abb. 4).

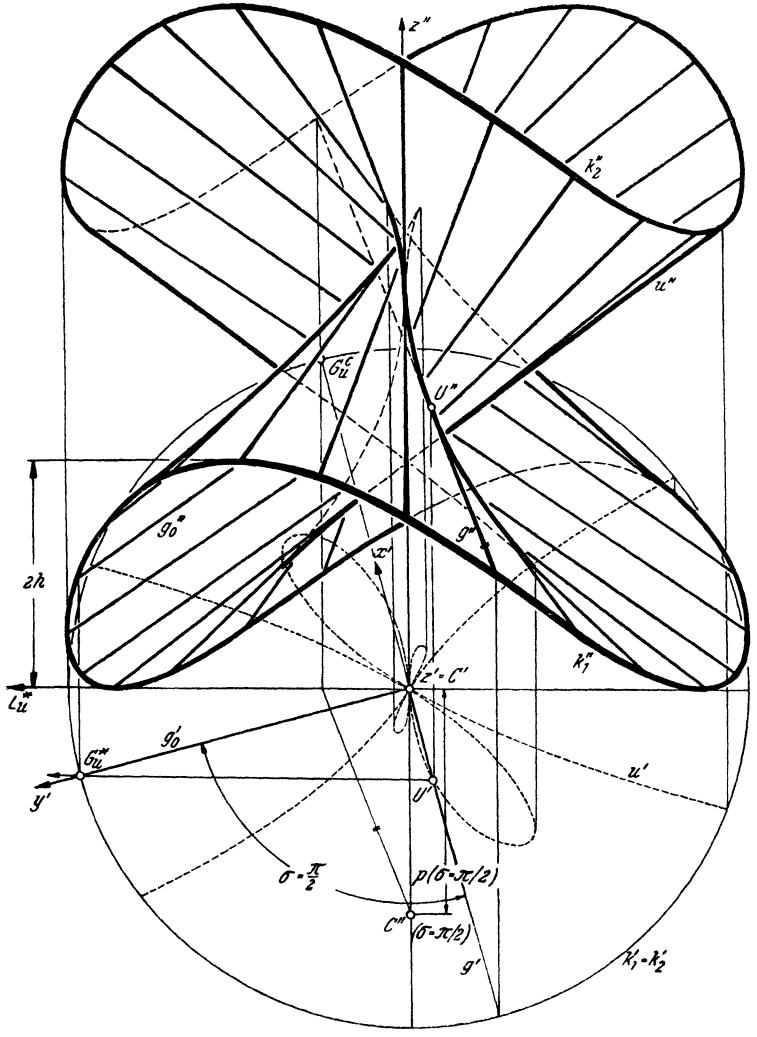

Abb. 2. Schiefe geschlossene Umschwungstrahlfläche 6. Ordnung; $n = 2, a = 0$, $b = -\frac{2}{3}$. Selbstschnitt längs der Achse

Die *schiefen* Typen besitzen einen *Richtkegel* in Gestalt eines Drehkegels mit der Achse z und dem Öffnungswinkel 2β, zu dessen Mantel-

strahlen die Flächenerzeugenden parallel sind; er artet für die *geraden* Typen zu einer z-normalen *Richtebene* aus.

Die *offenen* Typen sind dem *Drehzylinder* $r = a$ berührend angeschrieben, und zwar längs der Umschwungkurve $v = 0$, der Bahn des der Achse nächstgelegenen Erzeugendenpunktes; diese „*Kehl-*

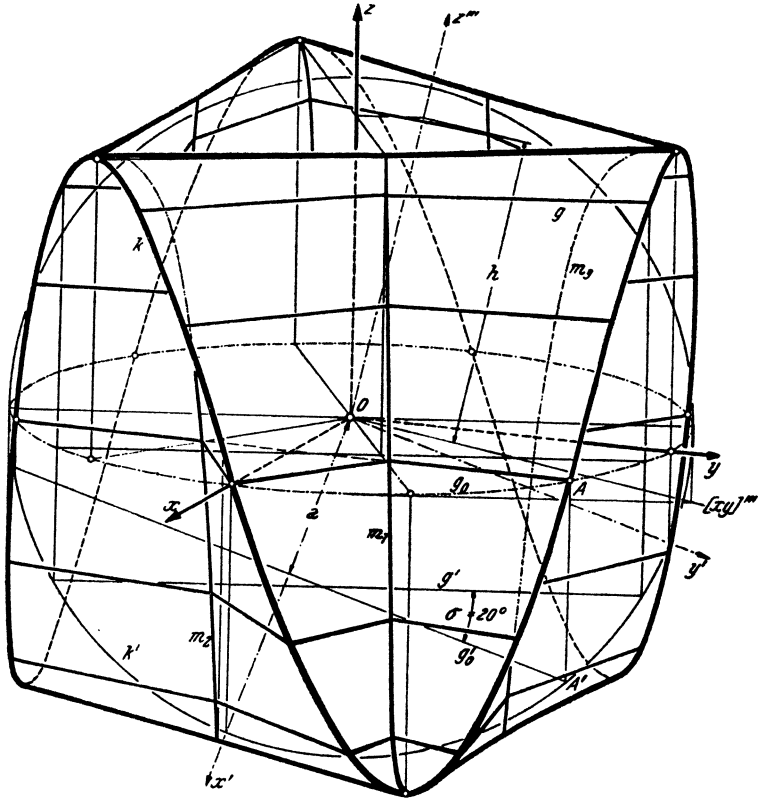

Abb. 3. Gerade offene Umschwungstrahlfläche 8. Ordnung in axonometrischer Darstellung; $n = 3$, $b = 0$. Selbstschnitt: Drei Meridiane m_i und eine Umschwungkurve k

linie" schrumpft bei den *geschlossenen* Typen auf einen Abschnitt der Achse ein. Sie stellt nach einem bekannten Satz über Strahlflächen mit Richtdrehkegel die *Striktionslinie* der Fläche dar[4]. Das zugehörige

[4] *E. Müller* und *J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Wien, 1931, S. 136.

Striktionsband ist wieder eine Umschwungstrahlfläche mit derselben Kehllinie und wird durch $\bar{\beta} = \beta + \pi/2$ ($\bar{b} = -1/b$) gekennzeichnet, da die zusammengehörigen Erzeugenden der beiden Flächen orthogonal sind.

Die in Rede stehenden Flächen besitzen einen *periodischen Aufbau* und gewisse *Symmetrien*. Als Fundamentalbereich kann der Streifen

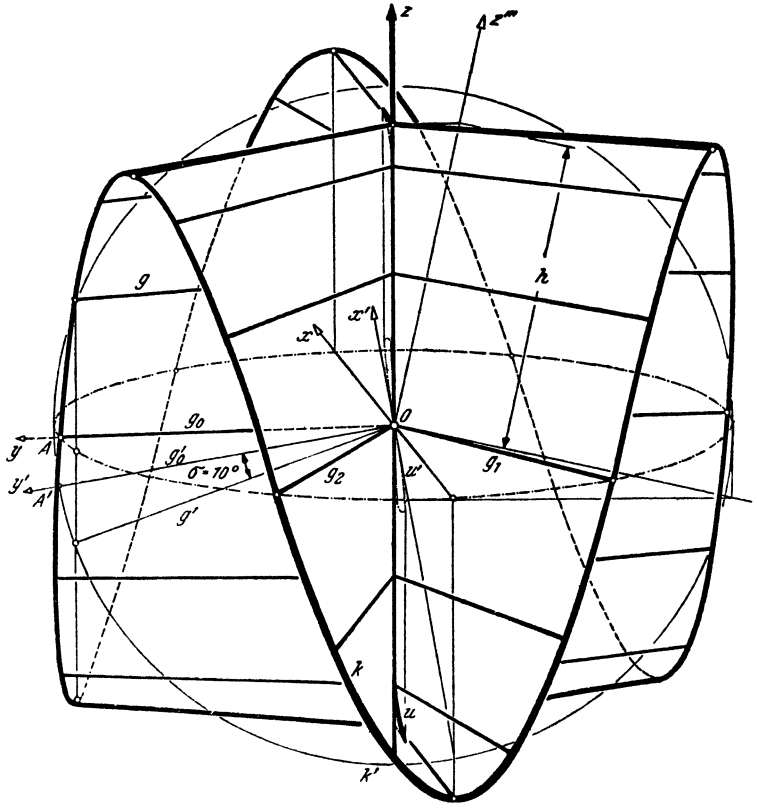

Abb. 4. Gerade geschlossene Umschwungstrahlfläche 8. Ordnung in axonometrischer Darstellung; $n = 3$, $a = b = 0$. Selbstschnitt: Drei Doppelerzeugende g_i

$0 \leq \sigma \leq \pi/n$ angesehen werden, der durch Spiegelung an der x-Achse zu ergänzen und anschließend durch Drehung um Vielfache von $2\pi/n$ um die z-Achse zu wiederholen ist.

§ 3. Konstruktive Behandlung

Die darstellend-geometrische Behandlung der Umschwungstrahlflächen wird von der *Umschwungbahn eines Punktes* der Erzeugenden

g_0 — am besten ihres Kehlpunktes — ausgehen; die hierzu nötigen Grundlagen sind in „I" zu finden. Da zu jeder Lage des benützten Punktes die *Richtung* der entsprechenden Erzeugendenlage bekannt ist, können beliebig viele Erzeugenden dargestellt werden; man wird sich dabei des *Richtdrehkegels* bei schiefen bzw. eines *Richtstrahlbüschels* bei geraden Umschwungstrahlflächen bedienen.

Mit Hilfe der Erzeugenden kann dann beispielsweise jeder *Schnitt* einer Umschwungstrahlfläche mit Ebenen oder krummen Flächen punktweise konstruiert werden.

Zur Erfassung der Differentialeigenschaften erster Ordnung, wie man sie etwa für Tangenten- und Umrißkonstruktionen benötigt, wird man die in jedem Augenblick existierende *Momentanschraubung* heranziehen, die durch dieselbe Achse z und den Schraubparameter

$$p = \frac{dz}{d\sigma} = hn . \cos n\sigma \tag{5}$$

festgelegt ist: die Umschwungstrahlfläche wird längs der zu σ gehörigen Erzeugenden von der entsprechenden Strahlschraubfläche berührt.

Die zeichnerische Auswertung wird sich dabei mit Vorteil der von *Th. Schmid* bei der Schraubung eingeführten *„Drehfluchten"* bedienen[5]: Jeder Geraden g wird der in der xy-Ebene liegende Spurpunkt G_u^c der durch das „Hilfsauge" $C(0, 0, p)$ gelegten Parallelen zu g als „Fluchtpunkt", und der daraus durch Viertelschwenkung um O hervorgehende Punkt G_u^* als „Drehfluchtpunkt" zugeordnet; in analoger Weise wird die „Drehfluchtspur" einer Ebene erklärt. Auf Grund dieser Festsetzung gilt dann: *Der Drehfluchtpunkt einer Umschwungtangente fällt mit dem Grundriß ihres Berührungspunktes zusammen.* Ferner: *Die Drehfluchtspur der Tangentialebene einer Umschwungfläche fällt mit dem Grundriß der Flächennormalen zusammen.* Gegenüber der Schraubung ist hier bloß der Unterschied zu beachten, daß das Hilfsauge C nicht fest ist, da sich seine Höhenkote p gemäß (5) zeitlich verändert.

Als Anwendungsbeispiel zeigt Abb. 5 die Konstruktion der *Tangente s einer Schichtenlinie*: Die Tangentialebene τ in einem Punkt P der Umschwungstrahlfläche wird aufgespannt von der durch P gehenden Erzeugenden g und der Bahntangente t des Punktes P; die Drehfluchtspur t_u^* von τ ist daher die Verbindungslinie des Drehfluchtpunktes

[5] *Th. Schmid*, Darstellende Geometrie, Bd. 2, 2. Aufl., Berlin und Leipzig, 1923 (Sammlung Schubert), § 40.
E. Müller und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, 4. Aufl., Leipzig und Berlin, 1936, S. 199ff.

G_u^* von g mit dem Drehfluchtpunkt $T_u^* = P'$ von t. Die Tangente s der durch P gehenden Schichtenlinie verläuft dann normal zu t_u^*.

Anschließend sei auch noch die Konstruktion des *Umrisses* für Parallelprojektion (= Eigenschatten für Parallelbeleuchtung) besprochen. Da für den Umrißpunkt (Eigenschattenpunkt) P einer Erzeugenden g die Tangentialebene τ parallel zur Blickrichtung (Lichtrichtung) l sein muß, so muß die Drehfluchtspur $t_u^* = P'\,G_u^*$ von τ den Drehfluchtpunkt L_u^* von l enthalten. Der Grundriß P' des gesuchten Punktes P wird daher aus g' von der Verbindungsgeraden der vorschriftsmäßig zu ermittelnden Drehfluchtpunkte G_u^* und L_u^* ausgeschnitten (Abb. 5). Die Umrißkonstruktion hat bei der Herstellung der Abb. 1 bis 4 Anwendung gefunden.

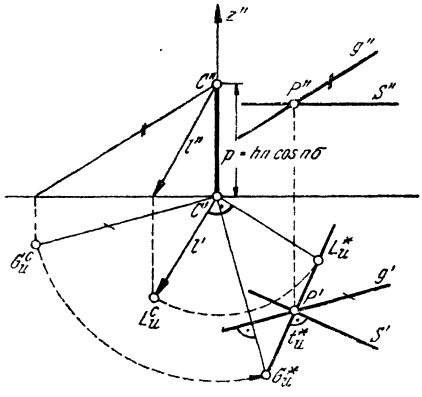

Abb. 5. Zur Ermittlung von Schichtentangenten und Umrißpunkten einer Umschwungstrahlfläche

§ 4. Algebraische Umschwungstrahlflächen

Wie die Bahnkurven des Umschwungs erweisen sich auch die Umschwungstrahlflächen für *rationale Frequenz* $n = \lambda/\mu$ (λ, μ positiv, ganz, teilerfremd) als *rational-algebraisch*, was unmittelbar aus Gl. (4) nach Einführung des neuen Parameters $u = e^{i\sigma/\mu}$ hervorgeht:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}[\quad a \,.\, (u^\mu + u^{-\mu}) + vi \,.\, (u^\mu - u^{-\mu})] \\ y &= \tfrac{1}{2}[-ai \,.\, (u^\mu - u^{-\mu}) + v \,.\, (u^\mu + u^{-\mu})] \\ z &= \tfrac{1}{2}[-hi \,.\, (u^\lambda - u^{-\lambda}) + 2b \,.\, v]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ebenso entnimmt man aus (4), daß die erzeugende Gerade die Fläche im allgemeinen genau einmal überstreicht, wenn σ ein Intervall der Länge $2\pi\mu$ durchläuft.

Zur Bestimmung der *Ordnung* der Fläche ermittelt man die Plückerkoordinaten der Erzeugenden mit Benützung der homogenen Koordinaten der zu $v = 0$ bzw. $v = \infty$ gehörigen Punkte P_0 und P_∞:

$$P_0\ [2,\ a \,.\, (u^\mu + u^{-\mu}),\ -ai \,.\, (u^\mu - u^{-\mu}),\ -hi \,.\, (u^\lambda - u^{-\lambda})]$$
$$P_\infty\ [0,\ i \,.\, (u^\mu - u^{-\mu}),\quad u^\mu + u^{-\mu},\ 2b].$$

Man findet (bis auf einen Proportionalitätsfaktor)

$$p_{01} = i \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} - 1),\ p_{02} = u^{\lambda}(u^{2\mu} + 1),\ p_{03} = 2\,b \,.\, u^{\lambda+\mu},$$

$$p_{23} = -abi \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} - 1) + \frac{hi}{2} \,.\, (u^{2\mu} + 1)\,(u^{2\lambda} - 1), \tag{7}$$

$$p_{31} = -ab \,.\, u^{\lambda}(u^{2\mu} + 1) + \frac{h}{2} \,.\, (u^{2\mu} - 1)\,(u^{2\lambda} - 1),\ p_{12} = 2\,a \,.\, u^{\lambda+\mu}.$$

Die Schnittbedingung mit einer allgemeinen Testgeraden q_{ik} führt dann auf eine algebraische Gleichung in u vom Grad

$$N = 2 \,.\, (\lambda + \mu), \tag{8}$$

der die gesuchte Flächenordnung darstellt. Lediglich für jene Umschwungwendelflächen ($a = b = 0$), für die λ gerade ist, erniedrigt sich die Ordnung auf die Hälfte, da diese speziellen Flächen für $0 \leq \sigma < 2\,\mu\pi$ doppelt überdeckt erscheinen; naturgemäß sind hier auch alle übrigen algebraischen Charaktere auf die Hälfte zu reduzieren.

Jene Erzeugenden, die die Kehllinie $v = 0$ berühren, sind *Torsallinien* der Fläche. Da der Anstieg der Kehllinie den Wert $hn \,.\, \cos n\sigma/a$ hat, ergeben sich die Parameterwerte σ der Torsalerzeugenden aus $\cos n\sigma = ab/hn$. Im algebraischen Falle treten mithin $2\,\lambda$ derartige Erzeugende auf, die für $ab = \pm hn$ paarweise zusammenrücken.

Die zu den Parameterwerten $u = 0$ und $u = \infty$ gehörigen Flächenerzeugenden sind im allgemeinen *singulär*. Ihre Plückerkoordinaten lauten gemäß (7)

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = 0 : 0 : 0 : 1 : \pm i : 0,$$

woraus zu erkennen ist, daß diese Geraden die Ferngeraden der Minimalebenen $x \pm iy = 0$ sind, also die durch den Fernpunkt der Achse verlaufenden Tangenten an den absoluten Kegelschnitt. Im algebraischen Fall haben diese Fernerzeugenden die Vielfachheit

$$s = \min(\lambda, 2\,\mu).$$

Eine genauere Untersuchung lehrt dann, daß es sich mit Ausnahme des Falles $\lambda = 2\,\mu$ auch um *Torsalerzeugende* handelt, und zwar sind die zugehörigen Tangentialebenen für $\lambda < 2\,\mu$ die durch die Achse gehenden Minimalebenen $x \pm iy = 0$, während sie für $\lambda > 2\,\mu$ mit der Fernebene zusammenfallen. Im Grenzfall $\lambda = 2\,\mu$ ($\lambda = 2, \mu = 1$) liegt im allgemeinen eine Umschwungstrahlfläche 6. Grades vor, die längs ihrer Fernerzeugenden windschiefe Rückkehrkanten aufweist; lediglich

bei der Umschwungwendelfläche ($a = b = 0$) — dem doppelt überdeckt zu denkenden, kubischen *Plückerkonoid* — sind diese Ferngeraden einfache, reguläre Erzeugenden.

Für den Schnitt einer Umschwungstrahlfläche mit der Fernebene zählen die Fernerzeugenden $x \pm iy = 0$ je λ-fach: schneidet man nämlich die durch (7) bestimmte Fläche mit einer beliebigen Ferngeraden $(0:0:0:q_{23}:q_{31}:q_{12})$, so führt die Schnittbedingung auf eine algebraische Gleichung in u, deren niedrigster Exponent λ ist, die also $u = 0$ (und analog $u = \infty$) als λ-fache Nullstelle besitzt. Somit fehlt vom Gesamtschnitt der Ordnung $N = 2(\lambda + \mu)$ der Fläche mit der Fernebene noch ein Bestandteil der Ordnung 2μ, der aber unschwer ausfindig zu machen ist: Mit Rücksicht auf die feste Neigung der Erzeugenden gegen die Achse und wegen ihres μ-maligen Umlaufs bis zur Rückkehr in die Ausgangslage ergibt sich der Restschnitt in einem *μ-fach zu zählenden Fernkreis*, der im Falle gerader Umschwungstrahlflächen zur 2μ-fach zu zählenden Ferngeraden der achsennormalen Stellung ausartet.

Als Ausnahme ist wieder die Umschwungwendelfläche mit geradem λ zu erwähnen: für sie zählt die Ferngerade der achsennormalen Stellung nur μ-fach, die Ferngeraden zählen je $(\lambda/2)$-fach.

§ 5. Schichtenlinien der schiefen Umschwungstrahlflächen

Die aus den schiefen Umschwungstrahlflächen von achsennormalen Ebenen $z = c$ ausgeschnittenen *Schichtenlinien* werden auf Grund der Darstellung (4) durch

$$v = \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b}$$

gekennzeichnet. Man gewinnt damit über die Parametergleichungen

$$x = a \,.\, \cos\sigma - \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b} \,.\, \sin\sigma,\quad y = a \,.\, \sin\sigma + \frac{c - h \,.\, \sin n\sigma}{b} \cdot \cos\sigma \qquad (9)$$

die folgende komplexe Darstellung der Schichtenlinie:

$$\mathfrak{z} = x + iy = \mathfrak{a}_1 \,.\, e^{i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \,.\, e^{i(1-n)\sigma} - \mathfrak{a}_2 \,.\, e^{i(1+n)\sigma} \qquad (10)$$

$$\text{mit } \mathfrak{a}_1 = a + \frac{c}{b} \cdot i,\ \mathfrak{a}_2 = \frac{h}{2b}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es sich dabei im allgemeinen um eine *Rad-*

linie 3. Stufe der Sippe $1:(1-n):(1+n)$ handelt[6]. Im Falle des *Mannheim-Darboux*schen Umschwungs ($n=1$) reduzieren sich die Schichtenlinien auf gewöhnliche Radlinien der Sippe $1:2$, also (exzentrisch angeordnete) *Pascal*schnecken[2].

Bei den schiefen *geschlossenen* Umschwungstrahlflächen ($a=0$) vereinfacht sich Gl. (9) der Schichtenlinie, und die daraus fließende Polarkoordinatendarstellung

$$r=-\frac{h}{b}\cdot\sin n\sigma+\frac{c}{b}$$

lehrt, daß es sich hier um eine spezielle Radlinie 3. Stufe, nämlich um eine *Konchoide der Rosenkurve* $c=0$ handelt. Für die Mittelebene $z=0$ ergibt sich als Spurkurve die Rosenkurve selbst.

Im algebraischen Fall ($n=\lambda/\mu$) sind die genannten Radlinien durchwegs *zirkulare Kurven der Ordnung* $2\,.\,(\lambda+\mu)$. Für $\mu>\lambda$ sind die absoluten Punkte der Schichtenebene $(\lambda+\mu)$-fache Punkte der Kurve mit den Minimalgeraden $x\pm iy=0$ als Tangenten, für $\mu<\lambda$ zählen diese Punkte $2\,\mu$-fach und die Ferngerade ist gemeinsame Tangente.

§ 6. Selbstschnitte der Umschwungstrahlflächen

Punkte von *Selbstschnitten* einer Strahlfläche sind im allgemeinen dadurch charakterisiert, daß durch sie zwei Flächenerzeugende hindurchgehen. Sind (σ, v) und $(\bar\sigma, \bar v)$ die einem solchen Punkt zukommenden Parameterwerte, so bestehen wegen (4) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a\,.\,\cos\sigma - v\,.\,\sin\sigma = a\,.\,\cos\bar\sigma - \bar v\,.\,\sin\bar\sigma\\ y &= a\,.\,\sin\sigma + v\,.\,\cos\sigma = a\,.\,\sin\bar\sigma + \bar v\,.\,\cos\bar\sigma\\ z &= h\,.\,\sin n\sigma + bv \quad\;\; = h\,.\,\sin n\bar\sigma + b\bar v. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus den beiden ersten entnimmt man zunächst

$$v=-\bar v=-a\,.\,\operatorname{tg}\frac{\sigma-\bar\sigma}{2}.$$

Setzt man dann zur Abkürzung

$$\frac{\sigma+\bar\sigma}{2}=\varphi \quad\text{und}\quad \frac{\sigma-\bar\sigma}{2}=\psi,$$

so erhält man durch Mittelbildung in

[6] *W. Wunderlich*, Höhere Radlinien, Österr. Ing.-Archiv **1** (1946), S. 277–296.

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi},\quad y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\psi},\quad z = h \cdot \sin n\varphi \cdot \cos n\psi$$

mit $ab \cdot \operatorname{tg}\psi - h \cdot \sin n\psi \cdot \cos n\varphi = 0$ (12)

eine Art Parameterdarstellung des eigentlichen Selbstschnitts der *schiefen offenen Umschwungstrahlfläche.* Dem vollständigen Selbstschnitt gehören für nicht ganzes n noch gewisse, von Doppelpunkten der Kehllinie herrührende *Doppelerzeugende* der Fläche an (im rationalen Fall $\lambda(\mu - 1)$, vgl. Abb. 1[7]), sowie der (für rationales n μ-fach zählende) *Fernkreis* der Fläche.

Für die Selbstschnitte der *geraden offenen Umschwungstrahlfläche* folgt mit $b = 0$ aus (12) zunächst

$$\sin n\psi = 0 \text{ oder } \cos n\varphi = 0.$$

Im ersten Fall erhält man wegen $\psi = k\pi/n = \text{const}$ (k ganz) gewisse *Umschwungkurven* als Teil des Selbstschnittes, darstellbar durch

$$x = a \cdot \frac{\cos(\sigma - \psi)}{\cos\psi},\quad y = a \cdot \frac{\sin(\sigma - \psi)}{\cos\psi},\quad z = h \cdot \sin n\sigma,$$

im zweiten Fall wegen $\varphi = (2j - 1) \cdot \pi/2n = \text{const}$ (j ganz) eine Anzahl von *Meridiankurven* als weitere Bestandteile der Selbstdurchdringung (vgl. Abb. 3), darstellbar durch

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos(\sigma - \varphi)},\quad y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\sigma - \varphi)},\quad z = h \cdot \sin n\sigma.$$

Zum vollständigen Selbstschnitt sind dann noch die *Ferngerade* der achsennormalen Stellung zu rechnen, sowie — für nicht ganzzahliges n — wieder gewisse Doppelerzeugende.

Im Falle rationaler Frequenz ($n = \lambda/\mu$) treten dann insgesamt — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — $\lambda/2$ bzw. $(\lambda - 1)/2$ verschiedene Umschwungkurven als Selbstschnitte auf, ferner λ Meridianschnitte und $\lambda(\mu - 1)$ Doppelerzeugende. Jeder der Meridianschnitte hat die halbe Flächenordnung, also die Ordnung $\lambda + \mu$.

---

[7] Die bei dieser Fläche ($a : h = 1 : 3$) auftretende Doppelkurve erweist sich als algebraische Kurve 7. Ordnung, die auf der *Müller*schen Fläche 3. Ordnung $2(x^2 + y^2)\, z = 9\, y$ liegt. Da sie die z-Achse als Asymptote besitzt, erscheint sie im Grundriß als (trizirkulare) Kurve 6. Ordnung. Die innerhalb des Kehlzylinders liegenden Punkte dieser Doppelkurve sind reelle Schnittpunkte konjugiert komplexer Erzeugenden. Da in Abb. 1 nur die vom Kehlpunkt beginnenden, nach oben gerichteten Halberzeugenden gezeichnet wurden, tritt auf dem so dargestellten Teil der Fläche kein Selbstschnitt auf.

Im Falle der *schiefen geschlossenen Umschwungstrahlfläche* liegen die durch einen Doppelpunkt gehenden Flächenerzeugenden in derselben Achsenebene, wobei parallele Lagen für die Bestimmung der eigentlichen Doppelkurve außer Betracht zu lassen sind. Die Gl. (11) werden durch

$$\bar{\sigma} = \sigma + (2k-1)\pi \ (k \text{ ganz}) \text{ und } v = -\bar{v} = \frac{h}{b} \cdot \sin n\varepsilon \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon)$$

$$\text{mit } \varepsilon = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

zu befriedigen sein. Damit gelangt man zu den Doppelkurven

$$x = -c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon) \sin\sigma, \quad y = c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon) \cos\sigma, \quad z = d \cdot \sin n(\sigma + \varepsilon)$$

$$\text{mit } c = \frac{h}{b} \cdot \sin n\varepsilon, \ d = h \cdot \cos n\varepsilon.$$

Jede dieser Doppelkurven liegt zur Gänze auf einem *Drehellipsoid*

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1$$

und hat als Grundriß eine spezielle Radlinie, nämlich die Rosenkurve

$$r = c \cdot \cos n(\sigma + \varepsilon).$$

Die vorliegenden Doppelkurven sind daher im allgemeinen affin zu den sogenannten „Clelien" von *G. Grandi*[8], speziellen sphärischen Radlinien, die von einem Punkt beschrieben werden, der gleichförmig auf dem Umfang eines Kreises wandert, während sich dieser mit konstanter Geschwindigkeit um einen festen Durchmesser dreht. Für $c = 0$ reduziert sich jedoch die Linie auf einen Achsenabschnitt (vgl. Abb. 2), während sie für $d = 0$ zu einer ebenen Rosenkurve wird.

Im algebraischen Fall ($n = \lambda/\mu$) existieren — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — μ bzw. 2μ solcher Doppelkurven und jede besitzt die Ordnung $N = 2 \cdot (\lambda + \mu)$, stellt mithin den vollständigen Schnitt der Fläche mit dem betreffenden Trägerellipsoid dar. Vervollständigt wird der Selbstschnitt dann noch durch $\lambda(\mu - 1)$ Doppelerzeugende und — falls $\mu > 1$ ist — den Fernkreis der Fläche.

Für den Fall der *geraden geschlossenen Umschwungstrahlfläche* schließlich setzt sich der Selbstschnitt (neben der Achse, vgl. Abb. 4) aus jenen Flächenerzeugenden zusammen, die durch die — bei nicht

[8] *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig, 1910, S. 358ff.

ganzzahligem n stets vorhandenen — Doppelpunkte irgendeiner auf der Fläche verlaufenden Umschwungkurve oder ihre Schnittpunkte mit der zu ihr bezüglich der Achse symmetrischen hindurchgehen. Für rationale Frequenz $n = \lambda/\mu$ besitzt die Fläche — je nachdem λ gerade oder ungerade ist — $\frac{\lambda}{2} \cdot (\mu - 1)$ bzw. $\lambda \cdot (2\mu - 1)$ derartige Doppelerzeugende.

§ 7. Eigen- und Schlagschatten der geraden Umschwungstrahlflächen bei Parallelbeleuchtung

Zur Ermittlung der Eigenschattengrenze der *geraden offenen Umschwungstrahlfläche* bei Parallelbeleuchtung (bzw. des wahren Umrisses bei Parallelprojektion) kann man sich auch für die rechnerische Behandlung des in § 3 auseinandergesetzten Prinzips der Drehfluchten bedienen: Demzufolge erhält man den Grundriß des Eigenschattenpunktes einer Erzeugenden g im Fußpunkt des aus dem Drehfluchtpunkt L_u^* der Lichtrichtung auf den Erzeugendengrundriß g' gefällten Lotes.

Fällt der Lichtstrahl l unter dem Winkel γ gegen die xy-Ebene ein und schließt sein Grundriß mit der positiven x-Achse den Winkel δ ein, so ergeben sich für seinen Drehfluchtpunkt L_u^* die Koordinaten

$$x = -q \cdot \sin\delta \cdot \cos n\sigma, \quad y = q \cdot \cos\delta \cdot \cos n\sigma,$$

wobei zur Abkürzung $hn \cdot \operatorname{ctg}\gamma = q$ gesetzt ist. Den Fußpunkt des aus L_u^* auf g' $(x.\cos\sigma + y \cdot \sin\sigma = a)$ gefällten Lots erhält man dann in

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\sigma - q \cdot \cos n\sigma \cdot \cos(\sigma - \delta) \cdot \sin\sigma \\ y &= a \cdot \sin\sigma + q \cdot \cos n\sigma \cdot \cos(\sigma - \delta) \cdot \cos\sigma. \end{aligned} \tag{13}$$

Dieses Gleichungspaar beschreibt bereits den *Eigenschattengrundriß*. Aus der komplexen Schreibweise

$$\mathfrak{z} = x + iy = a \cdot e^{i\sigma} + \frac{qi}{4} \cdot e^{-i\delta}(e^{ni\sigma} + e^{-ni\sigma})\,(e^{2i\sigma} + e^{2i\delta}) \tag{14}$$

ist dann zu ersehen, daß es sich hiebei im allgemeinen um eine *Radlinie 5. Stufe der Sippe* $1 : n : -n : (2+n) : (2-n)$ handelt. Lediglich für $n = 1$ liegt eine Radlinie 3. Stufe der Sippe $1 : -1 : 3$ vor und für $n = 2$ stellt sich eine Radlinie 4. Stufe der Sippe $1 : 2 : -2 : 4$ ein.

Für die Grenze des *Schlagschattens* der Fläche auf der xy-Ebene erhält man aus (14) und $z = h \cdot \sin n\sigma$ die komplexe Darstellung

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z} + z \,.\, \mathrm{ctg}\,\gamma \,.\, e^{i\delta} = a \,.\, e^{i\sigma} + \frac{qi}{4} \,.\, e^{-i\delta}\,(e^{ni\sigma} + e^{-ni\sigma})\,(e^{2i\sigma} + e^{2i\delta}) -$$

$$- \frac{qi}{2n} \,.\, e^{i\delta}\,(e^{ni\sigma} - e^{-ni\sigma}). \quad (15)$$

Diese Schlagschattengrenze ist mithin wieder eine *Radlinie 5. Stufe derselben Sippe wie* (14), gehört jedoch einer besonderen Kategorie an, da sie auch als Einhüllende einer Geraden erhalten werden kann, die einer Planetenbewegung unterworfen wird („zykloidale Radlinie"[6]). Für $n = 1$ und $n = 2$ tritt wie beim Eigenschattengrundriß eine Stufenreduktion ein.

Der Schlagschatten der Fläche auf eine allgemeine Ebene — oder der *scheinbare Flächenumriß* bei Parallelprojektion — ist schließlich eine zur eben erwähnten Radlinie 5. Stufe *affine* Kurve und erweist sich im allgemeinen als *Radlinie 8. Stufe* der Sippe

$$1 : -1 : n : -n : (n+2) : (n-2) : (2-n) : (-2-n).$$

Bei den *Umschwungwendelflächen* treten wegen $a = 0$ gewisse Vereinfachungen ein. So erweist sich der Eigenschattengrundriß als *Radlinie 4. Stufe* der Sippe $n : -n : (2+n) : (2-n)$, die gemäß (13) die einfache Polargleichung

$$r = q \,.\, \cos n\sigma \,.\, \cos(\sigma - \delta)$$

besitzt. Für $n = 1$ und $n = 2$ sinkt die Stufe auf 3; im letzteren Fall handelt es sich um das sogenannte „*schiefe Dreiblatt*", das als Eigenschattengrundriß des Plückerkonoids seit langem bekannt ist[9].

Für die Schlagschattengrenze auf einer achsennormalen Ebene ergibt sich gemäß (15) wieder eine zykloidale Radlinie derselben Sippe, die sich für $n = 1$ auf eine Radlinie 3. Stufe der Sippe $1 : -1 : 3$ (Parallelkurve einer Astroide), für $n = 2$ — also beim Plückerkonoid — sogar auf eine Steinerzykloide reduziert[9].

Der Schlagschatten auf eine beliebige Ebene — bzw. der scheinbare Umriß bei Parallelprojektion — ist im allgemeinen eine Radlinie 6. Stufe der Sippe $n : -n : (n+2) : (n-2) : (2-n) : (-2-n)$.

§ 8. Umschriebene Böschungstorsen

Unterwirft man eine Ebene ε samt einer ihrer Geraden g der Umschwungbewegung, so hüllt sie eine *Umschwungtorse* Θ ein, die der von

[9] *E. Müller* und *J. Krames*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Wien, 1931, S. 218—220.

g erzeugten *Umschwungstrahlfläche* Φ umschrieben ist. Die Berührkurve j von Φ und Θ kann, da die Neigung von ε gegen die Achse z unverändert bleibt, als *Isophote* von Φ für z-parallele Beleuchtung angesehen werden. Variiert ε innerhalb des Büschels g, so erhält man auf diese Weise sämtliche Isophoten von Φ für achsenparalleles Licht, und diese bilden nach einem bekannten Satz[10] zusammen mit den Fallinien von Φ ein konjugiertes Netz.

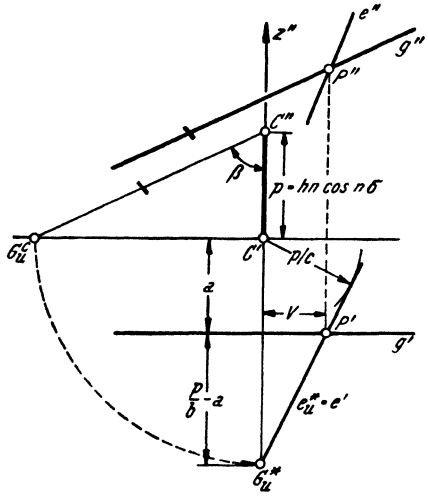

Abb. 6. Konstruktion der Berührkurve j einer Umschwungstrahlfläche mit einer umschriebenen Böschungstorse

Um eine solche Isophote j zu konstruieren, bedient man sich auch hier mit Vorteil des Drehfluchtprinzips. Die durch g gehende Ebene ε sei durch ihren Neigungswinkel γ gegen die Achse z festgelegt, wobei $\operatorname{ctg}\gamma = c > b$ sein muß. Die Drehfluchtspur e_u^* von ε geht durch den Drehfluchtpunkt G_u^* von g und hat den Zentralabstand $p.\operatorname{tg}\gamma = p/c$ (Abb. 6); e_u^* deckt sich aber bekanntlich mit dem Grundriß e' der Torsenerzeugenden e, die g in einem Punkt P von j schneidet.

Der zu P gehörige Längenparameter v ist aus Abb. 6 unschwer mit

$$v = \frac{p - ab}{\sqrt{c^2 - b^2}} = m(hn.\cos n\sigma - ab) \tag{16}$$

abzulesen, wobei abkürzend $c^2 - b^2 = m^{-2}$ gesetzt wurde. Trägt man diesen Wert von v in die Flächengleichung (4) ein, so erhält man für die Isophote j die folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= a\,.\,\cos\sigma - m(hn\,.\,\cos n\sigma - ab)\sin\sigma \\ y &= a\,.\,\sin\sigma + m(hn\,.\,\cos n\sigma - ab)\cos\sigma \\ z &= h\,.\,\sin n\sigma + mb(hn\,.\,\cos n\sigma - ab). \end{aligned} \tag{17}$$

[10] *E. Müller* und *E. Kruppa*, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Leipzig u. Berlin, 1936, 4. Aufl., S. 236.

Aus (16) ist zu ersehen, daß der Punkt P' auf der Geraden g' eine harmonische Schwingung vollführt, während sich diese Gerade gleichförmig um den festen Koordinatenursprung O dreht. Hieraus folgt, ähnlich wie in § 5, daß der *Isophotengrundriß* eine *Radlinie 3. Stufe* der Sippe $1 : (1 - n) : (1 + n)$ ist, was die komplexe Darstellung bestätigt:

$$\mathfrak{z} = x + iy = \mathfrak{a}_1 \cdot e^{i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \cdot e^{(1-n)i\sigma} + \mathfrak{a}_2 \cdot e^{(1+n)i\sigma} \tag{18}$$

$$\text{mit } \mathfrak{a}_1 = a(1 - imb), \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{i}{2} mnh.$$

Für geschlossene Umschwungstrahlflächen ($a = 0$) reduziert sich die Radlinienstufe auf 2 und die Isophoten erscheinen im Grundriß als gewöhnliche Rosenkurven.

Einem Beobachter in der erstprojizierenden Ebene δ durch g bietet sich folgendes Bild: Der Berührpunkt P schwingt harmonisch auf der Geraden g hin und her und gleichzeitig — mit g — mit derselben Frequenz n in Achsenrichtung, beschreibt mithin in δ die *Ellipse*

$$v = m(hn \cdot \cos n\sigma - ab), \quad z = h \cdot \sin n\sigma + mb(hn \cdot \cos n\sigma - ab)$$

oder

$$(v + mab)^2 + m^2 n^2 (z - bv)^2 = m^2 n^2 h^2. \tag{19}$$

Die Isophoten liegen mithin im allgemeinen auf gewissen *Drehflächen 4. Ordnung*. Für gerade Umschwungstrahlflächen ($b = 0$) reduzieren sich diese Drehflächen auf ein Büschel von Drehellipsoiden

$$(x^2 + y^2 - a^2) + m^2 n^2 (z^2 - h^2) = 0 \tag{20}$$

Die zugehörigen Isophoten j lassen sich dann durch affine Streckung in z-Richtung in gewisse sphärische Radlinien überführen, die im Fall der Umschwungwendelflächen ($a = b = 0$) wieder die Clelien von *Grandi* sind.

§ 9. Schmieglinien

Ermittelt man auf Grund der Darstellung (4) durch Nullsetzen der zweiten Fundamentalform die *Schmieglinien* (Haupttangentenkurven) einer Umschwungstrahlfläche, so stößt man nach Abspaltung der Erzeugendenschar $\sigma = \text{const}$ auf die folgende *Riccati*sche Differentialgleichung für die *krumme Schmieglinienschar*:

$$2 \cdot \frac{dv}{d\sigma} = \frac{b}{hn \cdot \cos n\sigma - ab} \cdot v^2 - \frac{hn^2 \cdot \sin n\sigma}{hn \cdot \cos n\sigma - ab} \cdot v - a. \tag{21}$$

Diese Gleichung muß explizit lösbar sein, da die Umschwungstrahlfläche eine *Gewindefläche* ist — ihre Erzeugenden gehören ja einem linearen Strahlkomplex L mit der Achse z und dem Parameter a/b an —, so daß mit der auf solchen Flächen existierenden *Lie*schen Haupttangentenkurve die benötigten partikulären Lösungen zur Verfügung stehen.

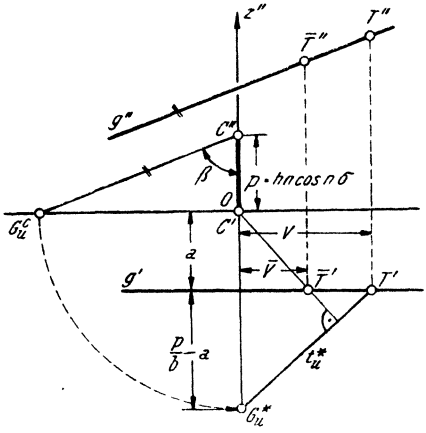

Abb. 7. Zur Ermittlung der *Lie*schen Schmieglinie einer Umschwungstrahlfläche

Es soll daher zunächst diese *Liesche Schmieglinie* bestimmt werden, und zwar für die allgemeine (schiefe offene) Umschwungstrahlfläche ($ab \neq 0$). Auf einer Erzeugenden g kann jedem Punkt $T(\sigma,v)$ zunächst die Tangentialebene τ und dieser dann ihr Nullpunkt $\overline{T}(\sigma, \bar{v})$ bezüglich L zugeordnet werden. Man findet an Hand von Abb. 7 [11]

$$v\bar{v} = a \cdot \left(\frac{p}{b} - a\right) \text{ mit } p = hn \cdot \cos n\sigma. \tag{22}$$

Für die beiden Doppelpunkte der Involution $T \leftrightarrow \overline{T}$, gekennzeichnet durch

$$v_{1,2} = \pm a \cdot \sqrt{q \cdot \cos n\sigma - 1} \text{ mit } q = \frac{hn}{ab} \tag{23}$$

fallen Tangentialebene und Nullebene zusammen[12]. Der Ort dieser Doppelpunkte ist daher eine auf der Fläche verlaufende *Gewindekurve*, und da für eine solche die Nullebenen auch die Schmiegebenen abgeben, handelt es sich um eine *Schmieglinie* der Fläche. Ihre Parameterdarstellung ist sofort hinzuschreiben, indem man die v-Werte aus (23)

[11] Gemäß § 3 verläuft die Drehfluchtspur $G_u^* T'$ von τ normal zu den Schichtenlinien von τ, insbesondere zu der die Achse treffenden, die als Nullstrahl den Nullpunkt $\overline{T}$ von τ tragen muß.

[12] Konstruktiv würde man diese Doppelpunkte im Grundriß der Abb. 7 im Schnitt von g' mit einem Hilfskreis über dem Durchmesser OG_u^* finden (vgl. Abb. 8).

in (4) einträgt. Abb. 8 zeigt das typische Aussehen einer solchen Kurve (für $n = 1$); reelle Züge treten natürlich nur auf, falls $q^2 > 1$, d. h. $|nh| > |ab|$ ist. Für rationales n ist diese Kurve algebraisch und ihre Ordnung ist bekanntlich gleich dem Rang der Fläche.

Mit Hilfe der partikulären Lösung

$$v_1 = a\sqrt{q \,.\, \cos n\sigma - 1}$$

läßt sich nun die Differentialgleichung (21) auf die Gestalt

$$v' = \frac{av^2}{2\,v_1^2} + \frac{v_1'\,v}{v_1} - \frac{a}{2} \text{ oder}$$

$$\left(\frac{v}{v_1}\right)' = \frac{a}{2\,v_1}\left[\left(\frac{v}{v_1}\right)^2 - 1\right] \tag{24}$$

bringen. Setzt man hierin $v/v_1 = \operatorname{cth} u$, so erhält man die allgemeine Lösung

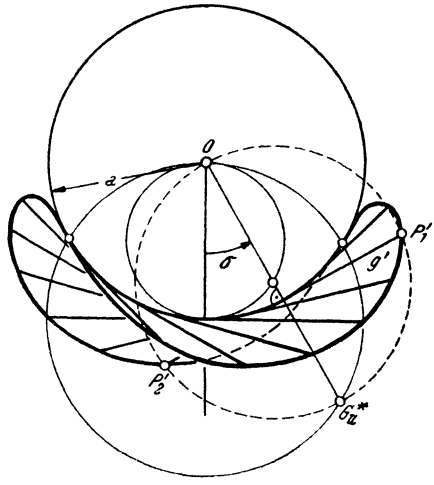

Abb. 8. Grundriß einer *Lie*schen Schmieglinie der allgemeinen Umschwungstrahlfläche ($n = 1$, $b = 1$, $a = 1$, $h = 2$)

$$v = v_1 \,.\, \operatorname{cth} u \text{ mit } u = -\frac{a}{2}\int \frac{d\sigma}{v_1} + C. \tag{25}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ist hierin für $C = \pm\infty$ enthalten.

Für die *schiefe geschlossene Umschwungstrahlfläche* ($a = 0$) geht Gl. (21) in eine *Bernoulli*sche über, welche sich mit Hilfe der Funktion $v_0 = \sqrt{hn \,.\, \cos n\sigma}$ (die keine Lösung darstellt) in der Form

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' = \frac{b}{2\,v_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \tag{26}$$

anschreiben läßt. Setzt man $v/v_0 = 1/u$, so gelangt man zur allgemeinen Lösung

$$v = \frac{v_0}{u} \text{ mit } u = -\frac{b}{2}\,.\int \frac{d\sigma}{v_0} + C. \tag{27}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ($C = \infty$) ist hier zur Achse entartet.

Für die *gerade offene Umschwungstrahlfläche* ($b = 0$) wird die Schmiegliniengleichung (21) linear. Mittels derselben Hilfsfunktion $v_0 = \sqrt{hn} \cdot \cos n\sigma$ nimmt sie die einfache Gestalt

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' = -\frac{a}{2\,v_0} \tag{28}$$

an. Setzt man $v/v_0 = u$, so hat man die allgemeine Lösung in der Form

$$v = v_0 \cdot u \text{ mit } u = -\frac{a}{2}\int \frac{d\sigma}{v_0} + C. \tag{29}$$

Die *Lie*sche Schmieglinie ($C = \infty$) ist hier ins Unendliche gerückt.

Für die *Umschwungwendelfläche* schließlich ($a = b = 0$) wird in (29) $u = \text{const}$ und die Schmieglinien werden mithin durch die Gleichung

$$v = C\sqrt{\cos n\sigma} \tag{30}$$

beschrieben, die im übrigen als die Polargleichung des Grundrisses aufgefaßt werden kann. Im Falle $n = 2$, d. h. beim *Plückerkonoid*, sind diese Grundrisse *Bernoulli*sche *Lemniskaten*; für $n \neq 2$ entstehen sie aus diesen durch $(2/n)$-fache Winkelzerrung. — Aus der Beziehung $(v/C)^4 + (z/h)^2 = 1$ folgt, daß die Schmieglinien auf gewissen *Drehflächen 4. Ordnung*

$$h^2(x^2 + y^2)^2 + C^4(z^2 - h^2) = 0 \tag{31}$$

liegen. Ihre Ordnung ist im algebraischen Fall ($n = \lambda/\mu$)

$$2 \cdot \max(2\,\lambda,\ \lambda + 2\,\mu),$$

wobei dieser Wert auf die Hälfte zu reduzieren ist, wenn λ gerade ist. Da diese Schmieglinien, wie bei jeder Strahlfläche mit zwei Leitgeraden, durchwegs als *Lie*sche anzusehen sind und mithin auch Gewindekurven sind, liegen hier einfache Beispiele *algebraischer Gewindekurven* vor.

Buchbesprechungen

Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary. Von *O. Ore*. Mit 16 S. Hochglanzphotos. 277 S. Minneapolis: University of Minnesota Press. 1957. $ 5.75.

In diesem Buch wird in überaus eindrucksvoller Weise der Werdegang dieses großen Genies geschildert. Was diese Veröffentlichung als besonders wertvoll erscheinen läßt, ist das große Material an Privatbriefen, Zeitungsausschnitten und offiziellen Dokumenten, das hier zum ersten Mal verwertet wird. Wie in seinem früheren Werk über *Cardano* erweist sich *Ore* auch hier als Meister der Darstellung von historischen Begebenheiten. Erwähnt seien auch die schönen Illustrationen, die sehr dazu angetan sind, den Wert des Buches zu erhöhen.

P. Funk, Wien

History of Mathematics. Band I: General Survey of the History of Elementary Mathematics. Band II: Special Topics of Elementary Mathematics. Von *D. E. Smith*. XXII, 596 und XII, 725 S. New York: Dover Publications. 1958. Vol. 1 $ 2.75; Vol. 2 $ 2.75; beide Bände $ 5.—.

Das vorliegende Werk umfaßt die Geschichte der Mathematik von den ältesten Zeiten bis zum 19. Jahrhundert. Einen verhältnismäßig breiten Raum nimmt die Geschichte der außereuropäischen Mathematik ein. Der erste Band ist chronologisch geordnet, der zweite Band sachlich. Das Werk enthält überaus zahlreiche, allerdings kurze biographische Skizzen. Es ist reich und gut illustriert. Dies ist insbesondere von Vorteil zur raschen Erfassung der antiken Methoden beim numerischen Rechnen. Geschildert werden auch vielfach Eigenartigkeiten in Methoden des mathematischen Unterrichtes und diese sind ebenfalls in anziehender Weise illustriert. Für eine tiefere Erfassung des Werdegangs mathematischer Ideen kommt dieses Werk nicht in Betracht. *P. Funk*, Wien

Die Deutsch-Russische Begegnung und Leonhard Euler. Herausgegeben von *E. Winter* in Verbindung mit *P. N. Berkov, N. A. Figurovskij* und *V. P. Zubov*. (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas: Band 1.) VIII, 196 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958.

Ein erheblicher Teil des Werkes handelt von dem wissenschaftlichen Leben in der Frühzeit der russischen Akademie der Wissenschaften, an der mathematische und physikalische Forschung in ganz besonders hohem Ansehen stand. Insbesondere enthält das Buch viele interessante Einzelheiten über *Eulers* Persönlichkeit und sein Wirken. Bemerkenswert ist vor allem eine von *E. Winter* verfaßte Einleitung, die eine schöne Übersicht über *Eulers* Stellung zu den philosophischen Lehrmeinungen seiner Zeit gibt. *P. Funk*, Wien

Formale Logik. Von *P. Lorenzen*. (Sammlung Göschen: Band 1176/1176a.) 165 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Seit ihrer Begründung durch *Aristoteles* hat die formale Logik eine Entwicklung durchgemacht, die in vieler Hinsicht parallel läuft zur Entwicklung der

abendländischen Wissenschaft überhaupt, gegenwärtig aber durch den Vollständigkeitssatz und den Unentscheidbarkeitssatz zu einem gewissen Abschluß gekommen ist. Die im Laufe dieser Entwicklung gefundenen Hauptresultate der formalen Logik werden hier auf erstaunlich geringem Raum in meisterhafter Form entwickelt. Auf eine moderne, relationentheoretische Behandlung der Syllogistik folgt zunächst eine axiomatische Darstellung der Junktorenlogik, worauf der Begriff des Kalküls eingeführt wird. Ein eigenes Kapitel ist der effektiven Logik der Junktoren gewidmet. Es folgt eine Untersuchung der Quantorenlogik; der *Gödel*sche Vollständigkeitssatz wird nach *Schütte* bewiesen, der Unentscheidbarkeitssatz von *Church* ergibt sich aus der Existenz unentscheidbarer Kalküle. Das Schlußkapitel behandelt die Logik mit Gleichheit.

Das ungemein reichhaltige Bändchen vermittelt einen ausgezeichneten Überblick über den gegenwärtigen Stand der formalen Logik — mit Ausnahme der Modallogik —, ganz nebenbei aber auch einen guten Einblick in die historische Entwicklung des Gegenstandes, und man kann wirklich mit vollem Recht feststellen, daß es in keiner Bibliothek eines Mathematikers fehlen sollte.

W. Nöbauer, Wien

Triumph der Mathematik. Von *H. Dörrie*. Fünfte Auflage. Mit 112 Textabb., VII, 391 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1958. DM 18.50.

Die in diesem Buch aufgenommenen 100 Aufgaben aus der Elementarmathematik lassen ein farbiges, fesselndes Bild entstehen, das eine Vorstellung von der erstaunlichen Vielgestaltigkeit der mathematischen Methoden gibt. Die Lösung so mancher dieser Aufgaben zeigt, welche Triumphe das mathematische Denken zu vollbringen vermag. Das Buch zeichnet sich durch große Übersichtlichkeit aus. Jede Aufgabe ist klar formuliert. Bei den meisten Aufgaben finden sich geschichtliche Bemerkungen bzw. Quellenangaben. Die Lösungen sind durch Fettdruck deutlich hervorgehoben. Es ist ein Buch, das allen, die an der Mathematik Interesse finden, wahrlich Freude bereitet. *J. Laub*, Wien

Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Herausgegeben von *F. Drenckhahn* auf Veranlassung des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission. Mit 22 Textabb., 377 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 30.—.

Vor vier Jahren erschien der Bericht: Der mathematische Unterricht für die 16- bis 21jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland (siehe Mh. Math. **59**, 162, 1955). Der vorliegende Band stellt eine Ergänzung nach unten dar. Beide Bände zusammen ergeben nun eine Berichterstattung über den gesamten Mathematik-Unterricht in der Deutschen Bundesrepublik. An dem neuen Band haben 30 Verfasser gearbeitet und es ist daher staunenswert, daß trotzdem ein einheitliches Ganzes zustande kam. Für die Berichterstattung war besonders erschwerend, daß das Schulwesen in der deutschen Bundesrepublik länderweise verschieden ist. Dadurch entstand eine große Mannigfaltigkeit parallel laufender und sich überschneidender Bildungsmöglichkeiten. Es herrscht eine arge schulische Zersplitterung. Hier Abhilfe zu schaffen, wäre dringend erwünscht. Die Aufsätze stellen Berichte über den mathematischen Unterricht in den Volksschulen, in den sechsjährigen Mittelschulen und in den neunjährigen Gymnasien dar. Sie sind Tatsachenberichte und heben die sich abzeichnende Entwicklung hervor. Funktionales Denken und das Abbildungsprinzip durchdringen nach

wie vor den ganzen Unterricht. An Stelle der Euklidischen Geometrie tritt mehr die Bewegungsgeometrie. Grundlegende Begriffe der Mathematik, wie Gruppenbegriff, Vektor und geometrische Verwandtschaft werden teilweise eingeführt. Von einer allgemeinen Stoffvermehrung kann nicht gesprochen werden. Methodisch hat sich manches gewandelt. Durch die Aufnahme neuer Schulfächer wurde die Anzahl der Stunden in der Mathematik verkürzt und dadurch der Unterrichtserfolg vermindert, was sich besonders bei den Studierenden der Technischen Hochschulen ungünstig auswirkt. Ein paar Aufsätze handeln von Psychologie und Pädagogik und ihrer Bedeutung für den mathematischen Unterricht. Ein 30 Seiten starkes Literaturverzeichnis bildet den Abschluß. Das Buch gibt den Lehrern der Mathematik einen ausgezeichneten Überblick über ihr Fach und sollte von allen gelesen werden. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematik. Band I: Arithmetik. Von *F. Holtmann*. 98 Textabb., XIV, 322 S. Dritte, unveränderte Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. 1956. DM 6.—. — Band II: Geometrie. Von *F. Holtmann*. 441 Textabb., XVI, 526 S. Zweite, verbesserte Auflage. Leipzig: Fachbuchverlag. 1958. DM 12.—.

Es ist erstaunlich, wie reichhaltig diese beiden Bände sind. Im ersten Band spannt sich ein weiter Bogen von den vier Grundrechnungsarten über den Mathematik-Lehrstoff unserer Mittelschulen bis zur Differential- und Integralrechnung. Der Inhalt des zweiten Bandes erstreckt sich von den geometrischen Grundbegriffen über die ebene Geometrie, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes bis zu den Vektoren. Nach der Absicht des Verfassers sollen diese beiden Bände nicht nur Formelsammlung sein; die wichtigsten Lehrsätze werden daher bewiesen. Figuren und Musterbeispiele unterstützen das Vorhaben des Verfassers. Beide Bände stellen daher einen wertvollen Behelf für Studierende an Fachschulen und interessierte Laien dar. Daß sich bei der Gedrängtheit des dargebotenen Stoffes manchmal auch Unklarheiten einschleichen, ist naheliegend. So wären im ersten Band auf den Seiten 16 und 17 die Ungleichungen $b + c < a$ bzw. $b > c$ aufzunehmen. Bei der Behandlung der Potenz (S. 39) wird zu wenig auf die Erweiterung des Potenzbegriffes wie a^1 eingegangen. Die Rechnungen auf S. 45 sollen „zeigen", daß $5^0 = 1$, $a^0 = 1$ ist. Bei der Definition der Zahl i wäre es wohl besser, von der Definition $i^2 = -1$ auszugehen. Auf S. 68 heißt es: Eine Bestimmungsgleichung enthält mindestens eine allgemeine Größe, die Unbekannte, ... Hier wird der Begriff der allgemeinen Zahl mit dem der Unbekannten vermengt. Sehr zu empfehlen ist es, im zweiten Band die Figuren 304, 305, 306, 309, 311, 313, 315, 316, 320, 322, 323 und 407 richtig zu stellen. *L. Laub*, Wien

Grundzüge der Mathematik. Für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band I: Grundlagen der Mathematik — Arithmetik und Algebra. Auf Veranlassung des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission herausgegeben von *H. Behnke, K. Fladt* und *W. Süss*. Mit 55 Textabb. und 1 Zeittafel, XII, 558 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 50.—.

Der deutsche Unterausschuß der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission will mit diesem Band den ersten Beitrag zur Bearbeitung der wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik geben. Drei weitere Bände

und zwar „Geometrie", „Analysis" und „Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik" sollen bald folgen. Jeder Artikel hat zwei Autoren, von denen der eine ein Hochschullehrer und der andere ein Gymnasiallehrer ist. Da die Aufsätze vermutlich in erster Linie von den Hochschullehrern stammen, so beschränke ich mich darauf, ihre Namen zu nennen. Es sind dies im vorliegenden Band: *W. Gaschütz, H. Gericke, W. Gröbner, O. Haupt, H. Hermes, D. Kurepa, H.-H. Ostmann* und *G. Pickert.* Die Stoffgebiete erstrecken sich über Grundlagen her Mathematik, Mengenlehre, Zahlbegriff, Gruppentheorie, Lineare Algebra, Polynome, Ringe, Ideale, Körpererweiterungen, Zahlentheorie, Theorie der Verbände und Strukturtheorie. Trotz der großen Zahl der Autoren und des umfangreichen Stoffes ist das Buch fast einheitlich geschrieben. Um auf kleinem Raum viel bringen zu können, wurde eine möglichst abstrakte Darstellung gewählt, wie sie durch die moderne Algebra gegeben ist. Ihre Begriffe und Methoden sind der Leitfaden durch den ganzen Band. Klarerweise mußten die Beweise meist kurz gefaßt werden, so daß kein Lehrbuch, sondern ein Nachschlagewerk entstanden ist. Das Ziel, die volle wissenschaftliche Bedeutung des Schulstoffes zu bringen, wurde im Band I voll und ganz erreicht, so weit es die Algebra betrifft. Einzelne Autoren bemühen sich auch, die Verbindung mit der Elementarmathematik herzustellen. Wie auf dem Titelblatt steht, ist das Buch für die Gymnasiallehrer und für die Industriemathematiker bestimmt. So sehr ich das Buch den Mathematikern empfehle, die das Doktorat anstreben oder schon erreicht haben, glaube ich nicht, daß den meisten Gymnasiallehrern und Industriemathematiker viel gedient ist. Ihr Abstraktionsvermögen und ihre Kenntnisse sind meist gering und daher ist das Buch ihnen zu schwer verständlich. *N. Hofreiter*, Wien

Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Von *R. Zurmühl.* Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 76 Textabb., XV, 467 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 33.—.

Der Matrizenkalkül erweist sich dank seiner übersichtlichen und eleganten Schreibweise und dank seiner Schematisierbarkeit aller Rechenoperationen als ideales Hilfsmittel. Er eignet sich in besonderem Maße beim Einsatz von modernen Rechenanlagen. Zahlreiche technische Aufgaben in der Elektrotechnik, Statik und Elastizitätslehre werden heute mit Hilfe von Matrizen durchgeführt. Unter den zahlreichen Büchern über Matrizen nimmt das Buch eine Sonderstellung ein. Es bringt eine breit dargestellte und umfangreiche Theorie mit starker Betonung der praktischen Methoden und der technischen Anwendungen. Die erste Auflage erschien 1950 und wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **54**, 355 (1950) ausführlich besprochen. Seither erschienen einige Bücher über Matrizen und auch in der technischen Literatur wurde die Matrizenrechnung viel verwendet. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch eine vollständige Neubearbeitung bei Berücksichtigung der neueren Literatur und noch stärkeren Betonung der technischen Anwendungen. Der verkettete Algorithmus, der die zweckmäßigste Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme bei Verwendung von Rechenmaschinen ist, wurde an die Spitze von Kapitel II gestellt und wird auch später viel verwendet. Das Problem der Auflösung linearer Gleichungssysteme und das Eigenwertproblem nehmen weiterhin eine zentrale Stellung ein. Für die Mathematiker und die Ingenieure in den technischen Forschungsanstalten und Laboratorien ist das Buch auch weiterhin ein unentbehrliches Hilfsmittel.

N. Hofreiter, Wien

Gruppentheorie. Von *L. Baumgartner*. (Sammlung Göschen: Band 837.) Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage. 110 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. Brosch. DM 2.40.

Während Neuauflagen vielfach nur geringe Änderungen bringen, liegt hier eine vollständige Neubearbeitung vor. Die neue Darstellung ist nicht so breit wie früher. Wohl spielen auch diesmal didaktische Gesichtspunkte beim Aufbau eine wesentliche Rolle. Durch zahlreiche Beispiele werden die Untersuchungen verständlich gemacht. Eine große Anzahl von Aufgaben regt den Leser zu eigener Arbeit an. Inhaltlich bringt die dritte Auflage entschieden mehr. Der Leser gewinnt durch die Sätze über Isomorphie, Homomorphie, Automorphie und Endomorphie neue Einblicke in die Struktur der Gruppen. Neben dem Satz von *Jordan-Hölder* werden auch die Verfeinerungssätze von *Schreier* und *Zassenhaus* gebracht. Ein Kapitel handelt sogar von freien Gruppen. Bei dem geringen Umfang mußte natürlich auf vieles verzichtet werden. So wird z. B. die Einfachheit der alternierenden Gruppe nicht bewiesen. Das Buch paßt vorzüglich in die Sammlung Göschen. *N. Hofreiter*, Wien

Topologische Gruppen. Teil 2. Von *L. S. Pontrjagin*. Mit 6 Textabb., 308 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 16.—.

Der erste Teil der deutschen Übersetzung dieses bekannten Werkes wurde besprochen in Band 62 der „Monatshefte für Mathematik". Der vorliegende zweite Teil beginnt mit einem Kapitel über lokal kompakte abelsche Gruppen. Vor allem werden die Beziehungen betrachtet, welche zwischen derartigen Gruppen und ihren Charaktergruppen bestehen; die dabei gewonnenen Dualitätssätze ermöglichen eine gründliche Untersuchung der Struktur dieser Gruppen. Das nächste Kapitel behandelt die Fundamente der Theorie der Lieschen Gruppen. Sodann wird die Struktur der kompakten topologischen Gruppen mit Hilfe von Lie-Gruppen studiert und insbesondere gezeigt, daß jede kompakte, lokal zusammenhängende Gruppe endlicher Dimension eine Lie-Gruppe ist; man findet in diesem Kapitel auch einige Sätze über transitive kompakte Transformationsgruppen. Es folgt ein Kapitel über lokal isomorphe Gruppen — deren Zusammenhänge im großen mit Hilfe der universellen Überlagerungsgruppe untersucht werden — während im nächsten Kapitel die Beziehungen zwischen Lie-Gruppe und zugehöriger Lie-Algebra ausführlich dargestellt werden. Im Schlußkapitel wird die Strukturuntersuchung der kompakten Lieschen Algebren und Lieschen Gruppen bis zu einer Klassifikation dieser Algebren und Gruppen durchgeführt.

Es braucht wohl kaum nochmals betont zu werden, daß man dieses Buch jedem, der die Theorie der topologischen Gruppen gründlich kennenlernen will, nur wärmstens empfehlen kann. *W. Nöbauer*, Wien

Zahlentheorie. Teil I. Von *L. Holzer*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 13.) VI, 202 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 9.75.

Wenn man glaubt, ein Buch der Sammlung „Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek" werde ohne Hochschulkenntnisse zu lesen sein und sich auf die elementare Zahlentheorie beschränken, so wird man enttäuscht. Der Leser braucht gute Vorkenntnisse aus der Vorlesung über lineare und höhere Algebra. Die Darstellung ist zwar nicht breit, aber doch nicht zu knapp. Stets merkt man das Bestreben des Verfassers, die Zahlentheorie auf den Begriffen

der modernen, abstrakten Algebra aufzubauen. Das Buch bringt in der ersten Hälfte elementare Zahlentheorie und in der zweiten Hälfte algebraische Zahlentheorie. Es beginnt daher mit Teilbarkeit, Kongruenzen, zahlentheoretischen Funktionen, Primitivwurzeln, wie die meisten einführenden Lehrbücher der Zahlentheorie. Ziemlich ausführlich werden binomische Kongruenzen und die Darstellung von Zahlen als Summe von Quadraten gebracht. Der Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes beruht auf Hilfsmitteln über Galoisfeldern und Gaußschen Summen. Kettenbrüche und quadratische Formen werden nicht behandelt. Aus der algebraischen Zahlentheorie mögen Basisdarstellungen, Ideale, Zerlegung in Primideale, Minkowskischer Diskriminantensatz, Endlichkeit der Klassenzahl in beliebigen algebraischen Zahlkörpern angeführt werden.

N. Hofreiter, Wien

Algebra und Differentialrechnung. Von *E. Kähler*. (Mathematische Monographien: Band 1.) 104 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 9.—.

Der Verfasser entwickelt in diesem Buch eine rein algebraische Theorie der Differentialformen. Jedem kommutativen Ring r wird ein nicht kommutativer Ring der Differentiale und in Bezug auf einen beliebigen Unterring der Ring der partiellen Differentiale zugeordnet. Eine besondere Rolle spielen die r-Moduln der Differentiale ersten Grades in diesen Differentialringen und die Determinantenideale dieser Moduln, welche Differenten bzw. Relativdifferenten genannt werden. Diese Ideale werden für gewisse Ringe unter Benützung p-adischer Schlußweisen berechnet. Nach Einführung einer Arithmetik in den Differentialringen wird gezeigt, daß die ganzen Differentialformen festen Grades eines endlichen rein transzendenten Funktionskörpers über einem Primkörper eine algebraische Gruppe bilden. Die Bezeichnungsweise dieses Buches ist etwas eigenwillig, aber trotzdem ein bemerkenswertes Werk. *E. Hlawka*, Wien

Structure et Objet de l'Analyse Mathématique. Von *E. Lefebvre*. Mit 6 Textabb., X, 284 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. fr. 3500.—.

Gegenstand des Buches ist das Gedankengebäude der klassischen Analysis. Es wird dabei aber keineswegs eine Beschreibung des Gebäudes selbst angestrebt, wie sie in den Lehrbüchern vorgenommen wird; was hier beschrieben wird, ist vielmehr die Bauweise dieses Gebäudes, also das zu seiner Errichtung verwendete Material und Werkzeug, die Anwendung dieses Werkzeuges und die Verbindung der Baustoffe.

Dementsprechend beginnt das Buch mit einer Behandlung der mit den Grundlagen der Mathematik zusammenhängenden Probleme der Erkenntnistheorie und Logik. Hierauf werden die Dinge untersucht, welche den Ausgangspunkt der klassischen Analysis bilden: Zahl und Gerade und ihr Zusammenhang sowie der Begriff des Grenzwertes. Eine Besprechung der beim weiteren Ausbau der Analysis auftretenden wichtigsten Definitionen führt schließlich zu einer Einteilung dieser Definitionen und zu einer allgemeinen Untersuchung der Rolle, welche sie in der Entwicklung der Analysis spielen. Im zweiten Kapitel werden dann die Beweismethoden der Analysis studiert: Die verschiedenen Hilfsmittel, welche bei den Beweisen benutzt werden, werden beschrieben und ihre Anwendung wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Schließlich wird eine Einteilung der Beweise nach den zugrunde liegenden Leitgedanken vorgenommen, bei der sich insgesamt 18 verschiedene Typen von Beweisen ergeben. Das dritte Kapitel

beschäftigt sich mit den Resultaten der Beweise, also den Sätzen, die auch nach ihrem Charakter und ihrer Struktur eingeteilt werden; diese Einteilung wird wieder an zahlreichen Bespielen erläutert. Mit einem kurzen Schlußwort, in welchem die wichtigsten Begriffe der Analysis nochmals aufgezählt werden, schließt das originelle Werk. *W. Nöbauer*, Wien

An Introduction to the Theory of Integration. Von *A. C. Zaanen*. IX, 254 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1958. hfl. 25.—.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden. Mit Recht bezeichnet es der Verfasser als eine schwierige Aufgabe, in einer begrenzten Anzahl von Vorlesungsstunden eine einigermaßen vollständige Grundlage zum Studium der verschiedenen Fragestellungen und Ergebnisse zu bieten, mit denen sich die heutige Theorie der Integration beschäftigt. Daß diese Aufgabe von den Vorgängern des Verfassers noch nicht vollständig gelöst wurde, sieht man an diesem Buch. Kapitelüberschriften: Punktmengen, *Zorn*sches Lemma und metrische Räume. Maß. *Daniell*sches Integral. *Stieltjes-Lebesgue*-Integral. Satz von *Fubini*. *Banach*scher, *Hilbert*scher und L_p-Raum. Satz von *Radon-Nikodym*. Differentiation. Neue Variable beim *Lebesgue*-Integral. Maße und Funktionen auf der reellen Geraden. Komplexe Maße. Konjugierte Räume und schwache Konvergenz. *Fourier*-Transformation. Ergodentheorie. — Übungsaufgaben bringen wichtige Ergänzungen des Textes. Das Schöne an dem Buch ist es, daß — wie der Verfasser beabsichtigt hat — alle wesentlichen Punkte der Theorie in einer Art behandelt werden, welche „genügend elementar für eine erste Lektüre und genügend allgemein für das Verständnis schwierigerer Dinge" ist. Hervorzuheben ist auch noch die klare Darstellungsweise, die der Verfasser in besonderem Maße beherrscht. *K. Prachar*, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Teil I. Von *I. I. Priwalow*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 21.) Mit 71 Textabb., IV, 163 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 7.30.

Entsprechend den Zielen der Sammlung „Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek" gibt das Buch eine breit geschriebene Einführung in die Funktionentheorie. Teil I bringt die Darstellung der komplexen Zahlen, den Begriff der Funktion einer komplexen Variablen, Grenzwert, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, Reihen von Funktionen, Potenzreihen, holomorphe oder regulär-analytische Funktionen, konforme Abbildung, lineare Funktionen, Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmus und trigonometrische Funktionen. Es besteht im wesentlichen in einer Übertragung der aus der reellen Analysis bekannten Begriffe und Operationen ins Komplexe und in einer Untersuchung der Eigenschaften der Klasse der differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen (holomorphe Funktionen). *N. Hofreiter*, Wien

Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Von *R. Sauer*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band LXII.) Zweite, erweiterte Auflage. Mit 68 Textabb., XVI, 284 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 38.—, Gln. DM 41.—.

Das Buch behandelt Anfangswertprobleme, die bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus auftreten. Sie kommen in der Physik

und Technik, vor allem bei Wellenausbreitungs- und Ausstrahlungsvorgängen, insbesondere in der Gasdynamik sehr oft vor. Die erste Auflage wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. 57, 93 (1953) ausführlich besprochen. Abgesehen von mehreren kleinen Ergänzungen unterscheidet sich die zweite Auflage dadurch, daß ein Kapitel über die Behandlung von Anfangswertproblemen mit Hilfe des Distributionskalküls neu hinzugefügt wurde. Die Distributionstheorie ist ein neuer fruchtbarer Zweig der Funktionalanalysis, in dem die Begriffe Funktion und Ableitung der klassischen Analysis erweitert werden. Damit erhält man einen einfachen Kalkül für die Lösung von Anfangswertproblemen. Die Brauchbarkeit des neuen Kalküls wird an praktischen Beispielen aus der Überschallströmung um Flugkörper erläutert. Ein nützliches Hilfsmittel zur Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen sind die Laplace-Transormationen. Hier wird gezeigt, wie sich die Theorie der Laplace-Transformation durch den Distributionskalkül erweitern läßt. *N. Hofreiter*, Wien

Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften. Von *G. Doetsch*. (Mathematische Reihe: Band 24.) Mit 40 Textabb., 301 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1958. Geb. sfr. 39.40.

Da der Autor bereits mehrere Bücher über die Laplace-Transformation geschrieben hat, so wird man bei diesem Buch zunächst glauben, es sei eine Neuauflage. Dies trifft aber nicht zu. Es ist auch kein Auszug des dreibändigen Werkes, das ein Handbuch ist, während das vorliegende Buch ein Lehrbuch ist. Didaktische Gesichtspunkte bestimmen den Aufbau und die Darstellung. Vergleiche mit den gut bekannten Potenzreihen, Fourier-Reihen, Fourier-Integralen führen zur Laplace-Transformation. Der Autor scheut keine Mühe, am Anfang alle Erörterungen ausführlich zu halten, um die Eigentümlichkeit der neuen Methode zum Vorschein kommen zu lassen. Mit Hilfe des Differentiationssatzes und des Faltungssatzes gelingt es, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und gegebenen Anfangswerten mit einem Minimum an Rechenaufwand zu lösen. Ein besonderer Vorteil der Laplace-Transformation ist, daß sie unmittelbar die Lösung mit den Anfangsbedingungen liefert. Bei jeder Gelegenheit, insbesondere bei den Systemen von Differentialgleichungen, weist der Verfasser auf die Vorzüge der Laplace-Transformation hin. Sie ist auch vorteilhaft bei Anfangswertproblemen von Differenzengleichungen, die heute unter anderem in der Regelungstechnik und bei den elektronischen Rechenautomaten eine Rolle spielen. Erst in der zweiten Hälfte werden funktionentheoretische Kenntnisse vom Leser verlangt, so bei der Herleitung der komplexen Umkehrformel, bei der Frage der Darstellung einer Funktion als Laplace-Transformierte und bei asymptotischen Entwicklungen. Die Wärmeleitungsgleichung und die Telegraphengleichung werden als Beispiele von partiellen Differentialgleichungen gebracht und an ihnen das Prinzip der Laplace-Transformation gezeigt. Wer das Buch durchstudiert, erkennt, daß die Laplace-Transformation nicht bloß eine vorteilhafte Methode zur Auflösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen ist, sondern eine sehr interessante mathematische Theorie in sich birgt. Zum Unterschied von der technischen Literatur ist die Herleitung aller Sätze mathematisch sehr befriedigend. Eine genaue Formulierung der Voraussetzungen und der Tragweite der Formeln und Sätze zeichnen das Buch aus. Da es auch viele Anwendungen bringt, so gehören zu seinen Interessenten neben den Mathematikern auch die Physiker und Ingenieure. *N. Hofreiter*, Wien

Differenzenrechnung. Von *A. O. Gelfond.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 41.) VIII, 336 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 40.—.

Dieses Buch behandelt die Differenzenrechnung vor allem für analytische Funktionen. Betrachtet wird die Approximation von Funktionen durch Interpolationspolynome, Entwicklung analytischer Funktionen in *Newton*sche Reihen bei beliebiger Lage der Interpolationsstellen, Konstruktion ganzer Funktionen, wo die Werte dieser Funktionen und ihrer Ableitungen an unendlich vielen Stellen vorgegeben werden, und lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Doch finden auch die klassischen Teile der Theorie entsprechende Berücksichtigung, wie die Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen und Polynome (hier wird auch der Satz von *v. Staudt* gebracht), die *Euler*sche Summenformel, Differenzengleichungen (Satz von *Poincaré*) und die Theorie der Gammafunktion (Satz von *Hölder*). Der Verfasser hat seine wichtigen Untersuchungen zur Theorie der Differenzen, darunter auch ein Beispiel seiner berühmten Methode der Transzendenzbeweise, in diesem Buch dargestellt und sie so einem weiten Leserkreis zugänglich gemacht. Ein bedeutsames Werk! *E. Hlawka*, Wien

Theorie und Anwendungen harmonischer Integrale. Von *W. V. D. Hodge.* Aus dem Englischen übersetzt von *V. Ziegler.* VIII, 246 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1958. Geb. DM 15.75.

Das bekannte Buch ist nun in deutscher Übersetzung erschienen. Es enthält die Sätze von *de Rham* und dem Verfasser. Im Mittelpunkt steht natürlich der berühmte Satz von *Hodge* über die Existenz harmonischer Integrale mit vorgeschriebenen Perioden. Die Übersetzung erfolgte nach der zweiten Auflage. Es ist keineswegs notwendig, über die Bedeutung dieses berühmten Werkes noch irgendwelche Worte zu verlieren. *E. Hlawka*, Wien

Integral Equations. Von *F. Smithies.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics: No. 49.) X, 172 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 27s. 6d. net.

Wenn auch die Literatur über Integralgleichungen schon sehr groß ist, so wird ein Buch mit einem Umfang, wie er in den Cambridge Tracts üblich ist, sehr begrüßt, wenn es wie das vorliegende hervorragend geschrieben ist. Fast immer liegen im *Lebesgue*schen Sinne quadratisch integrierbare Funktionen, sogenannte L^2-Funktionen $y(s)$ zugrunde. Auch die Kerne $K(s,t)$ der Integralgleichung

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\ x(t)\,dt$$

werden meist als L^2-Kerne angenommen. Das Buch enthält die Auflösung linearer Integralgleichungen mit Hilfe der *Neumann*schen Reihen (Kapitel II), die determinantenfreien Theoreme der *Fredholm*schen Theorie (Kapitel III), die klassische Theorie von *Fredholm* und damit die Darstellung der Lösungen durch *Fredholm*sche Determinanten unter der Voraussetzung, daß $y(s)$ und $K(s,t)$ stetig sind (Kapitel V). Der allgemeine Fall, wo $y(s)$ und $K(s,t)$ L^2-Funktionen bzw. L^2-Kerne sind, läßt sich nicht glatt übertragen und wird nach des Autors Abhandlung in Duke Math. J. 8 (1941) durchgeführt (Kapitel VI). Auch Kapitel VII und Kapitel VIII (*Hermite*sche L^2-Kerne, singuläre Werte und singuläre Funktionen eines allgemeinen L^2-Kernes) gehen z. T. auf des Autors Abhandlung

in Proc. London Math. Soc. **49** (1937) zurück. Das Buch beschränkt sich auf reine Theorie, bringt also keine Anwendungen und keine Näherungslösungen.

N. Hofreiter, Wien

Asymptotic Methods in Analysis. Von *N. G. de Bruijn.* (Bibliotheca Mathematica, A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: Band IV.) Mit 2 Textabb., XII, 200 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., Groningen: P. Noordhoff. 1958. hfl. 20.—.

Dieses Buch gibt eine ausführliche Darstellung der Methoden der asymptotischen Entwicklungen von Funktionen. Ein solches Buch lag bisher nicht vor. Nach einer sehr instruktiven Einführung wird auseinandergesetzt, wie man das asymptotische Verhalten von implizit gegebenen Funktionen und von Summen, wo die Glieder und die Anzahl der Glieder von einem Parameter abhängen, bestimmen kann. Dann wird die *Laplace*sche Methode für ein- und mehrfache Integrale auseinandergesetzt. Den Höhepunkt des Werkes bildet die Darstellung der Sattelpunktmethode. Hier werden alle Methoden und Kunstgriffe gebracht, welche zur Bestimmung der Sattelpunkte und der Integrationswege dienen können. Dann folgen Abschnitte über *Tauber*sche Sätze, asymptotisches Verhalten von iterierten Funktionen und von Lösungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Alle Methoden werden zuerst an ganz einfachen Beispielen erläutert, von allen Seiten betrachtet, um dann an schwierigen Beispielen in allen Details durchgeführt zu werden. Das Werk ist eine Fundgrube an praktischen Winken. Es ist unentbehrlich für jeden Mathematiker, Physiker und Techniker. Es ist blendend und originell geschrieben. *E. Hlawka*, Wien

Ballistik. Von *H. Athen.* (Hochschulwissen in Einzeldarstellungen.) Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 59 Textabb., 258 S. Heidelberg: Verlag Quelle & Meyer. 1958. Geb. DM 29.—.

Die erste Auflage erschien 1941, also zu einer Zeit, in der besonderes Interesse für Ballistik vorhanden war. Sie wurde in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **51**, 4 (1944) ausführlich besprochen. Seither hat die Ballistik besonders in praktischer Hinsicht große Fortschritte erzielt. Neue Probleme ergaben sich für die Ballistik durch die Verwendung der Flügelgeschosse, ferner dadurch, daß nun viele Geschosse mit Überschallgeschwindigkeit fliegen. Die Entwicklung der Raketentechnik veranlaßte eine Erweiterung der Ballistik. Daher wird nun ein eigenes Kapitel der Bomben- und Raketentechnik gewidmet. Um die neueren Entwicklungen einigermaßen berücksichtigen zu können, wurde manches aus der klassischen Ballistik gestrichen und manches straffer gefaßt .Nach wie vor ist das Buch ein einführendes Lehrbuch der theoretischen Ballistik, das die Grundlagen in voller Breite entwickelt. Im Mittelpunkt stehen die ballistischen Differentialgleichungen der äußeren und der inneren Ballistik und ihre mannigfachen Lösungsmethoden. Die numerische Auswertung der Flugbahngleichungen führte früher zu erheblichen mathematischen Schwierigkeiten. Diese werden heute mit Hilfe der modernen Rechenautomaten leichter überwunden. Bei jeder Gelegenheit werden Hinweise auf Anwendungen gegeben. Was in dem Buch behandelt wird, kann auf die Praxis angewandt werden. Da es ganz unmöglich ist, die vielen Einzelergebnisse der Ballistik in einem einführenden Lehrbuch zu bringen, so gibt der Verfasser zahlreiche Literaturhinweise. *N. Hofreiter*, Wien

Introduction to Functional Analysis. Von *A. E. Taylor.* XVI, 423 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 12.50.

Das Buch beginnt mit einem Kapitel über die algebraischen Eigenschaften linearer Räume und linearer Operatoren. Im zweiten Kapitel werden die in den folgenden Untersuchungen benötigten Begriffe und Sätze der Topologie zusammengestellt. Im dritten Kapitel werden zunächst normierte lineare Räume behandelt, aus denen sich durch Spezialisierung die Banach-Räume ergeben, während die Hilbert-Räume als Spezialfälle der Räume mit innerem Produkt erscheinen; schließlich wird aber auch eine kurze Einführung in die allgemeine Theorie der topologischen linearen Räume gegeben. Das vierte Kapitel bringt eine Reihe von fundamentalen Sätzen über stetige lineare Operatoren in normierten linearen Räumen, während im fünften Kapitel die allgemeine Spektraltheorie der linearen Operatoren entwickelt wird. Im sechsten Kapitel findet man die Spektraltheorie der symmetrischen linearen Operatoren in Räumen mit innerem Produkt, das Schlußkapitel skizziert den Aufbau der neuzeitlichen Theorie von Maß und Integral.

Man wird wohl schon aus dieser kurzen Inhaltsübersicht erkennen, daß dem Aufbau des Buches die moderne, abstrakte Auffassung des Gegenstandes zugrundeliegt. Die ausführliche, gut lesbare Darstellung in Verbindung mit zahlreichen Beispielen, durch welche die Begriffsbildungen erläutert werden und an denen ihre Zweckmäßigkeit vor Augen geführt wird, ermöglicht es dem Leser aber, sich auf bequeme Weise mit den Leitgedanken der modernen Funktionalanalysis vertraut zu machen, so daß das Buch als Einführung in das Gebiet sehr gut geeignet ist. *W. Nöbauer*, Wien

Calculus of Variations and its Applications. Proceedings of the Eighth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, held at the University of Chicago April 12—13, 1956. Herausgegeben von *L. M. Graves*. (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics: Band 8.) Mit 24 Textabb., 153 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company für die American Mathematical Society. 1958. 58/-d.

Mit Rücksicht auf die große Verschiedenheit der einzelnen Arbeiten glauben wir uns mit einer Angabe der Titel beschränken zu müssen.

Reissner: Über die Variationsprinzipien in der Elastizitätstheorie. *Drucker:* Über die Variationsprinzipien in der Plastizitätstheorie. *Hodge*: Diskussionsbemerkungen zu vorstehender Arbeit. *Keller:* Geometrische Theorie der Beugung. *Diaz:* Obere und untere Schranken für Eigenwerte. *Synge:* Stationäritätsprinzipe bei erzwungenen Schwingungen in der Elastizitätstheorie und in der Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen. *Weinberger:* Eine auf Variationsrechnung beruhende rechnerische Methode bei Problemen über erzwungene Schwingungen. *Schiffer:* Anwendungen der Variationsrechnung bei der Theorie der konformen Abbildung. *Bellmann:* Dynamisches Programmieren und Anwendungen auf Variations-Probleme in der mathematischen Nationalökonomie. *Chandrasekhar:* Variationsrechnerische Methoden in der Hydrodynamik. *Rothe:* Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf die Variationsrechnung. *P. Funk*, Wien

Probability Theory. Foundations — Random Sequences. Von *M. Loève*. (University Series in Higher Mathematics.) XV, 515 S. New York-Toronto-London: D. Van Nostrand Company. 1955. $ 12.75.

Dieses groß angelegte Werk ist als Lehrbuch für graduierte Studenten und als Nachschlagewerk für auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik selbständig Tätige gedacht. Die Aneignung des ver-

arbeiteten Stoffes erfordert nach den Angaben des Verfassers ein Spezialstudium von drei bis vier Semestern. Die Grundlagen der Theorie werden in einem einleitenden Teil des Buches, sowie im ersten und zweiten Teil des Buches auseinandergesetzt. Der einleitende Teil enthält auf etwa 50 Seiten die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei denen die Maßtheorie nicht in vollem Umfang benötigt wird, und kann für sich als ausgezeichnete Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden (hier finden sich Dinge wie z. B. das starke Gesetz der großen Zahlen und *Markoff*sche Ketten). Teil Eins ist den Hilfsmitteln aus der Maßtheorie gewidmet. Diese werden in einer organischen Form mit den übrigen Teilen des Buches entwickelt, wodurch es für Vorlesungszwecke besonders geeignet erscheint. Der zweite Teil ist mit „Allgemeine Begriffsbildungen und Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie" überschrieben. Der folgende Teil des Buches beschäftigt sich mit den Familien von unabhängigen Zufallsveränderlichen, insbesondere mit den Verteilungsgesetzen für die Summen unabhängiger Variabler (Zentraler Grenzwertsatz, Gesetz vom iterierten Logarithmus, Unbeschränkt teilbare Verteilungsgesetze usw.). Teil Vier bringt unter dem Titel „Abhängigkeit" diejenigen Resultate, die über die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten zufälliger Folgen bekannt sind, wenn deren Glieder nicht notwendig als unabhängig Variable vorausgesetzt werden. Hier finden sich z. B. die Ergodensätze für solche Folgen mit den verschiedenen Verallgemeinerungen und Verfeinerungen und — im Schlußkapitel — die Eigenschaften „zweiter Ordnung" eines stochastischen Prozesses, ein Teil der Theorie, an dessen Entwicklung der Verfasser selbst wesentlichen Anteil hat. Die historische Entwicklung wird stets übersichtlich dargestellt und durch Literaturhinweise unterstützt. Am Ende jedes Kapitels findet sich eine große Menge von höchst interessanten Problemen, Varianten von Beweisen und Ergänzungen zum Text. Es ist dies das Buch der Wahrscheinlichkeit, welches unter allen Werken über diesen Gegenstand vielleicht den modernsten Standpunkt einnimmt — dabei aber äußerst verständlich und immer auf konkrete Probleme bedacht. Leider ist es unmöglich, die Reichhaltigkeit dieses Buches in einem so kurzen Referat verständlich zu machen.

K. Prachar, Wien

A Comprehensive Bibliography on Operations Research. Through 1956 with supplement for 1957. Von Operations Research Group, Case Institute of Technology. (Publications in Operations Research: Nr. 4.) XI, 188 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.50.

Das Buch enthält 3000 Titeln von Arbeiten über Unternehmensforschung, die größtenteils 1956 erschienen sind. Die Anordnung erfolgt nach Verfassern in alphabetischer Reihenfolge. Nach dem Namen steht der Titel der Arbeit und eine genaue Angabe der Zeitschrift, in der die Arbeit veröffentlicht wurde. Vor dem Namen stehen 6 Zahlen, die Aussagen über den Inhalt der Arbeit machen. Dazu wurde eingangs eine Einteilung in 6 Gruppen gegeben und jede Gruppe in zahlreiche Unterfälle geteilt. Das Buch ist ein wichtiges Nachschlagewerk für alle, die sich für die in starker Entwicklung befindliche Unternehmensforschung interessieren.

N. Hofreiter, Wien

Scientific Programming in Business and Industry. Von *A. Vazsonyi*. Mit 121 Textabb., XIX, 474 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 13.50.

In der Geschäftswelt und in der Industrie treten öfters Probleme auf, deren Bewältigung den leitenden Angestellten wegen zu geringer mathematischer Bildung nicht möglich ist. Andererseits ist die Ausbildung der Mathematiker an den Hochschulen oft so wirklichkeitsfremd, daß sie sich in der Praxis nicht bewähren. Es besteht daher manchmal eine bedauerliche Kluft, zu deren Überbrückung das Buch beitragen will. Es will den Geschäftsleuten und Industriellen helfen, die in ihrem Wirkungskreis auftretenden Probleme in einer ihnen verständlichen Sprache zu erklären und die bewährten Lösungsmethoden auseinander zu setzen. Es ist daher kein Lehrbuch der Mathematik, denn sonst würde es die Probleme in abstrakter Weise formulieren und Beispiele aus den Anwendungen nur zur Illustration bringen. Es geht stets von Aufgaben der Geschäftswelt oder der Industrie aus und führt nur langsam zur mathematischen Formulierung heran. Die zu konkreten Problemen gehörende mathematische Formulierung (Aufstellung des mathematischen Modells) bietet bekanntlich oft besondere Schwierigkeiten. An zahlreichen Beispielen wird der Lösungsweg geschildert. Wer auch mathematische Beweise kennen lernen will, wird auf die einschlägige Literatur verwiesen. Von den in der Industrie auftretenden Problemen wird nur eine kleine Auswahl getroffen, die mit „wissenschaftlicher Programmierung" bezeichnet wird. Das sind meist Aufgaben, in denen unter mehreren Möglichkeiten die günstigste Entscheidung zu treffen ist oder mathematisch formuliert: in denen das Maximum oder das Minimum einer Funktion mit mehreren Veränderlichen gesucht wird, wobei als Nebenbedingungen noch Ungleichungen auftreten. Dazu gehört z. B. das Transportproblem, d. h. die Frage, wie soll der Transport von r Fabriken zu s Warenhäusern in einem Lande durchgeführt werden, damit die Kosten möglichst gering sind. Sind die als Nebenbedingungen auftretenden Ungleichungen sämtlich linear, so spricht man von linearer Programmierung. Sie nimmt einen sehr breiten Raum in dem Buche ein. Als bewährteste Lösungsmethode wird die Simplexmethode gebracht. Je ein größeres Kapitel ist dem dualen Problem der linearen Programmierung, der konvexen Programmierung, der dynamischen Programmierung, der Spieltheorie und der statistischen Inventarkontrolle gewidmet. Gerade die letzten Kapitel des Buches zeigen die große Bedeutung der Statistik für die Erzeugung und den Verkauf. *N. Hofreiter*, Wien

Experimental Designs in Industry. A Symposium Held at North Carolina State College (November 1956). Herausgegeben von *V. Chew*. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) XI, 268 S. New York: J. Wiley & Sons. London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.—.

Das Planen von Versuchen wurde zunächst in der Biologie und in der Landwirtschaft und erst später in der Industrie durchgeführt. Als auch hier zahlreiche Erfahrungen gesammelt und neue Methoden gefunden wurden, war es zweckmäßig, ein Symposium abzuhalten, zu dem praktische und theoretische Statistiker eingeladen wurden. Sie konnten ihre Erfahrungen austauschen und neue Entwicklungen aufzeigen. Das Buch enthält einen Teil der beim Symposium gehaltenen Berichte. Teil I handelt von Versuchen, die für die industrielle Forschung wichtig sind, z. B. Versuche in vollständigen und unvollständigen Blöcken, Versuche mit mehreren Faktoren; Teil II bringt Erfahrungen der Industrie mit dem Planen von Versuchen. Der mathematische Inhalt beschränkt sich im wesentlichen auf Varianzanalyse (Streuungszerlegung), Regressionstheorie und Ausgleichsrechnung (ohne Beweise). Die Berichte zum 1. Teil lauten: 1. Basic experimental designs, by *V. Chew*, 2. Complete factorials, fractional

factorials and confounding, by *R. L. Anderson*, 3. Simple and multiple regression analyses, by *R. J. Hader* and *A. H. E. Grandage*, 4. Experimental designs for exploring response surfaces, by *G. E. P. Box* and *J. S. Hunter*. Sie geben einen sehr guten Überblick und enthalten viele Literaturangaben. Den Praktiker werden mehr die Berichte zum 2. Teil interessieren. Das sind: 1. Experiences with incomplete block designs, by *W. S. Connor*, 2. Experiences with fractional factorials, by *W. H. Horton*, 3. Application of fractional factorials in a Food Research Laboratory, by *M. B. Carroll* and *O. Dykstra, Jr.*, 4. Experiences with response surface designs, by *R. M. DeBaun* and *A. M. Schneider*, 5. Experiences and needs for design in ordnance experimentation, by *C. A. Bicking*. Interessenten des Buches sind in erster Linie angewandte Statistiker. *N. Hofreiter*, Wien

Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Zusammengestellt von *U. Graf* † und *H.-J. Henning*. Berichtigter Neudruck. Mit 9 Abb., VII, 104 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 12.60.

Statistische Verfahren werden in ständig zunehmendem Maße in der Industrie und Technik verwendet. Formeln und Tabellen gehören zum Rüstzeug für das statistische Arbeiten. Das Buch enthält A) Formeln über Verteilungen, Stichproben und Kontrollkarten, B) zahlreiche durchgerechnete Beispiele, C) Tabellen, D) Nomogramme und E) ein reiches Literaturverzeichnis. Die außerordentliche Brauchbarkeit des Buches machte nach wenigen Jahren eine neue Auflage notwendig. Sie unterscheidet sich nur unwesentlich von der ersten Auflage, die in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **57**, 356 (1953) ausführlich besprochen wurde. *N. Hofreiter*, Wien

Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf. Mit Angabe der Genauigkeit in Zahl und Bild. Graphische Rechentafeln. Von *Ph. Lötzbeyer*. 46 S. Siebzehnte Auflage. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1958. DM 3.–.

Das in Fachkreisen sehr bekannte Tafelwerk, das nun in 17. Auflage erschienen ist, hat seinen bewährten Aufbau beibehalten. Der erste Abschnitt enthält neben den üblichen Zahlentafeln (Quadrate, Quadratwurzeln, Kuben, Kubikwurzeln, trigonometrische Funktionen, Aufzinsungsfaktoren, Sterbetafeln, ...) nun auch die Tafel mit den Summen der endlichen geometrischen Reihen. Logarithmentafeln folgen im zweiten Abschnitt. Ein eigener Abschnitt befaßt sich mit der Genauigkeit beim Tafelrechnen. Auf zwei Seiten ist das Wichtigste über das graphische Rechnen dargestellt. Die Zusammenstellung der Formeln aus der Elementarmathematik wurde in dieser Auflage um die wichtigsten Formeln aus der Vektorrechnung erweitert. Den Schluß bilden Umrechnungstafeln. Es ist für den Gebrauch der Tafeln sehr angenehm, daß keine der Tafeln eine Doppelseite überschreitet. Musterbeispiele erläutern den Gebrauch der Tafeln. Der auf gelblichem Papier erfolgte Druck ist fast durchwegs vorbildlich klar. Nur die Tafeln 1—4, sowie die Tafeln 14—17 wirken wegen der zu groß gewählten Lettern nicht so übersichtlich wie die anderen Tafeln.
J. Laub, Wien

Fehler in geometrischen Beweisen. Von *J. S. Dubnow*. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band 19.) Mit 35 Textabb., 64 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Brosch. DM 3.80.

Das erste der vier Kapitel trägt die Überschrift: Fehler in elementaren Überlegungen. In diesem Kapitel werden an Hand von 10 Beispielen fehlerhafte

geometrische Beweise vorgeführt. Der Leser wird eingeladen, die Fehler aufzudecken. Sollte ihm das nicht gelingen, so kann er im zweiten Kapitel nachlesen, wo zu jedem dieser zehn Beispiele Erklärungen bzw. Hinweise gegeben werden, die es ermöglichen, die Fehler festzustellen. Das dritte Kapitel beinhaltet fünf Beispiele, bei deren Beweis Fehler auftreten, die mit dem Begriff des Grenzwertes zusammenhängen. Im vierten Kapitel sind Erläuterungen zu diesen Beispielen. Der Verfasser setzt genau auseinander, welcher Art die Fehler sein können und gibt dem Leser Ratschläge für seine selbständige Tätigkeit bei dem Bestreben, die Fehler aufzudecken. Das Beschäftigen mit diesen und ähnlichen Beispielen soll dazu beitragen, die mathematische Aktivität zu wecken und die mathematische Denkweise zu schärfen. *J. Laub*, Wien

Analytische Geometrie und lineare Algebra. Von *O.-H. Keller*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 26.) Mit 190 Textabb. und 77 Raumbildern, XII, 442 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 42.40.

Das vorliegende Werk ist ein Lehrbuch im wahrsten Sinne des Wortes. Der Verfasser beginnt mit den einfachsten Objekten der Anschauung und steigt dann allmählich zu den allgemeinen Begriffsbildungen auf. Neben der rechnerischen Herleitung der Sätze werden stets die geometrischen Gesichtspunkte und Beweise ausführlich besprochen und zeichnerische Konstruktionen für eine Reihe von Aufgaben gegeben. Dem entspricht es, daß dem Buch viele Abbildungen und insbesondere Raumbilder im Anaglyphenverfahren beigegeben sind. Das Buch enthält eine Reihe bemerkenswerter Einzelheiten. Einige Dinge seien herausgegriffen. Der Vektor wird als Verschiebung eingeführt, also als Operator. Die Determinantentheorie wird aus der Gleichungstheorie heraus entwickelt, an sich ein bekannter Gesichtspunkt, aber bisher, soviel ich weiß, noch nirgends tatsächlich explizit durchgeführt, wie dies hier geschehen ist. Die Elementarteilertheorie wird nach einem eleganten Verfahren von *H. Reichardt* behandelt. — Die Darstellung ist sehr ausführlich, so daß bereits jeder Student im ersten Semester den Ausführungen mit größter Leichtigkeit folgen kann. Es ist auch zum Selbststudium sehr zu empfehlen. *E. Hlawka*, Wien

Analytische Geometrie. Von *G. Pickert*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 24.) 77 Textabb., XII, 410 S. Dritte, bearbeitete Auflage. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1958. Geb. DM 26.—.

Die erste Auflage dieses Buches ist 1953 erschienen und in Mh. **57**, 359 (1954) besprochen. Es handelt sich um ein aus Vorlesungen entstandenes Werk, in dem unter Verwendung eines auf den Punkt- und Vektorbegriff fußenden axiomatischen Aufbaues die analytische Geometrie im n-dimensionalen Raum entwickelt wird. Geometrische Tatsachen der 2- und 3-dimensionalen Geometrie, durch eine Reihe hervorragender Textabbildungen anschaulich gemacht, dienen bloß zur Illustration allgemeiner Sätze. Großen Wert legt der Autor darauf, möglichst die Entwicklungen so vorzutreiben, daß als Koordinatenkörper auch ein Schiefkörper verwendbar bleibt. Diese Tendenzen des Buches bringen naturgemäß für den Anfänger gewisse Schwierigkeiten; durch die Breite und ausführliche Darlegung werden jedoch auch für einen Anfänger die besonders in logischer Hinsicht prägnanten Ausführungen verständlich sein. In dieser Neuauflage sind außer stilistischen und einigen unwesentlichen textlichen Verbesserungen vor allem der Anhang II geändert worden, in dem gezeigt wird, wie man durch rein

geometrische Axiome jenes Axiom ersetzen kann, das die Skalare einführt und ihre Multiplikation mit Vektoren erklärt. Für die Beliebtheit des Buches spricht, daß innerhalb der kurzen Zeit bereits drei Auflagen nötig waren.

H. Brauner, Wien

Perspektywa Malarska. Band II. Von *K. Bartel.* Mit 427 Textabb., 589 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Cena zl. 80.—.

Der seit langem ausständige II. Band des umfassenden Werkes über malerische Perspektive ist nunmehr erschienen — 17 Jahre nach dem gewaltsamen Tode seines Verfassers, seinerzeit Professor an der Technischen Hochschule in Lemberg. Der I. Band, erstmals 1928 verlegt und später durch die vorzügliche Übersetzung von *W. Haack* (Teubner 1934) weit über die Grenzen Polens hinaus bekanntgeworden, ist vor kurzem neu aufgelegt worden und war den geometrischen Grundlagen der Perspektive gewidmet. Der vorliegende Schlußband, dessen Manuskript vor der Vernichtung durch den Krieg gerettet werden konnte, ist jetzt unter der Redaktion von *F. Otto* herausgebracht worden und befaßt sich hauptsächlich mit ästhetischen und kunstgeschichtlichen Fragen. Daneben findet man aber auch eine gründliche Untersuchung der physiologischen Seite des Sehvorgangs und einige Abschnitte von ausgeprägt geometrischem Charakter, so insbesondere einen über Reliefperspektive und einen über „subjektive Perspektiven", wo verschiedene nichtlineare Abbildungen erörtert werden, die gewisse Härten des üblichen Projektionsvorganges beheben sollen. Die letzten fünf der insgesamt elf Kapitel bieten eine feinsinnige Analyse der Rolle, die geometrische Gesetzmäßigkeiten in der Malerei verschiedener Epochen gespielt haben. — Auch dieser Teilband ist überreich mit ausgezeichnetem Bildmaterial ausgestattet; eine Überstzung wäre sehr zu wünschen. *W. Wunderlich*, Wien

Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven. Von *W. W. Dobrowolski.* 134 Textabb., VIII, 134 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. DM 18.—.

Der Autor versucht eine allgemeine Theorie der Mechanismen zur Konstruktion ebener „geometrischer Kurven" (bewußt an Stelle von „algebraischen Kurven" gebraucht) aufzubauen. Die zu realisierende Kurve muß durch ein mathematisches Gesetz (synthetisch oder analytisch) als Punktort oder als Geradenmannigfaltigkeit gegeben sein. Dem Autor kommt es bei seinen Konstruktionen nicht so sehr darauf an, reine Gelenkwerke zu erzielen, mit denen man bekanntlich jede algebraische Kurve mechanisch verwirklichen könnte, sondern er bemüht sich, jede aus dem definierenden Gesetz abgeleitete Konstruktion durch einen Mechanismus ausführen zu lassen. Hiezu gebraucht er außer Gelenken noch Gleithülsen, Schieber und Zahnräder, manchesmal — wie z. B. in Abb. 108 — in einer solchen Vielzahl, daß man kaum von mehr als einem theoretischen Wert dieser Mechanismen sprechen kann. Daß dem Verfasser selbst an der praktischen Verwendbarkeit seiner Apparate Bedenken gekommen sind, geht aus seinem Schlußwort hervor. Trotzdem bietet vorliegendes Buch, das aus dem Russischen von *S. Oberländer* übersetzt worden ist, allen Freunden der Geometrie viel Interessantes.

Kapitel I bringt eine große Anzahl teils bekannter, teils neuer Konikographen. Diese werden entwickelt a) aus den metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte (metrisch-synthetische Methode), b) aus den Gleichungen der Kegelschnitte (analytische Methode), c) aus den affinen und projektiven Eigenschaften

der Kegelschnitte (projektive Methode), d) aus verschiedenen Erzeugungsmöglichkeiten der Kegelschnitte durch diverse Abbildungen, wie Kollineation, Polarsysteme usw. (Abbildungsmethode).

Im Kapitel II werden Apparate zur Konstruktion spezieller Kurven höherer Ordnung gebracht, wobei außer den bereits erwähnten Methoden auch die „Zuordnungsmethode" verwendet wird. In dem darauffolgenden Anhang werden spezielle rationale Kurven und sie erzeugende Mechanismen besprochen. Leider beziehen sich die Literaturhinweise am Ende des Buches fast ausschließlich nur auf russische Autoren.

R. Bereis, Dresden

Differentialgeometrie. Band II: Theorie der Flächenmetrik. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a.) Mit 14 Textabb., 195 S. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1958. DM 4.80.

Band III: Theorie der Flächenkrümmung. Von *K. Strubecker*. (Sammlung Göschen: Band 1180/1180a.) Mit 38 Textabb., 254 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Brosch. DM 4.80.

Der erste Band dieser Differentialgeometrie, der die Kurventheorie behandelt, wurde im Mh. **59**, 348 (1955) besprochen. Die vorliegenden beiden Restbände sind der Flächentheorie gewidmet. So wie auch der erste Band beschränken sie sich auf die metrische Differentialgeometrie des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, und zwar unter Verwendung des auf *Gauß* zurückgehenden Kalküls der quadratischen Differentialformen. Von den neueren Darstellungen desselben Sachgebietes unter Verwendung dieses klassischen Kalküls unterscheiden sie sich vor allem durch eine Fülle geometrischer Einzelheiten in Form von Ergänzungen und Beispielen, durch die für ein Lehrbuch der Differentialgeometrie außergewöhnliche Exaktheit der analytischen Darstellung und schließlich durch die weitgehende Heranziehung von Begriffsbildungen der isotropen Geometrie. Gerade dieser letzte Punkt erscheint durch die zahlreichen Publikationen des Autors über die Geometrie des isotropen Raumes verständlich.

Der erste Teil der Flächentheorie behandelt die innere Geometrie der Flächen, die Vektoranalysis auf Flächen, die Theorie der Abbildungen von Flächen und die Theorie der geodätischen Linien (unter Verwendung auch der absoluten Differentiation längs Flächenkurven). Im zweiten Teilband wird zuerst die Theorie der Flächenkrümmung besprochen sowie jene tiefer liegenden Teile der inneren Flächentheorie, die sich an den Begriff der Gaußschen Krümmung anschließen. Insbesondere werden die projektiven und konformen Modelle der nichteuklidischen Geometrien entwickelt. Der Fundamentalsatz von *Bonnet* wird bewiesen und als Beispiel eines Satzes der Differentialgeometrie im großen die Unverbiegbarkeit der Eiflächen behandelt. Der letzte Abschnitt ist den Minimalflächen gewidmet.

Damit ist ein sich durchaus im klassischen Rahmen bewegendes Lehrbuch der Differentialgeometrie erschienen, das überall deutlich die Persönlichkeit des Autors spürbar macht und durch die Eleganz der Darstellung und die Fülle der gebotenen Ergebnisse für Anfänger und Kenner äußerst wertvoll ist.

H. Brauner, Wien

Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Von *A. P. Norden*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 35.) Mit 115 Textabb., IX, 259 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 14.—.

Diese Übersetzung des 1953 in russischer Sprache erschienenen Buches bringt eine systematische, exakte Darstellung der Grundlagen der Lobatschewskischen Geometrie in elementarer Form. Dabei versucht der Autor einen großen Personenkreis mit den Ideen dieses Geometers bekannt zu machen, sowie die historische Stellung dieser Theorie und ihre weitgehenden Folgerungen für alle Gebiete mathematischer Forschung aufzuzeigen. Dies geschieht unter Verwendung von 115 erstklassigen Textfiguren in sprachlich und didaktisch meisterhafter Form, was vor allem in den letzten Abschnitten (Riemannsche Geometrie, Geometrie und Physik, automorphe Funktionen usw.) zum Ausdruck kommt.

Nach einem kurzen Abriß der Entstehungsgeschichte der Lobatschewskischen Geometrie und einer Übersicht über die Axiome der absoluten Geometrie werden vom Parallelaxiom unabhängige Sätze der ebenen Geometrie behandelt und anschließend die Geometrie der Lobatschewskischen Ebene und des Raumes. Insbesondere wird dabei die gegenseitige Lage der Geraden, die Theorie der Defekte und der Flächeninhalte, die Theorie der Kurven konstanter Krümmung und die wichtigsten Tatsachen der Stereometrie dargestellt. Ein eigener Abschnitt ist der inneren Geometrie der Orisphäre gewidmet. Entsprechend dem elementaren Charakter des Buches werden die grundlegenden Eigenschaften der Exponentialfunktionen und der hyperbolischen Funktionen abgeleitet und die Lobatschewskische Funktion explizit dargestellt. Damit ist das Rüstzeug zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie gegeben. Die Widerspruchsfreiheit wird durch Konstruktion des projektiven Modells erläutert, wobei die zum Kleinschen Modell nötigen Kenntnisse der projektiven Geometrie entwickelt werden.

Dieses Buch gliedert sich in würdiger Weise in die vom deutschen Verlag der Wissenschaften herausgegebene Reihe von Hochschulbüchern an und wird (von manchen für den westlichen Leser kaum akzeptierbaren erkenntnistheoretischen Hinweisen abgesehen) eine wertvolle Bereicherung des Büchermarktes darstellen. *H. Brauner*, Wien

Electronic Digital Computers. Their Use in Science and Engineering. Von *F. L. Alt.* (Applied Mathematics and Mechanics: Band 4.) Mit 8 Textabb., X, 336 S. New York-London: Academic Press. 1958. $ 10.—.

Obwohl elektronische Rechenmaschinen erst seit etwa 15 Jahren bestehen, haben sie seither eine rasante Entwicklung durchgemacht. Der Bereich der Anwendungen ist enorm geworden. Daher ist ein großes Interesse vorhanden, ein Buch wie dieses zu lesen, das eine gute Einführung gibt und ob der geringen Vorkenntnisse leicht zu verstehen ist. Es geht weder auf technische Details ein, noch gibt es mathematische Beweise. Es beschreibt die Prinzipien elektronischer Digitalrechenmaschinen und die vorbereitende Tätigkeit (Kodieren und Programmieren). Ein großes Kapitel ist der praktischen Mathematik gewidmet. Dieses Kapitel bringt die numerischen Methoden, mit denen man die am häufigsten vorkommenden mathematischen Probleme der Algebra und der Analysis mit elektronischen Rechenmaschinen näherungsweise lösen kann. Zuletzt werden Ratschläge für die Anschaffung einer elektronischen Rechenmaschine gegeben. *N. Hofreiter*, Wien

Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. Von *Ja. S. Zypkin.* Aus dem Russischen übersetzt von *W. Hahn* und *R. Herschel.* Mit 249 Textabb. und 17 Tabellen, 472 S. München: R. Oldenbourg. — Berlin: Verlag Technik. 1958. DM 52.—.

Relaisglieder werden in vielen Regelungssystemen verwendet und gehören zu den einfachsten nichtlinearen Regelungsgliedern. Es ist daher besonders wichtig, daß deren Theorie mit einem verhältnismäßig geringen mathematischen Apparat dargestellt werden kann mit Methoden, die den bei linearen Systemen benötigten analog sind — wobei allerdings die Anpassung an die physikalischen Vorgänge besondere Kunst erfordert. Der Verfasser hat in dem vorliegenden Werk mit großem Geschick diese Methoden in ausführlicher und gründlicher Weise auseinandergesetzt. Kapitelüberschriften: Einleitung. Die Relaissysteme der automatischen Regelung und ihre Klassifizierung. Die Gleichungen der Relaissysteme der automatischen Regelung. Die Übergangsprozesse in Relaissystemen und ihre Betriebszustände. Die Stabilität der Gleichgewichtslage in Relaissystemen. Eigenschwingungen in Relaissystemen. Untersuchung der Eigenschwingungen. Erzwungene Schwingungen. Stabilität periodischer Zustände. Kriterien für die Stabilität periodischer Zustände. Berechnung der periodichen Zustände und Abschätzung ihrer Form. Die Linearisierung der Relaissysteme. Optimale Vorgänge in Relaissystemen. Mathematischer Anhang. — An Vorkenntnissen sind nur die allerersten Grundbegriffe der linearen Theorie der Regelvorgänge nötig und im übrigen auch diese im Anhang zusammengestellt. Die Literaturhinweise sind sehr sorgfältig. — Das Buch — welches trotz gründlicher theoretischer Erörterungen niemals die Erfordernisse der Praxis außer Acht läßt — wird jedem Fachmann eine große Hilfe und jedem Amateur eine schöne Lektüre sein. *K. Prachar*, Wien

Elektronenbeugung. Theorie, Praxis und industrielle Anwendungen. Von *E. Bauer*. Mit 108 Textabb., 233 S. München: Verlag Moderne Industrie. 1958. DM 32.—, S 217.60.

Das vorliegende Buch behandelt die Anwendungsmöglichkeiten der Elektronenbeugung in der Praxis. Es gliedert sich in einen theoretischen (S. 15—56), in einen experimentellen (S. 57—154) und einen den praktischen Anwendungen gewidmeten Teil (S. 155—203). Daran schließt sich ein 13 Seiten langes Literaturverzeichnis mit 550 Zitaten, eine Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen und schließlich ein 13 Seiten langes Sachverzeichnis mit 300 Stichwörtern an. 108 Abbildungen illustrieren in hervorragender Weise die verschiedenen Themenkreise.

Im ersten, theoretischen Teil werden ohne ausführliche Beweise die auf der Braggschen Gleichung ruhende geometrische Theorie, die v. Lauesche kinematische Theorie und schließlich die dynamische Theorie nach *H. A. Bethe* dargestellt. Im experimentellen Teil, der das Kernstück des Buches bildet, wird der grundsätzliche Aufbau der Elektronenbeugungsapparaturen und deren einzelne Teile (Strahlerzeugung, Objektkammer, Elektronenlinse usw.) besprochen. Von besonderer Wichtigkeit ist in diesem zweiten Teil das Kap. über die theoretischen und experimentellen Möglichkeiten und Grenzen, um sich der Grenzen des Verfahrens der Elektronenbeugung bewußt zu werden und seine Möglichkeiten nicht zu überschätzen. Ferner behandelt ein sehr wertvolles Kap. die Deutung der Elektronenbeugungdiagramme. Im dritten, praktischen Teil werden ausführlich die Anwendungsmöglichkeiten der Elektronenbeugung in den verschiedenen Industriezweigen (wie metallschaffende, chemische, Elektro- und optische Industrie) erörtert.

Das Buch stellt für alle auf dem Gebiet der Elektronenbeugung arbeitenden Industriephysiker ein unentbehrliches Hilfsmittel dar und dürfte wohl bald neue Auflagen erleben. *Th. Sexl*, Wien

Festkörperphysik und Physik der Leuchtstoffe. Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R. vom 20. bis 24. Okt. 1957 in Erfurt. (Tagungsberichte der Physikalischen Gesellschaft in der D.D.R.) Mit 288 Textabb., 322 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1958. Brosch. DM 48.—.

Die auf der Tagung der physikalischen Gesellschaften der D.D.R. in Erfurt im Oktober 1957 gehaltenen Vorträge, die das Gebiet der Festkörperphysik und die Physik der Leuchtstoffe zum Thema hatten, werden in erstaunlich kurzer Frist unter der verantwortlichen Redaktion von Prof. Dr. *P. Görlich* (Zeiss-Werk, Jena) und von Dr. *Henry Ortmann* (Institut für Strahlungsquellen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) in einem stattlichen Bande von 322 Seiten zusammengefaßt. 55 Vorträge der verschiedensten Autoren behandeln auf durchschnittlich 5 Seiten Länge die verschiedensten Fragestellungen aus den genannten Themenkreisen. Dabei kommen nicht nur Gelehrte der D.D.R. sondern auch ausländische Gelehrte aus Bulgarien, China, ČSR., Polen und Ungarn zu Wort. Auf Einzelheiten einzugehen, erscheint bei der Fülle der Problemstellungen und der erreichten Fortschritte unmöglich. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Flächen mit demselben sphärischen Bild

Von

E. Rembs, Berlin

(Eingegangen am 12. Juli 1958)

In meiner Arbeit von Band 8, 469—471 des Archivs habe ich Flächen betrachtet, die durch parallele Normalen aufeinander bezogen sind oder dasselbe sphärische Bild haben und für die in entsprechenden Punkten die Summen der Hauptkrümmungsradien übereinstimmen: $r_1 + r_2 = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$. Ein ausführliches Literaturverzeichnis über die hierher gehörigen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen findet sich bei *Grotemeyer* (Archiv **9**, 117—122). Ich bewies, daß die Flächen in enger Beziehung zu den infinitesimalen Verbiegungen der Kugel und der Theorie der Minimalflächen stehen. Hier soll gezeigt werden, daß man auch den Fall $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ mit der Theorie der infinitesimalen Verbiegung (allerdings nicht der Kugel) in Zusammenhang bringen und ihn für den Beweis von Eindeutigkeitssätzen verwenden kann.

1. Die Formeln für die Bestimmung einer Fläche mit gegebenem sphärischen Bild sind bei *Bianchi-Lukat*, Differentialgeometrie 2. Auflage § 64 angegeben. Sie vereinfachen sich, wenn man annimmt, daß das Parametersystem auf der Bildkugel ein Isothermensystem ist, so daß für die Fundamentalgrößen der dritten Differentialform $e = g$, $f = 0$ gilt. Man hat zunächst die zweiten Fundamentalgrößen L, M, N so zu bestimmen, daß bei gegebenem $r_1 r_2$ die Gleichung

$$r_1 r_2 = \frac{LN - M^2}{e^2} \tag{1}$$

und zwei „*Codazzi*sche Gleichungen" erfüllt sind, als deren Koeffizienten aber die *Christoffel*schen Symbole, gebildet für das sphärische Bild, auftreten. Dann ergibt sich der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ aus dem Normalenvektor ξ nach den Gleichungen

$$\mathfrak{x}_u = -\frac{1}{e}(L\,\xi_u + M\,\xi_v),\ \mathfrak{x}_v = -\frac{1}{e}(M\,\xi_u + N\,\xi_v). \tag{2}$$

$\bar{\mathfrak{x}}$ sei der Ortsvektor einer zweiten Fläche, deren sphärisches Bild mit dem von $\mathfrak{x}$ übereinstimmt. Für $\bar{\mathfrak{x}}$ gelten die Gleichungen (1), (2), wobei man $r_1, r_2, L, M, N, \mathfrak{x}$ durch die überstrichenen Größen zu ersetzen hat.

Ich betrachte neben den Flächen $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ die Flächen mit den Ortsvektoren

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}.$$

Ich addiere zu den Gleichungen (2) die analogen für $\bar{\mathfrak{x}}$ und erhalte

$$\mathfrak{y}_u = -\frac{1}{e}(l\,\xi_u + m\,\xi_v), \quad \mathfrak{y}_v = -\frac{1}{e}(m\,\xi_u + n\,\xi_v) \tag{3}$$

und bei Subtraktion

$$\bar{\mathfrak{y}}_u = -\frac{1}{e}(\bar{l}\,\xi_u + \bar{m}\,\xi_v), \quad \bar{\mathfrak{y}}_v = -\frac{1}{e}(\bar{m}\,\xi_u + \bar{n}\,\xi_v). \tag{4}$$

Hier wurde gesetzt

$$l = L + \bar{L}, \; m = M + \bar{M}, \; n = N + \bar{N}, \tag{5}$$

$$\bar{l} = L - \bar{L}, \; \bar{m} = M - \bar{M}, \; \bar{n} = N - \bar{N}. \tag{6}$$

l, m, n sind die Fundamentalgrößen 2. Ordnung der Fläche $\mathfrak{y}$, $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ die der Fläche $\bar{\mathfrak{y}}$; denn z. B. ist $L = -\mathfrak{x}_u \xi_u$, $\bar{L} = -\bar{\mathfrak{x}}_u \xi_u$, $l = -(\mathfrak{x}_u + \bar{\mathfrak{x}}_u)\xi_u$ usw.

Die Flächen $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ entsprechen den Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$, wie man sieht, auch durch Parallelität der Normalen.

Um $\mathfrak{y}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ direkt in Zusammenhang zu bringen, lösen wir (3) nach ξ_u, ξ_v auf und substituieren die Werte in (4):

$$\xi_u = -\frac{e(n\,\mathfrak{y}_u - m\,\mathfrak{y}_v)}{l\,n - m^2}, \quad \xi_v = -\frac{e(-m\,\mathfrak{y}_u + l\,\mathfrak{y}_v)}{l\,n - m^2},$$

$$\bar{\mathfrak{y}}_u = \frac{(n\,\bar{l} - m\,\bar{m})\,\mathfrak{y}_u + (l\,\bar{m} - m\,\bar{l})\,\mathfrak{y}_v}{l\,n - m^2}, \quad \bar{\mathfrak{y}}_v = \frac{(n\,\bar{m} - m\,\bar{n})\,\mathfrak{y}_u + (l\,\bar{n} - m\,\bar{m})\,\mathfrak{y}_v}{l\,n - m^2}. \tag{7}$$

Nun ist aber

$$(L + \bar{L})\,(N - \bar{N}) - 2(M + \bar{M})\,(M - \bar{M}) + (N + \bar{N})\,(L - \bar{L}) = 0,$$

wie sich sofort durch Ausrechnen wegen $LN - M^2 = \bar{L}\,\bar{N} - \bar{M}^2$ ergibt, und daher

$$l\,\bar{n} - 2\,m\,\bar{m} + n\,\bar{l} = 0. \tag{8}$$

Die Formeln (7) besitzen daher eine besondere wichtige Eigenschaft. Nämlich der Koeffizient von $\mathfrak{y}_u$ in dem Ausdruck für $\bar{\mathfrak{y}}_u$ und der von

$\mathfrak{y}_v$ in dem Ausdruck für $\bar{\mathfrak{y}}_v$ haben nach (8) die Summe 0. Das wird auch oft durch die Formel ausgedrückt

$$\bar{\mathfrak{y}}_u \times \mathfrak{y}_v = \bar{\mathfrak{y}}_v \times \mathfrak{y}_u.$$

Man weiß dann, daß $\bar{\mathfrak{y}}$ Drehriß von $\mathfrak{y}$ bei einer infinitesimalen Verbiegung dieser Fläche ist und umgekehrt (*Efimow*, Flächenverbiegung im Großen, Berlin 1957 § 24 Formel (14)). Bei *Bianchi* heißt ein solches Flächenpaar, das durch parallele Normalen aufeinander bezogen ist, assoziiert, und schon die Gleichung (8) ist charakteristisch (*Bianchi-Lukat* § 161). Es gilt also

Satz 1: *Sind* $\mathfrak{x}$ *und* $\bar{\mathfrak{x}}$ *zwei Flächen mit demselben sphärischen Bild und ist* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$, *so sind die Flächen* $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ *und* $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}$ (*im Sinne von Bianchi*) *assoziiert oder* (*in der Terminologie von Blaschke*) *Drehrisse voneinander bei infinitesimalen Verbiegungen.*

2. Die Formeln (7) sind unter der Voraussetzung aufgestellt, daß die Größe $ln - m^2 \neq 0$ ist. Wir wollen uns nach der geometrischen Bedeutung von $ln - m^2 = 0$ fragen.

Aus den Gleichungen (3) berechne ich die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche $\mathfrak{y}$. Man erhält wegen $e = \xi_u^2 = \xi_v^2 = g$, $f = \xi_u \xi_v = 0$,

$$\mathfrak{y}_u^2 = \frac{1}{e}(l^2 + m^2), \quad \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = \frac{1}{e}(lm + mn), \quad \mathfrak{y}_v^2 = \frac{1}{e}(m^2 + n^2)$$

und daher

$$\mathfrak{y}_u^2 \mathfrak{y}_v^2 - (\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v)^2 = \frac{1}{e^2}(ln - m^2)^2. \tag{9}$$

Für die Krümmung der Fläche $\mathfrak{y}$ findet man daher

$$\frac{1}{K} = \frac{ln - m^2}{e^2}, \tag{10}$$

wie nach Gleichung (1) nicht anders zu erwarten war.

Aber aus (9) ersieht man: *An Stellen mit* $ln - m^2 = 0$ *ist die Fläche* $\mathfrak{y}$ *nicht regulär.*

3. Wenn wir den konstruierten Zusammenhang für Fragen der Differentialgeometrie im Großen verwerten wollen, sind nach dem vorigen Stellen mit $ln - m^2 = 0$ zu vermeiden. Das geschieht, wenn wir z. B. $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ konvex und gleich orientiert voraussetzen. Wir nehmen also an, die zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ seien beide positiv definit. Dann kann nirgends $ln - m^2 = 0$ sein. Man sieht das am einfachsten, wenn man für den Moment $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ für die Umgebung eines

betrachteten Punktes auf ein anderes Parametersystem als bisher bezogen denkt, nämlich auf das in diesem Fall reelle gemeinsame konjugierte System. Sann sind L, N, $\overline{L}$, $\overline{N}$ alle > 0, $M = \overline{M} = 0$, also l, n positiv, $n = 0$. Auch die Form $l\,du^2 + n\,dv^2$ ist positiv definit, und das gilt folglich bei Einführung irgend eines zulässigen Parametersystems.

Wenn also die Flächen $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ *konvex und gleich orientiert sind, ist auch die Fläche* $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{x}}$ *konvex und überall regulär.*

4. Seien $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen (mit nirgends verschwindender Krümmung). In entsprechenden Punkten soll $r_1 r_2 = \overline{r}_1 \overline{r}_2$ sein. Dann ist auch $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{x}}$ eine Eifläche. $\overline{\mathfrak{y}}$ ist Drehriß derselben bei einer infinitesimalen Verbiegung. Aber jeder Drehriß einer Eifläche ist ein Punkt. Der Drehvektor $\overline{\mathfrak{y}}$ ist ein konstanter Vektor. Daher folgt aus (4)

$$\overline{l} = \overline{m} = \overline{n} = 0$$

oder wegen (6)

$$L = \overline{L},\ M = \overline{M},\ N = \overline{N},$$

d. h. die Flächen $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ sind kongruent.

Satz 2: *Sind* $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ *zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen und ist in allen entsprechenden Punkten* $r_1 r_2 = \overline{r}_1 \overline{r}_2$, *so sind die Flächen kongruent.*

5. Jetzt seien die durch parallele Normalen aufeinander bezogenen konvexen Flächen nicht geschlossen, sondern etwa einfach zusammenhängende Flächen, deren Ränder durch Schiebung auseinander hervorgehen.

Um auch ihre Kongruenz zu beweisen, wende ich die Formel von *Blaschke* für infinitesimale Verbiegung an (Efimow § 32 Formel (1)). Sie lautet im vorliegenden Fall

$$\oint_\Gamma (\mathfrak{y}\ \overline{\mathfrak{y}}\ \overline{\mathfrak{y}}')\,ds = 2 \int\int_D \frac{\overline{l}\,\overline{n} - \overline{m}^2}{l\,n - m^2} (\mathfrak{y}\ \xi)\,do.$$

Da am Rande $\mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{x}}'$ gilt, ist $\overline{\mathfrak{y}}' = 0$. Daher verschwindet das Randintegral. Liegt nun der Nullpunkt so, daß $\mathfrak{y}$ ihm die hohle Seite zuwendet, so ändert sich auf der Fläche das Vorzeichen von $(\mathfrak{y}\ \xi)$ nicht. Es muß also, wie unter 4., die Größe $\overline{l}\,\overline{n} - \overline{m}^2$ überall $= 0$ sein. Aber das hat, wie in der Theorie der infinitesimalen Verbiegung gezeigt wird (Efimow § 32), $\overline{l} = \overline{m} = \overline{n} = 0$ zur Folge, und es gilt

Satz 3: *Sind* $\mathfrak{x}$, $\overline{\mathfrak{x}}$ *zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene konvexe Flächen, ist in entsprechenden Punkten* $r_1 r_2 = \overline{r}_1 \overline{r}_2$ *und gehen*

die Ränder der Flächen durch Schiebung auseinander hervor, so sind die Flächen kongruent. Sie gehen durch Schiebung auseinander hervor.

6. Die Sätze 3 und 4 sind bekannt. Welche der zahlreichen bei infinitesimalen Verbiegungen behandelten Randwertprobleme für hier auftretende Probleme außerdem nutzbar gemacht werden können, müßte im einzelnen untersucht werden. Ich will noch ein Beispiel angeben, in dem es möglich ist.

Satz 4: *Sind* $\mathfrak{x}$ $\bar{\mathfrak{x}}$ *durch parallele Normalen aufeinander bezogene konvexe Flächen mit* $r_1 r_2 = \bar{r}_1 \bar{r}_2$ *und mit ebenen Rändern in parallelen Ebenen, so sind sie kongruent.*

Nämlich bei den angegebenen Voraussetzungen haben auch $\mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}$ ebene Ränder, und wenn $\mathfrak{b}$ Stellungsvektor der Randebenen ist, hat man also $(\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{b}) = 0$ (der Strich bedeutet Ableitung nach der Bogenlänge des Randes von $\mathfrak{y}$). Diese Gleichung besagt (Monatshefte für Mathematik **60**, 58), daß die Krümmung des Randes von $\mathfrak{y}$ bei der Verbiegung mit Drehriß $\bar{\mathfrak{y}}$ stationär ist. Das hat aber Starrheit von $\mathfrak{y}$ zur Folge. Also ist $\bar{\mathfrak{y}} = \text{const}$, $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ müssen alle verschwinden. Die Flächen $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ sind kongruent.

Über lineare Zweibildersysteme im projektiven R_n

Von

Josef P. Tschupik, Graz

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Juli 1958)

1. Einleitung

In der vorangegangenen Arbeit [3] „Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen" wurde bei allen behandelten Zweibildersystemen vorausgesetzt, daß der Schnittraum X der Bildräume Π_1, Π_2 und der Verbindungsraum O der Projektionszentren Z_1, Z_2 zueinander allgemein[1] liegen sollen, soferne sie überhaupt als echte Teilräume des R_n auftreten. Nun sollen jene aus zwei P-Projektionen[2] zusammengesetzten Zweibildersysteme betrachtet werden, bei denen X und O zueinander speziell liegen. Im R_3 wurde bereits von *E. Müller* und *E. Kruppa* für $\dim Z_i = 0$, $\dim \Pi_i = 2$ $(i=1, 2)$ in [2], S. 127 ein solcher Sonderfall behandelt. — Den Abschluß dieser Arbeit bildet ein allgemeiner Satz über Zweibildersysteme.

Definition der y-Systeme. Ein Zweibildersystem, in dem X und O echte Teilräume des R_n sind, möge *y-System* heißen, falls $(OX) = Y = R_y$ ist, wobei y der Bedingung

$$\text{Max. } (0, \dim (OX)_a + 1) \leqq y \leqq \text{Min. } (\dim O - 1, \dim X) \qquad (1a)$$

genüge. Der Index a bei $\dim (OX)_a$ bedeutet, daß diese Dimension so zu berechnen ist, als ob O und X allgemeine Lage zueinander hätten. Z_i und Π_i $(i=1, 2)$ müssen als Zentrum und Bildraum einer P-Projektion punktfremd sein. Wäre $y = \dim O$, so läge O in X, also Z_i in Π_i; daher wurde in (1a) $y \leqq \dim O - 1$ verlangt.

---

[1] Der Begriff „allgemeine Lage zweier Räume zueinander" wird in dem in [3], Fußnote 4 erklärten Sinn gebraucht.

[2] Die Bezeichnungen in dieser Arbeit schließen sich an jene in [3] an.

Ersetzt man in einem a-, x-, z- oder xz-System[2] die Voraussetzung der allgemeinen Lage von O zu X durch (1a), so möge das entstehende System sinngemäß mit ay-, xy-, yz- oder *xyz-System* bezeichnet werden.

Aus einem a-, x- oder z-System kann man nur dann ein ay-, xy- oder yz-System herleiten, wenn

$$r_1 + r_2 \geqq n + 2 \tag{1b}$$

gilt, da sonst nicht gleichzeitig $O(O + R_n)$ und X auftreten (siehe [3]) Für xz-Systeme gilt diese Einschränkung nicht, da X nach Voraussetzung auftritt, während O nach [3], 3.3.1. in allen z-Systemen echter Teilraum des R_n ist. — Man kann offenbar von einem gegebenen a-, x-, z- oder xz-System zu einem y-System übergehen, indem man die Zentren Z_1, Z_2 und die projizierenden Räume $p_1 = [Z_1 P]$, $p_2 = [Z_2 P]$ und $p_0 = [OP]$ — wobei P ein abzubildender Punkt ist — festhält, während man die Lage der Bildräume Π_1, Π_2 so verändert, daß sich O und X in einem Raum Y von der Dimension y schneiden. Man erkennt daraus, daß Y nur die Situation in den Bildräumen beeinflußt.

Falls im Ausgangssystem Ordner auftreten, kann man zeigen, daß durch den Übergang zum y-System die Ordnerdimension nicht geändert wird. Die Ordner in Π_i sind nach [3] die Schnittträume der einzelnen p_0 mit Π_i. Eine Zunahme der Ordnerdimension würde bedeuten, daß im y-System p_0 und Π_i in einem echten Teilraum $R_{n-\mu}(\mu \geqq 1)$ des R_n liegen. Innerhalb dieses $R_{n-\mu}$ wäre dann

$$\dim (Z_i \Pi_i) = (n - r_i) + (r_i - 1) - (n - \mu) = \mu - 1 \geqq 0.$$

Da dies im Widerspruch zur Punktfremdheit von Z_i und Π_i steht, ist die Behauptung bewiesen.

2. ay-Systeme und xy-Systeme

2.1. Abbildung allgemein liegender Punkte. O und X treten unter der Voraussetzung (1b) in beiden Systemen auf und es ist $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$. Für a-Systeme war $\dim X = r_1 + r_2 - (n + 2)$ und für x-Systeme galt $\dim X = x$, wobei x der Bedingung

$$\text{Max. } (0, r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \text{Min. } (r_1 - 1,\ r_2 - 1) \tag{2}$$

genügen mußte. Nach 1. gelten diese Dimensionen auch für ay-Systeme bzw. für xy-Systeme, doch ist wegen (1b) in (2) die Schranke 0 überflüssig. Für $\dim X$ schreiben wir künftig x' und es bedeute $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ für ay-Systeme bzw. $x' = x$ für xy-Systeme.

In a-Systemen sind O und X stets punktfremd, denn es ist

$$\dim (OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + [r_1 + r_2 - (n + 2)] - n = -1.$$

In x-Systemen ist dagegen

$$\dim (OX) = [2n + 1 - (r_1 + r_2)] + x - n = n + x + 1 - (r_1 + r_2)$$

und es können wegen (2) O und X nie punktfremd sein. (1a) geht bei ay-Systemen in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2),\ r_1 + r_2 - (n + 2)) \tag{3}$$

und bei xy-Systemen in

$$n + x + 2 - (r_1 + r_2) \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2),\ x) \tag{4}$$

über. In beiden Systemen ist $[OX]$ echter Teilraum des R_n, denn es ist

$$\dim [OX] = 2n + 1 - (r_1 + r_2) + x' - y$$

und man erkennt bei ay-Systemen unmittelbar, daß $\dim [OX] = n - (y + 1) < n$ ist, während in xy-Systemen $\dim [OX] = 2n + x + 1 - (r_1 + r_2 + y) < n$ aus (4) folgt.

Innerhalb $[OX]$ gilt für den Schnittraum von X und Z_i

$$\dim (Z_i X) = (n - r_i) + x' - [2n + x' + 1 - (r_i + r_j + y)] = r_j + y - (n + 1) \qquad (i, j = 1, 2, i \neq j).$$

Da Z_i und Π_i eine P-Projektion bestimmen und daher punktfremd sein müssen, muß man in beiden Systemen zusätzlich $\dim (Z_i X) < 0$, d. h.

$$y < n + 1 - r_j \tag{5}$$

verlangen. Da (5) auch $y \leqq \dim Z_j$ bedeutet und $\dim Z_j \leqq \dim O - 1$ ist, erkennt man, daß $\dim Z_j$ an die Stelle der Schranke $\dim O - 1$ treten muß, dagegen kann man zeigen, daß die Schranke x' i. a. nicht entbehrlich ist. Bei ay-Systemen geht dadurch (3) in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min. } (n - r_j,\ r_i + r_j - (n + 2)) \tag{3'}$$

über und da zumindest $y = 0$ stets brauchbar ist, *kann man jedes a-System vom Typ* $r_1 + r_2 \geqq n + 2$ *mindestens auf eine Art in ein ay-System überführen.* Analog geht (4) in

$$n + x + 2 - (r_i + r_j) \leqq y \leqq \text{Min. } (n - r_j,\ x) \tag{4'}$$

über. Da (4') nur unter der Voraussetzung $x < r_i - 1$ richtig ist — da sonst die obere Schranke kleiner als die untere Schranke wäre — *gibt es keine xy-Systeme mit inzidenten Bildräumen.* Wegen (2) gilt dann

$$r_i + r_j - (n + 2) < x < r_i - 1$$

und man erkennt, *daß xy-Systeme nur für* $r_j < n$ *auftreten können.*

In [3] wurden sowohl bei a-Systemen als auch bei x-Systemen die Typen $r_1 + r_2 = n + 2$ und $r_1 + r_2 > n + 2$ getrennt. Im Falle $r_1 + r_2 = n + 2$ war jedes Punktepaar P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$) Bildpaar eines R_n-Punktes. Es traten keine Ordner in den Bildräumen auf, da die p_0 nicht echte Teilräume des R_n waren. Beim Übergang zu y-Systemen bleiben die p_0 unverändert, *daher treten auch in den ay-Systemen bzw. xy-Systemen vom Typ* $r_1 + r_2 = n + 2$ *keine Ordner auf.* — Unter der Voraussetzung $r_1 + r_2 > n + 2$ waren in den a-Systemen bzw. in den x-Systemen die Bildpunkte P', P'' eines R_n-Punktes P an Ordner p_2' in Π_1 bzw. p_1'' in Π_2 gebunden. Die Ordner in Π_i hatten die Dimension $n - r_j + 1$. In den a-Systemen schnitten sich je zwei entsprechende Ordner in einem Punkt von X. In den x-Systemen hatten sie dagegen einen Schnittraum der Dimension $n + x + 2 - (r_1 + r_2)$, wobei diese $R_{n+x+2-(r_1+r_2)}$ einen festen $R_{n+x+1-(r_1+r_2)}$ enthielten. Nach 1. bleibt beim Übergang zu y-Systemen die Ordnerdimension unverändert. Da Y in O und in X, also auch in Π_i (i=1, 2) liegt, ist Y auch in $O_i = (O\Pi_i)$ enthalten und es ist daher $(O_1 O_2) = Y$. O_i liegt in allen Ordnern von Π_i, also ist Y allen Ordnern von Π_1 und Π_2 gemein. Schließt man die Punkte von $[OX]$ von der Abbildung aus, so kann man behaupten, daß je zwei entsprechende Ordner nur Y gemein haben. Der Schnittraum entsprechender Ordner p_1'', p_2' ist $(p_1'' p_2') = (p_0 X)$. Hätten p_0 und X einen $R_{y+\lambda}$ mit $\lambda \geqq 1$ gemein, so hätte der Verbindungsraum von p_0 und X die Dimension

$$\dim [p_0 X] = 2n + 2 - (r_1 + r_2) + x' - (y + \lambda),$$

während andererseits für jeden Punkt P, der nicht in $[OX]$ liegt, $\dim [p_0 X] = \dim [OPX] = \dim [OX] + 1 = 2n + x' + 2 - (r_1 + r_2 + y) \leqq n$ gilt. Die beiden Ergebnisse sind nur für $\lambda = 0$ gleich, womit die Behauptung bewiesen ist. Nach Ausschluß der Punkte aus $[OX]$ liegen im Gegensatz zu den a- und x-Systemen in den ay- und xy-Systemen die Ordnerbünde nicht mehr perspektiv. Es wird sich später zeigen, daß innerhalb $[OX]$ noch Perspektivität auftreten kann.

Da die beiden Ordnerbünde $O_1(p_2')$ und $O_2(p_1'')$ nach wie vor zum Bund $O(p_0)$ perspektiv liegen, gilt

In ay-Systemen und in xy-Systemen vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ *ist nach Ausscheidung der Punkte von* $[OX]$ *allen Ordnern* Y *und nur* Y *gemein und die Ordnerbünde* O_1 *und* O_2 *sind nicht mehr perspektiv, sondern nur mehr projektiv aufeinander bezogen.* (6)

2.2. Abbildung der Punkte aus $[O\,X]$. Nach [3], (2) werden die Punkte aus $[OX]$ aus $Z_i^* = Z_i$ $(i, j = 1, 2)$ auf $\Pi_i^* = ([OX]\,\Pi_i)$ abgebildet. In diesem Zweibildersystem $\mathfrak{S}^*$ ist $[OX]$ Oberraum; wir schreiben daher $\dim [OX] = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y) = n^*$. Wegen $Z_i^* = Z_i$ ist $n^* - r_i^* = n - r_i$ bzw. $r_i^* = n + x' + 1 - (r_j + y)$ und daher $\dim \Pi_i^* = r_i^* - 1 = n + x' - (r_j + y)$. Es ist $\dim \Pi_i^* \geqq x'$, da $n + x' - (r_j + y) \geqq x'$ bzw. $r_j + y \leqq n$ wegen (5) erfüllt ist.

Da Z_i, Π_i $(i = 1, 2)$ kein z-System war, kann auch $\mathfrak{S}^*$ keines sein. $\mathfrak{S}^*$ kann auch kein y-System sein, da Y innerhalb $[OX]$ der kleinste Schnittraum von $O^* = O$ und $X^* = X$ ist. Dagegen ist $\mathfrak{S}^*$ ein x-System, da bei allgemeiner Lage von Π_1^* und Π_2^*

$$\dim X_a^* = \dim (\Pi_1^*\,\Pi_2^*) = r_1^* + r_2^* - (n^* + 2) = x' - (y + 1)$$

wäre, während nach Voraussetzung $\dim X^* = \dim X = x'$ ist und der Vergleich $\dim X_a^* < \dim X^*$ zeigt. Der Typ dieses x-Systems hängt nach [3], 3.4. von den Größen $r_1^* + r_2^*$ und $n^* + 2$ ab. Da $r_1^* + r_2^* = 2n + 2x' + 2 - (r_1 + r_2 + 2y)$ und $n^* + 2 = 2n + x' + 3 - (r_1 + r_2 + y)$ ist, erkennt man, daß $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$ ist, je nachdem $y \gtreqless x' - 1$ gilt. Setzt man für x' ein, so erhält man zusammenfassend:

In ay-Systemen werden die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System $\mathfrak{S}^*$ abgebildet. Es ist in diesem x-System $n^* = n - (y + 1)$, $r_i^* = r_i - (y + 1)$, $\dim Z_i^* = n - r_i$, $\dim \Pi_i^* = r_i - (y + 2)$ und $\dim X^* = r_1 + r_2 - (n + 2)$. $\mathfrak{S}^*$ ist vom Typ $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$, je nachdem $r_1 + r_2 - (n + 3) \gtreqless y$ ist. (7)

In xy-Systemen werden die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System $\mathfrak{S}^*$ abgebildet. Es ist $n^* = 2n + x + 1 - (r_1 + r_2 + y)$, $r_i^* = n + x + 1 - (r_j + y)$, $\dim Z_i^* = n - r_i$, $\dim \Pi_i^* = n + x - (r_j + y)$ und $\dim X^* = x$. Dieses x-System ist vom Typ $r_1^* + r_2^* \gtreqless n^* + 2$, je nachdem $y \gtreqless x - 1$ ist. (8)

Da Y Teilraum von X ist, gibt es für den Fall $y > x' - 1$ nur die Möglichkeit $y = x'$. Es ist dann $\dim O = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $\dim [OX] = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y) = 2n + 1 - (r_1 + r_2)$, also $O = [OX]$. In ay-Systemen vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$ muß $y = x'$ sein, da $x' = 0$ ist. Für xy-Systeme gilt diese Einschränkung wegen (2) nicht.

Unter den Systemen vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ ist vor allem der Fall $y < x'$ interessant, da die Punkte aus $[OX]$ durch ein x-System vom Typ $r_1^* + r_2^* > n^* + 2$ abgebildet werden. In einem solchen x-System sind nach [3], 3.4. die Bildpunkte P', P'' eines Punktes $P (P \notin O)$ an Ordner

gebunden. Die Dimensionen der Ordner in Π_i ist $n - r_j + 1$ $(i, j = 1, 2)$. Je zwei entsprechende Ordner schneiden sich nach [3], (25) in einem Raum der Dimension $n^* + x^* + 2 - (r_1^* + r_2^*) = y + 1$. Diese R_{y+1} liegen in $X^* = X$ und enthalten Y. Die Ordner in Π_1^*, Π_2^* liegen somit perspektiv.

Unter Verwendung der Ergebnisse über x-Systeme (vgl. [3], 3.4.) kommt man zur nachfolgenden Übersicht (9). Sie soll zeigen, wie innerhalb eines ay- oder xy-Systems die Art der Abbildung eines Punktes P davon abhängt, ob P in O, in $[OX]$ oder außerhalb $[OX]$ liegt. $P \to P', P''$ bedeute, daß P auf das Bildpaar P', P'' abgebildet wird.

Übersicht. (9)

<table>
<tr><th></th><th>$y < x' - 1$</th><th>$y = x' - 1$</th><th>$y = x'$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$P \notin [O\,X]$</td><td colspan="3">I a) ay-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$,
II a) xy-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$,
$P \to P', P''$ in Ordnern. Ordnerschnitt $= (p_1'' p_2') = Y$.
II b) xy-Systeme vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$,
$P \to P', P''$ ohne Ordner.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>I b) ay-Systeme mit $r_1 + r_2 = n + 2$, $P \to P', P''$ ohne Ordner.</td></tr>
<tr><td>$P \in [O\,X]$,
$P \notin O$</td><td>x-System in $[OX]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* > n^* + 2$, $P \to P', P''$ in Ordnern. dim $(p_1'' p_2') = y + 1$</td><td>x-System in $[O\,X]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* = n^* + 2$ $P \to P', P''$ ohne Ordner</td><td>für a) u. b)
x-System in $[O\,X] = O$ vom Typ $r_1^* + r_2^* = n^* + 1$. Treffgeraden von $Z_1, Z_2 \to P', P''$.</td></tr>
<tr><td>$P \in O$</td><td colspan="3">x-System $\overline{Z}_i$, $\overline{\Pi}_i$ in O vom Typ $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{n} + 1$.
Treffgeraden von $Z_1, Z_2 \to P', P''$.</td></tr>
</table>

2.3. Beispiele.

1. Man erhält im R_3 ein ay-System vom Typ $r_1 + r_2 = n + 2$, wenn man $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ und $y = 0$ wählt. Es ist dann $\dim Z_1 = 0$, $\dim \Pi_1 = 2$, $\dim \Pi_2 = \dim Z_2 = 1$, d. h. es ist nach *F. Hohenberg* (vgl. [1]) die erste P-Projektion als Riß und die zweite als Kotierung zu bezeichnen. Die Ebene $[OX] = O$ enthält den Schnittpunkt X der Bildräume, es ist also $y = \dim X$. Die Zentren sind innerhalb O so zu wählen, daß sie

nicht Y enthalten. Abb. 1 zeigt den Abbildungsvorgang für einen allgemein liegenden Punkt P und für einen Punkt Q aus $[OX] = O$. $\Pi_2^* = Y$ liegt in Π_1^*. Die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 bilden das Strahlbüschel Z_1. Die zweiten Bildpunkte Q'' der Punkte $Q \in O$ liegen im Punkt Y.

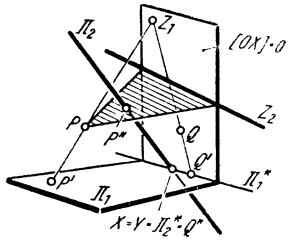

Abb. 1

2. Abb. 2 zeigt das von *E. Müller* und *E. Kruppa* ([2], S. 127) behandelte Beispiel eines ay-Systems im R_3. Es ist $r_1 = r_2 = 3$ und $y = 0$, also $y = \dim X - 1$. Beide P-Projektionen sind Risse; der *Doppelsehstrahl* O und der *Grundschnitt* X haben den Punkt Y gemein. Die Bilder P', P'' eines Punktes $P(P \notin [OX])$ liegen in entsprechenden Strahlen der projektiven Ordnerbüschel O_1, O_2, wobei $O_1 = O_2 = Y$ ist. Die Punkte Q der Ebene $[OX]$ werden auf Q', Q'' in $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X$ abgebildet. O ist die einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2. Für $R \in O$ ist $R' = R'' = Y$.

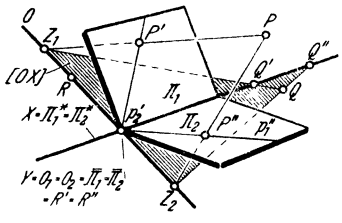

Abb. 2

3. ay-Systeme vom Typ $y < \dim X - 1$ treten im R_3 nicht auf. Im R_4 erhält man ein solches System für $r_1 = r_2 = 4$ und $y = 0$. Die Zentren sind Punkte, die Bildräume sind Hyperebenen. Die Gerade O und die Ebene X haben den Punkt Y gemein. Die Ordner in Π_1 und Π_2 bilden zwei Strahlbündel mit dem gemeinsamen Träger Y. Für das x-System in der Hyperebene $[OX]$ gilt dim $\Pi_i^* = 2$ $(i = 1, 2)$, dim $X^* = 2$, also $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X$. In diesem x-System fällt jeder Ordner mit seinem entsprechenden zusammen. O ist die einzige Treffgerade von Z_1 und Z_2; die Bildpaare R', R'' der Punkte R aus O fallen daher nach Y. In Abb. 3 wurde der Abbildungsvorgang für die Punkte $P(P \notin [OX])$, Q aus

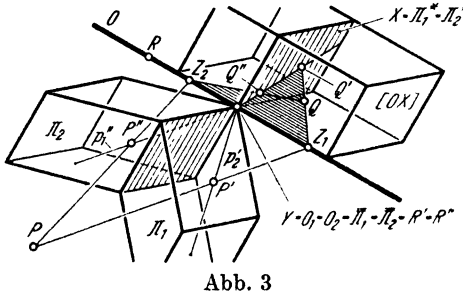

Abb. 3

$[OX]$ und R aus O skizziert.

4. Wie man sich leicht überzeugen kann, gibt es im R_3 keine xy-Systeme. Im R_4 gibt es ein xy-System für $r_1 = r_2 = 3$. Die Zentren sind Geraden und die Bildräume sind Ebenen. Wählt man Π_1, Π_2 so, daß sie sich in einer Geraden X schneiden, so bestimmen sie ein x-System. Diese Gerade hätte bei allgemeiner Lage mit der Hyperebene O einen Punkt gemein, liegt sie aber ganz in O, so ist Z_i, Π_i $(i = 1, 2)$ ein xy-System. Für dieses System gilt $x = 1$, $y = 1$ und $r_1 + r_2 = n + 2$. Es treten keine Ordner auf. Innerhalb der Hyperebene $O = [OX]$ werden die Treffgeraden von Z_1 und Z_2 auf die Punktepaare der Geraden $\Pi_1^* = \Pi_2^* = X = Y$ abgebildet.

5. Ein xy-System vom Typ $r_1 + r_2 > n + 2$ findet man erst im R_5, wenn man $r_i{=}4$ $(i{=}1, 2)$, $x = 2$ und $y{=}\dim X{-}1{=}1$ wählt. Es ist dann $\dim Z_i = 1$, $\dim \Pi_i = 3$ und $\dim O = 3$.

3. yz-Systeme und xyz-Systeme

3.1. Abbildung allgemein liegender Punkte. Nach [3], 3.3.1. unterscheiden sich z-Systeme von den a-Systemen durch die Voraussetzung

$$(Z_1 Z_2) = Z \text{ mit } \dim Z = z \text{ und}$$

$$\text{Max. } (0, n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z \leqq \text{Min. } (n - r_1, n - r_2). \quad (10)$$

Für xz-Systeme gilt zusätzlich noch (2). In allen xz-Systemen treten O und X als echte Teilräume des R_n auf, in den z-Systemen aber nur unter der Voraussetzung (1b). Ersetzt man die Voraussetzung der allgemeinen Lage von O zu X durch (1a), so gehen z-Systeme in yz-Systeme und xz-Systeme in xyz-Systeme über. Im Falle der yz- oder xyz-Systeme muß in (10) rechts das Gleichheitszeichen wegfallen, da z. B. bei $z = n - r_1$ $O = Z_2$ wäre und Z_2 mit Π_2 den Schnittraum Y hätte. Da andererseits in (10) $0 \leqq z$ vorausgesetzt wird, *kann man yz- bzw. xyz-Systeme nur für $r_j < n$ erwarten.* — Für yz-Systeme folgt aus (1b), daß in (10) Max. $(0, n + 1 - (r_1 + r_2)) = 0$ ist. Nach [3] ist in yz-Systemen und in xyz-Systemen $\dim O = 2n - (r_1 + r_2 + z)$. Für $\dim X$ werde wieder x' eingeführt und es bedeute $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ in yz-Systemen und $x' = x$ in xyz-Systemen, wobei im letzteren Falle x der Voraussetzung (2) genüge. Bei allgemeiner Lage von O zu X wäre in z-Systemen

$$\dim (OX)_a = 2n - (r_1 + r_2 + z) + x' - n = n + x' - (r_1 + r_2 + z) = -z - 2,$$

es muß daher die linke Seite von (1a) in $0 \leqq y$ übergehen. Zusammenfassend lauten vorläufig die Voraussetzungen für yz-Systeme

$$r_1 + r_2 \geqq n + 2, \tag{11a}$$

$$0 \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2 + z + 1),\ r_1 + r_2 - (n + 2)), \tag{11b}$$

$$O \leqq z < \text{Min. } (n - r_1,\ n - r_2) \tag{11c}$$

und für xyz-Systeme

$$\text{Max. } (0,\ r_1 + r_2 - (n + 1)) \leqq x \leqq \text{Min. } (r_1 - 1,\ r_2 - 1), \tag{12a}$$

$$\text{Max. } (0, n + x + 1 - (r_1 + r_2 + z)) \leqq y \leqq \text{Min. } (2n - (r_1 + r_2 + z + 1),\ x), \tag{12b}$$

$$\text{Max. } (0,\ n + 1 - (r_1 + r_2)) \leqq z < \text{Min. } (n - r_1,\ n - r_2). \tag{12c}$$

Es ist $\dim [OX] = 2n - (r_1 + r_2 + z) + x' - y$. Soll $[OX]$ echter Teilraum des R_n sein, so muß $\dim [OX] < n$ also $n + x' - (r_1 + r_2 + z) < y$ gelten. Dies ist für $x' = r_1 + r_2 - (n + 2)$ sicher erfüllt, es gilt aber auch für $x' = x$ wegen (12b).

In $[OX]$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$)

$$\dim (Z_i X) = n - r_i + x' - [2n + x' - (r_i + r_j + y + z)] = r_j + y + z - n.$$

Da X in Π_i liegt und Π_i mit Z_i keinen Punkt gemein haben darf, muß man zusätzlich $\dim (Z_i X) < 0$, also

$$y < n - (r_j + z) \qquad (j = 1, 2) \tag{13}$$

voraussetzen. Da wir vorhin $r_i < n$ voraussetzen mußten, ist

$$n - (r_j + z) < \dim O = 2n - (r_i + r_j + z),$$

d. h. es tritt nun $n - (r_j + z)$ an die Stelle der Schranke $\dim O - 1$. (11b) bzw. (12b) gehen daher in

$$0 \leqq y \leqq \text{Min.}(n - (r_j + z + 1), r_i + r_j - (n + 2)), \tag{11b'}$$

$$\text{Max.}(0, n + x + 1 - (r_i + r_j + z)) \leqq y \leqq \text{Min.}(n - (r_j + z + 1),\ x). \tag{12b'}$$

Für xyz-Systeme folgt aus (12b') wegen $n + x + 1 - (r_i + r_j + z) \leqq$ $\leqq n - (r_j + z + 1)$ die Bedingung $x < r_i - 1$, d. h. *es gibt keine xyz-Systeme mit inzidenten Bildräumen.*

Nach [3], 3.3. unterteilt man die z-Systeme und nach [3], 3.5. die xz-Systeme in die Typen $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ und $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$.

Bei den yz- bzw. xyz-Systemen wird dieselbe Unterteilung zweckmäßig sein. Der Fall $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ ist bei den yz-Systemen auszuschließen, da er wegen (11a) zu $z < 0$ führen würde. Fordert man in einem xyz-System $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$, so geht die linke Seite von (12b') in $x \leqq y$ über. Andererseits fordert die rechte Seite von (12b') $y \leqq x$, also können nur für $x = y$ xyz-Systeme vom genannten Typ erwartet werden. Ersetzt man nun in (12b') y durch x, so gewinnt man die Bedingung $x < n - (r_j + z)$. Also gilt

Es gibt keine yz-Systeme vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$. *In den xyz-Systemen von diesem Typ muß* $x = y$ *und* $x < n - (r_j + z)$ *sein.* (14)

Da nach 1. beim Übergang zu y-Systemen die Ordnerdimensionen nicht geändert werden, folgt aus [3], 3.5.:

In xyz-Systemen vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ *werden nach Ausschluß der Punkte aus* $[OX]$ *die* R_{z+1} *des Bundes Z eineindeutig auf die Punktepaare* P', P'' $(P^{(i)} \in \Pi_i)$ *abgebildet.* (15)

Unter der Voraussetzung $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ sind in den z- und xz-Systemen und daher gleicherweise in den yz- und xyz-Systemen die Bildpunkte P', P'' eines Punktes P an Ordner gebunden. Die Ordner in Π_i haben nach [3], 3.3. bzw. [3], 3.5. die Dimension $n - (r_j + z)$ $(i, j = 1, 2)$ und enthalten $O_i = (O\Pi_i)$. Da X in Π_i liegt, ist $Y = (OX)$ in O_i, also in allen Ordnern enthalten. Schließt man die Punkte von $[OX]$ von der Abbildung aus, so kann man behaupten, daß je zwei entsprechende Ordner nur Y gemein haben. Hätten sie einen $R_{y+\lambda}$ mit $\lambda \geqq 1$ gemein, so wäre

$$\dim [p_0 X] = [2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)] + x' - (y + \lambda).$$

Da andererseits für jeden Punkt P, der nicht in $[OX]$ liegt,

$$\dim [p_0 X] = \dim [OPX] = \dim [OX] + 1 = 2n + x' + 1 - (r_1 + r_2 + y + z)$$

ist, zeigt der Vergleich, daß $\lambda = 0$ sein muß. Man muß sich allerdings zuvor vergewissern, daß in der letzten Gleichung nicht $\dim [p_0 X] > n$ ist. Dies tritt nicht ein, da $[OX]$ echter Teilraum des R_n ist. — Da also je zwei entsprechende Ordner Y und i. a. nur Y gemein haben, liegen die Ordnerbünde O_1, O_2 nicht mehr perspektiv. Sie sind jedoch einander projektiv zugeordnet, da sie nach wie vor perspektiv zum Bund O mit p_0 liegen. Zusammenfassend gilt:

In den yz-Systemen und xyz-Systemen vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$ *liegen die Bildpunkte* P', P'' *eines Punktes* $P (P \notin [OX])$ *in Ordnern der*

projektiven Ordnerbünde O_1, O_2. Die Ordner in Π_i haben die Dimension $n = (r_j + z)$. Allen Ordnern ist Y gemein. (16)

3.2. Abbildung der Punkte aus [O X]. Die Punkte aus $[O\,X]$ werden nach [3], (2) durch ein Zweibildersystem $\mathfrak{S}^*$ mit Z_i^*, Π_i^* $(i = 1, 2)$ abgebildet, wobei $Z_i^* = Z_i$ und $\Pi_i^* = ([OX]\,\Pi_i)$ ist. Da $[OX]$ als Oberraum fungiert, setzen wir $\dim [OX] = 2n + x' - (r_1 + r_2 + y + z) = n^*$. Aus $\dim Z_i^* = n^* - r_i^* = n - r_i$ folgt $r_i^* = n + x' - (r_j + y + z)$ und $\dim \Pi_i^* = n + x' - (r_j + y + z + 1)$. Die Bedingung $\dim \Pi_i^* \geqq x'$ führt zu $n - 1 \geqq r_j + y + z$ und dies ist wegen (13) stets erfüllt.

$\mathfrak{S}^*$ kann kein y-System sein, da Y innerhalb $[OX]$ der kleinstmögliche Schnittraum von $O^* = O$ und $X^* = X$ ist. — Hätte Π_1 bezüglich Π_2 allgemeine Lage, so wäre $\dim X_a^* = r_1^* + r_2^* - (n^* + 2) = x' - (y + z + 2)$. Da nach Voraussetzung aber $\dim X^* = x'$ ist, muß $\mathfrak{S}^*$ ein x-System sein. — Bei allgemeiner Lage der Zentren wäre $\dim Z_a^* = n^* - (r_1^* + r_2^*) = y + z - x'$. Nach Voraussetzung ist $\dim Z^* = z$, daher gilt $\dim Z_a^* \leqq \dim Z^*$, je nachdem $y \leqq x'$ ist. $\mathfrak{S}^*$ ist also ein x-System, wenn $y = x'$ bzw. ein xz-System, wenn $y < x'$ ist.

a) **Es sei $y = x'$.** Dann ist $r_1^* + r_2^* = 2n - (r_1 + r_2 + 2z)$ und $n^* + 1 = 2n + 1 - (r_1 + r_2 + z)$, d. h. das x-System $\mathfrak{S}^*$ ist vom Typ $r_1^* + r_2^* < n^* + 1$. Unter Verwendung von [3], 3.4. bzw. [3], (17) findet man

Gilt in einem yz-System oder in einem xyz-System $y = x'$, so ist das x-System $\mathfrak{S}^*$ in $[OX]$ vom Typ $r_1^* + r_2^* < n^* + 1$. Der Urbildraum $[T_1\,T_2]$ eines Bildpaares P', P'' hat die Dimension $z + 2$, wobei die T_i $(i = 1, 2)$ in Z_i liegen, Z enthalten und die Dimension $z + 1$ haben. (17)

b) **Es sei $y < x'$.** Nach [3], 3.5. ist $z^* \gtreqless n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$, d. h. $x' - 1 \gtreqless y$ ausschlaggebend für den Typ des xz-Systems $\mathfrak{S}^*$ in $[OX]$. Für $x' - 1 < y$ gibt es nur die Möglichkeit $x' = y$; dieser Fall wurde schon unter a) behandelt. Es gilt somit

Unter der Voraussetzung $y = \dim X - 1$ werden im yz-System bzw. im xyz-System die Punkte aus $[OX]$ durch ein xz-System $\mathfrak{S}^*$ vom Typ $z^* = n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$ abgebildet. Ist dagegen $y < \dim X - 1$, so ist das xz-System $\mathfrak{S}^*$ vom Typ $z^* > n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$. (18)

Unter Verwendung der Ergebnisse [3], (27) und (32) über die Abbildung der Punkte aus O in x- bzw. in xz-Systemen erhält man:

Übersicht. (19)

<table>
<tr><th></th><th>$y < x' - 1$</th><th>$y = x' - 1$</th><th>$y = x'$</th></tr>
<tr><td>$P \notin [O\,X]$</td><td colspan="2">I a) yz-Systeme vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$,
II a) xyz-Systeme vom Typ $z > n + 1 - (r_1 + r_2)$,
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$ in Ordnern.
Ordnerschnitt $= (p_1'' \; p_2') = Y$.</td><td>II b) xyz-Systeme vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$, R_{z+1} durch $Z \to P', P''$, ohne Ordner.</td></tr>
<tr><td>$P \in [O\,X]$

$P \notin O$</td><td>xz-System in $[O\,X]$ v. Typ
$z^* > n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$.
R_{z+1} durch $Z \to P', P''$ in Ordnern.
dim $(p_1'' \; p_2') = y + 1$</td><td>xz-System in $[O\,X]$ vom Typ
$z^* = n^* + 1 - (r_1^* + r_2^*)$
R_{z+1} durch
$Z \to P', P''$, ohne Ordner.</td><td rowspan="2">für a) und b)
x-System in $[O\,X] = O$ vom Typ
$r_1^* + r_2^* < n^* + 1$.
$[T_1\,T_2] = R_{z+2} \to P', P''$</td></tr>
<tr><td>$P \in O$</td><td colspan="2">x-System in O vom Typ
$\bar{r}_1 + \bar{r}_2 < \bar{n} + 1$.
$[T_1\,T_2] = R_{z+2} \to P', P''$.</td></tr>
</table>

3.3. Beispiele.

1. Man kann sich leicht überzeugen, daß es im R_3 keine yz-Systeme gibt. Im R_4 findet man ein yz-System für $r_1 = r_2 = 3$ und $y = z = 0$. Die Zentren Z_1, Z_2 sind zwei einander schneidende Geraden, ihre Verbindungsebene O geht durch den Schnittpunkt X der Bildebenen Π_1, Π_2. Es ist also $X = Y$ und $O = [OX]$. Die Ordner sind Geraden, die Ordnerbüschel haben Y als gemeinsamen Träger. Da $[OX] = [T_1\,T_2]$ ist, haben die Punkte Q aus $[OX]$ dasselbe Bildpaar $Q' = Q'' = Y$.

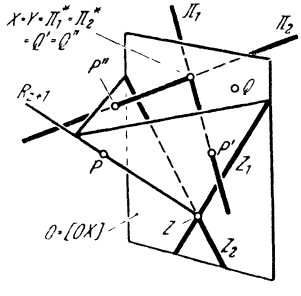

Abb. 4

2. Ein xyz-System vom Typ $z = n + 1 - (r_1 + r_2)$ erhält man im R_3 (Abb. 4), wenn man $r_1 = r_2 = 2$, $x = y = z = 0$ wählt. Die beiden P-Projektionen sind Kotierungen. Die Geraden Z_1, Z_2 haben den Punkt Z, die Geraden Π_1, Π_2 den Punkt X gemein. Die Ebene O geht durch den Punkt $X = Y$. In den Bildräumen treten keine Ordner auf. Für die Punkte Q aus O ist $Q' = Q'' = Y$.

4. Zusammenfassung der Zweibildersysteme

Die Untersuchungen in [3] und in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß die einzelnen Typen der Zweibildersysteme gewisse Ähnlichkeiten aufweisen, es soll hier daher versucht werden, die wesentlichen Eigenschaften aller Zweibildersysteme in einem einzigen Satz zusammenzufassen.

Voraussetzung: Im projektiven R_n sei ein aus zwei P-Projektionen zusammengesetztes Zweibildersystem gegeben. Die Zentren seien Z_1, Z_2 ($\dim Z_i = n - r_i$; *r_i ist eine natürliche Zahl, für die $2 \leqq r_i \leqq n$ gilt*; $i = 1, 2$), *die Bildräume seien Π_1, Π_2* (*mit* $\dim \Pi_i = r_i - 1$). *Wir bezeichnen mit Z den Schnittraum der Zentren* ($\dim Z = z \geqq -1$), *mit X den Schnittraum der Bildräume, mit O den Verbindungsraum der Zentren* ($\dim O \leqq n$), *mit O_i den Schnittraum von O mit Π_i und mit Y den Schnittraum von O mit X* ($\dim Y = y$). *P sei ein abzubildender Punkt des R_n, sein Bildpaar heiße P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$). Die Punkte aus Z_i seien von der Abbildung ausgeschlossen, da für sie $P^{(i)}$ unbestimmt ist.*

Unter dieser Voraussetzung gilt: (20)

a) *Hat ein Punkt P ($P \notin O$) das Bildpaar P', P'', so ist P', P'' auch Bildpaar der Punkte des Verbindungsraumes $[PZ] = R_{z+1}$.*

b) *Hat ein Punkt P aus O das Bildpaar P', P'' ($P^{(i)} \in O_i$), so ist P', P'' auch Bildpaar der Punkte eines R_{z+2}. Es ist $R_{z+2} = [T_1\, T_2]$ mit* $\dim T_i = z + 1$, *wobei T_i in Z_i liegt und Z enthält.*

c) *P', P'' ($P^{(i)} \in \Pi_i$, $P^{(i)} \notin O_i$) ist dann und nur dann Bildpaar eines R_n-Punktes P, wenn P' und P'' in entsprechenden Ordnern p_2', p_1'',* ($\dim p_j^{(i)} = n - (r_j + z)$) *der projektiven Ordnerbünde O_1, O_2* ($\dim O_i = n - (r_j + z + 1)$) *liegen.*

d) *Jedes Punktepaar P', P'', für das $P^{(i)} \in O_i$ gilt, ist Bildpaar eines Punktes aus O.*

e) *Je zwei entsprechende Ordner p_2', p_1'', die echte Teilräume ihrer Bildräume sind und in $[OX]$ liegen, schneiden sich in einem in X liegenden R_{y+1} des Bundes Y, liegen sie aber nicht in $[OX]$, so haben sie nur Y gemein.*

Anmerkungen

Zu a) Im Falle punktfremder Zentren ist $z = -1$ zu setzen. $\dim [PZ] = 0$ bedeutet dann, daß außer P kein weiterer Punkt das Bildpaar P', P'' hat.

Zu b) Ist $z = -1$, so sind die $[T_1\, T_2]$ die Treffgeraden von Z_1 und Z_2.

Zu c) $\dim p_j^{(i)} \geqq r_i - 1 = \dim \Pi_i$ bedeute, daß $P^{(i)}$ in Π_i frei wählbar ist. $\dim p_j^{(i)} = 0$ bedeutet, daß nach Vorgabe von $P^{(j)}$ der Punkt $P^{(i)}$ eindeutig in Π_i festgelegt ist.

Zu e) $p_j^{(i)} \in [OX]$ ist gleichbedeutend mit $p_j^{(i)} \in [O_i Y]$. — Ist y nicht vorgegeben, sondern berechnet man y ohne Rücksicht auf die Dimension des kleinsten Oberraumes von O und X aus der Formel

$$y = \dim O + \dim X - n,$$

so kann $y \gtreqless -1$ sein. $y = -1$ bedeutet dann, daß sich je zwei entsprechende und in $[OX]$ liegende Ordner in einem Punkt von X schneiden, während die übrigen Ordner punktfremd sind. Im Falle $y < -1$ sind je zwei entsprechende Ordner punktfremd.

Literatur

[1] *F. Hohenberg*, Projektionen projektiver Räume, Mh. Math. 61 (1957) S. 54—66.

[2] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. 1, Die linearen Abbildungen, bearbeitet von *E. Kruppa*, Deuticke, Leipzig und Wien, 1923.

[3] *J. Tschupik*, Über die Abbildung des projektiven R_n durch zwei Projektionen, Mh. Math. 63 (1959), S. 1—18.

On an Arithmetic Function

By

P. J. McCarthy*, Tallahassee, Florida

(Received August 9, 1958)

The function

$$F(a, m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, a^{m/d} \tag{1}$$

has been considered by several authors (for references to the older work, see pp. 84—86 of [4]) and recently by L. Carlitz [1], [2]. Here $\mu(d)$ is the Möbius function of d, and a and m are positive integers. A principal result is that for an arbitrary m,

$$F(a, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m). \tag{2}$$

Carlitz [1] has generalized the function (1) by setting

$$F(g, m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, g(m/d),$$

where $g(m)$ is an arbitrary arithmetic function, and he obtained a necessary and sufficient condition for a result analogous to (2) to hold in this case. It is the purpose of this note to point out that this result holds in a still more general setting.

Let $k \geqq 1$ be an integer and let $g(m)$ be an arithmetic function. We define

$$F_k(g, m) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, g(m/d^k).$$

We shall show that certain results of Carlitz generalize to this function.

In our arguments we shall make use of the following simple generalization of the Möbius inversion formula:

If $f(m)$ and $h(m)$ are arithmetic functions then

$$f(m) = \sum_{d^k \mid m} h(m/d^k) \tag{3}$$

if and only if

$$h(m) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, f(m/d^k). \tag{4}$$

---

* Florida State University.

To prove this, suppose (3) holds. Then we have

$$\sum_{d^k \mid m} \mu(d)\, f(m/d^k) = \sum_{d^k \mid m} \mu(d) \sum_{e^k \mid \frac{m}{d^k}} h(m/d^k e^k)$$

$$= \sum_{e^k \mid m} \sum_{d^k e^k \mid m} \mu(d)\, h(m/d^k e^k),$$

and if we group all the terms with $ed = t$, this is equal to

$$\sum_{t^k \mid m} \sum_{d \mid t} \mu(d)\, h(m/d^k e^k) = h(m).$$

Conversely, if (4) holds we have

$$\sum_{d^k \mid m} h(m/d^k) = \sum_{d^k \mid m} \sum_{e^k \mid \frac{m}{d^k}} \mu(e)\, f(m/d^k e^k)$$

$$= \sum_{t^k \mid m} \sum_{d \mid t} \mu(t/d)\, f(m/t^k) = f(m).$$

We can now prove that *the relation*

$$F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m) \tag{5}$$

holds for all positive integers m if and only if for all primes p and all positive integers e and t, with p not dividing t, we have

$$g(p^e t) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^e) \qquad \textit{when } k > e, \tag{6}$$

$$g(p^e t) \equiv g(p^{e-k} t) (\mathrm{mod}\ p^e) \qquad \textit{when } k \leqq e. \tag{7}$$

For, let p be a prime and e and n any positive integers with n prime to p. Set $m = p^e n$. Then

$$F_k(g, m) = \begin{cases} \sum_{d^k \mid n} \mu(d)\, g(p^e n/d^k) & \text{when } k > e, \\ \sum_{d^k \mid n} \mu(d)\, \{g(p^e n/d^k) - g(p^{e-k} n/d^k)\} & \text{when } k \leqq e. \end{cases}$$

Thus, if the conditions (6) and (7) are met we will have $F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^e)$. We can repeat this with each of the distinct primes dividing a given integer m and we will obtain the desired result. If we now apply the above inversion formula to our expressions for $F_k(g, m)$ we obtain

$$\sum_{d^k \mid n} F_k(g, p^e n/d^k) = \begin{cases} g(p^e n) & \text{when } k > e, \\ g(p^e n) - g(p^{e-k} n) & \text{when } k \leqq e, \end{cases}$$

and if we assume that (5) holds for $m = p^e$, then (6) and (7) must hold.

We now give an example of an arithmetic function which satisfies (6) and (7). Let $\sigma_k(m)$ be the sum of the k—*th* powers of all the positive divisors of m. Let p be a prime. If a is an integer we can write $a = rk + s$, where r and s are uniquely determined. Define

$$g(p^a) = p^s \sigma_k(p^r),$$

and extend this function to all integers m by requiring that it be multiplicative.

We can generalize another result of Carlitz [1] to the functions $F_k(g, m)$. *Let* $g(1) = 1$ *and assume that* $F_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ *for all positive integers* m. *Let* $w(m)$ *be another arithmetic function and set*

$$W_k(g, m) = \sum_{d^k \mid m} w(d)\, g(m/d^k).$$

Then $W_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ *for all positive integers* m *if and only if*

$$\sum_{d \mid m} w(d) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m^k) \tag{8}$$

for all positive integers m.

For, suppose (8) holds for all positive integers m. Then, by the inversion formula which we have proved, we have

$$\begin{aligned} W_k(g, m) &= \sum_{d^k \mid m} w(d) \sum_{e^k \mid \frac{m}{d^k}} F_k(g, m/d^k e^k) \\ &= \sum_{t^k \mid m} F_k(g, m/t^k) \sum_{d \mid t} w(d) \\ &\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m). \end{aligned}$$

Now assume that $W_k(g, m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$ for all positive integers m. We shall verify (8) by induction on m. It is certainly true when $m = 1$ and we now assume that it is true for all integers less than some fixed m. Then from the relation in the first part of the paragraph, with m replaced by m^k, we have

$$F_k(g, 1) \sum_{d \mid m} w(s) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m^k).$$

Since $F_k(g, 1) = g(1) = 1$, we see that (8) holds true for m.

An example of a function which satisfies (8), other than the Möbius function, is the function $\phi_k(m)$ studied by E. Cohen in [3] (see Theorem 1 of [3]). This function is equivalent to the Jordan function.

References

[1] *L. Carlitz*, An arithmetic function, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 43 (1937), pp. 271–276.

[2] *L. Carlitz*, Note on an arithmetic function, Amer. Math. Monthly, vol. 59 (1952), pp. 386–387.

[3] *E. Cohen*, Some totient functions, Duke Math. J., vol. 23 (1956), pp. 515 — 522.

[4] *L. E. Dickson*, History of the Theory of Numbers, vol. 1, Washington, 1919.

Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik

Von

Hans Robert Müller, Berlin

(Eingegangen am 5. September 1958)

In den technischen Anwendungen der Kinematik, insbesondere in der Getriebelehre bei der Herstellung von Kurvengetrieben und in der Verzahnungslehre bei der Ermittlung zusammengehöriger Zahnflanken spielen kinematisch erzeugte Hüllgebilde eine wichtige Rolle.

In der ebenen Kinematik kann unter Verwendung komplexer Zahlen das Aufsuchen von Hüllkurvenpaaren C, C' eines zwangläufigen Bewegungsvorgangs auf die Auflösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden. Man kann also sämtliche in Gang- bzw. Rastebene befestigten Hüllkurvenpaare explizit anschreiben. Hierbei führt man das Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit denen der augenblickliche gemeinsame Berührungspunkt X von C und C' bzw. diese Kurven durchläuft, als *Rollgleitzahl* λ ein und denkt sich diese Größe $\lambda = \lambda(t)$ als Funktion der Zeit t vorgegeben[1].

Im Gegensatz hierzu führt in der sphärischen Kinematik das Aufsuchen von Hüllkurvenpaaren zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in Vektorschreibweise, also eigentlich zu einem System von drei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, die mittels einer stereographischen Projektion und nachfolgendem Übergang zu Minimalkoordinaten in eine einzige *Riccati*'sche Differentialgleichung und deren Konjugierte transformiert werden kann. Eine vollständige Integration und damit explizite Darstellung sämtlicher Hüllkurvenpaare ist daher für die eingliedrigen Bewegungsvorgänge auf der Kugel im allgemeinen nicht möglich. In Sonderfällen kann

[1] *H. R. Müller*, Zur Kinematik des Rollgleitens. Arch. der Math. **4**, 239–246 (1953).

jedoch etwa durch Angabe spezieller Lösungen die Integration vollständig durchgeführt werden, wie z. B. bei konstanter Rollgleitzahl λ für das sphärische Verzahnungsproblem (Kegelräder)[2].

Im folgenden wird nun in ähnlicher Weise, wie in der Ebene und auf der Kugel, für einen räumlichen zwangläufigen Bewegungsvorgang das Problem des Aufsuchens zusammengehöriger Hüllflächenpaare behandelt und das hierbei auftretende System von partiellen Differentialgleichungen untersucht.

Zwecks Festlegung eines eingliedrigen oder zwangläufigen Bewegungsvorgangs im Raum denken wir uns das bewegliche System (Gangraum) durch ein rechtwinkeliges Dreibein $\{O; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\}$ von Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_j$ dargestellt. Ein ebensolches Dreibein $\{O'; \mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2' \mathfrak{e}_3'\}$ repräsentiere den Rastraum, werde also als fest angenommen. Der Zusammenhang zwischen den Vektoren $\mathfrak{e}_j$ und $\mathfrak{e}_j'$ ist dann durch eine lineare Transformation

$$\mathfrak{e}_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\, \mathfrak{e}_k' \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

mit eigentlich orthogonaler Matrix $\| a_{jk} \|$ gegeben, die der Drehung der beiden Achsenkreuze gegen einander entspricht. Die Scheitelpunkte O, O' der beiden Dreibeine sind durch den Vektor

$$\overrightarrow{O'O} = \mathfrak{u} = \mathfrak{e}_1 u_1 + \mathfrak{e}_2 u_2 + \mathfrak{e}_3 u_3 \tag{2}$$

verbunden. Sind die a_{jk} und u_j genügend oft stetig differentierbare Funktionen eines reellen Parameters t (Zeit) mit gemeinsamem Definitionsbereich, so wird durch die gegenseitigen Lagen von $\{O; \mathfrak{e}_j\}$ und $\{O'; \mathfrak{e}_j'\}$ ein einparametriger Bewegungsvorgang im Raum bestimmt.

Für den Drehbestandteil unseres Bewegungsvorgangs finden wir wegen

$$\mathfrak{e}_j\, \mathfrak{e}_k = \delta_{jk} \tag{3}$$

ein schiefsymmetrisches System von Ableitungsgleichungen

$$\frac{d\,\mathfrak{e}_i}{dt} = \dot{\mathfrak{e}}_i = \mathfrak{e}_j\, \omega_k - \mathfrak{e}_k\, \omega_j \tag{4}$$

mit zyklischen Anordnungen i, j, k der Zahlen 1, 2, 3. Nach Einführung des Vektors (Drehvektor)

$$\omega = \mathfrak{e}_1 \omega_1 + \mathfrak{e}_2 \omega_2 + \mathfrak{e}_3 \omega_3 \tag{5}$$

[2] *H. R. Müller*, Zur Kinematik des Rollgleitens, II (Sphärisches Rollgleiten). Arch. der Math. 6, 471–480 (1955).

kann statt (4) auch kurz das Vektorprodukt

$$\dot{e}_j = \omega \times e_j \tag{6}$$

geschrieben werden. Der Schiebbestandteil des Bewegungsvorgangs wird durch die Ableitung von (2) zum Ausdruck gebracht:

$$\dot{u} = \overline{\omega} = e_1 \overline{\omega}_1 + e_2 \overline{\omega}_2 + e_3 \overline{\omega}_3. \tag{7}$$

Die sechs Funktionen $\omega_j, \overline{\omega}_j$ kennzeichnen unseren Bewegungsvorgang im Kleinen, sie bestimmen die Momentanschraube $\{\omega, \overline{\omega}\}$. Hierbei gibt der Vektor ω die Richtung der Achse an und bedeutet $\overline{\omega}$ deren Momentvektor bezüglich des Ursprunges O. Der Bewegungsvorgang ist im Augenblick eine infinitesimale Schraubung um die Achse mit dem Parameter

$$k = \frac{\omega\,\overline{\omega}}{\omega^2}$$

Zu einem Punkte X des Raumes gehören die Vektoren

$$\overrightarrow{OX} = \mathfrak{x} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3, \tag{8}$$

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = \mathfrak{u} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}'. \tag{9}$$

Durch Ableitung nach der Zeit t finden wir daraus wegen (6) und (7) den Vektor der Relativgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \dot{\mathfrak{x}} = e_1 \dot{x}_1 + e_2 \dot{x}_2 + e_3 \dot{x}_3, \tag{10}$$

sowie den Vektor der Absolutgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(A)} = \overline{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{x}_{(R)}. \tag{11}$$

Letztere Formel beinhaltet das Gesetz

$$\mathfrak{x}_{(A)} = \mathfrak{x}_{(F)} + \mathfrak{x}_{(R)} \tag{12}$$

von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, da

$$\mathfrak{x}_{(F)} = \overline{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) \tag{13}$$

die (vektorielle) Führungsgeschwindigkeit des Punktes X darstellt, also die Geschwindigkeit jenes im Gangsystem festen Punktes, der zum betrachteten Zeitpunkt sich mit X deckt.

Um nun Paare von zusammengehörigen Hüllflächen zu finden, denken wir uns im Gangraum eine Fläche Φ angebracht. Bei unserem Bewegungsvorgang hüllt sie bei entsprechenden Voraussetzungen über ihre Glätte, stetige Krümmung usf. im allgemeinen eine Fläche Φ' des Rastraumes ein, und zwar erfolgt die Berührung zu jedem Zeitpunkt t

im allgemeinen längs einer Kurve $K(t)$, die auch als Charakteristik bezeichnet wird. Von einer Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, u) \tag{14}$$

dieser Kurve $K(t)$ im Gangsystem gehen wir nun aus. Bei Variieren von u allein, durchläuft also der Punkt X diese Kurve. Ändern sich beide Parameter t und u, so liefert (14) eine Parameterdarstellung der Ausgangsfläche Φ. Die Hüllfläche Φ' wird im festen System dann durch (9) erfaßt. Hält man hingegen u fest, so beschreibt der Punkt X auf Φ bzw. auf Φ' je eine Bahnkurve, die wir mit C bzw. C' bezeichnen wollen. Hierbei stellt die Relativgeschwindigkeit

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \mathfrak{x}_t = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \tag{15}$$

auch die Geschwindigkeit des Punktes X gegenüber der Fläche Φ, also die Geschwindigkeit, mit der C von X durchlaufen wird, dar. Entsprechend wird C' mit der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{x}_{(A)}$, also der Geschwindigkeit von X gegenüber Φ' beschrieben. Schließlich bedeutet

$$\mathfrak{x}_u = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$$

den Tangentenvektor an die Charakteristik K im Punkte X. Die drei Vektoren $\mathfrak{x}_{(R)}$, $\mathfrak{x}_{(A)}$ und $\mathfrak{x}_u$ liegen nun in einer gemeinsamen Tangentialebene der beiden Flächen Φ, Φ'. Es besteht somit eine Beziehung der Art

$$\mathfrak{x}_{(R)} = \lambda . \mathfrak{x}_{(A)} + \mu . \mathfrak{x}_u \tag{16}$$

mit skalaren Funktionen $\lambda = \lambda(t, u)$, $\mu = \mu(t, u)$, die im allgemeinen nicht ständig verschwinden und der Rollgleitzahl der ebenen und sphärischen Kinematik entsprechen. Führen wir nun nach (11), (12) und (15) die Werte für Relativ- und Absolutgeschwindigkeiten ein, so gelangen wir zu

$$P . \mathfrak{x}_t + Q . \mathfrak{x}_u = \bar{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}) \tag{17}$$

mit den Abkürzungen

$$P = \frac{1 - \lambda}{\lambda}, \; Q = -\frac{\mu}{\lambda}. \tag{18}$$

Die Bedingung (17) stellt nun eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in Vektorschreibweise zur Bestimmung von Hüllflächenpaaren Φ, Φ' dar, wenn wir uns λ und μ und damit auch P und Q als Funktionen von t und u vorgegeben denken. Ausführlich geschrieben stellt (17) natürlich wiederum ein System von drei solchen partiellen Differentialgleichungen dar.

Mit der Lösung des Systems (17) verbinden wir das zugehörige *homogene Problem*, nämlich die Differentialgleichung

$$P.\mathfrak{x}_t + Q.\mathfrak{x}_u = \omega \times \mathfrak{x} \tag{19}$$

zu lösen. Der Vergleich mit der sphärischen Kinematik ergibt[2], daß wir dort eine ähnlich gebaute gewöhnliche Differentialgleichung, jedoch mit der wesentlichen Einschränkung

$$\mathfrak{x}^2 = \text{konst.}$$

zu behandeln hatten. Wir müssen daher danach trachten, die dort geübte Transformation geeignet zu modifizieren.

Aus (19) folgt unmittelbar durch skalare Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{x}$

$$P.(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_t) + Q.(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_u) = 0. \tag{20}$$

Führt man für den Betrag des Vektors $\mathfrak{x}$ die Bezeichnung

$$X = X(t, u) = \sqrt{\mathfrak{x}^2} \tag{21}$$

ein, dann kann statt (20) auch

$$P.X_t + Q.X_u = 0 \tag{22}$$

geschrieben werden. In bekannter Weise suchen wir die zugehörigen Charakteristiken dieser einfachen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dt : du = P : Q,\ d\,X = 0. \tag{23}$$

Ihre allgemeinen Lösungen seien

$$\Phi(t, u) = C_1 = \text{konst.},\ X = C_2 = \text{konst.} \tag{24}$$

Die allgemeine Lösung von (22) hat dann die Gestalt

$$C_2 = \Psi(C_1)$$

oder

$$X = \Psi(\Phi(t, u)), \tag{25}$$

wobei Ψ eine willkürliche Funktion ihres Argumentes ist.

Unter Verwendung dieser Lösung X von (22) führen wir nun folgende Transformation ein[3]:

[3] Man kann diese Transformation geometrisch deuten und sich hierzu in drei Schritten durchgeführt denken: a) Die Punkte des Raumes werden aus dem Ursprung des Koordinatensystems auf die Einheitskugel um diesen Punkt projiziert. b) Die so erhaltenen Kugelpunkte werden durch stereographische Projektion aus dem Zentrum (0, 0, 1) auf die Punkte der Ebene $x_3 = 0$ abgebildet. c) In dieser Ebene werden die cartesischen Koordinaten zu Minimalkoordinaten zusammengefaßt. ξ und η sind diese Minimalkoordinaten.

$$\xi = \frac{x_1 + i\,x_2}{X - x_3}, \quad \eta = \frac{x_1 - i\,x_2}{X - x_3}. \tag{26}$$

Umgekehrt hängen die neuen Veränderlichen ξ, η, X mit den auf das Gangsystem bezogenen cartesischen Koordinaten so zusammen:

$$x_1 = \frac{\xi + \eta}{\xi\eta + 1} \cdot X, \quad x_2 = -\,i\frac{\xi - \eta}{\xi\eta + 1} \cdot X, \quad x_3 = \frac{\xi\eta - 1}{\xi\eta + 1} \cdot X. \tag{27}$$

Die Umrechnung der Differentialgleichung (19) auf die neuen Veränderlichen kann etwa dadurch vorgenommen werden, daß man erst die partiellen Ableitungen von (26) nach t und u berechnet und dann die Ausdrücke $P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u$ bzw. $P \,.\, \eta_t + Q \,.\, \eta_u$ bildet. Wegen (19), (22), (27) findet man schließlich die beiden konjugierten Differentialgleichungen

$$P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u = -\frac{\omega_2 + i\,\omega_1}{2} \cdot \xi^2 + i\,\omega_3\,\xi - \frac{\omega_2 - i\,\omega_1}{2}, \tag{28}$$

$$P \,.\, \eta_t + Q \,.\, \eta_u = -\frac{\omega_2 - i\,\omega_1}{2} \cdot \eta^2 - i\,\omega_3\,\eta - \frac{\omega_2 + i\,\omega_1}{2}. \tag{29}$$

Man hat somit das homogene System (19) von drei partiellen Differentialgleichungen, das wir in (19) nur vektoriell geschrieben hatten, nach Lösung von (22) im wesentlichen auf eine einzige partielle Differentialgleichung zurückgeführt, die als Verallgemeinerung der gewöhnlichen *Riccati*schen Differentialgleichung anzusprechen ist. Wir schreiben diese partielle Differentialgleichung kurz in der Form

$$P \,.\, \xi_t + Q \,.\, \xi_u = R(t, \xi), \tag{30}$$

bezeichnen also die rechte Seite von (28) mit $R = R(t, \xi)$. Bei Bestimmung ihrer Charakteristiken aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$dt : du : d\xi = P : Q : R \tag{31}$$

stößt man im allgemeinen auf eine gewöhnliche *Riccati*sche Gleichung, sowie die schon früher behandelte Gleichung (23).

Damit ist in gewisser Hinsicht der Schwierigkeitsgrad unserer Aufgabe gekennzeichnet: Eine allgemeine Integration bereits des homogenen Problems ist im allgemeinen nicht möglich, auch wenn die Gleichung (23) elementar integrierbar sein sollte. Es muß daher unser Bestreben sein, im Einzelfalle dieser *Riccati*schen Differentialgleichung etwa durch

Aufsuchen spezieller Lösungen oder durch Überführung in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von vielleicht wohl bekanntem Typus beizukommen.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (17) kann nun als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (19) dargestellt werden. Man wird daher trachten, nach Erledigung des homogenen Problems mit Hilfe von unbestimmten Ansätzen oder dgl. eine solche spezielle Lösung von (17) zu finden.

Können jedoch drei unabhängige spezielle Lösungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ des homogenen Problems angegeben werden, so ist auch eine Behandlung des inhomogenen Problems nach der Methode der „Variation der Konstanten" möglich: Diese Lösungen $\mathfrak{x}_j$ müssen also (19) oder

$$P \cdot \mathfrak{x}_{jt} + Q \cdot \mathfrak{x}_{ju} = \omega \times \mathfrak{x}_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{32}$$

erfüllen und einem Hauptsystem entsprechen, d. h. es darf ihre Determinante nicht verschwinden:

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \neq 0. \tag{33}$$

In den Veränderlichen ξ, η, X lautet wegen (26), (27) diese Bedingung

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \xi_1 \eta_1 - 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \xi_2 \eta_2 - 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & \xi_3 \eta_3 - 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{34}$$

Mit dem Ansatz

$$\mathfrak{x} = C_1 \mathfrak{x}_1 + C_2 \mathfrak{x}_2 + C_3 \mathfrak{x}_3 \tag{35}$$

geht man nun in die inhomogene Gleichung (17) ein und gelangt wegen (32) auf das lineare Gleichungssystem (drei lineare inhomogene Gleichungen):

$$\sum_{j=1}^{3} (P C_{jt} + Q C_{ju}) \mathfrak{x}_j = \overline{\omega}. \tag{36}$$

Zufolge (33) kann man nun daraus die Ausdrücke

$$P C_{jt} + Q C_{ju} = F_j(t, u) \tag{37}$$

berechnen und gelangt so wiederum zu drei linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die „variierten Konstanten" C_j. Die zugehörigen Charakteristiken sind durch

$$dt : du : dC_j = P : Q : F_j \tag{38}$$

bestimmt. Hierbei ist natürlich die Lösung des ersten Teiles dieser

fortlaufenden Proportion schon von früher her bekannt. (Vgl. (23), (24)). Die Ausdrücke für die allgemeinen Integrale der C_j liefern, in (35) eingesetzt, das allgemeine Integral des inhomogenen Problems und damit die Hüllflächen unseres Bewegungsvorgangs im Gangraum.

Ist im besonderen ständig

$$Q = O \text{ für } \lambda \neq O,\ \mu = O$$

und damit naturgemäß wegen (16) die Größe λ nur eine Funktion von t allein, so erhalten wir zwei Kurven C, C', die sich bei unserem Bewegungsvorgang einhüllen: Es sind dies die sogenannten *Gleitkurven* oder *assoziierte Kurven*, die bereits von *G. Koenigs* betrachtet wurden[4]. Diese Kurven sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\mathfrak{x}} = L(\bar{\omega} + (\omega \times \mathfrak{x}))$$

mit

$$L = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Ihre Darstellung kann in obiger Weise auf Quadraturen zurückgeführt werden, wenn die *Riccati*sche Differentialgleichung des homogenen Problems gelöst ist, d. h. drei unabhängige Integrale auffindbar sind.

Als einfaches Beispiel bietet sich die Behandlung der *Hypoidgetriebe* an. Die auf einander schrotenden Achsenflächen sind zwei einschalige Drehhyperboloide; bei geeigneter Wahl von Gang- und Rastkreuz besitzen sie die Gleichungen[5]

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\alpha'}\right)^2 - \left(\frac{z'}{\beta'}\right)^2 = 1$$

und nimmt das System (17) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} P\,x_t + Q\,x_u &= \bar{a}\cos nt + a\,z\sin nt - b\,y, \\ P\,y_t + Q\,y_u &= \bar{a}\sin nt + b\,x - a\,z\cos nt, \\ P\,z_t + Q\,z_u &= \bar{b} + a\,y\cos nt - a\,x\sin nt. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Hierbei wurde gesetzt:

---

[4] *G. Koenigs*, Mémoire sur les courbures conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides (1910). Veröffentlicht in den Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sc. 35, 2e sér., Paris, 1914, n° 1, 1–215.

[5] Wir schreiben zur Abkürzung: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ usf.

$$a = n' \sin(\varrho - \varrho'),\ b = n' \cos(\varrho - \varrho') - n,$$

$$\bar{a} = n'(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}') \cos(\varrho - \varrho'),\ \bar{b} = -n'(\bar{\varrho} - \bar{\varrho}') \sin(\varrho - \varrho')$$

und gilt

$$\alpha = \bar{\varrho},\ \alpha' = \bar{\varrho}',\ \beta = \beta' = \bar{\varrho} \operatorname{ctg} \varrho = \bar{\varrho}' \operatorname{ctg} \varrho',$$

sowie

$$n \sin \varrho = n' \sin \varrho'.$$

Soll der so erklärte Bewegungsvorgang *geschlossen* sein, müssen überdies n, n' ganzzahlig und relativ prim sein[6].

Das homogene Problem führt gemäß (28) auf die partielle Differentialgleichung:

$$P \xi_t + Q \xi_u = -i \frac{a}{2} e^{-int} \xi^2 + i b \xi + i \frac{a}{2} e^{int} = R. \tag{40}$$

Für den Fall, daß P und Q *konstant* sind, nimmt (24) die einfache Form

$$Q t - P u = C_1 \tag{41}$$

an und kann die gewöhnliche *Riccati*sche Differentialgleichung durch Angabe einer speziellen Lösung vollständig integriert werden[7]. Ein anderer Integrationsweg wird durch Zurückführung der *Riccati*schen Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben. Man gelangt nämlich dann zu einer solchen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Als Lösung finden wir schließlich

$$\xi = \frac{1 + k W e^{i(n+p)t}}{-k + W e^{i(n+p)t}} \cdot e^{int}, \tag{42}$$

worin

$$W = W(Qt - Pu) \tag{43}$$

eine willkürliche Funktion von $Qt - Pu$ ist, k eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$a k^2 + 2(nP - b) k - a = 0 \tag{44}$$

bedeutet und zur Abkürzung

$$p = \frac{1}{P}(ak - b) \tag{45}$$

gesetzt wurde.

Mit einer weiteren willkürlichen Funktion

---

[6] Vgl. hierzu auch *H. R. Müller*, Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Mh. Mathem. **55**, 206—214 (1951).

[7] Vgl. die in Fußnote [2] genannte Arbeit.

$$X = \Psi(Qt - Pu) \tag{46}$$

des Argumentes $Qt - Pu$ ergibt sich schließlich nach (27) die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2k(W^2-1)\cos nt + 2W\cos pt - 2W\,k^2\cos(2n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)}\cdot\Psi, \\ y &= \frac{2k(W^2-1)\sin nt - 2W\sin pt - 2W\,k^2\sin(2n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)}\cdot\Psi, \\ z &= \frac{(W^2-1)\,(k^2-1) + 4W\,k\cos(n+p)\,t}{(W^2+1)\,(k^2+1)}\cdot\Psi. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Für $W = 0$ und $W = 1$, sowie $\Psi = 1$ ergeben sich daraus zwei spezielle Lösungen, die wir mit $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ bezeichnen wollen. Das allgemeine Integral (47) kann dann auch in der Form

$$\mathfrak{x} = [(1-W^2)\,\mathfrak{x}_0 + 2W\,\mathfrak{x}_1]\frac{\Psi}{1+W^2} = [\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1\,sh\,U]\cdot\frac{\Psi}{ch\,U} \tag{48}$$

mit

$$W = th\frac{U}{2} \tag{49}$$

geschrieben werden. Daraus entnehmen wir, daß sich in diesem Beispiel keine drei unabhängigen Lösungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ mit

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \neq 0$$

angeben lassen, also die Methode der Variation der Konstanten zur Behandlung des inhomogenen Systems (39) nicht anwendbar ist.

Man kann jedoch leicht ein spezielles Integral von (39) mittels des Ansatzes

$$\left.\begin{aligned} x &= \;\; L\sin nt + M\,u\cos nt, \\ y &= -L\cos nt + M\,u\sin nt, \\ z &= \;\; N\,u \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

finden und die Konstanten L, M, N durch Einsetzen in (39) ermitteln, d. h. durch a, $\bar{a}$ usf. ausdrücken. Diese spezielle Lösung ist ein einschaliges Drehhyperboloid mit der Gleichung

$$N^2(x^2 + y^2) - M^2 z^2 = L^2 N^2.$$

Die Summe von (47) und (50) stellt nun das allgemeine Integral des Systems (39), also sämtliche Flanken von Hypoidgetrieben bei konstanten Größen P und Q dar.

Remarks on an Existence Theorem in Matrix Theory Due to A. Horn

By

L. Mirsky, Sheffield

(Received September 11, 1958)

1. In an interesting paper [2] published a few years ago, *A. Horn* solved the following two problems.

(A) To determine necessary and sufficient conditions for the existence of a matrix with prescribed characteristic roots and singular values.

(B) To determine necessary and sufficient conditions for the existence of a positive definite hermitian matrix with prescribed characteristic roots and prescribed values for a chain of principal minors.

In *Horn*'s treatment, the discussion of (B) was based on that of (A). Since, however, the solution of (A) was relatively hard, it may be of some interest to make (B) independent of (A) by exhibiting its solution as an almost immediate consequence of two simple lemmas recently proved by me [3] in connection with another existence problem.

2. Our notation is as follows. If $x_1, \ldots, x_n$ are any real numbers, then $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ denote these numbers arranged in non-ascending order of magnitude. If the sets of numbers $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ satisfy the relations

$$\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_k \begin{cases} \leqslant \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (k = n), \end{cases}$$

we shall write

$$(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n).$$

We shall say that the numbers $z_1, \ldots, z_{n-1}$ *separate* $x_1, \ldots, x_n$ if

$$\bar{x}_1 \geqslant \bar{z}_1 \geqslant \bar{x}_2 \geqslant \bar{z}_2 \geqslant \ldots \geqslant \bar{z}_{n-1} \geqslant \bar{x}_n.$$

The transpose of A will be denoted by A^T, and the transposed conjugate by A^*. The *singular values* of a square matrix A are defined as the non-negative square roots of the characteristic roots of $A^* A$. The $k \times k$

submatrix standing in the upper left-hand corner of A will be denoted by $[A]_k$.

3. Two preliminary results will be needed.

LEMMA 1. *If* $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$, *then there exist numbers* $c_1, \ldots, c_{n-1}$ *which separate* $b_1, \ldots, b_n$ *and satisfy the relation*

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) < (c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

This is a very slight generalization of [3, Lemma 1], and only trifling changes have to be made in the proof.

LEMMA 2. *Let* A *be a real symmetric* $(n-1) \times (n-1)$ *matrix with characteristic roots* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. *If* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ *separate the numbers* $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *then, by bordering* A *with an additional row and column, we can obtain a real symmetric* $n \times n$ *matrix with characteristic roots* $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

This result is an obvious consequence of [3, Lemma 2]. An independent proof of essentially the same statement has also been given by *Fan* and *Pall* [1, § 2].

4. We are now able to discuss the solution of problem (B).

THEOREM. (i) *Let* H *be a positive definite hermitian matrix. If* $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ *are its characteristic roots and if the (positive) numbers* $r_1, \ldots, r_n$ *are defined by the equations*

$$r_1 \ldots r_k = \det [H]_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{1}$$

then

$$\bar{r}_1 \ldots \bar{r}_k \begin{cases} \leqslant \omega_1 \ldots \omega_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \omega_1 \ldots \omega_k & (k = n). \end{cases} \tag{2}$$

(ii) *Conversely, if* $\omega_1 \ldots, \omega_n$, $r_1, \ldots, r_n$ *are given positive numbers such that* $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ *and* (2) *holds, then there exists a (positive definite) hermitian (and, indeed, a real symmetric) matrix* H, *with characteristic roots* $\omega_1, \ldots, \omega_n$, *which satisfies* (1).

Horn's proof of (i) depends on *Weyl*'s inequalities for characteristic roots and singular values [4, equation (4)] and only occupies a few lines. It remains to consider (ii).

For $n = 1$ the assertion is true trivially. Assume that it holds for $n - 1$; and let $\omega_1, \ldots, \omega_n$, $r_1, \ldots, r_n$ be given positive numbers such that $\omega_1 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$ and (2) is satisfied, i.e.

$$(\log r_1, \ldots, \log r_n) < (\log \omega_1, \ldots, \log \omega_n).$$

Hence, by Lemma 1, there exist numbers $c_1, \ldots, c_{n-1}$ which separate $\log \omega_1, \ldots, \log \omega_n$ and satisfy

$$(\log r_1, \ldots, \log r_{n-1}) < (c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Putting $\alpha_k = \exp c_k$ $(1 \leqslant k < n)$, we see that $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ separate $\omega_1, \ldots, \omega_n$ and that

$$(\log r_1, \ldots, \log r_{n-1}) < (\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_{n-1}). \tag{3}$$

By the induction hypothesis and (3), we now infer the existence of a real symmetric $(n-1) \times (n-1)$ matrix A with characteristic roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ and such that

$$r_1 \ldots r_k = \det [A]_k \qquad (1 \leqslant k < n).$$

By Lemma 2, we can add a row and a column to A in such a way as to obtain a real symmetric $n \times n$ matrix H with characteristic roots $\omega_1, \ldots, \omega_n$. This matrix clearly meets our requirements.

5. In conclusion we observe that, once problem (B) has been solved, the solution of (A) is easy. This is already implicit in *Horn*'s paper, and we repeat the essential step in his argument for the convenience of the reader. We shall, in fact, show that *if* $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ *and* $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ *are positive real numbers such that*

$$\lambda_1 \ldots \lambda_k \begin{cases} \leqslant \mu_1 \ldots \mu_k & (1 \leqslant k < n) \\ = \mu_1 \ldots \mu_k & (k = n), \end{cases}$$

then there exists a matrix with characteristic roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *and singular values* $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Now, by the theorem just proved, there exists a real symmetric matrix H with characteristic roots $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ and such that

$$\lambda_1^2 \ldots \lambda_k^2 = \det [H]_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Since H is positive definite, there exists an upper triangular matrix P with positive diagonal elements and such that $H = P^T P$. It is now easily verified that the diagonal elements of P must be $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; and it therefore follows that P has the requisite properties.

References

1. *K. Fan* and *G. Pall*, Imbedding conditions for hermitian and normal matrices. Canad. J. Math. **9**, 298–304 (1957).

2. *A. Horn*, On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 4–7 (1954).

3. *L. Mirsky*, Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. J. London Math. Soc. **33**, 14–21 (1958).

4. *H. Weyl*, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 408–411 (1949).

The University, Sheffield.

Sur les ensembles indépendants dans la théorie des relations

Par

Solomon Marcus, Bucarest

(Reçu le 19 septembre 1958)

1. Soit E un ensemble et supposons qu'on a défini une relation qui associe à chaque élément x de E un sous-ensemble $S(x)$ de E, tel que $x \notin S(x)$. Deux éléments distincts de E, x et y, sont dits *indépendants*, si $x \notin S(y)$ et $y \notin S(x)$. Un sous-ensemble F de E est dit *indépendant* si possède un seul élément ou si F possède au moins deux éléments et deux éléments arbitraires de F sont indépendants.

En 1935 *P. Turán* a fait l'hypothèse suivante: Si E est l'ensemble de tous les nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, l'ensemble $S(x)$ est fini, alors il existe un ensemble indépendant et infini. Par une voie élémentaire, *G. Grünwald* a démontré en 1937 que l'hypothèse de *P. Turán* est vraie. L'ensemble indépendant construit par *G. Grünwald* est dénombrable [9]. Mais déjà en 1936 *D. Lázár* a démontré que, dans les conditions de *P. Turán*, il existe un ensemble indépendant ayant la puissance du continu [12].

En 1950, *G. Fodor* a généralisé le résultat de *D. Lázár*, en démontrant que si E est l'ensemble des nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, on a $x \notin \overline{S(x)}$, alors il existe un ensemble indépendant ayant la puissance du continu [6]. En 1951 *G. Fodor* démontre que, dans les mêmes hypothèses que ci-dessus, il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive [7]. Si, en outre, la fonction $f(x) =$ distance de x à $S(x)$ est mesurable et positive, alors il existe un ensemble indépendant mesurable et de mesure positive [6]. Mais il est possible qu'il n'existe aucun ensemble indépendant de mesure positive [8].

En 1956, *F. Bagemihl* a obtenu les analogues descriptifs (en termes de la catégorie de *Baire*) de certains des résultats de *G. Fodor*. Il a démontré, par exemple, que si E est l'ensemble des nombres réels et si pour chaque $x \in E$ on a $x \notin \overline{S(x)}$, alors il existe un ensemble indépendant

de deuxième catégorie mais il est possible qu'il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle [1].

Enfin, en 1956 et 1957, *P. Erdös* et *G. Fodor* ont donné des vastes généralisations et certaines améliorations des résultats ci-dessus ([3], [4]). Nous citons le résultat suivant, qui représente la réponse la plus complète au problème posé par *P. Turán*: Si E est l'ensemble des nombres réels et si, pour chaque $x \in E$, l'ensemble $S(x)$ est fini, alors il existe un ensemble indépendant de deuxième catégorie dans chaque intervalle et dont l'intersection avec chaque intervalle est de mesure extérieure égale à la longueur de cet intervalle.

Dans ce qui suit, nous nous proposons, d'une part, d'obtenir par un procédé uniforme certains des résultats ci-dessus, d'autre part d'apporter quelques améliorations et d'ajouter quelques résultats et remarques concernant la structure des ensembles indépendants lorsque on connaît celle des ensembles $S(x)$.

2. Si, pour chaque $x \in E$, on a $x \notin \overline{S(x)}$, alors, d'après les résultats cités ci-dessus, il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive et un ensemble indépendant de deuxième catégorie. Si, en outre, la distance de x à $S(x)$ est une fonction mesurable, alors il existe un ensemble indépendant mesurable et de mesure positive. Chacun de ces théorèmes est démontré par l'auteur respectif par une autre voie. Mais on peut, par un raisonnement *uniforme*, obtenir tous ces trois théorèmes et aussi un autre, à savoir l'analogue descriptif du théorème de *G. Fodor* de [6]. En effet, soit A_n l'ensemble des points x tels que $f(x)$ ($f(x)$ désignera toujours la distance de x à $S(x)$) soit supérieure à $\frac{1}{n}$. Puisque $f(x)$ est toujours positive, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ (E désignera toujours, dans ce travail, l'ensemble des nombres réels). Il existe donc un p tel que A_p soit de deuxième catégorie et un r tel que A_r soit de mesure extérieure positive. Mais alors il existe un intervalle I_p, de longueur inférieure à $\frac{1}{p}$, où A_p est de deuxième catégorie et un intervalle I_r, de longueur inférieure à $\frac{1}{r}$, où A_r est de mesure extérieure positive. Il est aisé de voir que les ensembles $A_p \cap I_p$ et $A_r \cap I_r$ sont indépendants.

Supposons maintenant que $f(x)$ est mesurable (resp. jouit de la propriété de *Baire*). En ce cas A_r (resp. A_p) est mesurable (resp. jouit

de la propriété de *Baire*), donc $A_r \cap J_r$ est un ensemble indépendant de mesure positive (resp. I_p contient un intervalle J_p tel que $A_p \cap J_p$ soit un ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de *Baire*).

Comme application du raisonnement ci-dessus, on peut retrouver le théorème de *Lázár* et *Fodor* sur l'existence d'un ensemble indépendant ayant la puissance du continu. Il suffit pour cela de remarquer que, en vertu du théorème de *König* de la théorie des ensembles, il existe un s tel que A_s ait la puissance du continu et il existe un intervalle I_s de longueur inférieure à $\frac{1}{s}$, tel que $A_s \cap I_s$ ait aussi la puissance du continu. (On choisit pour I_s un intervalle qui contient un point de condensation de A_s). L'ensemble $A_s \cap I_s$ est indépendant.

3. D'après les résultats de *Fodor* et *Bagemihl* ([8], [1]), il est possible que, pour chaque $x \in E$, $S(x)$ soit formé d'un seul élément au plus, sans qu'existe un ensemble indépendant de mesure positive ou qui soit un résiduel dans un certain intervalle. On peut obtenir un théorème qui contient comme cas particuliers les résultats de *Fodor* et *Bagemihl*, à savoir nous donnons *un exemple où $S(x)$ est formé d'un seul élément au plus et tel qu'il n'existe aucun ensemble parfait et indépendant.* En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu. Rangeons tous les ensembles parfaits de la droite dans une suite du type Ω_0:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots (\xi < \Omega_0).$$

Soit π_1 et ϱ_1 deux éléments distincts de P_1. Supposons qu'on a choisi dans chaque P_α, pour $\alpha < \xi$, deux éléments π_α et ϱ_α distincts de tous les éléments choisis dans les ensembles $P_\beta (1 \leqslant \beta < \alpha)$. Puisque l'ensemble

$$A_\xi = \{\pi_1, \varrho_1, \pi_2, \varrho_2, \ldots, \pi_\alpha, \varrho_\alpha, \ldots\} \qquad (1 \leqslant \alpha < \xi)$$

est de puissance inférieure à celle du continu, on peut choisir dans P_ξ deux éléments π_ξ et ϱ_ξ qui n'appartiennent pas à A_ξ. Posons maintenant $S(x) = \{\varrho_\xi\}$ si $x = \pi_\xi$ et $S(x) = 0$ si x diffère de tout π_ξ. Il est clair ainsi qu'il n'existe aucun ensemble parfait indépendant. De plus, l'ensemble

$$A = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\xi, \ldots\} \qquad (1 \leqslant \xi < \Omega_0)$$

est indépendant, donc *il existe un ensemble indépendant qui rencontre chaque ensemble parfait.*

4. Un exemple basé sur une autre idée, de correspondance $x \to S(x)$ où chaque $S(x)$ est formé d'un seul élément et où il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle, est le suivant:

Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ une décomposition de l'ensemble des nombres réels en $\aleph_0$ ensembles disjoints, superposables deux à deux par translation. Supposons, de plus, que tout ensemble jouissant de la propriété de *Baire*, contenu dans un E_n, est de première catégorie. Une telle décomposition est réalisée, par exemple, par les ensembles de niveau d'une solution discontinue de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ayant un ensemble dénombrable de valeurs distinctes. Voir [10] ou [5]. On peut supposer que $0 \in E_0$. Il existe, en vertu des hypothèses faites, une suite $t_1 > t_2 > t_3 > \ldots > t_n > \ldots$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ et $E_0 + t_n = E_n$ (par $A + t$ on désigne l'ensemble obtenu de A par une translation de longueur t). Pour chaque x il existe un seul n tel que $x \in E_n$; posons $S(x) = x + (t_{n+1} - t_n)$. Supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe un ensemble indépendant M qui est un résiduel dans un certain intervalle I. Posons $R = M \cap I$. On peut choisir un n assez grand pour qu'il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $J + (t_{n+1} - t_n) \subset I$. L'ensemble $A_n = R \cap E_n \cap J$ est de deuxième catégorie, donc l'ensemble $A_n + (t_{n+1} - t_n) \subset J + (t_{n+1} - t_n)$ est aussi de deuxième catégorie. Mais en vertu de l'indépendance de l'ensemble R et du fait que $A_n \subset R$, $x + (t_{n+1} - t_n)$ n'appartient à R pour aucun $x \in A_n$. Donc $(A_n + (t_{n+1} - t_n)) \cap R = 0$. Mais R est un résiduel sur $J + (t_{n+1} - t_n)$; il s'ensuit que $A_n + (t_{n+1} - t_n)$ est de première catégorie, ce qui est une contradiction.

Remarque. Dans la correspondance $x \to S(x)$ établie ci-dessus il n'existe aucun ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de *Baire*. En effet, d'après un théorème connu [11], si un tel ensemble M existait, alors on aurait un intervalle I où M serait un résiduel.

Il n'est pas sans intérêt, après l'exemple donné, d'établir des conditions suffisantes pour l'existence d'un ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle. Un résultat de [4], p. 253, nous suggère le théorème suivant:

Supposons que pour chaque x on a $f(x) > 0$. Si (C) il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ soit résiduel dans un certain inter-

valle alors il existe un ensemble indépendant qui est un résiduel dans un certain intervalle. Si, en outre, il existe, pour chaque x, un intervalle I_x centré en x, tel que $S(x) = E - I_x$, alors la condition (C) est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour l'existence d'un ensemble indépendant qui soit un résiduel dans une certain intervalle.

En effet, la première partie du théorème est une conséquence du raisonnement développé au numéro 2. Quant à la deuxième partie, on peut suivre la marche du raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 7 de [4]. Supposons, donc, qu'il existe un ensemble A indépendant, résiduel dans un certain intervalle. Supposons aussi qu'il y a, pour chaque x, un intervalle I_x tel que $S(x) = E - I_x$. Admettons, par réduction à l'absurde, que pour chaque α réel l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ n'est résiduel dans aucun intervalle. Désignons par β le diamètre de l'ensemble A. Posons $E_\beta = \{x; f(x) \geqslant \frac{\beta}{2}\}, F_1 = E_\beta \cap A, F_2 = E_\beta \cap (E - A)$. E_β, donc à fortiori F_1 et F_2, ne sont résiduels dans aucun intervalle. Pour $x \in A$, en vertu des hypothèses faites sur $S(x)$, on a $f(x) \geqslant \frac{\beta}{2}$, donc $A \subset E_\beta$ et $A = F_1$. On arrive ainsi à une contradiction, car A est, par hypothèse, résiduel dans un certain intervalle.

En vertu d'un théorème de [11] et du théorème démontré ci-dessus, on a aussi: *Si, pour chaque x, il existe un intervalle I_x centré en x, tel que $S(x) = E - I_x$, alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire est que, pour un certain α, l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ contienne un ensemble de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire.*

Dans le cas général, la condition (C) n'est pas nécessaire. En effet, considérons une décomposition de E en $\aleph_0$ ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disjoints deux à deux et tels que, pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ et pour chaque intervalle I, tout ensemble jouissant de la propriété de *Baire* et contenu dans $I - A_n$ soit de première catégorie. Pour l'existence d'une telle décomposition voir [5]. On peut prendre, par exemple, pour $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, les ensembles de niveau d'une fonction discontinue qui prend seulement $\aleph_0$ valeurs distinctes et qui satisfait l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Si $x \in A_n$, désignons par $K(x)$ l'intervalle centré en x et de longueur $\frac{2}{n}$. Soit R un ensemble dénombrable partout dense. Posons $S(x) =$

$= (E - K(x)) \cap R$. On a $f(x) = \frac{1}{n}$ pour $x \in A_n$. Donc, si $\alpha > 1$, $E_\alpha = \{x; f(x) \geqslant \alpha\} = 0$; si $\alpha \leqslant 1$, $E_\alpha \subset E_{\frac{1}{n+1}} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ pour un certain entier positiv n. Mais, d'après la définition des ensembles A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et en tenant compte qu'on a, pour chaque intervalle I et pour chaque entier $p > n + 1$, $I \cap E_\alpha \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) \cap I \subset I - A_p$, on déduit que chaque ensemble jouissant de la propriété de *Baire* et contenu dans E_α est de première catégorie. Cela veut dire que l'ensemble E_α n'est résiduel dans aucun intervalle. D'autre part, il est évident que le complémentaire de l'ensemble R est indépendant. Mais le complémentaire d'un ensemble dénombrable est résiduel dans chaque intervalle.

5. On sait que la condition $x \notin \overline{S(x)}$, pour chaque x, n'entraine pas l'existence d'un ensemble indépendant partout dense [1]. Nous nous proposons de donner une condition suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant non seulement partout dense, mais qui rencontre chaque ensemble parfait. Désignons par $S^{-1}(x)$ l'ensemble de tous les nombres u tels que $x \in S(u)$. *Une condition suffisante pour l'existence d'un ensemble indépendant qui rencontre tout ensemble parfait est que, pour tout x, les ensembles $S(x)$ et $S^{-1}(x)$ soient dénombrables.*

En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots, (\xi < \Omega_0)$ une suite du type Ω_0, formée avec tous les ensembles parfaits de la droite. Soit $x_1 \in P_1$. Il existe, d'après les hypothèses, un élément $x_2 \in P_2 - S(x_1) - S^{-1}(x_1)$. Il est visible que x_1 et x_2 sont indépendants. Supposons qu'on a défini un ensemble indépendant $\{x_1, x_2, \ldots, x_\eta, \ldots\}$, $(\eta < \xi, x_\eta \in P_\eta)$. En vertu du théorème de *König* et d'après les hypothèses, il existe un élément x_ξ tel que $x_\xi \in P_\xi - \bigcup_{\eta<\xi} S(x_\eta) - \bigcup_{\eta<\xi} S^{-1}(x_\eta)$. On a défini ainsi un ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots\}$ $(1 \leqslant \xi < \Omega_0)$, qui est évidemment indépendant et qui rencontre tout ensemble parfait.

Les conditions du théorème que nous venons de démontrer sont remplies, en particulier, dans l'exemple donné au numéro 4, donc il en existe un ensemble indépendant qui rencontre chaque ensemble parfait.

Une autre application. Toute fonction réelle φ, d'une variable réelle, dont les ensembles de niveau (c'est-à-dire les ensembles de la forme $\{x; \varphi(x) = t\}$ avec t donné) sont dénombrables, a la propriété suivante: il existe un ensemble H qui rencontre tout ensemble parfait, tel que, pour $x \in H$, $y \in H$ on ait $\varphi(x) \neq y$ et $\varphi(y) \neq x$.

6. En quelles conditions existe-t-il un ensemble parfait indépendant ? On a : *S'il existe un* $\alpha > 0$ *tel que l'ensemble* $K = \{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ *contienne un ensemble parfait, alors il existe un ensemble parfait indépendant.* En effet soit Π un ensemble parfait contenu dans K. Il existe un intervalle I de longueur inférieure à α et tel que $I \cap \Pi$ contienne encore un ensemble parfait, soit-il P. L'ensemble P est indépendant.

L'ensemble K peut être, en particulier, un ensemble borelien non dénombrable ou, plus général, un ensemble non dénombrable et analytique au sens de *Lusin* et *Souslin*. En effet, on sait qu'un tel ensemble contient toujours un ensemble parfait [15].

La condition que nous venons de donner n'est pas nécessaire pour l'existence d'un ensemble parfait indépendant. En effet, considérons une décomposition de la droite numérique en $\aleph_0$ ensembles disjoints E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ qui rencontrent chaque ensemble parfait. (Pour une telle décomposition voir, par exemple, [5] ou [10]. Soit R un ensemble partout dense et dont le complémentaire contient un ensemble parfait T. Pour $x \in E_n$ posons $S(x) = \{y; |y - x| \geqslant \frac{1}{n}, y \in R\}$. On a $\{x; f(x) \geqslant \alpha\} = 0$ si $\alpha > 0$; si $\alpha \leqslant 1$, alors $\{x; f(x) \geqslant \alpha\} \subset F_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{n+1}$ pour chaque n entier positif. Mais F_n ne contient aucun ensemble parfait, donc l'ensemble $\{x; f(x) \geqslant \alpha\}$ est totalement imparfait. Pourtant, l'ensemble parfait T est indépendant.

En utilisant un raisonnement qui repose aussi sur une certaine décomposition de la droite, nous allons donner maintenant un *exemple de correspondance* $x \to S(x)$, *telle que*: 1° $S(x)$ *contient, pour chaque* x, *un seul élément*; 2° *Il existe un ensemble parfait et indépendant*; 3° *il n'existe aucun ensemble indépendant qui soit un résiduel dans un certain intervalle*; 4° *Il n'existe aucun ensemble indépendant, mesurable et de mesure positive. Reprenons, pour cela, l'exemple du numéro* 4, exemple qui satisfait les conditions 1° et 3°. Il est aisé de vérifier que cet exemple satisfait aussi la condition 4°. Nous allons montrer que, avec une précaution suplémentaire, la condition 2° sera aussi remplie. En effet, supposons qu'il existe un ensemble parfait Π contenu dans E_0. Π est indépendant, parce-que pour $x \in \Pi$, $y \in \Pi$ on a $S(x) = x + t_1 \in E_1$, donc $y \in S(x)$ et $x \in S(y)$. (Pour la possibilité que E_0 contienne un ensemble parfait voir, par exemple, [5], théorème 4).

Un autre exemple de correspondance $x \to S(x)$ jouissant de propriétés singulières s'obtient comme il suit:

On sait qu'il existe une décomposition $E = A \cup B$, $A \cap B = 0$, A de mesure nulle, B de première catégorie. Posons, pour $x \in A$, $S(x) = B$ et, pour $x \in B$, $S(x) = E - \{x\}$. On voit alors que les seuls ensembles indépendants sont les sous-ensembles de A. Mais A est un ensemble résiduel, donc *on peut définir une correspondance* $x \to S(x)$ *telle qu'il existe un ensemble résiduel indépendant mais il n'existe aucun ensemble indépendant de mesure extérieure positive.* Si nous posons $S(x) = A$ pour $x \in B$ et $S(x) = E - \{x\}$ pour $x \in A$, alors on constate que *on peut définir une correspondance* $x \to S(x)$ *telle qu'il existe un ensemble indépendant qui soit une épaisseur pleine dans chaque intervalle, mais il n'existe aucun ensemble indépendant de deuxième catégorie.*

7. Dans ce numéro nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence d'un ensemble indépendant de deuxième catégorie ou de mesure extérieure positive. On a: *Si pour chaque* $x \in E$, *à l'exception possible d'un ensemble* P *de première catégorie, les ensembles* $S(x)$ *et* $S^{-1}(x)$ *sont de première catégorie et si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *alors il existe un ensemble indépendant de deuxième catégorie.* En effet, soit F un ensemble linéaire quelconque, de deuxième catégorie. Soit $x_1 \in E = F - P$. L'ensemble $E_2 = E_1 - S(x_1) - S^{-1}(x_1)$ est de deuxième catégorie. Il existe donc $x_2 \in E_3 = E_2 - P$. Il est visible que x_1 et x_2 sont indépendants. Soit α un ordinal $< \Omega$. Supposons que pour chaque $\beta < \alpha$ on a défini un élément $x_\beta \in P$, tel que l'ensemble $\{x_\beta\}_{\beta<\alpha}$ soit indépendant. Cet ensemble étant dénombrable, on conclut que l'ensemble

$$K_\alpha = K_1 - \bigcup_{\beta<\alpha} S(x_\beta) - \bigcup_{\beta<\alpha} S^{-1}(x_\beta)$$

est de deuxième catégorie. Il existe donc un $x_\alpha \in K_\alpha - P$. L'ensemble $\{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est indépendant et non dénombrable. On a démontré ainsi que chaque ensemble de deuxième catégorie contient un ensemble indépendant non dénombrable. Mais *N. Lusin* a démontré que, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble linéaire L, ayant la puissance du continu, qui ne contient aucun ensemble non dénombrable et de première catégorie [13]. Il s'ensuit que L est de deuxième catégorie. D'après le raisonnement ci-dessus, on déduit que L contient un ensemble indépendant non dénombrable, donc de deuxième catégorie.

W. Sierpiński a démontré que, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble linéaire non dénombrable qui ne contient aucun ensemble non dénombrable de mesure nulle [14]. En remplaçant, dans le raisonnement ci-dessus, la première catégorie par la mesure nulle, la deuxième catégorie par la mesure extérieure positive et en utilisant le résultat de

W. Sierpiński que nous venons d'énoncer, on parvient au théorème suivant: *Si, pour chaque $x \in E$, à l'exception possible d'un ensemble R de mesure nulle, les ensembles $S(x)$ et $S^{-1}(x)$ sont de mesure nulle et si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, alors il existe un ensemble indépendant de mesure extérieure positive.*

8. Il est aisé se rendre compte que la „pauvreté" des ensembles $S(x)$ entraine, en général, l'existence des ensembles indépendants riches d'un certain point de vue.

Jusqu'ici, nous avons cherché des exemples rares d'ensembles indépendants, exemples dont la nature était la suivante: malgré la „pauvreté" des ensembles $S(x)$, on ne trouvait pas des ensembles indépendants assez riches ou épais. Il est lieu de citer ici certains résultats de *P. Erdös*: Il est possible que, pour chaque x, $S(x)$ soit de puissance inférieure à c et pourtant qu'il n'existe aucune paire de points indépendants. Il est possible que $S(x)$ ne soit partout dense pour aucun x et pourtant qu'il n'existe aucune paire de points indépendants [2]. Mais on peut construire aussi des exemples d'une autre nature; des exemples où, malgré la richesse des ensembles $S(x)$, les ensembles indépendants soient aussi très riches. En voici un: *Il existe une correspondance $x \to S(x)$ où chaque $S(x)$ rencontre tout ensemble parfait et telle qu'il existe un ensemble indépendant qui rencontre tout ensemble parfait.* En effet, soit Ω_0 le nombre ordinal initial qui correspond à la puissance du continu et soit $P_1, P_2, \ldots, P_\xi, \ldots (\xi < \Omega_0)$ une suite du type Ω_0, formée avec tous les ensembles parfaits de la droite. Soient α_1 et β_1 deux éléments distincts de P_1, α_2 et β_2 deux éléments distincts de P_2, tels que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \beta_1$, $\alpha_1 \neq \beta_2 \neq \beta_1$ et α_ξ, β_ξ deux éléments distincts de P_ξ, tels que $\alpha_\eta \neq \alpha_\xi \neq \beta_\eta$, $\alpha_\eta \neq \beta_\xi \neq \beta_\eta$ dès qu'on a $1 \leqslant \eta < \xi < \Omega_0$. L'existence de tous ces éléments est assurée par la définition de Ω_0 et par le fait que chaque ensemble parfait a la puissance du continu. Désignons par A l'ensemble $\{\alpha_\xi\}_{1 \leq \xi < \Omega_0}$ et par B le complémentaire de A. Il est évident que chacun des ensembles A et B rencontre tout ensemble parfait. Posons maintenant $S(x) = B$ si $x \in A$ et $S(x) = A$ si $x \in B$. Chacun des ensembles A et B est indépendant.

9. La structure des ensembles indépendants dans le cas où, pour chaque x, $S(x)$ est non dense, est peu connue. *P. Erdös* a démontré que, dans ce cas, il existe toujours un ensemble indépendant infini, mais on ne sait pas si'il existe toujours un ensemble indépendant non dénombrable [2]. Nous n'avons obtenu aucun résultat nouveau dans ce problème, c'est seulement une autre méthode que nous voulons signaler,

méthode plus compliquée que celle de *P. Erdös* mais qui, peut être, par des modifications ultérieures, pourra fournir aussi des résultats nouveaux.

Nous nous plaçons dans le cas d'un espace E métrique séparable. Considérons une correspondance $x \to S(x)$, où $x \in E$, $S(x) \subset E$ et $S(x)$ est non dense. *Pour chaque ensemble $X \subset E$, de deuxième catégorie, et, pour chaque sphère $I \subset E$, il existe une sphère $J \subset I$ telle que l'ensemble $\{x;\ x \in X,\ J \cap S(x) = 0\}$ soit de deuxième catégorie.* C'est précisément sous cette forme que nous allons utiliser la non densité des ensembles $S(x)$. Encore une remarque: *Si un ensemble X est de deuxième catégorie, alors il existe une sphère S telle que X soit de deuxième catégorie dans S et dans chaque sous-sphère de S.*

Nous dirons que les ensembles de la famille $\{E_\iota\}_{\iota \in Y}$ sont *mutuellement indépendants* si l'ensemble $\{x_\iota\}_{\iota \in Y}$ est indépendant dès que $x_\iota \in E_\iota$ pour $\iota \in Y$.

Lemme 1. Il existe deux ensembles disjoints, de deuxième catégorie, mutuellement indépendants. En effet, considérons une sphère I telle que l'ensemble $A = \{x;\ x \in E,\ I \cap S(x) = 0\}$ soit de deuxième catégorie. L'ensemble $A \cap I$ est indépendant, donc si'il contient au moins deux points, alors le lemme est démontré. Nous pouvons donc admettre que $A - I$ est de deuxième catégorie. Il existe une sphère J telle que $J \cap I = 0$ et $A - I$ soit de deuxième catégorie dans chaque sous-sphère de J. Il existe une sphère $K \subset J$, telle que l'ensemble $B = \{x;\ x \in I,\ K \cap S(x) = 0\}$ soit de deuxième catégorie. Les ensembles B et $A \cap K$ sont mutuellement indépendants.

Lemme 2. Supposons qu'ils existent n ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de deuxième catégorie et mutuellement indépendants. Dans ce cas, il existe une sphère J et n ensembles B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ de deuxième catégorie, tels que $B_i \subset A_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ et tels encore que la relation $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ entraîne $J \cap S(x) = 0$. En effet, il existe un ensemble de deuxième catégorie $B_1 \subset A_1$ et une sphère I_1, telle que, pour $x \in B_1$, on ait $I_1 \cap S(x) = 0$. Il existe un ensemble de deuxième catégorie $B_2 \subset A_2$ et une sphère $I_2 \subset I_1$, telle que pour $x \in B_2$ on ait $I_2 \cap S(x) = 0$. En continuant ainsi, on trouve un ensemble de deuxième catégorie $B_n \subset A_n$ et une sphère $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_2 \subset I_1$, telle que, pour $x \in B_n$, on ait $I_n \cap S(x) = 0$. Mais puisque $I_n \subset I_i$ pour chaque i, tel que $1 \leqslant i < n$, il s'ensuit que, pour chaque i tel que $1 \leqslant i < n$, et pour chaque $x \in B_i$, on a $I_n \cap S(x) = 0$. La sphère $J = I_n$ satisfait l'énoncé du lemme 2.

Lemme 3. Supposons qu'il existe n ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de deuxième catégorie et mutuellement indépendants. Alors, en prenant les ensembles* B_i *et* J *avec leur signification dans le lemme 2, il existe* $C_i \subset B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et il existe* $M \subset J$, *tels que* C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et* M *soient de deuxième catégorie et, pour* $x \in M$, *on ait* $(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cap S(x) = 0$.

En effet, pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ il existe une sphère L_i telle que B_i soit de deuxième catégorie dans L_i et dans chaque sous-sphère de L_i. Il existe une sous-sphère $l_1 \subset L_1$ et un ensemble de deuxième catégorie $M_1 \subset J$, tels que pour $x \in M_1$ on ait $l_1 \cap S(x) = 0$. Il existe une sous-sphère $l_2 \subset L_2$ et il existe un ensemble de deuxième catégorie $M_2 \subset M_1$, tels que pour $x \in M_2$ on ait $l_2 \cap S(x) = 0$ et ainsi de suite. On arrive ainsi à une sphère $l_n \subset L_n$ et à un ensemble de deuxième catégorie $M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M_2 \subset M_1 \subset J$ tels que, pour $x \in M_n$, on ait $l_n \cap S(x) = 0$. Du fait que $M_n \subset M_i$ pour chaque i tel que $1 \leqslant i < n$, il s'ensuit que, pour chaque $x \in M_n$, on a $(\bigcup_{i=1}^{n} l_i) \cap S(x) = 0$. Posons $C_i = B_i \cap l_i$. De $l_i \subset L_i$ il s'ensuit que C_i est de deuxième catégorie. En posant $M = M_n$, le lemme 3 est démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant: *Pour chaque n entier positif, il existe n ensembles disjoints, de deuxième catégorie, mutuellement indépendants.* En effet, pour $n = 2$ le théorème se réduit au lemme 1. Supposons qu'il existe n ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de deuxième catégorie et mutuellement indépendants et montrons qu'il existe aussi $n + 1$ ensembles de cette nature. En effet, les $n + 1$ ensembles cherchés sont (avec la notation utilisée dans le lemme 3), $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1} = M$.

Le résultat obtenu résulte d'ailleurs aussi du raisonnement employé dans [2] pour démontrer le théorème 6.

Références

[1] *F. Bagemihl*, The Baire category of independent sets, Compositio Math. 13 (1956), 71–75.

[2] *P. Erdös*, Some remarks on set theory III, Michigan Math. Journ. 2 (1953), 51–57.

[3] *P. Erdös-G. Fodor*, Some remarks on set theory V, Acta Scient. Math.-Szeged 17 (1956), 250–260.

[4] *P. Erdös-G. Fodor*, Some remarks on set theory VI, Acta Scient. Math. Szeged 18 (1957), 243–260.

[5] *P. Erdös-S. Marcus*, Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 8 (1957), 443—452.

[6] *G. Fodor*, On two problems concerning the theory of binary relations, Publicationes Math., Debrecen, 1 (1950) 199—200.

[7] *G. Fodor*, On a theorem in the theory of binary relations, Compositio Math. 8 (1951), p. 250.

[8] *G. Fodor*, On a problem concerning the theory of binary relations, Niew Archiw voor Wiskunde, 23 (1951), 247—248.

[9] *G. Grünwald*, Über einen mengentheoretischen Satz, Mat. Fiz. Lapok, 44 (1937), 51—53.

[10] *I. Halperin*, Non-measurable sets and the equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Proceed. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 221—224.

[11] *C. Kuratowski*, Topologie *I*, Warszawa-Wroclaw 1948, p. 56.

[12] *D. Lázár*, On a problem in the theory of aggregates, Compositio Math. 3 (1936), p. 304.

[13] *N. Lusin*, Sur un problème de M. Baire, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1258—1261.

[14] *W. Sierpinski*, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Fund. Math. 5 (1924), 177—187.

[15] *M. Souslin*, Sur une définition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 164 (1917), 88—91.

Institut de Mathématique de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest.

Adresse de l'auteur: S. Marcus, Institut de Matematică, str. M. Eminescu 47 Bucarest 3 (R.P.R. (Roumaine).

Zur Differentialgeometrie im totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_6

Von

M. Pinl, Köln

(Eingegangen am 22. September 1958)

Guido Hoheisel zum 65. Geburtstag

Die absolute quadratische M^2_{2n-2} im Fernraum eines komplexen euklidischen $2n$-dimensionalen Raumes R_{2n} ist Träger zweier Scharen $(n-1)$-dimensionaler linearer Erzeugender[1] $(n \geqslant 2)$. Diese Erzeugenden sind die Spuren der totalisotropen linearen R_n des R_{2n} im Schnitt mit dem Fernraum des R_{2n}. Jede Richtung in einem solchen totalisotropen R_n zielt mithin zu einem Punkt der absoluten M^2_{2n-2} des R_{2n}, jeder Vektor in einem solchen R_n ist ein isotroper Vektor, jede Kurve darin eine unbeschränkt isotrope Kurve[2], jede zwei oder mehrdimensionale Mannigfaltigkeit eine unbeschränkt totalisotrope[3] $V_m (2 \leqslant m \leqslant n-1)$. Da die im totalisotropen R_n vom euklidischen R_{2n} induzierte Metrik durch die Nullmatrix gegeben ist, verschwinden alle Skalarprodukte von Vektoren dieses R_n insbesondere auch alle Skalarprodukte und Determinanten aus Ableitungen beliebiger Ordnung der Ortsvektoren eingebetteter $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$. Daher ist es unmöglich, eine Differentialgeometrie dieser V_m mit Hilfe von Differential- und Integralinvarianten aufzubauen[4]. Andererseits sind jedoch isotrope Vektoren, isotrope Kurven und isotrope Mannigfaltigkeiten konform invariant definierte Begriffe. Daher kann,

---

[1] Vgl. z. B. Enyklopädie der mathematischen Wissenschaften III C 7; *Segre*, Mehrdimensionale Räume, S. 851, ferner *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, S. 80, Berlin 1928.

[2] Vgl. zur Terminologie *M. Pinl*, Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen, Comp. math. 5/2 (1937), 208–238.

[3] Vgl. 2.

[4] Vgl. 2, S. 238.

wie neuerdings Herr *K. Strubecker* betont hat[5], die aequiforme Differentialgeometrie eines totalisotropen R_n des komplexen euklidischen R_{2n} im Wesentlichen mit der affinen Differentialgeometrie eines n-dimensionalen affinen Raumes identifiziert werden, da die Gruppe $G_{2\frac{n(2n+1)}{2}+1}$ aller Ähnlichkeiten des R_{2n} im totalisotropen R_n die Gruppe $G_{n(n+1)}$ aller Affinitäten dieses R_n induziert. Man kann dann alle Ergebnisse der affinen Differentialgeometrie im n-dimensionalen affinen Raum übernehmen und den $2n$-dimensionalen Ausgangsraum vergessen. Demgegenüber wollen wir im Folgenden versuchen, den formalen Apparat der bewegungsinvarianten Differentialgeometrie im komplexen $2n$-dimensionalen Raum beizubehalten und die Differentialgeometrie der V_m in totalisotropen R_n des R_{2n} ($1 \leqslant m \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$) mit Hilfe von geeigneten Differential- und Integralkovarianten[6] an Stelle der identisch verschwindenden Differential- und Integralinvarianten dieser Mannigfaltigkeiten aufzubauen. Dabei beschränken wir uns auf die typischen Fälle $n = 2, m = 1$ (Kurven in totalisotropen Ebenen des euklidischen komplexen R_4) und $n = 3, m = 1, 2$ (Kurven und Flächen in totalisotropen R_3 des euklidischen komplexen R_6). Im ersten Fall handelt es sich um den Extremfall (c_1) der metrischen Komponentenmatrizen

$$(a_1)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\ \text{euklidische Ebene,}\quad (b_1)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\ \text{halbisotrope Ebene,}$$

$$(c_1)\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\ \text{totalisotrope Ebene,}$$

im zweiten Fall um den Extremfall (d_2) der metrischen Komponentenmatrizen

$$(a_2)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\ \text{euklidischer Raum,}\quad (b_2)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\ \text{einfach isotroper Raum,}$$

$$(c_2)\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\ \text{zweifach isotroper Raum,}\quad (d_2)\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\ \text{totalisotroper Raum.}$$

[5] Vgl. *K. Strubecker*, Differentialgeometrie isotroper Mannigfaltigkeiten, Schriftenreihe des Instituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 1, S. 143—155, Akademie-Verlag Berlin, 1957.

[6] Vgl. zur Terminologie *E. Study*, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven im Euklidischen Raum. Transact. Amer. Math. Soc. **10**, 1—49 Die natürlichen Gleichungen der analytischen Kurven im Euklidischen Raum, ibidem **11**, 249—279 (1910).

Von den singulären Fällen wurden bereits früher (b_1) und (b_2) von *E. Study*[7] und *K. Strubecker*[8] ausführlich untersucht. Fall (c_2) harrt noch einer künftigen Untersuchung.

§ 1. $n = 2$, $m = 2$; Kurventheorie in totalisotropen Ebenen

In der Differentialgeometrie der isotropen Kurven des euklidischen komplexen R_3 wird mit Vorteil die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v})$ verwendet[9]. Dabei bedeutet $\mathfrak{v}$ einen beliebigen konstanten nichtisotropen und nichtverschwindenden Vektor, $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ sind die beiden ersten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(t)$ der in Rede stehenden isotropen Kurve (der Ortsvektor ist eine analytische Funktion des komplexen Parameters t). Die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v})$ ist offenbar eine relative Differentialkovariante der Ordnung 2 vom Gewicht 3; sie verschwindet identisch in $\mathfrak{v}$, sobald $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ linear abhängig sind, d. h. auf Geraden. Im komplexen euklidischen R_4 betrachten wir nunmehr eine isotrope Kurve $\mathfrak{x}(t)$ in einer totalisotropen Ebene. Sämtliche Ableitungen des Kurvenvektors sind isotrop (oder Nullvektoren):

$$\mathfrak{x}'^2 \equiv \mathfrak{x}''^2 \equiv \ldots \equiv 0 \{t\}. \tag{1}$$

Auch alle Skalarprodukte beliebiger Ableitungen k^{ter} bzw. l^{ter} Ordnung verschwinden identisch ($\mathfrak{x}^{(k)} \cdot \mathfrak{x}^{(l)} \equiv 0 \{t\}$, $k, l = 1, 2, \ldots$). Nun seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ zwei konstante linear unabhängige nichtisotrope Vektoren. Dann ist die von ihnen aufgespannte Ebene eine euklidische Ebene des R_4. Wir nennen sie die *Eichebene* der wegen (1) unbeschränkt[10] isotropen Kurve $\mathfrak{x}(t)$ und bilden die Determinante $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. Sie ist eine relative Differentialkovariante[11] der Ordnung 2 vom Gewicht 3 auf der Kurve $\mathfrak{x}(t)$. Denn wird durch die analytische Parametertransformation

$$p = p(t), \quad (\dot{f} = \frac{df}{dp})$$

eine neuer Kurvenparameter p eingeführt, so kommt

---

[7] Vgl. 6.

[8] Vgl. z. B. *K. Strubecker*, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I, II, III, IV, V. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **150**, 1–53 (1941); Math. Z. **47**, 743–777 (1942), **48**, 369–427 (1942); **50**, 1–92 (1944); **52**, 525–573 (1949).

[9] Vgl. 6, ferner *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, S. 44, Berlin 1930.

[10] Vgl. 2.

[11] Vgl. 6.

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \left(\frac{dp}{dt}\right)^3. \tag{2}$$

Dann ist $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^{1/6}$ eine relative Differentialkovariante vom Gewicht 1 auf $\mathfrak{x}(t)$ und die absolute Integralkovariante

$$q(t, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^{1/6} \, d\tau \tag{3}$$

kann als „*Quasibogenlänge*" zum Ersatz der identisch verschwindenden Bogenläge auf $\mathfrak{x}(t)$ herangezogen werden. Als „natürlicher Kurvenparameter" leistet q auf der Kurve eine Normierung der Differentialkovarianten $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. Denn für $p(t) = q(t)$ gilt wegen (2) und (3)

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \left(\frac{dq}{dt}\right)^3 = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}),$$

also

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 1 \qquad \{q\}. \tag{4}$$

Aus der Identität (4) folgt durch Differentiation nach q, da $\mathfrak{x}(q)$ nach Voraussetzung eine ebene Kurve ist,

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\dot{\mathfrak{x}}, \alpha\dot{\mathfrak{x}} + \beta\ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \beta \cdot 1 \equiv 0 \; \{q\}.$$

Für die auf einen natürlichen Parameter (3) bezogene Kurve $\mathfrak{x}(q)$ in einer totalisotropen Ebene besteht mithin die Ableitungsgleichung

$$\dddot{\mathfrak{x}} = \alpha \dot{\mathfrak{x}}. \tag{5}$$

Wir schreiben $-\alpha = k$ und berechnen k durch skalare Multiplikation von (5) mit dem Trivektor $[\ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}]$. Damit ergibt sich für die Differentialkovariante $k(q)$, die wir die „*Quasikrümmung*" der isotropen Kurve $\mathfrak{x}(q)$ nennen, der Ausdruck

$$k(q, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \tag{6}$$

oder auch

$$k(q, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\ddddot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}), \tag{7}$$

da die Identität

$$(\dot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) + (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 0 \quad \{q\}$$

besteht. Die Werte der Determinanten (2), (6), (7) hängen offenbar nur insofern von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ ab, als ihre Werte geändert werden, wenn man die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ abändert, die Ableitungen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}$ jedoch beibehält (oder in anderer Weise abändert wie $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$). Unterwirft man jedoch alle Vektoren des Vierbeins $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bzw. $\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ derselben Transformation aus der orthogonalen Gruppe

G_{10} des R_4, so bleiben die Determinantenwerte ungeändert. Die totalisotropen Ebenen des R_4 gehen dabei in ebensolche und die euklidischen Eichebenen wiederum in euklidische Ebenen über. Insbesondere kann man auf diese Weise stets die Koordinatenebene $x_3 = x_4 = 0$ als Eichebene einführen und durch die orthogonalen Stellungsvektoren

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_3 = \{0, 0, 1, 0\}, \mathfrak{w} = \mathfrak{e}_4 = \{0, 0, 0, 1\} \tag{8}$$

charakterisieren. Damit ist der Anschluß an den Formalismus der ebenen affinen Differentialgeometrie[12] erreicht. Zugleich ergibt sich ein geometrischer Zusammenhang von totalisotroper Kurven- und euklidischer Eichebene. Betrachten wir nämlich die Projektion $\mathfrak{y}(q)$ der auf einen natürlichen Parameter q bezogenen Kurve $\mathfrak{x}(q)$ einer totalisotropen Ebene auf die Eichebene $x_3 = x_4 = 0$! Dann gilt mit Rücksicht auf (8)

$$\mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}(q) - \mathfrak{e}_3(\mathfrak{e}_3\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) = \{x_1(q), x_2(q), 0, 0\}^{13},$$
$$\dot{\mathfrak{y}}(q) = \{\dot{x}_1(q), \dot{x}_2(q), 0, 0\}, \ddot{\mathfrak{y}}(q) = \{\ddot{x}_1(q), \ddot{x}_2(q), 0, 0\},$$
$$(\dot{\mathfrak{y}}, \ddot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4) \equiv \dot{x}_1\,\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1\,\dot{x}_2 \equiv (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 1\ \{q\}.$$

Der auf $\mathfrak{x}(q)$ natürliche Parameter q ist also auch natürlicher Parameter (im Sinne der affinen Differentialgeometrie) auf der Projektionskurve. Die Zuordnung der totalisotropen Kurvenebene zur euklidischen Eichebene ist offenbar eine affine Abbildung durch welche die Quasibogenlänge der Kurve $\mathfrak{x}(q)$ in die Affinbogenlänge der Kurve $\mathfrak{y}(q)$ übergeht und ebenso ihre Quasikrümmung in die Affinkrümmung von $\mathfrak{y}(q)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4)^{1/3}\,dt = \int_{p_0}^{p_1} (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4)^{1/3}\,dp = p_1 - p_0 =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (x_1'\,x_2'' - x_1''\,x_2')^{1/3}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (y_1'\,y_2'' - y_1''\,y_2')^{1/3}\,dt,$$
$$k(q, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4) = (\ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4) = \ddot{x}_1\,\dddot{x}_2 - \dddot{x}_1\,\ddot{x}_2 = \ddot{y}_1\,\dddot{y}_2 - \dddot{y}_1\,\ddot{y}_2.$$

Da die G_{10} der Bewegungen des euklidischen R_4 auf der totalisotropen Ebene die G_5 aller flächentreuen Affinitäten, in der euklidischen Eichebene aber nur die G_3 aller Bewegungen auf der Eichebene induziert, ist die Differentialgeometrie der Kurve $\mathfrak{x}(q)$ allgemeiner aber eigenschaftsärmer als die Differentialgeometrie der Kurve $\mathfrak{y}(q)$, zu deren metrischer Krümmung

---

[12] Vgl. *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, 1. Kapitel, Berlin 1923.

[13] Es gilt $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$, da die Komponenten x_3, x_4 im allgemeinen nicht verschwinden.

$$\varkappa(q) = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}$$

z. B. auf dem Urbild $\mathfrak{x}(q)$ kein Gegenstück existiert. Damit ist gezeigt:

(I) Jeder (nichtlinearen) Kurve $\mathfrak{x}(q)$ einer totalisotropen Ebene des komplexen euklidischen R_4 kann in einer geeigneten euklidischen Ebene dieses R_4 eine nichtisotrope Bildkurve $\mathfrak{y}(q)$ von gleichen affindifferentialgeometrischen Eigenschaften zugeordnet werden.

Ferner ergibt sich durch Spezialisierung mit Rücksicht auf bekannte Sätze der affinen Differentialgeometrie[14]:

(II) Die einzigen Kurven totalisotroper Ebenen mit identisch verschwindender Quasikrümmung sind die isotropen Parabeln (von der euklidischen Länge Null).

(III) Die Kurven totalisotroper Ebenen mit fester nichtverschwindender Quasikrümmung sind die isotropen nichtsingulären und nichtparabolischen Kegelschnitte (von der euklidischen Länge Null).

(IV) Die Extremalen des Variationsproblems, $\delta q = 0$, der Quasibogenlänge (3) sind die isotropen Parabeln.

§ 2. $n = 3$, $m = 1$; Kurventheorie im totalisotropen Raum

Mit Rücksicht auf die Ausführungen des vorhergehenden Abschnitts können wir die Behandlung der Kurventheorie im totalisotropen dreidimensionalen Raum kürzer fassen. An Stelle der Differentialkovarianten (2) verwenden wir jetzt die relative Differentialkovariante

$$(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = (\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) \left(\frac{dp}{dt}\right)^6. \tag{9}$$

$\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''$ bzw. $\dot{\mathfrak{x}}, \ddot{\mathfrak{x}}, \dddot{\mathfrak{x}}$ sind die ersten drei Ableitungen des Kurvenortsvektors nach ihren Parametern, die wir als linear unabhängig voraussetzen. Wiederum verschwinden alle Skalarprodukte $\mathfrak{x}^{(k)}\,\mathfrak{x}^{(l)}$ identisch. Die $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ bezeichnen jetzt drei linear unabhängige konstante nichtisotrope Vektoren des komplexen euklidischen sechsdimensionalen Raumes R_6. Aus (9) bekommen wir die absolute Integralkovariante

$$q(t, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3)^{1/6}\, d\tau \tag{10}$$

und die Normierung

[14] Vgl. 12, 3. Kapitel, Berlin 1923.

$$(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv 1 \quad \{q\} \tag{11}$$

für jeden natürlichen Parameter q. Aus der linearen Abhängigkeit $\ddddot{\mathfrak{x}} = \alpha\dot{\mathfrak{x}} + \beta\ddot{\mathfrak{x}} + \gamma\dddot{\mathfrak{x}}$ folgt jetzt durch Differentiation von (11) nach q mit Rücksicht auf diese Gleichung

$$(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \ddddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv \gamma(\dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3) \equiv \gamma\, 1 \equiv 0 \quad \{q\}.$$

Damit bekommen wir die Ableitungsgleichung

$$\dddot{\mathfrak{x}} + k_1(q)\,\ddot{\mathfrak{x}} + k_2(q) = 0$$

und die Quasikrümmungen

$$k_1(q) = (\ddddot{\mathfrak{x}},\ \dot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3),\ k_2(q) = -(\ddddot{\mathfrak{x}},\ \ddot{\mathfrak{x}},\ \dddot{\mathfrak{x}},\ \mathfrak{v}_1,\ \mathfrak{v}_2,\ \mathfrak{v}_3). \tag{12}$$

Für

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{e}_4 = \{0,0,0,1,0,0\},\ \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{e}_5 = \{0,0,0,1,0\},\ \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{e}_6 = \{0,0,0,0,0,1\}$$

verwandeln sich die Quasikrümmungen (12) in die Affinkrümmungen und die Quasibogenlänge (10) in die Affinbogenlänge der Projektionskurve

$$\mathfrak{y}(q) = \mathfrak{x}(q) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_5(\mathfrak{e}_5\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_6(\mathfrak{e}_6\,\mathfrak{x}) \tag{13}$$

im Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Daher gilt:

(*V*) *Die differentialgeometrischen Eigenschaften der Kurve* $\mathfrak{x}(q)$ *im totalisotropen Raum sind identisch mit den affindifferentialgeometrischen Eigenschaften der Projektionskurve* (*und nur mit diesen*) *im euklidischen Eichraum* $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

Insbesondere gilt z. B.:

(*VI*) *Die räumlichen isotropen kubischen Parabeln sind die einzigen Kurven im totalisotropen Raum, deren beide Quasikrümmungen* (12) *identisch verschwinden, sie sind zugleich die Extremalen des Variationsproblems,* $\delta q = 0$, *der Quasibogenlänge* (10).

§ 3. $n = 3$, $m = 2$; Flächentheorie im totalisotropen Raum

Neben den Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ im komplexen euklidischen R_6, deren frühere Bedeutung wir beibehalten, betrachten wir jetzt Ortsvektoren $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ analytischer Flächen in einem totalisotropen R_3 des R_6. Als analytische Funktion seiner beiden unabhängigen komplexen Parameter u_1, u_2 ist $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ unbeschränkt differenzierbar. Wir bezeichnen partielle Ableitungen durch Indizes und verwenden gelegentlich die Summenkonvention des Tensorkalküls. Die skalaren Produkte sämtlicher Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ verschwinden im totalisotropen R_3 identisch, die Determinanten

$$h_{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) = h_{\beta\alpha}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2 \tag{14}$$

jedoch nur dann, wenn $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ aufgespannt wird. Führen wir durch eine analytische Parametertransformation mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante D neue Flächenparameter $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ein, so gelangen wir mit Hilfe der alten bzw. neuen Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ bzw. $\bar{h}_{ik}$ zu einer relativinvarianten quadratischen Differentialform

$$\bar{h}_{ik}\, d\bar{u}^i\, d\bar{u}^k = D\, h_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,\ D = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}, \quad \alpha, \beta, i, k = 1, 2. \tag{15}$$

Die Determinante h der Komponenten (14) ist eine relative Differentialinvariante der Ordnung 2 vom Gewicht 4:

$$\bar{h} = \bar{h}_{11}\, \bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}{}^2 = (h_{11}\, h_{22} - h_{12}{}^2)\, D^4 = h\, D^4,\ \bar{h}^{1/4} = h^{1/4} \cdot D$$

Dann ist die „*Quasioberfläche*" einer Fläche im totalisotropen R_3 (deren gewöhnliche Oberfläche identisch verschwindet) durch die Integralkovariante

$$\Omega = \iint\limits_{(B)} |\, h\, |^{1/4}\, du_1\, du_2$$

gegeben.

Wenn $h \neq 0$, kann die relativinvariante quadratische Differentialform (15) durch die absolut-invariante quadratische Differentialform

$$f_{ik}\, d\bar{u}^i\, d\bar{u}^k = f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta,\ f_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{h^{1/4}},\ f_{ik} = \frac{\bar{h}_{ik}}{\bar{h}^{1/4}},\ \alpha, \beta, i, k = 1, 2 \tag{16}$$

ersetzt werden. Die Nullinien der quadratischen Differentialform (15) oder (16) führen auf die *Quasiasymptotenlinien* der Fläche. Insbesondere gilt in *Quasiasymptotenparametern* (wofern $h \neq 0$) auf $\mathfrak{x}$:

$$f_{11} = f_{22} = 0,\ f_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = 2\, f_{12}\, du_1\, du_2.$$

Auf der Projektionsfläche

$$\begin{gathered}\mathfrak{y}(u_1, u_2) = \mathfrak{x}(u_1, u_2) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\, \mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_5(\mathfrak{e}_5\, \mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_6(\mathfrak{e}_6\, \mathfrak{x}) = \\ = \{x_1(u_1, u_2),\ x_2(u_1, u_2),\ x_3(u_1, u_2),\ 0, 0, 0\} \\ \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{e}_4 = \{0, 0, 0, 1, 0, 0\},\ \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{e}_5 = \{0, 0, 0, 0, 1, 0\}, \\ \mathfrak{v}_3 = \mathfrak{e}_6 = \{0, 0, 0, 0, 0, 1\}\end{gathered}$$

im euklidischen Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ verwandeln sich alle so gewonnenen „Quasigrößen" in die entsprechenden „Affingrößen". Dasselbe gilt auch für die kubische invariante Differentialform und die affine Krümmungstheorie der Projektionsfläche $\mathfrak{y}(u_1, u_2)$ im Eichraum.

Dagegen bleiben die metrischen Differentialinvarianten der Projektionsflächen des euklidischen Eichraums wie z. B. die Gaußsche Krümmung der Projektionsfläche im totalisotropen Raum auf der Fläche $\mathfrak{x}(q)$ ohne Gegenstück. Dasselbe gilt auch für den Parallelismus von Levi Civita, dessen affiner Zusammenhang aus der nicht ausgearteten Metrik $g_{\alpha\beta} = \mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta$ der Projektionsfläche im Eichraum eindeutig bestimmt ist, während das Gegenstück zu $g_{\alpha\beta}$ im totalisotropen Raum auf $\mathfrak{x}$ fehlt.

Betrachten wir schließlich noch ein Beispiel einer *Quasiminimalfläche* in einem totalisotropen Raum des R_6. Wir setzen

$$x_4 = i\,x_1,\ x_5 = i\,x_2,\ x_6 = i\,x_3. \tag{17}$$

Dann gilt

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_1} \right\| = \left\| 1,\ 0,\ 0,\ i,\ 0,\ 0 \right\|$$
$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_2} \right\| = \left\| 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ i,\ 0 \right\|$$
$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial x_6}{\partial x_3} \right\| = \left\| 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ i \right\|$$

Die Quadratsummen der Zeilenelemente dieser Matrix verschwinden und ihre innern Produkte desgleichen. Der R_3 (17) des R_6 ist also totalisotrop. Nun seien $U(u)$ und $V(v)$ beliebige analytische Funktionen ihrer Argumente und $\mathfrak{x}(u, v)$ eine analytische Fläche im totalisotropen R_3 (17) des R_6 mit den Komponenten:

$$x_1 = v - u,\ x_2 = U' - \dot{V},\ x_3 = \dot{V}u - vU' + 2(U - V) - u\,U' + v\dot{V},$$
$$x_4 = i(v-u),\ x_5 = i(U' - \dot{V}),\ x_6 = i[u\dot{V} - vU' + 2(U - V) - u\,U' + v\dot{V}]. \tag{18}$$

Für die Komponenten y_1, y_2, y_3 der Projektionsfläche

$$\mathfrak{y}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) - \mathfrak{e}_4(\mathfrak{e}_4\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_5(\mathfrak{e}_5\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{e}_6(\mathfrak{e}_6\,\mathfrak{x}) =$$
$$= \{x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v),\ 0,\ 0,\ 0\}$$

im Eichraum $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ gilt

$$y_1 = v - u,\ y_2 = U' - \dot{V},\ y_3 = u\dot{V} - vU' + 2(U - V) - uU' + v\dot{V}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) sind eine integrallose Darstellung der uneigentlichen Affinsphären, welche zu den Affinminimalflächen gehören[15]. Daher ist (18) die integrallose Darstellung einer Klasse von Quasiminimalflächen des totalisotropen Raumes (17) im komplexen euklidischen R_6.

[15] Vgl. 12, § 78.

A Note Concerning Positive Matrices and M-Matrices

By

Ky Fan and **A. S. Householder**

Oak Ridge National Laboratory*

(Received October 1st, 1958)

1. **Notation and statement of the theorem.** For a real square matrix B with non-positive off-diagonal elements, it is known (see e.g. [1]) that the following conditions are mutually equivalent:

i) B is non-singular and $B^{-1} \geqslant 0$.[1]

ii) There exists a positive vector u such that $B\,u > 0$.[1]

iii) B and all its principal submatrices have positive determinants.

Following *Ostrowski* [3], [4], a real square matrix B with non-positive off-diagonal elements and satisfying one of the conditions i)—iii) will be called an *M-matrix*.

Let A be a square positive matrix and B an M-matrix, both of order n ($\geqslant 2$). By i), $B^{-1}A > 0$. Applying a classical theorem of *Perron* (see e.g. [1]) to the positive matrix $B^{-1}A$, there exist a unique number λ and a vector x (unique up to a positive scalar multiple) such that

$$\lambda > 0,\ x > 0; \tag{1}$$

$$A\,x = \lambda\,B\,x. \tag{2}$$

For each $k = 1, 2, \ldots, n$, let A_k denote the matrix of order n obtained from A by replacing its elements on the kth row and kth column by 0. Let B_k be defined similarly from B. Since every principal submatrix of B is an M-matrix, there exist, for each k, a unique number λ_k and a

* Operated by Union Carbide Corporation for the U. S. Atomic Energy Commission.

[1] A real matrix Y is said to be non- negative (positive) and we write $Y \geqslant 0$ ($Y > 0$), if all its elements are non-negative (positive). This applies to square or rectangular matrices, and also to vectors.

vector (unique up to a positive scalar multiple) $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ such that

$$\lambda_k > 0; \; x_i^{(k)} > 0 \text{ for } i \neq k, \qquad x_k^{(k)} = 0; \tag{3}$$

$$A_k \, x^{(k)} = \lambda_k \, B_k \, x^{(k)}. \tag{4}$$

The purpose of this note is to prove the following:

Theorem. *Let A be a square positive matrix and B an M-matrix, both of order $n(\geqq 2)$. Let λ, x and λ_k, $x^{(k)}(1 \leqq k \leqq n)$ satisfy* (1)—(4). *Then*:

a) *$\lambda > \lambda_k$ for each k.*

b) *There exist n positive numbers c_k such that $x = \sum_{k=1}^{n} c_k \, x^{(k)}$.*

c) *For any fixed index k, a positive number ϱ satisfies the inequalities $\lambda > \varrho > \lambda_k$, if and only if $A - \varrho \, B$ is non-singular and all elements on the kth column* (and on the kth row) *of $(A - \varrho \, B)^{-1}$ are positive.*

In case B is the identity matrix, a) is well known. Part c) generalizes an earlier result given in [1], [2], where B is the identity matrix. We shall give two essentially different proofs for b), one algebraic and the other topological.

The transpose of a matrix Y will be denoted by Y^*. The inner product of two vectors y, z will be denoted, as usual, by (y, z). The letters I, J will stand for the identity matrices of order n and $n - 1$ respectively. The ith row vector of A will be designated by a_i, that of B by b_i. The notation explained in this section will be adopted throughout the paper. Any additional notation introduced in a later section will be kept only within that section.

2. **Proof of a), b).** Let D_1 be the diagonal matrix of order n whose successive diagonal elements are the inner products $(a_i, x^{(i)})$, $(1 \leqq i \leqq n)$. Let D_2 be the diagonal matrix whose successive diagonal elements are $(b_i, x^{(i)})$, $(1 \leqq i \leqq n)$. Let L denote the diagonal matrix with λ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ as its successive diagonal elements. From (3) and the fact that the off-diagonal elements of B are non-positive, the diagonal elements of D_2 are non-positive. Since the diagonal elements of D_1 and L are positive, so the diagonal elements of $D_1 - L \, D_2$ are all positive.

We denote by X the square matrix of order n with $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ as its successive column vectors. By (4), the kth column vector of the matrix $A \, X - D_1$ is $\lambda_k \, B_k \, x^{(k)}$. Therefore

$$A X = D_1 + (B X - D_2) L. \tag{5}$$

Clearly, the positive matrices $B^{*-1} A^*$ and $A B^{-1}$ have the same maximal eigenvalue[2] as $B^{-1} A$. So there exists a vector $y > 0$ such that $A^* y = \lambda B^* y$. Then

$$\lambda X^* B^* y = (A X)^* y, \qquad y > 0; \tag{6}$$

which combined with (5) yields

$$(\lambda I - L) X^* B^* y = (D_1 - L D_2) y > 0. \tag{7}$$

From $A > 0$ and (3), we have $A X > 0$. So (6) implies $X^* B^* y > 0$. Then it follows from (7) that the diagonal elements of $\lambda I - L$ are all positive, and a) is proved.

To prove b), we introduce

$$C = (D_1 - L D_2)^{-1} B X(\lambda I - L), \tag{8}$$

$$z = (D_1 - L D_2) y > 0. \tag{9}$$

By (3), X is non-singular. Let c be the vector determined by

$$X c = x. \tag{10}$$

Equation (5) may be written $B X = D_2 + (A X - D_1) L^{-1}$. Each diagonal element of $B X$ is equal to the corresponding element of D_2, and each off-diagonal element of $B X$ is the same as the corresponding element of $(A X - D_1) L^{-1}$. Hence the diagonal elements of $B X$ are non-positive, the off-diagonal elements of $B X$ are positive. As both $(D_1 - L D_2)^{-1}$ and $\lambda I - L$ are diagonal matrices with positive diagonal elements, (8) implies that, as far as the signs of the elements are concerned, C is of the same type as $B X$. Then we can choose a suitable positive number σ such that

$$P = C + \sigma I > 0.$$

In view of (8), (9), equation (7) becomes $C^* z = z$, or

$$P^* z = (1 + \sigma) z, \qquad z > 0.$$

Since the only positive eigenvectors of a positive matrix are those corresponding to the maximal eigenvalue (see e.g. [1]), $1 + \sigma$ must be the maximal eigenvalue of P^*, and therefore also of P.

On the other hand, from (5), (10) and (2), we have $(D_1 - L D_2) c = B X(\lambda I - L) c$, which can be written $c = C c$ or $P c = (1 + \sigma) c$.

[2] The *maximal eigenvalue* of a square positive matrix is that positive eigenvalue which is greater than the absolute value of any other eigenvalue.

From (10) and $x > 0$, we have $c \neq 0$, so c is an eigenvector of P. As $1 + \sigma$ is the maximal eigenvalue of P, the eigenvector c is either positive or negative. But by (3) $c < 0$ would imply $x = X c < 0$, against (1). Hence $c > 0$, which together with (10) proves b).

3. **Second proof of b).** Consider the $(n-1)$-dimensional simplex S with vertices $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Let S_i denote the $(n-2)$-dimensional face of S spanned by the vertices $x^{(1)}, \ldots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(n)}$. By (4),

$$(b_i, x^{(k)}) = \frac{1}{\lambda_k} (a_i, x^{(k)}) > 0 \text{ for } i \neq k.$$

As $\lambda > \lambda_k$, it follows that

$$(\lambda b_i - a_i, x^{(k)}) > (\lambda_k b_i - a_i, x^{(k)}) = 0 \text{ for } i \neq k;$$

and therefore

$$(\lambda b_i - a_i, u) > 0 \text{ for } u \in S_i. \tag{11}$$

As λ is the maximal eigenvalue of $(B^{-1} A)^*$, there is a vector $y > 0$ such that $(B^{-1} A)^* y = \lambda y$. Then

$$(y, (\lambda I - B^{-1} A) u) = 0 \text{ for any vector } u. \tag{12}$$

Since $y > 0$, this shows that no vector u can satisfy $(\lambda I - B^{-1} A) u > 0$. As $B^{-1} \geqslant 0$ and each row of B^{-1} contains at least one positive element, no u can satisfy $(\lambda B - A) u > 0$. Hence

$$\operatorname*{Min}_{1 \leq i \leq n} (\lambda b_i - a_i, u) \leqslant 0 \text{ for every vector } u. \tag{13}$$

If we set

$$F_i = \{u \in S \mid (\lambda b_i - a_i, u) \leqslant 0\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

then by (11), (13),

$$F_i \cap S_i = \Theta, \ (1 \leqslant i \leqslant n); \qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = S; \tag{14}$$

where Θ denotes the empty set. By a well known result of *Sperner* [5], the n closed sets F_i with property (14) must have a non-empty intersection. Let

$$v \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i. \tag{15}$$

Then $(\lambda b_i - a_i, v) \leqslant 0$ for $1 \leqslant i \leqslant n$, or $(\lambda B - A) v \leqslant 0$. This implies $(\lambda I - B^{-1} A) v \leqslant 0$. But $y > 0$ and (12) holds for $u = v$, so $(\lambda I - B^{-1} A) v = 0$, and v differs from x only by a scalar multiple. On the other hand, from (15) and the first n equations in (14), v is in

the interior of S. There exist n positive numbers $d_k > 0$ such that $\sum_{k=1}^{n} d_k = 1$ and $v = \sum_{k=1}^{n} d_k x^{(k)}$, whence $v > 0$. Then v differs from x by a positive scalar multiple, and b) follows.

4. **Proof of c).** It suffices to consider the case $k = n$. We denote by C the principal submatrix of A formed by the first $n - 1$ rows and columns. Let D be defined similarly from B. Given a positive number ϱ, we partition the matrix $A - \varrho B$ as follows:

$$A - \varrho B = \begin{pmatrix} P & q \\ r & s \end{pmatrix}, \tag{16}$$

where P, q, r, s are submatrices of sizes $(n-1) \times (n-1)$, $(n-1) \times 1$, $1 \times (n-1)$ and 1×1 respectively. Then $P = C - \varrho D$. Because $\varrho > 0$, we have $q > 0$, $r > 0$.

Assuming $\lambda > \varrho > \lambda_n$, we shall prove that $A - \varrho B$ is non-singular and all elements on the nth column and nth row of $(A - \varrho B)^{-1}$ are positive. Since ϱ is greater than the maximal eigenvalue λ_n of $D^{-1} C$, by a classical result of *Frobenius* (see e.g. [1]), $D^{-1} C - \varrho J$ is non-singular and $(D^{-1} C - \varrho J)^{-1} < 0$.[3] But $D^{-1} \geqq 0$ and every column of D^{-1} contains at least one positive element, so $P^{-1} = (D^{-1} C - \varrho J)^{-1} D^{-1}$ exists and

$$P^{-1} < 0. \tag{17}$$

From $\lambda > \varrho$ and $A x = \lambda B x$, $x > 0$, we derive

$$(A - \varrho B) x = \lambda^{-1} (\lambda - \varrho) A x > 0. \tag{18}$$

Let $x = \begin{pmatrix} y \\ x_n \end{pmatrix}$, where x_n is the nth component of x. Then (18) may be written

$$P y + q x_n > 0, \tag{19}$$

$$r y + s x_n > 0. \tag{20}$$

From (19), (17) and $r > 0$, we have $y < -P^{-1} q x_n$ and $r y < -r P^{-1} q x_n$. The last inequality combined with (20) and $x_n > 0$ gives

$$s - r P^{-1} q > 0. \tag{21}$$

Then we can define the matrix

$$\begin{pmatrix} T & u \\ v & w \end{pmatrix} \tag{22}$$

[3] We recall that J stands for the identity matrix of order $n - 1$.

by

$$\left.\begin{aligned} w &= (s - r\,P^{-1}q)^{-1} > 0, \\ u &= -P^{-1}q\,w > 0, \\ v &= -w\,r\,P^{-1} > 0, \\ T &= P^{-1}(J - q\,v). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

One verifies that the matrix (22) so defined is $(A - \varrho B)^{-1}$. The three inequalities in (23) are consequences of (21), (17) and $q > 0$, $r > 0$. Thus the elements on the nth column and nth row of $(A - \varrho B)^{-1}$ are all positive.

It remains to prove the "if" part of c). Assume for some $\varrho > 0$, we have

$$(A - \varrho B)^{-1} = \begin{pmatrix} T & u \\ v & w \end{pmatrix} \text{ with } u > 0,\ w > 0.$$

Then $(\varrho D - C)\,u = -P\,u = q\,w$. Since $q > 0$, $w > 0$ and $D^{-1} \geqq 0$, we have

$$(\varrho J - D^{-1}C)\,u > 0, \qquad u > 0;$$

which imply $\varrho > \lambda_n$.[4] If we set $z = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, then $(A - \varrho B)\,z$ is the last column vector of I, and $(B^{-1}A - \varrho I)\,z$ is the last column vector of B^{-1}. Hence

$$(B^{-1}A - \varrho I)\,z \geqq 0,\ (B^{-1}A - \varrho I)\,z \neq 0, \qquad z > 0;$$

which imply $\varrho < \lambda$ (see (12)).

References

[1] *K. Fan*, Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements, Monatshefte für Math., 62 (1958), 219–237.

[2] *A. S. Householder*, On matrices with non-negative elements, Monatshefte für Math., 62 (1958), 238–242.

[3] *A. Ostrowski*, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Commentarii Math. Helvetici, 10 (1937), 69–96.

[4] *A. Ostrowski*, Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen, Commentarii Math. Helvetici, 30 (1956), 175–210.

[5] *E. Sperner*, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., 6 (1928), 265–272.

[4] This is a known property of the maximal eigenvalue of a positive matrix (see e.g. [1]). It can be seen also from a relation similar to (12) for $D^{-1}C$.

Äquidistante Paare ebener Kurven mit konstanter Schränkung

Von

W. Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 7. Oktober 1958)

1. Unter einem *„äquidistanten Kurvenpaar"* wird ein Kurvenpaar des dreidimensionalen euklidischen Raumes verstanden, welches ein gemeinsames Normalensystem besitzt. Solche Kurvenpaare, wie sie von irgend zwei Orthogonaltrajektorien der Erzeugendenschar einer beliebigen Strahlfläche gebildet werden, sind seinerzeit ausführlich von *A. Voss* untersucht worden[1]. Die Entfernung entsprechender Punkte der beiden Kurven ist, wie man leicht einsieht, konstant. Gibt man daher eine der beiden Kurven und die Entfernung c willkürlich vor, dann kann für die zweite irgendeine Linie genommen werden, die auf der im Abstand c um die erste Kurve gelegten Rohrfläche verläuft, von den charakteristischen Kreisen derselben abgesehen.

Über eigenartige Beziehungen bei äquidistanten Kurvenpaaren, deren beide Bestandteile in zwei zueinander *normalen Ebenen* liegen, hat der Verfasser kürzlich berichtet[2]. Hierbei wurde der Begriff der *„Schränkung"* eingeführt, das ist der — im allgemeinen veränderliche — Winkel ω entsprechender Tangenten. Insbesondere wurden die auf zwei normale Ebenen verteilten äquidistanten Kurvenpaare *konstanter Schränkung* bestimmt, während *Voss* die auf zwei *beliebige Ebenen* verteilten äquidistanten Kurvenpaare mit *normaler Schränkung* ermittelt hatte. In beiden Fällen ergaben sich für die Teilkurven *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung.*

---

[1] *A. Voss*: Über Kurvenpaare im Raume. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1909, Nr. 19, 1—106.

[2] *W. Wunderlich*: Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen. Archiv d. Math. (im Druck).

Die vorliegende Note erbringt nun den Nachweis, daß die genannten Kurven ganz allgemein als Bestandteile jener *äquidistanten Kurvenpaare konstanter Schränkung* auftreten, die sich auf zwei *Ebenen beliebiger Neigung* verteilen. Damit ergibt sich im übrigen eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen Loxodromenkreise des Torus.

2. In den beiden Kurvenebenen, die den Winkel $\alpha \leqq \pi/2$ miteinander einschließen mögen, seien kartesische Koordinatensysteme x, y bzw. u, v mit einer gemeinsamen Achse für x und u eingeführt (Abb. 1). Zusammengehörige Punkte des Kurvenpaares können dann in dem erweiterten Raumkoordinatensystem x, y, z durch $P_1(x, y, 0)$ und $P_2(u, v\cos\alpha, v\sin\alpha)$ angesetzt werden. Die zusammengehörigen Fortschreitrichtungen sind sodann gekennzeichnet durch die Tangentenvektoren

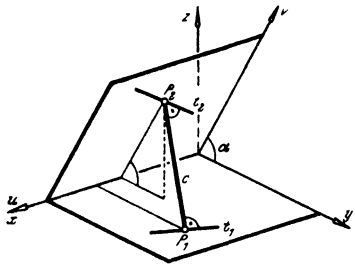

Abb. 1

$$\mathfrak{t}_1(dx : dy : 0) \text{ und } \mathfrak{t}_2(du : dv\cos\alpha : dv\sin\alpha).$$

Die beiden *Orthogonalitätsbedingungen* $P_1P_2 \perp \mathfrak{t}_i$ finden darnach ihren Ausdruck durch

$$\begin{aligned} (x-u)\,dx + (y - v\cos\alpha)\,dy &= 0, \\ (x-u)\,du + (y - v\cos\alpha)\,dv\cos\alpha - v\sin\alpha\,.\,dv\sin\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Integration der Differenz liefert die behauptete *Abstandskonstanz*

$$(x-u)^2 + (y - v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2 = c^2. \tag{2}$$

Die *Schränkung* $\omega = \sphericalangle\, \mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2$ berechnet sich schließlich aus

$$\cos\omega = \frac{dx\,du + dy\,dv\cos\alpha}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,\sqrt{du^2+dv^2}}. \tag{3}$$

Die gesuchten *äquidistanten Paare ebener Kurven mit fester Schränkung* sind mithin durch die Gleichungen (1), (2) und (3) unter der Voraussetzung α, c, $\omega = \text{const}$ bestimmt, wobei eine der Gleichungen (1) entbehrlich ist. Das Gleichungssystem sieht nicht sehr einladend aus, läßt sich aber trotzdem weitgehend auflösen.

3. Schreibt man abkürzend für $x - u = \xi$ und $v - y\cos\alpha = \eta$, so lauten die Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned} \xi\, dx &= (\eta \cos\alpha - y \sin^2\alpha)\, dy, \\ \xi\, du &= \eta\, dv, \\ \xi^2 + \eta^2 &= c^2 - y^2 \sin^2\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Löst man die erste und dritte Gleichung nach ξ und η auf, wobei $dx/dy = x'$ gesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-x'\, y \sin^2\alpha \pm \cos\alpha \sqrt{c^2(x'^2 + \cos^2\alpha) - y^2 \sin^2\alpha (x'^2+1)}}{x'^2 + \cos^2\alpha}, \\ \eta &= \frac{y \sin^2\alpha \cos\alpha \pm x' \sqrt{c^2(x'^2 + \cos^2\alpha) - y^2 \sin^2\alpha (x'^2+1)}}{x'^2 + \cos^2\alpha}. \end{aligned} \tag{5}$$

Auf Grund der zweiten Gleichung (4) nimmt die Bedingung (3) folgende Gestalt an:

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.\,\cos\omega = \eta\, x' + \xi \cos\alpha. \tag{6}$$

Geht man hier mit den Werten von ξ und η gemäß (5) ein, so gelangt man zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\sqrt{x'^2+1}\,.\,\sqrt{c^2 - y^2\sin^2\alpha}\,.\cos\omega = \pm\sqrt{c^2(x'^2+\cos^2\alpha) - y^2\sin^2\alpha(x'^2+1)},$$

die sich auf die Gestalt

$$x'^2(c^2 - y^2\sin^2\alpha)\sin^2\omega = y^2\sin^2\alpha\sin^2\omega + c^2(\sin^2\alpha - \sin^2\omega) \tag{7}$$

bringen läßt. Aus dieser gewinnt man dann schließlich nach Trennung der Variablen die Lösung

$$x = \int \sqrt{\frac{y^2+a^2}{b^2-y^2}}\, .\, dy \text{ mit } \begin{aligned} a^2 &= c^2(\csc^2\omega - \csc^2\alpha), \\ b^2 &= c^2 \csc^2\omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Da das aufzulösende Gleichungssystem (1), (2), (3) den gleichzeitigen Tausch von x mit u und y mit v verträgt, folgt analog:

$$u = \int \sqrt{\frac{v^2+a^2}{b^2-v^2}}\, dv. \tag{9}$$

4. Wie schon der Fragestellung nach zu erwarten war, besteht mithin das gesuchte äquidistante Kurvenpaar aus zwei *kongruenten Bestandteilen* k_1 und k_2. Diese durch (8) und (9) dargestellten Kurven sind im übrigen als *Meridiane von Drehflächen konstanter positiver Krümmung* wohlbekannt[3]. Der größte Parallelkreis hat dabei den Radius b, die

[3] *G. Darboux*: Leçons sur la théorie générale des surfaces, I (Paris 1887), 79. *G. Scheffers*: Einführung in die Theorie der Kurven (Leipzig 1908), 293. *K. Strubecker*: Differentialgeometrie III (Sammlg. Göschen 1180/1180a, Berlin, 1958), 141.

Flächenkrümmung den Wert $K = 1/(a^2 + b^2) = c^{-2} \sin^2 \omega$.

Bei den genannten Flächen und somit auch bei den vorliegenden Kurvenpaaren sind *drei Typen* zu unterscheiden (die Winkel α und ω können dabei auf den ersten Quadranten beschränkt bleiben):

I. $\omega < \alpha$ ($a^2 > 0$, Abb. 2). Die Kurven haben das Aussehen von Wellenlinien und entstehen, wie *G. Scheffers* gezeigt hat, als Randkurven

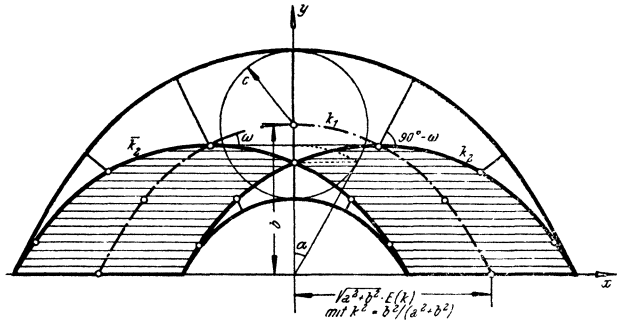

Abb. 2. Annahme: $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 26{,}6^0$)

bei der Abwicklung eines schiefen Kreiszylinders[4]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Spindeltypus".

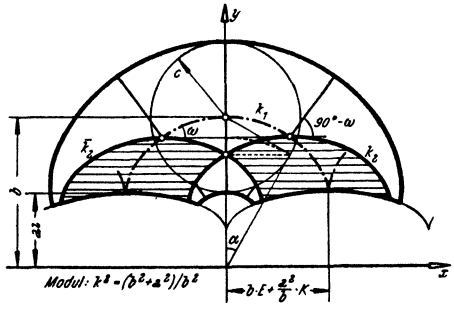

Abb. 3. Annahme: $a = i$, $b = 2$, $c = 1$ ($\alpha = 30^0$, $\omega = 35{,}2^0$).

II. $\omega > \alpha$ ($a^2 < 0$, Abb. 3). Die Kurven haben das Aussehen von gemeinen Zykloiden und können, wie der Verfasser bemerkt hat, durch Aufbiegen eines Kreissegmentes erzeugt werden, wenn Sehne und Bogen

[4] *G. Scheffers*: Zusammenhang zwischen der Abwicklung eines Kreiszylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung. Archiv Math. Phys., III. Reihe, 6 (1903), 249—250.

dabei eben bleiben[5]. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind vom „Wulsttypus".

III. $\omega = \alpha$ $(a=0)$. In diesem Grenzfall ergeben sich *Kreise* vom Radius b. Die zugehörigen Drehflächen konstanter Krümmung sind Kugeln.

Mit Rücksicht auf eine eingangs gemachte Bemerkung, derzufolge k_2 auf jener *Rohrfläche* verläuft, die im Abstand c um die Mittellinie k_1 gelegt werden kann, und wegen $\sin\alpha = c/b$, gilt folgender

Satz: *Schneidet man eine Rohrfläche Φ, die einen Meridian k_1 einer Drehfläche konstanter positiver Krümmung zur Mittellinie hat, mit einer die Drehflächenachse enthaltenden Tangentialebene, so erhält man zwei zu k_1 kongruente Schnittkurven k_2 und $\bar{k}_2$, die mit k_1 je ein äquidistantes Kurvenpaar bilden und die Schar der charakteristischen Kreise von Φ unter konstantem Winkel durchsetzen.*

Hierin ist eine bemerkenswerte Verallgemeinerung der *Villarceau*schen *Loxodromenkreise des Torus* zu erblicken, auf die man im Grenzfall III stößt.

5. Um die *Phasenverschiebung* der kongruenten Bestandteile k_1 und k_2 festzustellen, eliminieren wir ξ aus den ersten beiden Gleichungen (4), schreiben statt η wiederum $v - y\cos\alpha$ und drücken schließlich dx/dy und du/dv gemäß (8) bzw. (9) durch y bzw. v aus. Auf diese Weise gelangen wir zu einer (algebraischen) Beziehung zwischen y und v, die sich nach einigen Umformungen und Kürzung durch $y^2 - v^2$ auf folgende Form bringen läßt:

$$c^2v^2y^2+(a^2+b^2-c^2)b^2(v^2+y^2)-2(a^2+b^2)b\sqrt{b^2-c^2}\,.\,vy-a^2b^2c^2=0 \quad (10)$$

oder

$$\sin^2\alpha\sin^2\omega\,.v^2\,y^2+c^2\cos^2\omega\,.(v^2+y^2)-2\,c^2\cos\alpha\,.vy-c^4\,(1-\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\alpha})=0 \quad (11)$$

Insbesondere gehören, wie auch in Abb. 2 und 3 erkennbar, zu $v=0$ die Werte $y = \pm\, a\,\mathrm{tg}\,\omega$ und zu $v = b$ der Wert $y = c\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

6. Die von den gemeinsamen Normalen eines der hier betrachteten Kurvenpaare gebildete *Strahlfläche* Σ ist im allgemeinen, d. h. für $a \neq 0$, *transzendent*, da sie von den beiden Kurvenebenen nach den

[5] *W. Wunderlich*: Aufgabe 300 (mit Auflösung). Elemente d. Math. **13** (1958), 113–114.

transzendenten Kurven k_1, k_2 geschnitten wird. Die algebraische Beziehung (10) hat jedoch eine algebraische Eigenschaft von Σ zur Folge, nämlich die Existenz eines *algebraischen Berührungszylinders* Ψ mit x-parallelen Erzeugenden. Die durch eine Erzeugende von Σ gehende x-parallele Ebene schneidet ja auf der y-Achse und der v-Achse Stücke ab, die durch die (2,2)-Korrespondenz (10) miteinander verknüpft sind; der Zylinder Ψ ist mithin von *4. Klasse.*

Führt man in dem schiefwinkligen x, y, v-System vermöge $\lambda x + \mu y + \nu z = 1$ inhomogene Ebenenkoordinaten λ, μ, ν ein, so erhält man die Gleichung des Zylinders Ψ einfach dadurch, daß man in (10) y durch μ^{-1} und v durch ν^{-1} ersetzt; sie lautet demnach

$$a^2b^2c^2\mu^2\nu^2 + 2(a^2+b^2)\,b\sqrt{b^2-c^2}\,.\,\mu\nu - (a^2+b^2-c^2)\,b^2(\mu^2+\nu^2) - c^2 = 0. \quad (12)$$

Man bestätigt damit im Falle $a \neq 0$ die angegebene Zylinderklasse 4 und erkennt leicht, wenn man μ bzw. ν über alle Schranken wachsen läßt, daß die Ebenen von k_1 und k_2 den Zylinder doppelt berühren. Da keine weitere Doppeltangentialebene vorhanden ist, liefert die Plücker-Formel die *Ordnung 8.*

In dem durch $a = 0$ gekennzeichneten Grenzfall III reduziert sich der Grad von (12) und damit die Klasse von Ψ auf 2. Nähere Untersuchung ergibt, daß Ψ ein *gleichseitig-hyperbolischer Zylinder* wird. Die Strahlfläche Σ, die hier algebraisch und vom 4. Grade ist (VII. Art nach *Sturm*), wurde seinerzeit von *J. Krames* als „Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises" eingehend studiert[6].

[6] *J. Krames*: Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919), 1—12. *E. Müller-J. Krames*: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Wien 1931), 283.

Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew

Von

P. Lesky und **A. Kaiser**, Innsbruck*

(Eingegangen am 15. Oktober 1958)

Einleitung: Die Interpolationsaufgabe, ein Polynom $p(x)$ eines Grades $\leqq N$ zu bestimmen, das an den äquidistanten Stellen $x = 0, 1, 2, \ldots, N$ die vorgegebenen Werte $p_0, p_1, \ldots, p_N$ annimmt, wird am schnellsten gelöst, wenn man Polynome $y_\nu(x)$ der Grade $\nu = 0, 1, \ldots, N$ kennt, welche den Orthogonalitätsrelationen (2) genügen ($y_\nu(n) = y_{\nu n}$ gesetzt). Dann gilt nämlich

$$p(x) = c_0\, y_0(x) + c_1\, y_1(x) + \ldots + c_N\, y_N(x)$$

mit den „Fourierkoeffizienten":

$$c_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=0}^{N} p_n\, y_{\nu n}, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, N.$$

Zweck dieser Arbeit ist es vor allem zu zeigen, daß auch diese diskreten und endlichen Orthogonalsysteme, genau so wie die kontinuierlichen und unendlichen Systeme, am einfachsten durch Lösung eines Minimum-Problems mit Hilfe der Variationsrechnung konstruiert werden können; diese Methode ist also ganz allgemein anwendbar und gibt auch die Erklärung für die eigentümliche Gestalt der Polynome, die sonst gewöhnlich im Dunkeln gelassen oder als ein glücklicher Zufall hingestellt wird. Außerdem dürfte es interessant sein, ein derartiges Variationsproblem in der Differenzenrechnung behandelt zu sehen.

W. Gröbner.

Stellen wir die Aufgabe, Polynome ν-ten Grades in n mit reellen Koeffizienten

$$y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \ldots + \binom{n}{\nu} a_{\nu\nu} \quad (\nu, n = 0, 1, 2, \ldots, N) \tag{1}$$

zu bilden, die den Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}\, y_{\mu n} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ \sigma_\nu > 0 & \text{für } \nu = \mu \end{cases} \tag{2}$$

genügen, dann lösen die *orthogonalen Polynome*, die in der Statistik häufig verwendet werden und deren erste Berechnung auf *Tschebyschew*[1]

---

* Diese Arbeit wurde im Mathematischen Institut der Universität Innsbruck ausgeführt.

[1] Eine erschöpfende Literaturangabe findet man in [1], S. 155.

zurückgeht, dieses Problem. In dieser Arbeit sollen die *orthogonalen Polynome* nach einem Verfahren berechnet werden, das auf einem Variationsprinzip beruht, und außerdem weitere interessante Eigenschaften der Polynome angegeben werden.

1. Aufstellung und Lösung des Variationsproblems. Erklären wir die Differenzen der Polynome (1) in folgender Art

$$\Delta^0 y_{\nu n} = y_{\nu n},\ \Delta^k y_{\nu n} = y_{\nu, n+k} - \binom{k}{1} y_{\nu, n+k-1} + \ldots + (-1)^k y_{\nu n}\ (k = 1, 2, \ldots), \quad (3)$$

dann ist die ν-te Differenz

$$\Delta^\nu y_{\nu n} = a_{\nu\nu} \neq 0.$$

Die Orthogonalitätsbedingungen (2) können wir durch ein Variationsproblem ersetzen: Nach einem Hilfssatz von *W. Gröbner*[2] entspricht nämlich die Forderung

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \text{Min!} \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots, N$$

unter der Nebenbedingung, daß der ν-te Koeffizient der Polynome (1) festbleibt, gerade den Orthogonalitätsbedingungen (2). Fügen wir diese Nebenbedingung mit einem Lagrange-Faktor $2\lambda_n$ zur obigen Minimalbedingung, so erhalten wir das Variationsproblem

$$\Omega = \sum_{n=0}^{N} [y_{\nu n}^2 + 2\lambda_n(\Delta^\nu y_{\nu n} - a_{\nu\nu})] = \text{Min!} \quad (4)$$

Durch Überlagerung einer willkürlichen Zahlenfolge $\{z_n\}$ variieren wir

$$\Omega(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \{[y_{\nu n} + \varepsilon z_n]^2 + 2\lambda_n[\Delta^\nu(y_{\nu n} + \varepsilon z_n) - a_{\nu\nu}]\} = \text{Min!}$$

$\Omega(\varepsilon)$ hat als Funktion von ε für $\varepsilon = 0$ ein Minimum; daher muß

$$\delta\Omega = \left(\frac{\partial\Omega(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 2\sum_{n=0}^{N}[y_{\nu n} z_n + \lambda_n \Delta^\nu z_n] = 0,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \quad (5)$$

sein.

Diese Bedingung (5) muß für jede beliebige Folge $\{z_n\}$ erfüllt sein, daher versuchen wir (5) so umzuformen, daß eine Ausklammerung der willkürlichen z_n gelingt. Indem wir die partielle Summation

$$\sum_{n=a}^{b} u_n \Delta v_n = [u_n v_n]_{n=a}^{n=b+1} - \sum_{n=a}^{b} v_{n+1} \Delta u_n, \quad (6)$$

[2] Die entsprechenden Arbeiten sind in [2] und [3] zitiert.

die dem Sinne nach der partiellen Integration entspricht, auf das zweite Glied in (5) wiederholt anwenden, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n \Delta^\nu z_n = [\lambda_n \Delta^{\nu-1} z_n - \Delta \lambda_n \Delta^{\nu-2} z_{n+1} + \ldots + \\ + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_n . z_{n+\nu-1}]_{n=0}^{n=N+1} + (-1)^\nu \sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_n \cdot z_{n+\nu}.$$

Formen wir die in dieser Gleichung rechts stehende Summe um

$$\sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_n \cdot z_{n+\nu} = \sum_{n=0}^{N} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n + \sum_{n=N+1}^{N+\nu} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n - \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n,$$

dann entsteht für die Variation (5) letzten Endes

$$\frac{1}{2} \delta \Omega = \sum_{n=0}^{N} [y_{\nu n} + (-1)^\nu \Delta^\nu \lambda_{n-\nu}] z_n - \\ - [\lambda_0 \Delta^{\nu-1} z_0 - \Delta \lambda_0 \Delta^{\nu-2} z_1 + \ldots + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_0 \cdot z_{\nu-1}] + \\ + (-1)^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n + [\lambda_{N+1} \Delta^{\nu-1} z_{N+1} - \Delta \lambda_{N+1} \Delta^{\nu-2} z_{N+2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{\nu-1} \Delta^{\nu-1} \lambda_{N+1} \cdot z_{N+\nu}] + (-1)^\nu \sum_{n=N+1}^{N+\nu} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \cdot z_n. \tag{7}$$

Die Variation $\delta \Omega$ muß bei jeder Wahl der Folge $\{z_n\}$ verschwinden; wählen wir etwa $z_k = 1$ $(\nu \leqq k \leqq N)$ und alle übrigen z_i gleich null, dann folgt aus (7), wenn wir wieder n statt k schreiben

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu+1} \Delta^\nu \lambda_{n-\nu} \text{ für } \nu \leqq n \leqq N; \tag{8}$$

das bedeutet aber, daß der Lagrange-Faktor ein Polynom des Grades 2ν in n sein muß. Lassen wir die Gleichung (8) auch für $n = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ gelten, so entspricht dies einer Festlegung des Lagrange-Faktors für negative Indizes; diese ist ohne weiteres möglich, denn im Variationsprinzip (4) kommen die λ_n mit negativem Index nicht vor und sind daher frei wählbar. Haben wir λ_n so gewählt, dann verschwindet überhaupt die erste Summe in (7); in den übrigen Gliedern lösen wir die Differenzen von z_n und $\lambda_{n-\nu}$ entsprechend der Gleichung (3) auf und erhalten[3]

[3] In [5] findet man eine ausführlichere Darstellung dieser Berechnung an einem ähnlichen Fall.

$$\frac{1}{2}\delta\,\Omega = \sum_{k=1}^{\nu}(-1)^k z_{\nu-k}\Big[\sum_{j=0}^{\nu-k}(-1)^j\lambda_j\{\binom{\nu-j-1}{k-1}+\binom{j+1}{1}\binom{\nu-j-2}{k-1}+\ldots+$$

$$+\binom{\nu-k-j}{k-1}\binom{k-1}{k-1}-\binom{\nu}{k+j}\}+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_{-j-1}\binom{\nu}{k-j-1}\Big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1}z_{N+1+\nu-k}\Big[\sum_{j=0}^{\nu-k}(-1)^j\lambda_{N+1+j}\{\binom{\nu-j-1}{k-1}+\binom{j+1}{1}\binom{\nu-j-2}{k-1}+\ldots+$$

$$+\binom{\nu-k-j}{k-1}\binom{k-1}{k-1}-\binom{\nu}{k+j}\}+\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_{N-j}\binom{\nu}{k-j-1}\Big].$$

Die Ausdrücke in den geschlungenen Klammern sind null, denn es gilt[4]

$$\sum_{s=0}^{p-m}\binom{p-s}{m}\binom{j+s}{j}=\binom{p+j+1}{p-m}$$

und es bleibt

$$\frac{1}{2}\delta\,\Omega = -z_{\nu-1}\cdot\lambda_{-1}+z_{\nu-2}\left[\binom{\nu}{1}\lambda_{-1}-\lambda_{-2}\right]-\ldots+(-1)^\nu z_0\left[\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_{-1}-\right.$$

$$\left.-\binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{-2}+\ldots+(-1)^{\nu-1}\lambda_{-\nu}\right]+z_{N+\nu}\lambda_N-z_{N+\nu-1}\left[\binom{\nu}{1}\lambda_N-\lambda_{N-1}\right]+$$

$$+\ldots+(-1)^{\nu+1}z_{N+1}\left[\binom{\nu}{\nu-1}\lambda_N-\binom{\nu}{\nu-2}\lambda_{N-1}+\ldots+(-1)^{\nu-1}\lambda_{N+1-\nu}\right].$$

Dieser Ausdruck muß ebenfalls für jede Wahl von $\{z_n\}$ verschwinden. Setzt man $z_{\nu-1}=1$ und alle anderen z_k gleich null, so folgt $\lambda_{-1}=0$. Setzt man $z_{\nu-2}=1$ und alle anderen z_k null, so muß auch $\lambda_{-2}=0$ sein, denn λ_{-1} ist bereits null. So weiter schließend findet man die Bedingung, daß alle λ_{-j-1} und λ_{N-j} für $j=0,1,2,\ldots,\nu-1$ gleich null sein müssen. Das Polynom des Grades 2ν in n, das den Lagrange-Faktor darstellt, kann daher, abgesehen von einem konstanten Normierungsfaktor, nur die Form

$$\lambda_n=\binom{n+\nu}{\nu}\binom{n+\nu-N-1}{\nu}$$

haben. Indem wir einen Vorzeichenwechsel in diesen Normierungsfaktor einbeziehen, erhalten wir als endgültige Darstellung des Lagrange-Faktors und der nicht normierten Polynome

$$\lambda_{n-\nu}=(-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu},\quad y_{\nu n}=\Delta^\nu\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\};\quad \nu,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{9}$$

2. Normierung der Polynome. Die in (9) auftretende Differenz können wir nach (3) entwickeln und erhalten so die Darstellung

[4] Vergleiche mit [6], S. 251.

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n+k}{\nu} \binom{n+k-N-1}{\nu} (-1)^{\nu-k}. \tag{9'}$$

Diese Form ist aber zur Berechnung der orthogonalen Polynome nicht gut geeignet, da sie Potenzen höheren als ν-ten Grades in n enthält, die sich erst beim Ausrechnen wegheben. Wir suchen daher eine andere Darstellung, in der n von vornherein höchstens in der ν-ten Potenz vorkommt. Zu diesem Zweck zerlegen wir die ν-te Differenz in (9) nach der Produktregel der Differenzenrechnung und erhalten

$$y_{\nu n} = \Delta^{\nu}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \Delta^{k}\binom{n}{\nu} \Delta^{\nu-k}\binom{n+k-N-1}{\nu}.$$

Die darin enthaltenen Differenzen lassen sich leicht berechnen

$$\Delta^{k}\binom{n}{\nu} = \binom{n}{\nu-k}, \quad \Delta^{\nu-k}\binom{n+k-N-1}{\nu} = \binom{n+k-N-1}{k},$$

so daß letzten Endes durch deren Einsetzen

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}; \quad \nu, n = 0, 1, \ldots, N \tag{9''}$$

entsteht.

Zur Normierung der Polynome bilden wir, indem wir wiederum sukzessive die partielle Summation anwenden,

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \sum_{n=0}^{N} \Delta^{\nu}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} y_{\nu n} = \left[\Delta^{\nu-1}\left\{\binom{n}{\nu}\binom{n-N-1}{\nu}\right\} y_{\nu n} -\right.$$

$$\left. -\Delta^{\nu-2}\left\{\binom{n+1}{\nu}\binom{n-N}{\nu}\right\}\Delta\, y_{\nu n} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\binom{n+\nu-1}{\nu}\binom{n+\nu-N-2}{\nu}\Delta^{\nu-1} y_{\nu n}\right]_{n=0}^{n=N+1} +$$

$$+ (-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu}\binom{n+\nu-N-1}{\nu}\Delta^{\nu}\, y_{\nu n}.$$

Die in der eckigen Klammer auftretenden fallenden Differenzen können einfach als Summen dargestellt werden

$$\Delta^{\nu-j-1}\left\{\binom{n+j}{\nu}\binom{n+j-N-1}{\nu}\right\} = \sum_{k=0}^{\nu-j-1} \binom{\nu-j-1}{k}\binom{n+j+k}{\nu}\binom{n+j+k-N-1}{\nu}(-1)^{\nu-j-k-1},$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1,$$

die sowohl für $n = 0$ als auch $n = N+1$ verschwinden, so daß nur die letzte Summe zur Berechnung des Normierungsfaktors bleibt. Bei der Berechnung der ν-ten Differenz von $y_{\nu n}$ mit Hilfe von (9) liefert nur das Glied der 2ν-ten Potenz in n einen Beitrag

$$\Delta^{\nu} y_{\nu n} = \Delta^{\nu}\left[\Delta^{\nu}\frac{n^{2\nu}}{\nu!\,\nu!}\right] = \binom{2\nu}{\nu}; \tag{10}$$

außerdem findet man für die Summe[5]

$$(-1)^{\nu} \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu} \binom{n+\nu-N-1}{\nu} = \sum_{n=0}^{N} \binom{n+\nu}{\nu} \binom{N-n}{\nu} = \binom{N+\nu+1}{N-\nu}$$

und daher letzten Endes

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n}^2 = \binom{N+\nu+1}{N-\nu} \binom{2\nu}{\nu}.$$

Die normierten Polynome $r_{\nu n}$ haben also die Form

$$r_{\nu n} = \left[\binom{N+\nu+1}{N-\nu} \binom{2\nu}{\nu}\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}; \quad \nu, n=0, 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

3. Die Tschebyschewschen Polynome für ein symmetrisches Intervall und Ableitung einer Rekursionsformel. In der Literatur[6] findet man die orthogonalen Polynome meistens mit normiertem höchsten Koeffizienten ($a_{\nu\nu} = 1$) und auf einen (bezüglich der Null) symmetrisch liegenden Orthogonalitätsbereich bezogen. Es sollen daher auch unsere Polynome $y_{\nu n}$ in diese Form gebracht werden, einerseits um eine Vergleichsmöglichkeit zu erhalten, andererseits um auf einfache Art eine Rekursionsformel für die Polynome herleiten zu können.

Aus Formel (10) läßt sich unmittelbar $a_{\nu\nu}$ berechnen

$$a_{\nu\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^3},$$

so daß die nicht normierten Polynome, wenn der Koeffizient der höchsten n-Potenz eins sein soll, lauten

$$y_{\nu n}^{*} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{n}{\nu-k} \binom{n+k-N-1}{k}. \tag{12}$$

Indem wir außerdem die Transformation $n = x + \frac{N}{2}$ durchführen, durch die unser Orthogonalitätsbereich $[0, N]$ in den Bereich $[-\frac{N}{2}, +\frac{N}{2}]$ übergeführt wird[7], erhalten wir

---

[5] Vergleiche mit [6], S. 251.

[6] Die in diesem Punkt hergeleiteten Formeln für die orthogonalen Polynome findet man in [1], S. 156, während die Rekursionsformel in ähnlicher Art und Weise in [4], S. 209—210 hergeleitet wird.

[7] x ist natürlich unter Umständen nicht ganzzahlig. In der Praxis pflegt man N gerade zu wählen, um x ganzzahlig zu erhalten; vergleiche zum Beispiel als praktische Anwendung [7], S. 16—22.

$$z_{\nu x} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!}\,\Delta^\nu\binom{x+\frac{N}{2}}{\nu}\binom{x-\frac{N}{2}-1}{\nu} = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\binom{x+\frac{N}{2}}{\nu-k}\binom{x+k-\frac{N}{2}-1}{k}, \quad (13)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, N;\ x = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, +\frac{N}{2}.$$

Die ersten sechs Polynome sollen zum praktischen Gebrauch ausführlich angeschrieben werden:

$$z_{0x} = 1,$$

$$z_{1x} = x,$$

$$z_{2x} = x^2 - \frac{(N+1)^2 - 1}{12},$$

$$z_{3x} = x^3 - \frac{3(N+1)^2 - 7}{20}\,x,$$

$$z_{4x} = x^4 - \frac{3(N+1)^2 - 13}{14}\,x^2 + \frac{3(N+1)^4 - 30(N+1)^2 + 27}{560},$$

$$z_{5x} = x^5 - \frac{5(N+1)^2 - 35}{18}\,x^3 + \frac{15(N+1)^4 - 20(N+1)^2 + 407}{1008}\,x.$$

Aus der Darstellung (13) sieht man unmittelbar, wenn man etwa die Summe zerlegt anschreibt und die gleichweit von den Enden stehenden Glieder vergleicht, daß sich die Glieder mit $x^{\nu-1}$, $x^{\nu-3}$, $x^{\nu-5}$ usw. wegheben. Diese Tatsache wird es uns gestatten, auf einfache Weise eine Rekursionsformel für die orthogonalen Polynome herzuleiten. Es gibt dann nämlich eine Beziehung

$$x \cdot z_{\nu,x} = z_{\nu+1,x} + D_{\nu,1} \cdot z_{\nu-1,x} + D_{\nu,2} \cdot z_{\nu-3,x} + \ldots, \quad (14)$$

in der der konstante Koeffizient $D_{\nu,1}$ so bestimmt wird, daß der Koeffizient von $x^{\nu-1}$ mit dem entsprechenden Koeffizienten in $x \cdot z_{\nu,x}$ übereinstimmt, $D_{\nu,2}$ so, daß der Koeffizient von $x^{\nu-3}$ übereinstimmt usw.

Geht man ebenso wie bei der Normierung der Polynome (Punkt 2) vor, indem man sukzessive die partielle Summation anwendet, dann findet man

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x} \cdot x^\mu = \frac{(\nu!)^3}{(2\nu)!}\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} \Delta^\nu\binom{x+\frac{N}{2}}{\nu}\binom{x-\frac{N}{2}-1}{\nu} \cdot x^\mu \begin{cases} = 0 \text{ für } \mu < \nu \\ \neq 0 \text{ für } \mu = \nu \end{cases} \quad (15)$$

und sieht sofort auch die Gültigkeit der weiteren Beziehungen

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x} \cdot z_{\mu,x} \cdot x \begin{cases} = 0 \text{ für } \mu > \nu + 1 \\ \qquad \nu > \mu + 1 \\ \neq 0 \text{ für } \nu = \mu \pm 1 \end{cases}$$

ein. Da nur die höchste x-Potenz bei der Normierung einen Beitrag liefert, gilt

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x} \cdot z_{\nu,x} \cdot x = \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x}^2 = \frac{(\nu!)^4}{(2\nu)!} \binom{N+\nu+1}{N-\nu}. \tag{16}$$

Wir multiplizieren nun (14) mit $z_{\nu-1,x}$ und summieren über den Orthogonalitätsbereich; dann folgt

$$\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} x \cdot z_{\nu,x} \cdot z_{\nu-1,x} = D_{\nu,1} \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x}^2,$$

denn wegen der Orthogonalität der $z_{k,x}$ entfallen alle übrigen rechts stehenden Glieder. Daraus erhalten wir für $D_{\nu,1}$ unter Verwendung von (16)

$$D_{\nu,1} = \sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu,x}^2 \left[\sum_{x=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} z_{\nu-1,x}^2 \right]^{-1} = \frac{(N+\nu+1)(N-\nu+1)\nu^2}{4(4\nu^2-1)}. \tag{17}$$

Die übrigen konstanten Koeffizienten in (14) sind alle null: Multipliziert man nämlich (14) mit $x^{\nu-3}$ und summiert über den Orthogonalitätsbereich, dann ist die linke Seite nach (15) null und auf der rechten Seite bleibt $D_{\nu,2}$ als Faktor eines von null verschiedenen Gliedes stehen, das heißt es muß $D_{\nu,2} = 0$ sein. Durch Multiplikation mit $x^{\nu-5}$ zeigt sich dasselbe für $D_{\nu,3}$ usw.

Nachdem alle konstanten Koeffizienten in (14) berechnet sind, finden wir durch Einsetzen von $D_{\nu,1}$ aus (17) in (14) die Rekursionsformel

$$4(4\nu^2-1)\, z_{\nu+1,x} - 4(4\nu^2-1)\, x z_{\nu,x} + (N+\nu+1)(N-\nu+1)\nu^2 z_{\nu-1,x} = 0, \tag{18}$$

die für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, N$ gilt. Transformieren wir wieder auf unsere ursprünglichen Polynome $y_{\nu n}$ zurück, dann haben wir für diese die Rekursionsformel

$$(\nu+1)^2 y_{\nu+1,n} - (2n-N)(2\nu+1) y_{\nu,n} + \\ + (N+\nu+1)(N-\nu+1) y_{\nu-1,n} = 0, \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{19}$$

mit der Festlegung $y_{-1,n} = 0$.

4. Christoffelsche Summenformel und Abschätzung der Polynome. Wir dividieren die Rekursionsformel (19) durch $(N + \nu + 1)(\nu + 1)$, multiplizieren diesen neuen Ausdruck mit $y_{\nu,m}$ $(m=0, 1, 2, \ldots, N)$ und erhalten

$$\frac{(2n-N)(2\nu+1)}{(N+\nu+1)(\nu+1)} y_{\nu,n}\, y_{\nu,m} = \frac{(\nu+1)}{(N+\nu+1)} y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} + \frac{(N-\nu+1)}{(\nu+1)} y_{\nu-1,n}\, y_{\nu,m}.$$

Vertauscht man in dieser Formel n und m und zieht die so entstehende Beziehung von der ursprünglichen ab, dividiert dann noch durch $\binom{N+\nu}{\nu}\binom{N+1}{\nu+1}$, so entsteht

$$2(n-m)(2\nu+1)\left[\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}(\nu+1)^2\right]^{-1} y_{\nu,n}\, y_{\nu,m} =$$
$$= \left[\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}\right]^{-1}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} - y_{\nu+1,m}\, y_{\nu,n}) +$$
$$+ \left[\binom{N+\nu}{\nu}\binom{N+1}{\nu}\right]^{-1}(y_{\nu-1,n}\cdot y_{\nu,m} - y_{\nu-1,m}\, y_{\nu,n}).$$

Summiert man letzten Endes diesen Ausdruck über ν, so entfallen rechts vom Gleichheitszeichen alle bis auf das letzte Glied und es bleibt

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{2(n-m)(2k+1)}{\binom{N+k+1}{k+1}\binom{N+1}{k+1}(k+1)^2} y_{k,n}\, y_{k,m} = \frac{1}{\binom{N+\nu+1}{\nu+1}\binom{N+1}{\nu+1}}(y_{\nu+1,n}\, y_{\nu,m} - y_{\nu+1,m}\, y_{\nu,n}),$$

$$\nu, n, m = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{20}$$

eine Beziehung, die der Summendarstellung von *Christoffel*[8] entspricht.

Einige weitere Beziehungen, die für das praktische Rechnen mit den Polynomen von Bedeutung sind, können noch angegeben werden.

Aus der Orthogonalität zum ersten Polynom $y_{0n} = 1$ folgt für alle folgenden

$$\sum_{n=0}^{N} y_{\nu n} = 0, \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, N. \tag{21}$$

Schreibt man (9′) in anderer Form

$$y_{\nu n} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k}\binom{n}{\nu-k}\binom{N-n}{k}(-1)^k,$$

und schreibt die Summe gliedweise an, dann sieht man unmittelbar die Gültigkeit der Symmetriebeziehung

$$y_{\nu n} = (-1)^{\nu} y_{\nu,N-n}. \tag{22}$$

[8] Vergleiche etwa mit [8], S. 277.

Mit Hilfe des Normierungsfaktors läßt sich eine einfache Abschätzung der Polynome angeben. Es gilt nämlich

$$y_{\nu n}^2 = \binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu} \cdot r_{\nu n}^2 \leqq \binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu} \sum_{n=0}^{N} r_{\nu n}^2$$

und daher

$$| y_{\nu n} | \leqq \sqrt{\binom{N+\nu+1}{N-\nu}\binom{2\nu}{\nu}}. \tag{23}$$

Literatur

[1] Encycl. d. scienc. mathémat. 1/4.

[2] *W. Gröbner*: Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni, Sem. Mat. Roma, 3 (4), 29—51, 1939.

[3] *W. Gröbner*: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Mh. Math. **52**, 38—54, 1948.

[4] *R. L. Anderson* and *T. A. Bancroft*: Statistical Theory in Research, New York, Toronto, London: Mc. Graw—Hill Book Company, Inc. 1952.

[5] *P. Lesky*: Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen, Mh. Math. **63**, 59—83, 1959.

[6] *E. Netto*: Lehrbuch der Kombinatorik, Leipzig: Teubner, 1901.

[7] *W. D. Sellers*: Studies in Synoptic Climatology, Massachusetts Institute of Technology, Department of Meteorology, Cambridge, Massachusetts; Final Report synoptic climatology Project, 1956.

[8] *G. Vitali* e *G. Sansone*: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, Bologna: Nicola Zanichelli, 1946, parte II.

Einige Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen

Von

Franz Heigl, Weiden (Opf.)*

(Eingegangen am 23. Oktober 1958)

In meiner Arbeit „Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen" [1] sind verschiedene Schranken für die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit beliebigen Koeffizienten angegeben. In dieser Schrift wird nun das dort angegebene Abschätzungsprinzip, das sämtlichen Ergebnissen zugrundeliegt, noch etwas allgemeiner gefaßt. Wir kommen so zu weiteren Schranken, die in Beziehung zu gewissen klassischen Ergebnissen stehen, insofern, als sie dieselben als Spezialfälle enthalten.

Die algebraische Gleichung habe komplexe Koeffizienten; sie sei von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu z^{n-\mu} = 0, \tag{1}$$

wobei $a_0 = 1$, $a_\mu = 0$ für $\mu < 0$, $\mu > n$, $|a_\mu| = A_\mu$ sei.

Es werden nun positive Funktionen der Koeffizientenbeträge und eines positiven Parameters M eingeführt, die wir mit

$$g_\nu(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M) \tag{2}$$

bezeichnen, wobei die Anzahl der g_ν und die positive Zahl l von Fall zu Fall geeignet festgelegt werden. Setzen wir in (2) für die A_ν Zahlenwerte ein, so gibt es eine Funktion $a(M)$, so daß die Ungleichungen

$$g_\nu(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M) \leqq a(M) \tag{3}$$

bestehen.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung werden auch hier in der Form

$$z_\nu = -k_\nu M \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

* Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *J. Heinhold*, T. H. München, möchte ich an dieser Stelle für wertvolle Anregungen meinen ergebensten Dank aussprechen.

dargestellt. Die Beträge der symmetrischen Grundfunktionen der k_ν nennen wir S_μ. Nach *Dini* [2] ist dann jedes $|k_\nu|$ kleiner oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n - S_1 z^{n-1} - \ldots - S_n = 0.$$

Fordern wir nun

$$\sum_{\mu=1}^{n} S_\mu = 1, \tag{5}$$

so gilt $|k_\nu| \leqq 1$, und es folgen aus der nicht eindeutigen Darstellung (4) die Ungleichungen $|z_\nu| \leqq M$.

Um M zu erhalten, denken wir uns die Ungleichungen (3) der Reihe nach in den S_ν und M hingeschrieben:

$$g_\nu(M^\nu S_\nu, M^{\nu-1} S_{\nu-1}, \ldots, M^{\nu-l} S_{\nu-l}, M) \leqq a(M).$$

Addiert man diese Ungleichungen, so enthalten wir mit Forderung (5) eine Ungleichung in den Größen M und a allein. Andererseits stellt aber jede der Ungleichungen (3) eine weitere Beziehung zwischen M und a dar, so daß es möglich sein kann, a zu eliminieren. Bei geeigneten g_ν erhalten wir somit eine Ungleichung für M und damit für die $|z_\nu|$.

Auf analoge Weise kann man mit gewissen

$$g_\nu'(A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_{\nu-l}, M') \geqq a'(M)$$

eine untere Schranke gewinnen mit der Wurzeldarstellung

$$z_\nu = -k_\nu' M'. \tag{6}$$

Sind die S_μ' die Beträge der symmetrischen Grundfunktionen der k_ν', so sind alle $|k_\nu'|$ größer oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$z^n + S_1' z^{n-1} + \ldots + S_{n-1}' z - S_n' = 0.$$

Aus der Forderung

$$1 + S_1' + \ldots + S_{n-1}' = S_n' \tag{7}$$

ergeben sich dann die Ungleichungen $|z_\nu| \geqq M'$, wobei die Definitionsungleichung für M' auf analoge Weise wie für M hergeleitet werden kann.

1.

a) Wir betrachten die Ungleichungen

$$\frac{2 p_0 A_\nu + p_1 A_{\nu-1} + \ldots + p_r A_{\nu-r}}{p_0 A_{\nu-1} + p_1 A_{\nu-2} + \ldots + p_r A_{\nu-r-1}} \leqq a \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+r). \tag{8}$$

Der Parameter M kommt hier explizit nicht vor; a ist daher die größte der Zahlen (8). Die p_λ ($\lambda=1, 2, \ldots, r$) sind reelle Parameter. p_0 darf, damit das Ungleichungssystem sinnvoll ist, niemals $\leqq 0$ gewählt werden, da in diesem Falle der Nenner von (8) für $v = 1$ kleiner oder gleich 0 wäre. Die übrigen Parameter sind insoweit beliebig reell, als alle Zähler und Nenner von (8) größer als 0 ausfallen müssen. Insbesondere muß also auch $p_r > 0$ sein.

Aus (8) folgt dann mit $S_0 = 1$, $S_\mu = 0$, für $\mu < 0$ und $\mu > n$:

$$2\,p_0 M^v S_v + p_1 M^{v-1} S_{v-1} + \ldots + p_r M^{v-r} S_{v-r} \leqq a(p_0 M^{v-1} S_{v-1} + \\ + p_1 M^{v-2} S_{v-2} + \ldots + p_r M^{v-r-1} S_{v-r-1}),$$

oder

$$2\,p_0 S_v + \frac{p_1}{M} S_{v-1} + \ldots + \frac{p_r}{M^r} S_{v-r} \leqq \\ \leqq a\left(\frac{p_0}{M} S_{v-1} + \frac{p_1}{M^2} S_{v-2} + \ldots + \frac{p_r}{M^{r+1}} S_{v-r-1}\right).$$

Wir denken uns nun diese Zeilen für $v = 1, 2, \ldots, n + r$ hingeschrieben. Durch Summation erhalten wir dann unter Berücksichtigung von (5) und unter der Voraussetzung $p_r > 0$:

$$2\,p_0 + \frac{2\,p_1}{M} + \ldots + \frac{2\,p_r}{M^r} < a\left(\frac{2\,p_0}{M} + \frac{2\,p_1}{M^2} + \ldots + \frac{2\,p_r}{M^{r+1}}\right). \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen geht deshalb verloren, weil in $\sum_{v=1}^{n+r} S_{v-r-1} = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}$ das Glied S_n, das $\neq 0$ vorausgesetzt werden kann, gar nicht vorkommt und die Summe daher stets < 2 ist, während alle anderen Summen über die S_λ die Zahl 2 ergeben. Für ein positives p_r besteht die Ungleichung

$$\frac{p_r}{M^{r+1}} \sum_{v=1}^{n+r} S_{v-r-1} < \frac{2\,p_r}{M^{r+1}}.$$

Aus (9) folgt dann $M < a$.

b) Nun wird eine untere Schranke abgeleitet, wobei wir ausgehen von den Ausdrücken

$$\frac{p_r A_v + p_{r-1} A_{v-1} + \ldots + p_1 A_{v-r+1} + p_0 A_{v-r}}{p_r A_{v-1} + p_{r-1} A_{v-2} + \ldots + p_1 A_{v-r} + 2\,p_0 A_{v-r-1}} \geqq a' \tag{10}$$

$$(v = 1, 2, \ldots, n + r).$$

Gelten für die p_λ dieselben Voraussetzungen wie in 1a, so bekommen wir

$$p_r M'^{\nu} S'_\nu + p_{r-1} M'^{\nu-1} S'_{\nu-1} + \ldots + p_1 M'^{\nu-r+1} S'_{\nu-r+1} + p_0 M'^{\nu-r} S'_{\nu-r} \geqq$$
$$\geqq a' (p_r M'^{\nu-1} S'_{\nu-1} + p_{r-1} M'^{\nu-2} S'_{\nu-2} + \ldots + p_1 M'^{\nu-r} S'_{\nu-r} +$$
$$+ 2 p_0 M'^{\nu-r-1} S_{\nu-r-1}),$$

oder

$$p_r S'_\nu + \frac{p_{r-1}}{M'} S'_{\nu-1} + \ldots + \frac{p_1}{M'^{r-1}} S'_{\nu-r-1} + \frac{p_0}{M'^r} S'_{\nu-r} \geqq$$
$$\geqq a' \left(\frac{p_r}{M'} S'_{\nu-1} + \frac{p_{r-1}}{M'^2} S'_{\nu-2} + \ldots + \frac{p_1}{M'^r} S'_{\nu-r} + \frac{2 p_0}{M'^{r+1}} S'_{\nu-r-1} \right).$$

Summieren wir diese Ungleichungen und beachten wir die Forderung (7), so ergibt sich die Ungleichung

$$p_r (2 S'_n - 1) + \frac{2 p_{r-1} S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2 p_1 S'_n}{M'^{r-1}} + \frac{2 p_0 S'_n}{M'^r} \geqq$$
$$\geqq a' \left(\frac{2 p_r S'_n}{M'} + \frac{2 p_{r-1} S'_n}{M'^2} + \ldots + \frac{2 p_1 S'_n}{M'^r} + \frac{2 p_0 S'_n}{M'^{r+1}} \right).$$

Da $p_r > 0$ vorausgesetzt ist, gilt auch die etwas schwächere Ungleichung

$$2 p_r S'_n + \frac{2 p_{r-1} S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2 p_0 S'_n}{M'^r} > a' \left(\frac{2 p_r S'_n}{M'} + \ldots + \frac{2 p_0 S'_n}{M'^{r+1}} \right)$$

oder

$$M' > a',$$

wobei a' die kleinste der Zahlen (10) ist.

Zusammengefaßt erhalten wir

Satz 1: Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \operatorname{Max} \frac{2 p_0 A_\nu + p_1 A_{\nu-1} + \ldots + p_r A_{\nu-r}}{p_0 A_{\nu-1} + p_1 A_{\nu-2} + \ldots + p_r A_{\nu-r-1}}$$

$$|z_\nu| > \operatorname{Min} \frac{p_r A_\nu + p_{r-1} A_{\nu-2} + \ldots + p_1 A_{\nu-r+1} + p_0 A_{\nu-r}}{p_r A_{\nu-1} + p_{r-1} A_{\nu-2} + \ldots + p_1 A_{\nu-r} + 2 p_0 A_{\nu-r-1}}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n + r),$$

wobei die p_λ Parameter sind, von denen p_0 und p_r stets > 0 gewählt werden müssen, während die übrigen Parameter nur so einzurichten sind, daß alle Zähler und Nenner > 0 werden.

Spezialfall: $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 0$ ergibt einen bekannten Satz von *Anghelutza* [3]:

$$\text{Min } \tfrac{1}{2} \frac{A_v}{A_{v-1}} < |z_\nu| < \text{Max } 2 \frac{A_v}{A_{v-1}}.$$

2.

Nun werden die Ungleichungen

$$\sqrt[\alpha v+m]{A_v + \beta A_{v-1}} \leqq a \quad (v = 1, 2, \ldots, n+1;\ A_v = 0 \text{ für } v > n) \tag{11}$$

zugrundegelegt. Die Größen α, m und β sind Parameter, die den Ungleichungen $\alpha v + m > 0$, $A_v + \beta A_{v-1} \geqq 0$ für alle v genügen müssen. Damit der Radikand auch für $v = n+1$ größer oder gleich 0 bleibt, muß β stets $\geqq 0$ angenommen werden.

Aus (11) ergeben sich dann die Ungleichungen

$$A_v + \beta A_{v-1} \leqq a^{\alpha v+m},$$

oder in den S_v und M:

$$S_v + \frac{\beta}{M} S_{v-1} \leqq \frac{a^{\alpha v+m}}{M^v} = a^m \left(\frac{a^\alpha}{M}\right)^v.$$

Durch Summation der einzelnen Zeilen erhalten wir dann mit Forderung (5) unter der Voraussetzung

$$M > a^\alpha: \tag{12}$$

$$1 + \frac{2\beta}{M} < a^m \frac{a^\alpha}{M} \frac{1}{1 - a^\alpha/M} = \frac{a^{m+\alpha}}{M - a^\alpha} \text{ oder}$$

$$M^2 - M(a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta) - 2a^\alpha \beta < 0, \text{ d. h.}$$

$$M < \frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2}\right)^2 + 2a^\alpha \beta} = K.$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß für $M = K - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) die Ungleichung (12) besteht, wobei ε beliebig nahe an 0 liegen soll. Dies kann aber aus der Ungleichung $a^\alpha < K - \varepsilon$ gefolgert werden, die sich verifizieren läßt, wenn nur ε klein genug gewählt wird.

Wir erhalten somit

Satz 2: *Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^\alpha + a^{m+\alpha} - 2\beta}{2}\right)^2 + 2a^\alpha \beta},$$

wobei die Größen α, m und β beliebig reell sind bis auf die Bedingungen $\alpha\, v + m > 0$, $\beta \geqq 0$ und

$$a = \operatorname{Max} \sqrt[\alpha v+m]{A_v + \beta\, A_{v-1}} \quad \textit{für } v = 1, 2, \ldots, n+1 \textit{ ist.}$$

Interessant sind einige Spezialfälle:

a) $\alpha = 1, m = 0, \beta = 0 : |z_\nu| < 2 \operatorname{Max} \sqrt{A_v}$ (Fujiwara [4]).

b) $\alpha = 1, m = -1, \beta = 0 : |z_\nu| < 1 + \operatorname{Max} \sqrt[v-1]{A_v}$, falls $A_1 < 1$ ist.

(durch Tschirnhaustransformation kann $A_1 = 0$ erreicht werden). Vergleiche damit die klassische Schranke $|z_\nu| < 1 + \operatorname{Max} A_v$, die für $A_v > 1$ immer ungünstiger ist!

c) $\alpha = 1, m \geqq 0, \beta = 0 : |z_v| < \operatorname{Max} \sqrt[v+m]{A_v} + \left(\operatorname{Max} \sqrt[v+m]{A_v}\right)^{m+1}$.

Die Auswertung zeigt, daß diese Verallgemeinerungen in vielen Fällen tatsächlich zu einer Verbesserung der bekannten klassischen Schranken führen können. Ein einfaches *Beispiel*:

$$z^5 + z^4 - 4\, z^3 + 2\, i\, z^2 + 1 = 0;$$

Die Parameter α, β und m werden folgendermaßen spezialisiert:

$\alpha = 2$, $\beta = 2$, $m = 2$. Dann erhalten wir für a den Wert $\sqrt[6]{6}$. Nach Satz 2 bekommen wir daher $|z_\nu| < 3, 33$. Nach *Fujiwara* dagegen nur $|z_\nu| < 4$.

3.

Es wird eine sehr nützliche Abschätzungsformel von *Westerfield* [5] verallgemeinert. Sie lautet:

Ist G^* die größte der Zahlen $\sqrt[v]{A_v}$, H^* die zweitgrößte, so ist $|z_v| < G^* + H^*$.

Wir gehen von den Ungleichungen

$$\frac{\sqrt[v+m]{A_v} + \sqrt[\mu+m]{A_\mu}}{M} \leqq a(M)$$

($v = 1, 2, \ldots, n$; $\mu = 1, 2, \ldots, n$; $v \neq \mu$; $v + m > 0$; $\mu + m > 0$) aus.

Es sei $G = \operatorname{Max}_1 \sqrt[v+m]{A_v}$, also die größte der Zahlen $\sqrt[v+m]{A_v}$, $H = \operatorname{Max}_2 \sqrt[v+m]{A_v}$, also die zweitgrößte dieser Zahlen. Dann ist

$$G + H = aM.$$

Ferner setzen wir

$$G = q\,aM,\ H = p\,aM \quad (p + q = 1;\ p \leqq 1/2;\ q \geqq 1/2).$$

Ist g der Index für G, so ist

$$\sqrt[g+m]{A_g} = \sqrt[g+m]{M^g S_g} = qaM,$$
$$S_g = M^m (qa)^{g+m}.$$

Für alle von g verschiedenen Indizes gilt allgemein

$$\sqrt[v+m]{A_v} = \sqrt[v+m]{M^v S_v} \leqq paM,$$
$$S_v \leqq M^m (pa)^{v+m}.$$

Unter der Voraussetzung $qa < 1$, $pa < 1$ gilt sicher die Ungleichung

$$\sum_{v=1}^{n} S_v \leqq M^m (qa)^{m+1} [1 + pa + \ldots + (pa)^{n-1}] < M^m (qa)^{m+1} \frac{1}{1-pa}.$$

Bei der Summation bekommen wir mit (5):

$$1 - pa < M^m (qa)^{m+1},$$
$$1 < M^m (qa)^{m+1} + pa,$$
$$M < (q\,Ma)^{m+1} + p\,Ma.$$

Nun ist aber $aM = \mathrm{Max}\,(\sqrt[v+m]{A_v} + \sqrt[\mu+m]{A_\mu}) = K$. Deswegen folgt

$$M < (qK)^{m+1} + pK. \tag{13}$$

Nun müssen wir noch zeigen, inwieweit die Voraussetzungen $pa < 1$, $qa < 1$ erfüllt sind.

Setzen wir $M = (qK)^{m+1} + pK - \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ und beliebig nahe an 0 liegt, oder, da $K = aM$, $G = qaM$ ist,

$$1 = G^m qa + pa - \varepsilon,$$

so erkennen wir, daß pa und im Falle $G \geqq 1$ auch qa immer kleiner als 1 sein müssen, denn ε ist beliebig klein.

Wir gelangen somit zu

Satz 3: *Ist* $G = \mathrm{Max}_1\, \sqrt[\mu+m]{A_\mu}$, $H = \mathrm{Max}_2\, \sqrt[v+m]{A_v}$, $(\mu \neq v)$ m *ein Parameter, so daß* $v + m > 0$ *und* $\mu + m > 0$ *ist, so gilt im Falle* $G > 1$ *für alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form* (1) *mit komplexen Koeffizienten die Abschätzung*

$$|z_\varrho| < G^{m+1} + H.$$

Spezialfall: Für $m = 0$ erhalten wir einen Satz von Westerfield. Die Voraussetzung $G > 1$ fällt dann weg.

Beispiel: $z^5 + 8z^4 + 16^3 + 5iz^2 + 0,2z + 6i = 0$.

$$m = 0: G^* = 8,\ H^* = \sqrt{16},\ |z_\nu| < 12;$$
$$m = 2: G = \sqrt[3]{8},\ H = \sqrt[4]{16},\ |z_\nu| < 10.$$

4.

In diesem Abschnitt sollen die Ungleichungen

$$A_\nu + M A_{\nu-1} \leqq a(M) \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots) \tag{14}$$

diskutiert werden. In den S_ν und M lauten sie:

$$M^\nu S_\nu + M^\nu S_{\nu-1} \leqq a, \text{ bzw.}$$

$$S_\nu + S_{\nu-1} = \frac{a}{M^\nu}.$$

Für die Summe der S_ν gilt folgende Ungleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu = \frac{a}{M^2} + \frac{a}{M^4} + \frac{a}{M^6} + \ldots < \frac{a}{M^2} \frac{1}{1 - 1/M^2} = \frac{a}{M^2 - 1},$$

falls $M > 1$ ist.

Mit $\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu = 1$ erhalten wir dann

$$M^2 < 1 + a; \tag{15}$$

andererseits ist nach (14)

$$a \geqq A_\nu + M A_{\nu-1}.$$

Richten wir nun a so ein, daß die Ungleichungen

$$a \geqq A_\nu + \sqrt{1 + a}\, A_{\nu-1} \tag{16}$$

für die unter (14) angegebenen ν, oder anders ausgedrückt, die Ungleichungen

$$a^2 - (2 A_\nu + A_{\nu-1}^2)\, a + A_\nu^2 - A_{\nu-1}^2 \geqq 0$$

Bestand haben, so gelten wegen (15) erst recht die Ungleichungen (14). Das günstigste a, das dies leistet, ist offenbar die größte positive Wurzel der Gleichungen

$$x^2 - (2 A_\nu + A_{\nu-1}^2)\, x + A_\nu^2 - A_{\nu-1}^2 = 0 \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots).$$

Diese lautet

$$a = \operatorname{Max}\left(A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{2} + A_{\nu-1} \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right).$$

Damit haben wir nach (15):

$$|z_\nu| < \operatorname{Max} \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{2} + A_{\nu-1}\sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}} =$$

$$= \operatorname{Max}\left(\frac{A_{\nu-1}}{2} + \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right)$$

und somit

Satz 4: Für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung der Form (1) *mit komplexen Koeffizienten gilt die Abschätzung*

$$|z_\nu| < \operatorname{Max}\left(\frac{A_{\nu-1}}{2} + \sqrt{1 + A_\nu + \frac{A_{\nu-1}^2}{4}}\right). \qquad (\nu = 2, 4, 6, \ldots).$$

Es läßt sich nun zeigen, daß die Abschätzung nach Satz 4 stets besser oder ungünstigstenfalls immer noch so gut ist wie die bekannte klassische Schranke $|z_\nu| < 1 + \operatorname{Max} A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, die für relativ kleine Koeffizientenbeträge gedacht ist und die von *Königsberger* [6] etwas verschärft worden ist.

Ist $A_m = \operatorname{Max} A_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so ist diese Behauptung bewiesen, wenn wir folgende zwei Ungleichungen verifizieren können:

a) $$\frac{A_{m-1}}{2} + \sqrt{1 + A_m + \frac{A_{m-1}^2}{4}} \leqq 1 + A_m,$$

b) $$\frac{A_m}{2} + \sqrt{1 + A_{m+1} + \frac{A_m^2}{4}} \leqq 1 + A_m;$$

a) ist aber identisch mit

$$A_{m-1} + A_m A_{m-1} \leqq A_m^2 + A_m,$$

b) identisch mit

$$A_{m+1} \leqq A_m.$$

Dies sind Ungleichungen, die tatsächlich bestehen können. Wir erkennen ferner, daß die Schranke $1 + \operatorname{Max} A_\nu$ und die nach Satz 4 erhaltene Schranke sicher dann gleich sind, wenn der absolut größte Koeffizient mindestens dreimal nebeneinander vorkommt. Tritt A_m nur zweimal nebeneinander auf, so sind die Schranken nur dann gleich, wenn die betreffende Kombination bei den zu untersuchenden Ausdrücken vertreten ist.

5.

Zum Schluß wird noch ein sehr einfacher Beweis einer Ungleichung von *Montel* [7] angegeben. Der Originalbeweis ist verhältnismäßig lang; mit dem eingeführten Abschätzungsprinzip läßt er sich erheblich verkürzen. Benutzt wird daneben lediglich eine Ungleichung, die auch

von *Montel* verwendet worden ist und die folgendermaßen lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leqq (\sum_{i=1}^{n} A_i^m)^{1/m} (\sum_{i=1}^{n} B_i^{m'})^{1/m'} \quad (A_i, B_i > 0;\ 1/m + 1/m' = 1). \tag{17}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[m]{A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m}}{M} = a(M). \tag{18}$$

Daraus folgt $A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m = (aM)^m$ und hieraus

$$(M^v S_v)^m = e_v (aM)^m \text{ mit } \sum_{v=1}^{n} e_v = 1,$$

$$M^v S_v = aM \sqrt[m]{e_v},$$

$$S_v = \frac{aM \sqrt[m]{e_v}}{M^v}.$$

Zur Abschätzung von $\sum_{v=1}^{n} S_v$ wenden wir die Ungleichung (17) auf unseren Fall an. Setzen wir nach (5) $\sum_{v=1}^{v} S_v = 1$, so bekommen wir

$$1 < \frac{aM}{\sqrt[m']{M^{m'} - 1}} \text{ oder } aM > \sqrt[m']{M^{m'} - 1}.$$

Bei Verwendung von (18) erhalten wir schließlich

$$\sqrt[m]{A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m} > \sqrt[m']{M^{m'} - 1}$$

bzw. wegen der Bedingungen bei (17)

$$M < \{1 + (A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m)^{1/(m-1)}\}^{(m-1)/m}.$$

Da $|z_v| \leqq M < \{1 + A_1^m + A_2^m + \ldots + A_n^m)^{1/(m-1)}\}^{(m-1)/m}$ ist, ist damit der Satz von *Montel* bewiesen.

Literatur

[1] *Heigl F.*, Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Mh. Math. **62** (1958), S. 16—56.

[2] *Dini U.*, Un teorema sui limiti superiori et inferiori dei moduli delle radici di una equazione algebrica, Ann. Mat. pura appl. Milano (3) **1** (1898), S. 77—81.

[3] *Anghelutza T.*, Una estensione di un teorema di Hurwitz, Boll. Un. Mat. Ital. **12** (1933), S. 284—288.

[4] *Fujiwara M.*, Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, Tôhoku Math. J. **10** (1916), S. 167.

[5] *Westerfield E. C.*, A new bound for the zeros of polynomials, Amer. Math. Mon. **40** (1933), S. 18—23.

[6] *Königsberger L.*, Über die Abgrenzung der Lösungen einer algebraischen Gleichung, Rend. Circ. mat. Palermo **26** (1908), S. 346—359.

[7] *Montel P.*, Sur quelques limites pour les modules des zeros des polynômes, Comment. math. helvet. **7** (1935), S. 178—200.

Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 28. Oktober 1958)

In meiner Arbeit „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen" [4] habe ich den folgenden Satz (dort 1. 3) bewiesen:

Satz 1. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und drei natürliche Zahlen* n, χ, c *vorgegeben sind, so daß* $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$ *und daß nicht gleichzeitig* $\chi = 2$ *und* $c = 1$ *ist, dann gibt es unendlich viele nichtisomorphe Graphen* X, *die regulär vom Grade* n *sind, deren Farbenzahl* $\chi(X) = \chi$, *deren Zusammenhang* $c(X) = c$ *und deren Automorphismengruppe* $G(X) \simeq \mathfrak{H}$ *ist. Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls* $\mathfrak{H}$ *mindestens zwei Elemente hat.*

Es wurde dann nicht extra darauf hingewiesen, daß alle in der Arbeit konstruierten Graphen zusammenhängend und endlich sind. In der vorliegenden Abhandlung soll dieses Resultat auf zusammenhängende, unendliche Graphen endlichen Grades erweitert werden. Das Ergebnis ist in Satz 4 zusammengefaßt. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß Satz 1.2 [4] für unendliche Graphen nicht mehr gilt. Es gibt sehr wohl reguläre unendliche Graphen endlichen Grades mit dem Zusammenhang 1 und der Farbenzahl 2. Wir beweisen im folgenden den

Satz 2. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und eine natürliche Zahl* n *mit* $3 \leqq n \leqq 5$ *vorgegeben ist, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen regulären Graphen* X *vom Grade* n *mit* $\chi(X) = 2$, $c(X) = 1$, $G(X) \simeq \mathfrak{H}$. *Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls* $\mathfrak{H}$ *mindestens zwei Elemente hat.*

Beweis. Wir führen die Graphen C_1, C_2, C_3, C_4 und aus [4] die Graphen B_{16} ubd B_{17} ein.

$$C_1 = \bigcup_{i=1}^{11} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=2}^{6} [i, i+5]$$

$$C_2 = \bigcup_{i=1}^{13} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=1}^{5} [2i, 2i+3] \cup [3, 12]$$

$$C_3 = \bigcup_{i=2}^{19} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=3}^{16} [i, i+3] \cup [1, 3] \cup [19, 21] \cup [4, 17] \cup [5, 18]$$

$$C_4 = \bigcup_{i=2}^{27} [i, i+1] \cup \bigcup_{i=3}^{24} [i, i+3] \cup [1, 3] \cup [27, 29] \cup [4, 25] \cup [5, 26]$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß sie die folgenden Eigenschaften haben:

(i) Von den Endpunkten abgesehen, sind es reguläre Graphen; und zwar sind C_1, C_2 vom Grade 3, C_3, C_4 vom Grade 4 und B_{16}, B_{17} vom Grade 5.

(ii) $\chi(C_1) = \chi(C_2) = \chi(C_3) = \chi(C_4) = \chi(B_{16}) = \chi(B_{17}) = 2$.

(iii) $G(C_1) \cong G(C_2) \cong G(B_{16}) \cong G(B_{17}) \cong \mathfrak{Z}_2$, $G(C_3) \cong G(C_4) \cong \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2$.

(iv) Die Graphen C_1 und C_2 lassen sich in offensichtlicher Weise zu einseitig-unendlichen Ketten zusammenfügen, die von einem einzigen Endpunkte abgesehen, reguläre Graphen 3. Grades sind. Ebenso lassen sich C_3 und C_4 zu einseitig-unendlichen Ketten fügen, die, von einem Paar von Endpunkten abgesehen (Entfernung = 2), regulär vom 4. Grade sind. Auf gleiche Weise hängt man auch B_{16} und B_{17} zu einseitig-unendlichen Ketten zusammen, die, wieder von einem einzigen Endpunkt abgesehen, regulär 5. Grades sind.

(v) Die Automorphismengruppe aller in (iv) konstruierten Graphen ist trivial ($\cong \mathfrak{E}$).

(vi) Die Menge aller aus C_1 und C_2 gebildeten Ketten ist der Gesamtheit aller unendlichen Folgen aus den Zahlen 0 und 1 gleichmächtig und daher nicht abzählbar. Dasselbe gilt für die Menge der Ketten aus C_3 und C_4 und die der Ketten aus B_{16} und B_{17}.

(I) Sei nun eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben. Dann gibt es — bereits nach [3] — einen regulären Graphen X 3. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ hat X weder Fixpunkte noch Fixkanten. Wird nun in jede Kante von X ein Punkt — zunächst vom Grade 2 — eingeschoben und werden dann alle diese neuen Punkte kongruente Ketten aus C_1 und C_2 angehängt, so ist der neue Graph Y wieder regulär vom 3. Grade und

es ist sofort zu sehen, daß $G(Y) \cong \mathfrak{H}$ ist. Um einzusehen, daß $\chi(Y) = 2$ ist, braucht man nur alle auf X selbst zurückgehenden Punkte mit Farbe 1, alle in die Kanten eingeschobenen Punkte mit Farbe 2 zu belegen. Die weitere Farbenbelegung ist dann ohne weiteres möglich, da $\chi(C_1) = \chi(C_2) = 2$ ist. Trivialerweise ist $c(Y) = 1$. War $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$, also X ohne Fixpunkte und Fixkanten, so übertragen sich diese Eigenschaften auch auf Y.

(II) Wir gehen wieder von einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ aus. Es gibt dann nach [4] sicher einen regulären Graphen X 4. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Werden alle Kanten von X durch kongruente Ketten aus C_3 und C_4 ersetzt, so erhält man einen neuen Graphen Y, er ist regulär 4. Grades, $G(Y) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(Y) = 2$, $c(Y) = 1$. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ ist Y ohne Fixpunkte und ohne Fixkanten.

(III) Ein drittes Mal gehen wir von einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ aus. Wie im vorigen Falle, brauchen wir einen regulären Graphen X 4. Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Dann hängen wir an alle Knotenpunkte von X kongruente Ketten aus B_{16} und B_{17}. Der neue Graph Y hat $G(Y) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(Y) = 2$, $c(Y) = 1$ und er ist regulär 5. Grades. Für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ bleibt die Fixpunkte- und Fixkantenfreiheit erhalten.

Fassen wir I, II und III zusammen, so ist Satz 2 bewiesen.

Beim Beweis des Satzes 1 [4, Satz 1.3] wird zunächst ein Graph mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $n = 3$, $\chi = 2$, $c = 3$ konstruiert. Die Graphen mit anderen Zahlen für n, χ, c werden dann aus diesem gewonnen. Will man einen analogen Satz für unendliche Graphen herleiten, so genügt es also, unendliche Graphen mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $n = 3$, $\chi = 2$, $c = 3$ zu finden; das weitere geht dann genau wie in [4]. Wir beweisen daher als nächstes

Satz 3. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ vorgegeben ist, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen regulären Graphen X vom Grade 3 mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = 2$, $c(X) = 3$.

Beweis. Wir führen zu jeder unendlichen Folge aus den Zahlen 1 und 2 einen Graphen $D(i_0, i_1, i_2, \ldots)$ durch Angabe seiner Knotenpunktmenge V und seiner Kantenmenge E^* ein.

$$D(i_0, i_1, i_2, \ldots) = (V, E^*) \qquad i_k = 1 \text{ oder } 2$$

$$V = \bigcup_{j=2}^{6i_0+1} I_j^0 \cup I_{6i_0+4}^0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{P^{k-1} \cup Q^{k-1} \cup \bigcup_{j=1}^{6i_k+1} I_j^k \cup I_{6i_k+4}^k\}$$

$$E^* = [P^0, I_2^0] \cup [Q^0, I_4^0] \cup \bigcup_{j=2}^{6i_0} [I_j^0, I_{j+1}^0] \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{[P^k, I_1^k] \cup [Q^k, I_{6i_{k-1}+4}^{k-1}] \cup$$

$$\cup\, [I_1^k, I_{6i_{k-1}+1}^{k-1}] \cup [I_{6i_{k-1}+4}^{k-1}, I_4^k] \cup \bigcup_{j=1}^{6i_k} [I_j^k, I_{j+1}^k]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i_k} \{[I_{6j-4}^k, I_{6j+1}^k] \cup [I_{6j-3}^k, I_{6j}^k] \cup [I_{6j-1}^k, I_{6j+4}^k]\}.$$

Dann nehmen wir einen regulären Graphen X dritten Grades mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{H}$ eine vorgegebene endliche Gruppe ist, und bauen $D(i_0, i_1, i_2, \ldots)$ auf die gleiche Weise ein, wie B_1 beim Beweis zu Satz 3.1 in [4]. Natürlich brauchen wir eine abzählbare Menge kongruenter Kopien von X. Diese Konstruktion erfüllt alle Anforderungen unseres Satzes 3.

Im Lichte der vor Satz 3 gemachten Bemerkungen folgern wir daraus

Satz 4. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und drei natürliche Zahlen n, χ, c vorgegeben sind, so daß $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$, dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen, regulären Graphen X n-ten Grades, mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = \chi$, $c(X) = c$. Sie haben weder Fixpunkte noch Fixkanten, falls $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$.

Daß diesmal auch $\chi = 2$, $c = 1$ nicht ausgeschlossen zu werden braucht, beruht auf Satz 2.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. Lond. Math. Soc. **27** 85—92 (1952).

[2] *R. Frucht*, „Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", Compos. Math. **6**, 239—250 (1938).

[3] *R. Frucht*, "Graphs of degree 3 with given abstract group", Canad. J. Math. **1** 365—378, (1949).

[4] *H. Izbicki*, „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen", Mh. Math. **61**, 42—50 (1957).

[5] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig 1936.

[6] *G. Sabidussi*, "Graphs with given group and given graph-theoretical properties", Canad. J. Math. **9** 515—525, (1957). (In [4] wurde diese Arbeit unter dem ursprünglich vorgesehenen Titel "Graph properties independent of the automorphism group" zitiert).

[7] *H. Whitney*, "Congruent graphs and the connectivity of graphs", Amer. J. Math. **54**, 150—168 (1932).

Buchbesprechungen

Opere Scelte. Vol. II. Von *G. Fubini.* (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) 350 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 3500.—.

Dieser Band enthält 29 Arbeiten aus den Jahren 1903 bis 1910. Darin sind Abhandlungen über automorphe Funktionen, über das Dirichletsche Problem, über Probleme aus der Variationsrechnung, über Differential- und Integralgleichungen, über diskontinuierliche und kontinuierliche Gruppen und ihre Anwendungen auf Differentialgeometrie. *N. Hofreiter*, Wien

Opere Scelte. Vol. II: Logica Matematica — Interlingua ed Algebra della Grammatica. Von *G. Peano.* (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) VI, 518 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 5000.—.

Dieser Band enthält 21 Arbeiten zur mathematischen Logik, 4 Besprechungen von Büchern über mathematische Logik und 5 Arbeiten über eine internationale Hilfssprache. Die letzteren Arbeiten sind besonders für Philologen von Interesse. Die Arbeiten zur mathematischen Logik sind meist vor mehr als 50 Jahren erschienen, aber auch heute noch für Mathematiker und Logiker von Bedeutung und Interesse. *N. Hofreiter*, Wien

The Structure of Arithmetic and Algebra. Von *M. H. Maria.* XIV, 294 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 5,90.

Der Hauptgegenstand dieses Buches ist die Entwicklung eines Axiomensystemes für die reellen Zahlen. Begonnen wird mit den Körperaxiomen, dann folgen die Anordnungsaxiome, die Induktionsaxiome und schließlich als Stetigkeitsaxiom das Axiom der Existenz einer oberen Grenze. Dieses inhaltliche Gerippe wird von der Verfasserin auf geschickte Weise dazu benützt, dem Leser einerseits einen Einblick in die Methoden der modernen Mathematik zu geben und ihn andererseits mit den Begriffen und Sätzen der elementaren Arithmetik und Algebra vertraut zu machen; es werden daher auch die Anfangsgründe der Zahlentheorie, die quadratischen Gleichungen und die b-adische Schreibweise der ganzen Zahlen bei beliebiger Basis b behandelt.

Das klar und sorgfältig geschriebene Buch kann schon von Schülern der Oberstufe unserer Mittelschulen mit Erfolg gelesen werden. *W. Nöbauer*, Wien

Linear Operators. Part I: General Theory. Von *N. Dunford* und *J. T. Schwartz* unter Mitwirkung von *W. G. Bade* und *R. G. Bartle.* (Pure and Applied Mathematics: Volume VII.) XIV, 858 S. New York-London: Interscience Publishers. 1958. $ 23.—.

Das großangelegte Werk, an dem die Verfasser acht Jahre lang arbeiteten, soll die gesamte Theorie der linearen Operatoren und die Anwendungen dieser Theorie behandeln, also ein Gebiet der Mathematik, dessen Ausdehnung heute schon außerordentlich groß ist. Das Werk wird deshalb in zwei Bänden erscheinen;

der vorliegende erste — bestehend aus 730 Seiten Text und einem Literaturverzeichnis von fast 100 Seiten — enthält die topologische Theorie der Räume und Operatoren und die Spektraltheorie beliebiger Operatoren, während im zweiten die Theorie der vollreduziblen Operatoren dargestellt werden soll.

Das erste Kapitel gibt einen knappen, aber vollständigen Abriß der grundlegenden Begriffe und Sätze aus Mengenlehre, Topologie und Algebra, welche später benötigt werden. Im zweiten werden fundamentale Sätze über lineare Räume abgeleitet. Das dritte Kapitel enthält eine ziemlich ausführliche Darstellung der Maß- und Integrationstheorie. Im nächsten Kapitel werden zahlreiche spezielle Fälle von linearen Räumen untersucht, welche in den Anwendungen der allgemeinen Theorie auftreten; die Eigenschaften dieser Räume werden schließlich in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Kapitel V beschäftigt sich mit dem Begriff der konvexen Menge in einem linearen Raum und den damit zusammenhängenden Topologien, während in Kapitel VI lineare Operatoren auf Banach-Räumen und Darstellungen solcher Operatoren studiert werden. Das nächste Kapitel behandelt die allgemeine Spektraltheorie der linearen Operatoren. Der Band schließt mit einem Kapitel, welches Anwendungen der bisher entwickelten allgemeinen Theorie enthält, vor allem auf die Ergodentheorie.

Besondere Vorkenntnisse werden vom Leser nicht verlangt; da das Buch aber in dem heute in den westlichen Ländern üblichen, etwas knappen Stil geschrieben ist, ist zu seinem Verständnis natürlich ein gewisses Maß an mathematischer Reife erforderlich. In jedem Abschnitt finden sich zahlreiche interessante Übungsaufgaben und ein mit großer Sorgfalt zusammengestellter Überblick über die gesamte bisher erschienene Literatur zu dem in diesem Abschnitt behandelten Stoffgebiet. Weitere Vorzüge des Buches sind ein ausführliches Sachverzeichnis und ein genauer „Fahrplan", der dem nur an einem bestimmten Teil des Werkes interessierten Leser zeigt, was er von den vorhergehenden Kapiteln wissen muß. Dadurch ist das Buch trotz seines großen Umfanges durchaus auch als Lehrbuch für Teilgebiete der Theorie der linearen Operatoren verwendbar, vor allem aber wird es sich als Nachschlagwerk für den Forscher bewähren.

Hoffentlich wird auch der zweite Band dieses imponierenden Werkes bald erscheinen! *W. Nöbauer*, Wien

Lehrbuch der höheren Mathematik. Teil IV. Von *W. I. Smirnow*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 5.) Mit 20 Textabb., XII, 708 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 40.—.

Stets wird von konkreten Problemen ausgegangen, die den Gegenstand beleuchten. Dann folgt die Theorie in ausführlicher und leicht verständlicher Darstellung. Am Ende jedes Abschnittes werden mehrere Beispiele gebracht. Wenn auch vieles, was hier geboten wird, bereits in Lehrbüchern steht, so werden doch auch einige neuere Arbeiten sowjetrussischer Mathematiker berücksichtigt. Es mag genügen, den Inhalt kurz anzugeben.

I. Integralgleichungen (Fredholmsche und Volterrasche Integralgleichungen, Integralgleichungen mit stetigem Kern, mit nicht beschränktem Kern, mit symmetrischem Kern, mit Cauchyschem Kern, d. h. singuläre Integralgleichungen.) Zugrundegelegt wird der Riemannsche Integralbegriff; der Lebesguesche Integralbegriff wird erst im Band V verwendet.

II. Variationsrechnung (Eulersche Gleichung, Variationsprobleme mit Nebenbedingungen, Transversalitätsbedingung, zweite Variation, das Hamiltonsche Prinzip).

III. Partielle Differentialgleichungen. Es werden die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen entwickelt. (Charakteristikentheorie für Differentialgleichungen 1. O., die Typen der Differentialgleichungen 2. O., Charakteristiken, Integrationsmethoden, Systeme von partiellen Differentialgleichungen.)

IV. Randwertprobleme. Es wird die Theorie der Randwertprobleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen systematisch entwickelt. (Die Greensche Funktion, Potentialtheorie, Probleme von *Dirichlet* und *Neumann*, Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung.)

N. Hofreiter, Wien

Polynomial Expansions of Analytic Functions. Von *R. P. Boas jr.* und *R. C. Buck.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 19; Reihe: Moderne Funktionentheorie). Mit 16 Textabb., VIII, 77 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Steif geheftet DM 19,80.

Hier wird der Versuch unternommen, eine einheitliche Theorie für die Entwicklungen analytischer Funktionen in Reihen von Polynomen zu geben. Das einheitliche Hilfsmittel ist dabei hauptsächlich die Methode der Kernentwicklung.

Nachdem in einem Einleitungskapitel die allgemeinen Methoden zur Entwicklung einer analytischen Funktion in eine Polynomreihe besprochen werden, folgen — abgeleitet aus dem Begriff „Verallgemeinerte Apellsche Polynome" — Entwicklungen ganzer Funktionen nach Reihen von (etwa zwanzig) speziellen Polynomklassen. In einem weiteren Kapitel werden Entwicklungen von Funktionen betrachtet, die nur in einer Umgebung des Ursprungs analytisch zu sein brauchen. Außer Konvergenzfragen werden gelegentlich auch Fragen der Summabilität von Polynomreihen diskutiert und Anwendungen zum Beweis verschiedener funktionentheoretischer Sätze angegeben. — Dieses Ergebnis-Heft bietet eine schöne Übersicht über zahlreiche in der Literatur verstreute Resultate und sei jedem an Funktionentheorie Interessierten bestens empfohlen.

K. Prachar, Wien

Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven. Von *W. Hauser* und *W. Burau.* Mit 18 Textabb. und 12 farbigen Tafeln, 103 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. DM 9,20.

Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die algebraische Geometrie ebener Kurven unter Verwendung der klassischen Methoden und Gesichtspunkte. Das Hauptziel ist, die engen Verbindungen zwischen algebraischer Geometrie und Analysis aufzuzeigen an Hand der Theorie algebraischer Kurven. Zum Verständnis des Buches genügen die Grundkenntnisse der höheren Mathematik. Bei einer Reihe von Sätzen allgemeiner Natur wurde auf Beweisführung verzichtet, beziehungsweise die betreffenden Sachverhalte an sorgfältig ausgewählten Beispielen erläutert. Dieses Buch wird sicher dazu beitragen, die Studenten der Mathematik wieder zu anschaulicher Behandlung geometrischer Probleme zu bringen; diesem Ziel dienen auch die beigefügten 12 Farbtafeln sowie etwa 20 Textabbildungen. Viele instruktive Beispiele sind in den Text eingestreut.

Ein kurzer Inhaltsüberblick: Gerade und Kegelschnitte, Kubiken und Quartiken, Polarentheorie, Plückerformeln, Linearsysteme; Anwendung der Theorie algebraischer Kurven auf die rational auswertbaren Integrale.

H. Brauner, Wien

Introduction to the Problem of Minimal Models in the Theory of Algebraic Surfaces. Von *O. Zariski.* (Publications of the Mathematical Society of Japan: No. 4.) VII, 89 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan. 1958. $ 2.—.

Der allgemein als richtig angenommene Satz, daß jede irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit ein singularitätenfreies Modell besitzt, wurde für die Dimensionen 2 und 3, und zwar für 3 zum ersten Mal von *Zariski* bewiesen. In der vorliegenden Monographie behandelt er mit denselben Methoden ein verwandtes Problem, nämlich wie man innerhalb einer Klasse B von birational äquivalenten, singularitätenfreien Flächen über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper von beliebiger Charakteristik ein möglichst einfaches, ein „minimales" Modell aussuchen könne. Es sind schon sehr langwierige Vorbereitungen notwendig, um nur einen passenden Begriff „minimales Modell" exakt definieren zu können. Das geschieht dadurch, daß in der Klasse B eine teilweise Ordnung eingeführt wird durch die Ordnungsrelation $<$, indem zwei Flächen F und F' der Klasse B als in der Beziehung $F < F'$ stehend definiert werden, wenn die birationale Transformation T, die F in F' überführt *antiregulär*, d. h. T^{-1} regulär auf F' ist. F ist ein minimales Modell, wenn F zu jeder Fläche F' aus B in der Beziehung $F < F'$ steht. Zwei biregulär äquivalente Flächen werden dabei als nicht verschieden angesehen. Entscheidend ist, daß für diese Ordnungsrelation die Endlichkeitsbedingung in absteigender Richtung erfüllt ist. Das läuft auf die Elimination der exzeptionellen Kurven 1. Art hinaus. Der Hauptsatz ist dann: Wenn kein minimales Modell existiert, dann handelt es sich um eine rationale Fläche oder eine Regelfläche. Der letzte Fall wird noch weiter untersucht und führt schließlich zu der Verallgemeinerung des bekannten Satzes von *Castelnuovo*: Ist Σ ein Körper vom Transzendenzgrad 2 zwischen k und $k(x, y)$ und ist $k(x, y)$ separabel über Σ, so ist auch Σ eine rein transzendente Erweiterung des (algebraisch abgeschlossenen) Grundkörpers k. Die Beweise dieser Sätze sind in der vorliegenden Schrift (Part III) nur skizziert, weil sie in einer gesonderten Veröffentlichung im American Journal of Mathematics Platz finden sollen. Dagegen sind Teil I: Rationale Transformationen von algebraischen Mannigfaltigkeiten (beliebiger Dimensionen), und Teil II: Theorie der exzeptionellen Kurven auf einer algebraischen Fläche, in allen Einzelheiten erschöpfend dargestellt und enthalten sehr viele interessante Definitionen und Sätze. Das entscheidende Hilfsmittel sind die monoidalen Transformationen, Dilatationen nach *Severi-Segre*, die auch von *Derwidué* und vom Ref. zur Auflösung der Singularitäten algebraischer Mannigfaltigkeiten benutzt wurden.

W. Gröbner, Innsbruck

Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. Von *F. Severi.* IV, 463 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1958. Lire 4500.—.

Dieses schon lange angekündigte und in Fachkreisen mit großem Interesse erwartete Werk ist nun erschienen und als Fortsetzungsband zu dem im gleichen Verlag 1942 erschienenen Buch: „Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche" zu betrachten. Der Standpunkt hat sich in den zwischen den beiden Publikationen verflossenen 16 Jahren ein wenig verschoben, ohne grundsätzlich geändert zu sein; statt von „Äquivalenzscharen" wird von „algebraischen Systemen" von Kurven auf einer Fläche, oder allgemeiner von k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten auf einer vorliegenden algebraischen Mannigfaltigkeit V_d der Dimension d gesprochen. Auf den fundamentalen Begriff des irreduziblen algebraischen Systems wird der Begriff der *algebraischen Äquivalenz* zurückgeführt, welcher im Angelpunkt aller von *Severi*

geschaffenen Theorien liegt. Denn die von *Clebsch* und *Noether* begründete, von *Cremona, Castelnuovo* und *Enriques* erfolgreich weitergeführte geometrische Theorie der algebraischen Kurven und Flächen war auf dem Begriff der *linearen Äquivalenz* und der *linearen* Scharen aufgebaut; mit diesem Begriff konnte man wenigstens bei den Kurven alle Probleme zufriedenstellend bewältigen. Aber schon bei den algebraischen Flächen zeigte es sich, daß man mit diesem Begriff nur mehr eine erste, oberflächliche Untersuchung durchführen konnte; die tieferliegenden Gegenstände und die überraschenden neuen Differenzierungen, die sich hier schon bei der ersten Erhöhung der Dimensionszahl einstellten, konnten mit dem verhältnismäßig groben Begriff der linearen Äquivalenz nicht mehr erfaßt werden. Die erste entscheidende Erkenntnis war die Auffindung der irregulären Flächen; gegenüber den regulären Flächen sind diese dadurch charakterisiert, daß sie kontinuierliche komplette Kurvensysteme enthalten, die nicht linear sind. (Das einfachste Beispiel bilden die Erzeugenden eines Kegels über einer elliptischen Leitkurve.)

Große Schwierigkeiten bereitete lange Zeit die einwandfreie Formulierung des neuen Äquivalenzbegriffes, für den die erste richtungweisende Arbeit von *Severi* im Jahre 1904 veröffentlicht wurde; zu dem kam der Begriff der *rationalen Äquivalenz*, der keineswegs einfacher ist, dazu. Alle diese Begriffe müssen, als Äquivalenzrelationen, die Eigenschaft haben, *transitiv* zu sein, denn nur so können sie eine Klasseneinteilung der durch sie erfaßten Gegenstände bewirken. Ferner erschien es zweckmäßig, den Gegenstandbereich durch Einführung der *virtuellen* Mannigfaltigkeiten zu erweitern. Sollten diese Begriffskonstruktionen brauchbar und wertvoll sein, so mußte man mit ihrer Hilfe gewisse fundamentale Sätze (II. Kapitel) beweisen können, der folgenden Art: Eine gegebene Kurve auf einer Fläche bestimmt eindeutig eine *Äquivalenzklasse* aller ihrer algebraisch (bzw. rational) äquivalenten Kurven, und analoge Sätze bei höheren Dimensionen. Derartige Existenz- und Eindeutigkeitssätze glaubte man zunächst auf einfache Weise und in großer Allgemeinheit gewonnen zu haben, erst nach vielen Jahren zeigte eine genauere Kritik, daß die Beweise Lücken enthielten, die nicht leicht oder überhaupt nicht auszufüllen waren. Tatsächlich ging es nur so, daß man die Voraussetzungen gegenüber der früheren Allgemeinheit einschränkte. Die von den gegenwärtig gültigen Äquivalenzbegriffen bewirkten Klasseneinteilungen sind also nicht durchaus von der erwünschten absoluten Schärfe, vielmehr können in manchen Fällen zwei verschiedene Klassen ein und dasselbe Grenzelement enthalten. Im übrigen müssen diese Klasseneinteilungen auch birational invariant sein, so daß die Klassen durch birationale Invarianten charakterisiert werden können.

Die Verhältnisse werden noch komplizierter, wenn einem System gewisse Basispunkte oder Basismannigfaltigkeiten vorgeschrieben werden; man ist dann gezwungen, zwischen „virtuellen", „effektiven", „virtuell nicht existierenden" Basispunkten u. a. zu unterscheiden. Im III. Kapitel wendet *Severi* die fundamentalen Sätze auf die Probleme der Vollständigkeit des adjungierten Systems, der mit einer Fläche verbundenen Picardschen Mannigfaltigkeit und auf die Äquivalenzschar $|S|$ an.

Nach einer kurzen Einführung in die Topologie der algebraischen Flächen bzw. ihrer Riemannschen Varietäten (riemanniana), folgt im V. Kapitel die Theorie der *Basis*, die besonders für die Probleme der abzählenden Geometrie bedeutungsvoll ist. Das letzte Kapitel beginnt mit der Theorie der einfachen Integrale (Integrale 1. Stufe) auf algebraischen Flächen, eine Theorie, die im nächsten Fortsetzungsband weitergeführt werden soll.

Wenn auch der größte Teil des vorliegenden Buches sich auf Flächen bezieht und nur in einzelnen Fällen mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten ausdrücklich in die Betrachtung einbezogen werden, so ist es doch außerordentlich reich an wichtigen Erkenntnissen und Ansätzen, die auf beliebige Dimensionen verallgemeinert werden können; dieses Werk wird sicher noch lange Zeit richtunggebend für die zukünftige Forschung bleiben. Tatsächlich sind von den vielen fruchtbaren Ideen und Begriffskonstruktionen *Severis* bis jetzt nur wenige in den tonangebenden modernen Richtungen der algebraischen Geometrie verwertet worden. Man hat fast den Eindruck, daß diese bei der Übernahme des Severischen Begriffes der Schnittmultiplizität stecken geblieben seien oder durch dessen Kompliziertheit vor weiteren Übernahmen abgeschreckt wurden; dagegen liegen die erfolgversprechenden Ideen jenseits dieses Begriffes und vor allem beim Begriff der algebraischen Äquivalenz. Es wäre wahrscheinlich nicht zu empfehlen, diesen Begriff wörtlich zu übertragen, sondern man sollte ihn im abstrakten Gebiet durch eine passende neue Fassung ersetzen, die vielleicht besser dem gedachten Zweck entspricht. Hier würde es naheliegen, algebraische Mannigfaltigkeiten mit gleicher Postulationsformel, oder mit gleicher Hilbertfunktion, oder auch mit isomorpher Syzygienkette als äquivalent zu definieren.

Sehr bemerkenswert wäre auch die folgende Charakterisierung *irregulärer* Flächen und Mannigfaltigkeiten, die m. W. noch nie versucht worden ist: Eine Fläche, deren zugehöriger algebraischer Funktionenkörper K des Transzendenzgrades 2 einen nicht rationalen Unterkörper k des Transzendenzgrades 1 enthält oder mit einem solchen linear zusammenhängt (im Sinne von *A. Weil*), ist irregulär. Im ersten Fall enthält sie ein irrationales Büschel von Kurven. Das ist mit der Tatsache im Einklang, daß die Irregularität eine birational invariante Eigenschaft ist, welche nicht vom zufälligen projektiven Modell abhängt, und daher in einer Eigenschaft des Funktionenkörpers ihren Ausdruck finden muß. Die Verallgemeinerung dieses Irregularitätsbegriffes auf Mannigfaltigkeiten der Dimension d liegt nun auf der Hand. Dabei wird auch unmittelbar klar, daß eine V_d in bezug auf jede Stufe $1, 2, \ldots, d-1$ irregulär sein kann und daß man also zwischen diesen Irregularitäten unterscheiden muß, in Übereinstimmung mit einem Resultat, das *Severi* vor kurzem auf andern Weg gefunden hat.

W. Gröbner, Innsbruck

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Von *M. Fisz*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 40.) Mit 37 Textabb., X, 528 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 36.—.

Wohl jeder Verfasser eines Lehrbuches der mathematischen Statistik wird vor das Problem gestellt, wieviel er an Vorkenntnissen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussetzen soll. Einerseits wird diese benötigt — und zwar nicht nur ihre Resultate, sondern auch die Beweismethoden — andererseits erfordert deren Auseinandersetzung ein eigenes umfangreiches Buch. Es scheint, daß der Verfasser gerade den richtigen Weg gefunden hat, ein Buch über beide Gebiete zu schreiben, welches nicht allzu schwierig und umfangreich ist.

Der erste Teil (Wahrscheinlichkeitsrechnung) gliedert sich folgendermaßen: I. Zufällige Ereignisse. II. Zufällige Veränderliche. III. Die Parameter der Verteilung einer zufälligen Veränderlichen. IV. Charakteristische Funktionen. V. Einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. VI. Grenzwertsätze. VII. Markoffsche Ketten. VIII. Stochastische Prozesse.

Die Beweise werden im allgemeinen vollständig ausgeführt, doch wird dabei an einigen Stellen die Lebesguesche Integrationstheorie vorausgesetzt — wie dies ja in der Natur der Sache liegt. Sehr oft werden tieferliegende Resultate mit

ausführlichen Erklärungen und Literaturhinweisen ohne Beweis angeführt. Selbstverständlich konnten z. B. in dem Kapitel VIII nur die Anfänge der Theorie der stochastischen Prozesse gegeben werden, aber der Leser findet alle möglichen Richtungen der Theorie kurz und prägnant dargestellt (z. B. die Geburts- und Todesprozesse in § 5).

Inhalt des zweiten Teils (Mathematische Statistik): IX. Stichprobenmomente und ihre Funktionen. X. Die Verteilung der Positionsstichprobenfunktionen. XI. Abriß der Iterationstheorie. XII. Signifikanzteste. XIII. Theorie der Schätzfunktionen. XIV. Methoden und Schemata zur Stichprobenerhebung. XV. Abriß der Varianzanalyse. XVI. Allgemeine Testtheorie. XVII. Elemente der Sequentialanalyse.

Zahlreiche vollständig durchgerechnete Beispiele (Tafeln der wichtigsten Verteilungen sind am Ende des Buches abgedruckt) sind für den Leser besonders wertvoll. Denn es ist bekannt, wie schwer es gerade in der Statistik ist, theoretische Ergebnisse bei konkreten Problemen anzuwenden. Besonders muß noch die klare Darstellungsweise vermerkt werden. — Zweifellos ist dies eine der reichhaltigsten und am klarsten geschriebenen Einführungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. *K. Prachar*, Wien

Lehrbuch der theoretischen Physik. 2. Band: Struktur der Materie. Von *W. Weizel.* Zweite, verbesserte Auflage. Mit 268 Textabb., XV, 989 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. Geb. DM 88.—.

Die erste Auflage dieses Bandes wurde 1951 in der vorliegenden Zeitschrift (Mh. f. Math. 55, S. 261) besprochen, und schon damals wurde hervorgehoben, daß die Lösung der Aufgabe, eine Einführung in die moderne Quantentheorie und vor allem in die Quantentheorie der Wellenfelder zu geben, eine hervorragende und ausgezeichnete ist. Dasselbe kann auch bei der zweiten Auflage noch in verstärktem Maße gesagt werden. In dieser Auflage wurden die seither erzielten Fortschritte aufgenommen. Und zwar kam vor allem ein neuer Abschnitt „Feldtheorie der Materie" hinzu. Auch der Abschnitt „Quantentheorie" wurde bedeutend erweitert. Die Darstellung dieser schwierigen Theorie muß als ganz hervorragend bezeichnet werden. Es ist dem Verfasser gelungen, aus dem so komplizierten mathematischen Apparat das Grundsätzliche so glücklich herauszuheben, daß auf verhältnismäßig wenigen Seiten eine klare Übersicht dieser Theorien gewonnen wird. Dabei berücksichtigt der Verfasser die letzten Fortschritte der Theorie. Auch der Abschnitt über die Kernphysik wurde weitgehend ausgebaut und auf den neuesten Stand gebracht. Neu aufgenommen wurde beispielsweise auch ein Kapitel über Teilchenbeschleuniger, um, wie der Verfasser sagt, auch die Anwendungen entsprechend zu berücksichtigen.

Es kann nur wiederholt werden, was schon bei der Besprechung der ersten Auflage gesagt wurde: Es ist das moderne Lehrbuch der Physik, welches jedem, der Physik in Theorie und Praxis anzuwenden hat, nur wärmstens empfohlen werden kann. Besonders zu rühmen ist die sehr schöne Ausstattung.

E. Hlawka, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter. Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Über eine Klasse zusammengesetzter Zahlen

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 28. Oktober 1958)

Einleitung: Alle in dieser Arbeit vorkommenden Zahlen sind, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, ganze Zahlen. Es sei $\beta \geqq 2$, $n \geqq 2$, $p \geqq 1$; dann ist das Hauptresultat, daß

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$$

nur dann eine Primzahl sein kann, wenn n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar ist. Für alle anderen Fälle wird eine Faktorenzerlegung explizit angegeben. Außerdem enthält die Abhandlung einen Satz über Diophantische Gleichungen (Satz 2).

Definition 1: Die ganzen Zahlen β, n, p seien > 1, $(n, p) = 1$, $i \geqq 0$. Dann sei $a_i = 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$; und $a_i = 0$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Weiters sei $c_i = 0$, falls es nicht-negative Zahlen x, y gibt, so daß $i = px + ny$; und $c_i = \beta - 1$, falls solche Zahlen nicht existieren.

Satz 1:

$$\sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j\Big)\Big(1 + \sum_{j=1}^{(p-1)(n-1)} \beta^j c_j\Big).$$

Definition 2: Es sei b_i der Koeffizient von x^i in dem Polynom

$$\Big(\sum_{j=0}^{n-1} x^j\Big)\Big(1 + \sum_{j=0}^{(p-1)(n-1)} x^j c_j\Big).$$

Lemma 1:

(i) $b_i = 1 + \sum_{j=0}^{i} c_j$, falls $0 \leqq i \leqq n-1$;

(ii) $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{i} c_j$, falls $n \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, $p \geqq 3$;

(iii) $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{(p-1)(n-1)} c_j$, falls $(p-1)(n-1) < i \leqq p(n-1)$;

(iv) $b_i = 0$, falls $i > p(n-1)$.

Der Beweis folgt direkt aus der Definition 2.

Lemma 2: Wenn $1 \leqq i \leqq n-1$, dann

(i) $b_i = b_{i-1} + \beta - 1$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$;

(ii) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Beweis: Laut Lemma 1 (i) $b_{i-1} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} c_j$, $b_i = 1 + \sum_{j=0}^{i} c_j$, also $b_i = b_{i-1} + c_i$. Nach Definition 1 ist $c_i = 0$ d.u.n.d., wenn nicht-negative Zahlen x, y existieren, so daß $i = px + ny$; ansonsten $c_i = \beta - 1$. Angenommen, solche Zahlen existieren: $i = px + ny$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $p > 1$, $n > 1$, $1 \leqq i \leqq n-1$. Dann ist $y = 0$, da sonst $i \geqq n$ wäre. Also $i = px$, $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Das heißt: Wenn $c_i = 0$, dann $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Nehmen wir nun an, $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$; d. h. $i = px + n \,.\, 0$, $c_i = 0$. Also ist $c_i = 0$ d.u.n.d., wenn $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, ansonsten $c_i = \beta - 1$. Dies, zusammen mit $b_i = b_{i-1} + c_i$ beweist das Lemma.

Lemma 3: $b_n = b_{n-1} - 1$.

Beweis: Zwei Fälle. (i) $p > 2$. Laut Lemma 1 (i) und (ii) $b_{n-1} = 1 + c_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j + c_n$. $0 = p \,.\, 0 + n \,.\, 0$, $n = p \,.\, 0 + n \,.\, 1$, daher $c_0 = c_n = 0$, $b_n = b_{n-1} - 1$. (ii) $p = 2$. Laut Lemma 1 (i) und (iii) $b_{n-1} = 1 + c_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n + 1 + c_0 = b_{n-1}$, $c_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} - 1$.

Lemma 4: Wenn $n + 1 \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, dann $p \geqq 3$, und $n = 2$ nur wenn $p > 3$, und (i) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, (ii) $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Beweis:

Angenommen $p = 2$; $n + 1 \leqq i \leqq (2-1)(n-1)$, $n + 1 \leqq n - 1$, Wid. Angenommen $n = 2$, $p = 3$; $2 + 1 \leqq i \leqq (3-1)(2-1)$, $3 \leqq 2$, Wid. Also $p \geqq 3$, $n \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, $n \leqq i - 1 \leqq (p-1)(n-1)$, und laut Lemma 1 (ii)

$$b_i = \sum_{j=i-n+1}^{i-1} c_j + c_i, \quad b_{i-1} = c_{i-n} + \sum_{j=i-n+1}^{i-1} c_j, \quad \text{also} \quad b_i = b_{i-1} + c_i - c_{i-n}.$$

(i) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Nehmen wir *erstens* an, es gebe nicht-negative Zahlen x_1, y_1, so daß $i = px_1 + ny_1 \,.\, i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $y_1 > 0$, $i - n = px_1 + n(y_1 - 1)$ mit $y_1 - 1 \geqq 0$. Nehmen wir *zweitens* an, es gebe nicht-negative Zahlen x_2 y_2, so daß $i - n = px_2 + ny_2$. Dann $i = px_2 + n(y_2 + 1)$. *Zusammengenommen*: Wenn sich eine der Zahlen i

und $i - n$ in der Form $px + ny$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, schreiben läßt, dann auch die andere. Also ist $c_i = c_{i-n}$ und $b_i = b_{i-1}$.

(ii) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Trivialerweise $i = px_1 + n \,.\, 0$, also $c_i = 0$. *Angenommen*, es gäbe nicht-negative Zahlen x_2, y_2, so daß $i - n = px_2 + ny_2$. Dann $i = px_2 + n(y_2 + 1) \,.\, i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $n(y_2 + 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$; $(n, p) = 1$, daher $y_2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p) \,.\, y_2 \geqq 0$, $y_2 + 1 > 0$, also $y_2 + 1 \geqq p$, daher $i = px_2 + n(y_2 + 1) \geqq px_2 + np \geqq np$, was $i \leqq (p - 1)(n - 1)$ widerspricht. Infolge dessen können solche Zahlen x_2, y_2 nicht existieren und $c_{i-n} = \beta - 1$, $b_i = b_{i-1} + c_i - c_{i-n} = b_{i-1} + 0 - (\beta - 1) = b_{i-1} - \beta + 1$.

Lemma 5: Wenn $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann gibt es nicht-negative Zahlen x, y, so daß $(p - 2)(n - 1) = px + ny$.

Beweis: $(p, n) = 1$, daher gibt es Zahlen x_0, y_0 derart, daß $(p - 2)(n - 1) = px_0 + ny_0$. Die allgemeine Lösung lautet $(p - 2)(n - 1) = p(x_0 + kn) + n(y_0 - kp)$. Wir können x immer negativ machen; dann ist y positiv. Wenn es keine nicht-negative Lösung gäbe, dann müßte ein k existieren, derart daß $x_0 + kn < 0$, $y_0 - (k + 1)p < 0$. Dann wäre $x_0 + kn \leqq -1$, $y_0 - kp \leqq p - 1$, $(p - 2)(n - 1) = p(x_0 + kn) + n(y_0 - kp) \leqq -p + n(p - 1)$ und $2 \leqq n$. Andererseits ist $n > 1$, also wäre $n = 2$, was zu $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$ im Wid. steht. Folglich muß $(p - 2)(n - 1) = px + ny$ eine nicht-negative Lösung haben.

Folgerung: Wenn $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann $c_{(p-2)(n-1)} = 0$.

Lemma 6: Wenn $p > 2$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann gibt es keine nicht-negativen Zahlen x, y mit $(p - 2)(n - 1) = px + ny$.

Beweis: *Angenommen*, es existierten Zahlen x, y derart, daß $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $(p - 2)(n - 1) = px + ny \,.\, n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, $n - 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, $(p - 2)(n - 1) \equiv -2 \pmod{p}$. $p > 2$, $(p - 2)(n - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $(p - 2)(n - 1) = px + ny$, $y \neq 0$, $y \geqq 1$. Weiters $n \equiv (\mathrm{mod}\, p)$, $n = pm + 2$, $m \geqq 0$. $(p - 2)(n - 1) = px + ny$, $(p - 2)(pm + 1) = px + (pm + 2)y$, $p^2 m - 2pm + p - 2 = px + (pm + 2)y \leqq pm + 2$, weil $y \geqq 1$, $x \geqq 0$; $p(pm - 2m + 1) \leqq pm + 4$, $p > 2$, $\frac{4}{p} < 2$, $pm - 2m + 1 \leqq m + \frac{4}{p} < m + 2$, $pm - 2m \leqq m$, $p \leqq 3$. Wegen $p > 2$ ist $p = 3$; aus $(p - 2)(n - 1) = px + ny$ wird $n - 1 = px + ny \geqq n$ (wegen $x \geqq 0$, $y \geqq 1$). Dieses Widerspruches wegen können solche Zahlen x, y *nicht* existieren.

Folgerung: Wenn $p > 2$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann $c_{(p-2)(n-1)} = \beta - 1$.

Lemma 7: (i) Wenn $p = 2$, dann $b_{(p-1)\,(n-1)+1} = b_{(p-1)\,(n-1)} - 1$.
(ii) Wenn $p > 2$ und $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$, dann $b_{(p-1)\,(n-1)+1} = b_{(p-1)\,(n-1)}$.
(iii) Wenn $p > 2$ und $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$, dann $b_{(p-1)\,(n-1)+1} = b_{(p-1)\,(n-1)} - \beta + 1$.

Beweis:

(i) $p = 2$, $b_{(p-1)\,(n-1)} = \underset{n-1}{b}_{n-1}$, $b_{(n-1)\,(n-1)+1} = \underset{n-1}{b}_n$. Laut Lemma 1 (i) und (iii) $b_{n-1} = 1 + \sum_{j=0} c_j$, $b_n = \sum_{j=1} c_j = b_{n-1} - 1 + c_0$.

$0 = p \,.\, 0 + y \,.\, 0$, also $c_0 = 0$ und $b_n = b_{n-1} - 1$.

(ii, iii) Laut Lemma 1 (ii) haben wir $b_{(p-1)\,(n-1)} = \sum_{j=(p-2)\,(n-1)}^{(p-1)\,(n-1)} c_j$,

$b_{(p-1)\,(n-1)+1} = \sum_{j=(p-2)\,(n-1)+1}^{(p-1)\,(n-1)} c_j = b_{(p-1)\,(n-1)} - c_{(p-2)\,(n-1)}$.

Aus den Folgerungen zu Lemma 5 und 6 erhalten wir
im Falle (ii) $c_{(p-2)\,(n-1)} = 0$, $b_{(p-1)\,(n-1)+1} = b_{(p-1)\,(n-1)}$,
im Falle (iii) $c_{(p-2)\,(n-1)} = \beta - 1$, $b_{(p-1)\,(n-1)+1} = b_{(p-1)\,(n-1)} - \beta + 1$.

Bemerkung: $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$ ist mit $(p-1)(n-1) + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ äquivalent.

Der Beweis ist trivial.

Bemerkung: Für $n = 2$ ist $(p-1)(n-1) + 1 = p(n-1)$.

Lemma 8: Wenn $n \geqq 3$ und $(p-1)(n-1) + 2 \leqq i \leqq p(n-1)$, dann

(i) $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$,
(ii) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Beweis:

Nach Lemma 1 (iii) ist $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{(p-1)\,(n-1)} c_j$, $b_{i-1} = \sum_{j=i-n}^{(p-1)\,(n-1)} c_j$, also $b_i = b_{i-1} - c_{i-n}$.

(i) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Angenommen, es gäbe nicht-negative Zahlen x, y, so daß $i - n = px + ny$; dann $i = px + n(y+1)$. Wegen $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ folgt $n(y+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. $(n, p) = 1$, also $y + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $y + 1 \geqq p$, $i = px + n(y+1) \geqq np$, was $i \leqq p(n-1)$ widerspricht. Solche Zahlen x, y existieren also nicht, $c_{i-n} = \beta - 1$, $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$.

(ii) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Angenommen, es gäbe *keine* nicht-negativen Zahlen x, y, so daß $i = px + ny$. Wegen $(p, n) = 1$ muß es Zahlen x_0, y_0 mit $i = px_0 + ny_0$ geben; die allgemeine Lösung ist $i = p(x_0 + nk) + n(y_0 - kp)$. Wir können ein $x < 0$ wählen, dann ist $y > 0$. Nach Annahme müßte es eine Zahl k_0 geben, derart daß $x_0 + nk_0 < 0$, $y_0 - p(k_0 + 1) < 0$. Dann wäre $x_0 \leqq -1 - nk_0$, $y_0 \leqq -1 + p + pk_0$,

$(p-1)(n-1)+2 \leqq i = px_0 + ny_0 \leqq p(-1-nk_0) + n(-1+p+pk_0) =$
$= (p-1)(n-1) - 1$. Wegen dieses Widerspruches *gibt* es nichtnegative Zahlen x, y so, daß $i = px + ny$. $y \neq 0$, da sonst $i = px$ $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ widerspräche. Daher $i - n = px + n(y-1)$, $x \geqq 0$, $y - 1 \geqq 0$ und $c_{i-n} = 0$, $b_i = b_{i-1}$.

Lemma 9: Es bedeute $[z]$ die nächstkleinere ganze Zahl an die *rationale* Zahl z.

(i) Wenn $0 \leqq i \leqq n-1$, dann $b_i = 1 + (i - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$,

(ii) wenn $n \leqq i \leqq p(n-1)$, dann $b_i = (n - 1 - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$.

Beweis: Teil (i) folgt unmittelbar aus Lemma 2. Für $i = n-1$ ergibt Lemma 3 $b_n = (n - 1 - [\frac{n-1}{p}])(\beta - 1)$, oder wegen $(p, n) = 1$ $b_n = (n - 1 - [\frac{n}{p}])(\beta - 1)$. Weiters folgt aus Lemma 4, 7 und 8, daß für $n + 1 \leqq i \leqq p(n-1)$ $b_i = b_{i-1}$ falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, und $b_i = b_{i-1} - (\beta - 1)$ falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$; also $b_i = (n - 1 - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$.

Folgerung: $b_{p(n-1)-1} = (n - 1 - [\frac{p(n-1)-1}{p}])(\beta - 1 = \beta - 1$

$$b_{p(n-1)} = (n - 1 - [\frac{p(n-1)}{p}])(\beta - 1) = 0.$$

Definition 3: $s_i = \sum_{j=0}^{i} b_j \beta^j$.

Lemma 10: (i) Wenn $0 \leqq i \leqq n-1$, dann $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$,

(ii) wenn $n \leqq i \leqq p(n-1)$, dann $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$.

Beweis: Die Behauptung des Teiles (i) ist für $i = 0$, $s_0 = 1$ richtig.

Induktions-Voraussetzung: $s_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (i - 1 - [\frac{i-1}{p}])\beta^i$,

Induktions-Behauptung: $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ und $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

(a) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $a_i = 0$, $[\frac{i-1}{p}] = [\frac{i}{p}]$,

$$s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (i - 1 - [\frac{i-1}{p}])\, \beta^i + \{1 + (i - [\frac{i}{p}])\,(\beta - 1)\}\, \beta^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{i - 1 - [\frac{i-1}{p}] + 1 + (i - [\frac{i}{p}])\,(\beta - 1)\}\beta^i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\, \beta^{i+1}.$$

(b) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $a_i = 1$, $[\frac{i}{p}] - [\frac{i-1}{p}] = 1$,

$$s_i = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{i - 1 - [\frac{i-1}{p}] + 1 + (i - [\frac{i}{p}])\,(\beta - 1)\}\, \beta^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{1 + (i - [\frac{i}{p}])\,\beta\}\, \beta^i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\, \beta^{i+1}.$$

Somit ist Teil (i) bewiesen. Insbesondere $s_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n - 1 -$ $- [\frac{n-1}{p}])\, \beta^n$. Nun ist $s_n = s_{n-1} + b_n \beta^n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{n-1}{p}])\, \beta^n +$ $+ (n - 1 - [\frac{n-1}{p}])\,(\beta - 1)\, \beta^n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{n-1}{p}])\, \beta^{n+1}$. Wegen $(p, n) = 1$, $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_n = 0$, $[\frac{n-1}{p}] = [\frac{n}{p}]$, also $s_n = \sum_{j=0}^{n} \beta^j a_j +$ $+ (n - 1 - [\frac{n}{p}])\, \beta^{n+1}$. Dies ist Teil (ii) für den niedrigsten Index.

Induktions-Voraussetzung: $s_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_i + (n - 1 - [\frac{i-1}{p}])\, \beta^i$,

Induktions-Behauptung: $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_i + (n - 1 - [\frac{i}{p}])\, \beta^{i+1}$

(a) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_i = 0$, $[\frac{i-1}{p}] = [\frac{i}{p}]$, $s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i =$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i-1}{p}])\, \beta^i + (n - 1 - [\frac{i}{p}])\,(\beta - 1)\, \beta^i =$$

$$= \sum_{j=0} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i}{p}]\, \beta^{i+1}.$$

(b) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_i = 1$, $[\frac{i}{p}] - [\frac{i-1}{p}] = 1$, $s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i =$

$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a + (n - 1 - [\frac{i-1}{p}]) \beta^i + (n - 1 - [\frac{i}{p}]) (\beta - 1) \beta^i =$

$= \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i}{p}]) \beta^{i+1}$. Hiermit ist Lemma 10 bewiesen.

Folgerung: $s_{p(n-1)} = \sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{p(n-1)}{p}]) \beta^{p(n-1)+1} =$

$= \sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j$. *Dies ist aber gleichbedeutend mit Satz 1.*

Satz 2: *Es seien a und b zwei ganze Zahlen > 1, $(a, b) = 1$, und es seien k_1 und k_2 zwei nicht-negative ganze Zahlen, $k_1 + k_2 = (a-1)(b-1) - 1$; dann hat genau eine der beiden Diophantischen Gleichungen $k_i = ax + by$ $(i = 1, 2)$ eine nicht-negative Lösung.*

Beweis: Nehmen wir *zuerst* an, beide Gleichungen hätten nicht-negative Lösungen. $k_1 = ax_1 + by_1$, $k_2 = ax_2 + by_2$, $k_1 + k_2 = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)$, $(a - 1)(b - 1) - 1 = ax_3 + by_3$, $x_3 \geqq 0$, $y_3 \geqq 0$, also nach Definition 1 $c_{(a-1)(b-1)-1} = 0$. Während des Beweises zu Lemma 8 zeigten wir, daß wenn $\beta > 1$, $n \geqq 3$, $p \geqq 2$, $(n, p) = 1$, $(p - 1)(n - 1) + 2 \leqq i \leqq p(n - 1)$, dann $c_{i-n} = \beta - 1$ falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, und $c_{i-n} = 0$ falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Da a und b zwei relativ prime Zahlen > 1 sind, ist mindestens eine davon $\geqq 3$. O.B.d.A. $b \geqq 3$. Nehmen wir $a = p$, $b = n$, $i = a(b-1)$, dann $i - n = a(b-1) - b = (a-1)(b-1) - 1$. Weil $i = a(b - 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, a)$, folgt aus Lemma 8, daß $c_{i-n} = c_{(a-1)(b-1)-1} = \beta - 1 > 0$. Das widerspricht $c_{(a-1)(b-1)-1} = 0$; es ist daher *nicht* möglich, daß beide Gleichungen nicht-negative Lösungen haben.

Nehmen wir *als nächstes* an, daß eine der Gleichungen, z. B. $k_1 = ax + by$, keine nicht-negative Lösung hat. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = x_0 + mb$, $y_1 = y_0 - ma$. Es sei $\bar{x}_1$ eine spezielle Lösung; dann existiert ein l, so daß $lb \leqq \bar{x}_1 < lb + b$. $\bar{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1 - lb$ ist auch Lösung, und $0 \leqq \bar{\bar{x}}_1 < b$. Da die Gleichung keine nicht-negative Lösung hat, muß das dazugehörige $\bar{\bar{y}}_1$ negativ sein. Also:

$0 \leqq \bar{\bar{x}}_1 < b$, $\bar{\bar{y}}_1 < 0$; $\bar{\bar{x}}_1 + 1 \leqq b$, $\bar{\bar{y}}_1 + 1 \leqq 0$. $x_2 = b - 1 - \bar{\bar{x}}_1 \geqq 0$,

$y_2 = -\bar{\bar{y}}_1 - 1 \geqq 0$; $ax_2 + by_2 = a(b - 1 - \bar{\bar{x}}_1) + b(-\bar{\bar{y}}_1 - 1) =$

$= ab - a - a\bar{\bar{x}}_1 - b\bar{\bar{y}}_1 - b = (a - 1)(b - 1) - 1 - (a\bar{\bar{x}}_1 + b\bar{\bar{y}}_1) =$

$= (a - 1)(b - 1) - 1 - k_1 = k_2.$

Also haben wir mit x_2, y_2 eine nicht-negative Lösung der zweiten Gleichung gefunden. Damit ist der Satz bewiesen.

Lemma 11: Wenn $a > 1$, $b > 1$, $p > 0$, $\beta > 1$, dann

$$\sum_{j=0}^{ab-1} \beta^{pj} = \left(\sum_{j=0}^{a-1} \beta^{pj}\right)\left(\sum_{j=0}^{b-1} \beta^{paj}\right).$$

Der Beweis ist offenkundig.

Es sei nun $\beta \geqq 2$, $n \geqq 2$, $p \geqq 1$; dann gibt Lemma 11 eine Faktorenzerlegung von $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$, sobald n eine zusammengesetzte Zahl ist; Satz 1 gibt eine Faktorenzerlegung einer Zahl dieser Form, sobald $p \geqq 2$ und $(n, p) = 1$ ist. Wir können diese Resultate zu einem *Satz 3* zusammenfassen:

Wenn $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$ eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar. Für alle anderen Fälle ist uns eine Faktorenzerlegung bekannt.

Dies ist das anfangs angekündigte Ergebnis. Die Umkehrung gilt nicht. Wann eine Zahl von der Form $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$, wo n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar ist, eine Primzahl, und wann eine zusammengesetzte Zahl ist, wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff[1]

Von

Woldemar Barthel, Saarbrücken

Mit 10 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. November 1958)

Diese Arbeit behandelt einige Fragen der Minkowski-Geometrie, die sich eng an die Theorie der konvexen Körper anschließen und frei von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind.

Busemann begründete in [15] die Minkowski-Geometrie systematisch auf einem Flächeninhaltsbegriff, den er aus einer vorgegebenen Minkowski-Metrik herleitete. Er wies damit nachdrücklich auf die Bedeutung der Inhaltsmessung für die Geometrie hin. Allerdings darf nicht übersehen werden, daß diese Untersuchungen weitgehend unabhängig von dem benutzten speziellen Flächenmaß sind. Wir werden deshalb einen *Minkowski-Raum* allgemeiner definieren, indem wir in einem affinen Raum für jede Dimension eine „Inhaltsfunktion" vorgeben. Unsere ersten Untersuchungen gelten im wesentlichen den Konvexitätseigenschaften dieser orientierungsabhängigen Flächeninhalte. Anschließend schalten wir eine spezielle Betrachtung über die *Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen*[2] ein und beweisen insbesondere deren Konvexität. Während *Busemann* selbst für die entsprechenden Definitionen und Beweise euklidisch-metrische Hilfsmittel benutzt, wollen wir ausschließlich affine und Minkowski-metrische Begriffe verwenden. Dies dürfte, wie bereits *Pauc* [23] betonte, der Problemstellung angemessener sein. Entsprechend verfahren wir bei dem von *Busemann* stammenden Existenzsatz für eine Transversalgerade zu einer p-dimensionalen Ebene.

---

[1] Vorliegende Abhandlung umfaßt einen dritten Teil der Habilitationsschrift, die der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br. am 14. Juni 1957 vorgelegt wurde.

[2] Vgl. *Bouligand-Choquet* [9], *Busemann* [12], [13], [15] und unsere Note [1].

Die dabei erforderliche Konstruktion ermöglicht uns dann, eine *Konvexitätseigenschaft der Gesamtheit aller Transversalgeraden* zu einer festen p-dimensionalen Ebene herzuleiten. Abschließend untersuchen wir die beiden Grundfiguren des Minkowski-Raumes, nämlich die *Indikatrix und Isoperimetrix*. Daraus kann in invarianter Weise eine $(n-1)$-dimensionale Dualoberfläche bzw. Duallänge gewonnen werden. Für diese sowie die ursprüngliche Länge und $(n-1)$-dimensionale Oberfläche des Minkowski-Raumes diskutieren wir sodann die isodiametrischen und isoperimetrischen Probleme[3]. In dem letzten Abschnitt ist es möglich, fast durchgehend statt der Konvexität nur die Stetigkeit der Längen- und Oberflächenfunktion vorauszusetzen.

Unsere Konzeption, die Minkowski-Räume durch eine Skala voneinander unabhängiger Inhaltsfunktionen zu definieren, legt natürlich einen entsprechenden Ansatz für die Finsler-Räume, d. h. punktal-Minkowskischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nahe. Allerdings kommt dabei eine neue Schwierigkeit hinzu, nämlich die geeignete Definition eines Parallelismus p-dimensionaler Flächenelemente, welcher deren Flächeninhalt invariant läßt. Unter diesen Gesichtspunkten haben wir bereits in den Noten [2] und [3] Variantionsprobleme der Finsler-Geometrie für die Grenzdimensionen $p = 1$ und $p = n-1$ behandelt und insbesondere eine differentialgeometrische Charakterisierung der beiden isoperimetrischen Probleme gegeben. Auf den allgemeinen Fall, der wegen der Struktur der Graßmann-Mannigfaltigkeit neue Fragen aufwirft, gehen wir in [7] ein.

1. Grundbegriffe im Minkowski-Raum

Ein *Minkowski-Raum* werde erklärt als n-dimensionaler affiner Raum R_n, in dem jedem orientierten, p-dimensionalen Parallelotop, aufgespannt von Vektoren $X_1, \ldots, X_p$, ein p-dimensionaler Flächeninhalt

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

zugeordnet ist. Dabei sollen diese Inhaltsfunktionen folgende Eigenschaften besitzen:

I. $F^{(p)}(X_\varrho) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ gilt.

II. $F^{(p)}(\lambda_\varrho^\varrho X_\varrho) = |\lambda_\varrho^\varrho| F^{(p)}(X_\varrho)$ für $|\lambda_\varrho^\varrho| > 0$.

[3] Vgl. unsere Skizze [4].

III. $F^{(p)}(X_1, ..., Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p) \leqq F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1}, \ldots, X_p) + F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a2}, \ldots, X_p)$ für $p < n$.

Wenn in III das Gleichheitszeichen nur für $p+1$ linear abhängige Vektoren steht, so wollen wir von strenger Konvexität sprechen.

Hiermit läßt sich unmittelbar der Flächeninhalt eines p-dimensionalen, orientierten Polyeders definieren. Die zuletzt geforderte Konvexität der Inhaltsfunktionen hat dann ein Analogon der Dreiecksungleichung zur Folge.

Satz *über die Simplexungleichung*: Im Fall $p < n$ ist die Summe der p-dimensionalen Flächeninhalte von $p+1$ kohärent orientierten p-dimensionalen Seitensimplexen eines $(p+1)$-dimensionalen Simplex nicht kleiner als der Flächeninhalt des entgegengesetzt orientierten restlichen Seitensimplex. Wenn das $(p+1)$-dimensionale Simplex von den Vektoren $X_0, X_1, \ldots, X_p$ aufgespannt wird, so ist also

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(X_\varrho - X_0) \leqq \sum_{\delta=0}^{p} \frac{1}{p!} F^{(p)}(-X_0, \ldots, -X_{\delta-1}, X_{\delta+1}, \ldots, X_p). \quad (1, 1)$$

Wird zusätzlich in III strenge Konvexität verlangt, so gilt auch in (1, 1) dann und nur dann Gleichheit, wenn das $(p+1)$-dimensionale Simplex entartet ist.

Beweis: Der orientierte Rand des $(p+1)$-dimensionalen Simplex $(P_0, P_1, \ldots, P_{p+1})$ ist

$$\sum_{\tau=0}^{p+1} (-1)^\tau (P_0 \ldots P_{\tau-1} P_{\tau+1} \ldots P_{p+1}) =$$

$$= (P_1, \ldots, P_{p+1}) - \sum_{\tau=1}^{p+1} (-1)^{\tau-1} (P_0, \ldots, P_{\tau-1}, P_{\tau+1}, \ldots, P_{p+1}).$$

Setzt man $X_{\tau-1} = \overrightarrow{P_0 P_\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, p+1)$, so werden die orientierten Randkomplexe

$(P_1, \ldots, P_{p+1})$ bzw. $(-1)^{\tau-1} (P_0, \ldots, P_{\tau-1}, P_{\tau+1}, \ldots, P_{p+1})$ für $\tau = 1, \ldots, p+1$

jeweils von den Vektoren

$$X_1 - X_0, \ldots, X_p - X_0 \text{ bzw. } -X_0, -X_1, \ldots, -X_{\delta-1}, X_{\delta+1}, \ldots, X_p \quad (\delta = 0, \ldots, p)$$

aufgespannt. Nunmehr folgt durch sukzessive Anwendung der Eigenschaft III und Vereinfachung nach II

$$F^{(p)}(X_1-X_0, X_2-X_0, \ldots, X_p-X_0) \geqq$$
$$\geqq F^{(p)}(X_1, X_2-X_0, \ldots, X_p-X_0) + F^{(p)}(-X_0, X_2, \ldots, X_p) \geqq$$
$$\geqq F^{(p)}(X_1, X_2, \ldots, X_p) + \sum_{\delta=p}^{1} F^{(p)}(X_1, \ldots, X_{\delta-1}, -X_0, X_{\delta+1}, \ldots, X_p),$$

woraus sich sofort die gesuchte Ungleichung (1, 1) ergibt.

Das Volumen eines orientierten, n-dimensionalen Parallelotops ist natürlich bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

Satz: Für eine Vektorbasis e_i des R_n werde $X_r = X_r^i e_i$ gesetzt. Dann existieren zwei positive Skalardichten[4] $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_-$ vom Gewicht $(+1)$, so daß je nach der Orientierung der n Vektoren X_r

$$F^{(n)}(X_r) = \mathfrak{F} \cdot | \,||\, X_r^i \,||\, | \text{ bzw. } = \mathfrak{F}_- | \,||\, X_r^i \,||\, |$$

gilt.

Beweis: Aus der Eigenschaft II erhält man bei gleicher Orientierung der X_r und e_i

$$F^{(n)}(X_r) = ||\, X_r^i \,||\, F^{(n)}(e_i)$$

sowie bei entgegengesetzter Orientierung

$$F^{(n)}(X_r) = - ||\, X_r^i \,||\, F^{(n)}(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n).$$

Für die nach I positiven Konstanten

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} F^{(n)}(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n) \text{ und } \mathfrak{F}_- \overset{\text{def}}{=} F^{(n)}(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$$

folgt aber bei einer orientierungstreuen Basistransformation $e_i = x_i^{i'} e_{i'}$ wiederum aus II

$$\mathfrak{F}' = ||\, x_i^{i'} \,||^{-1} \mathfrak{F} \text{ und } \mathfrak{F}'_- = ||\, x_i^{i'} \,||^{-1} \mathfrak{F}_-.$$

Die Skalardichte $\mathfrak{F}$ ermöglicht nun eine invariante Identifizierung gewisser mit dem R_n verbundener Vektorräume. Zuvor wollen wir jedoch auf eine geometrische Deutung des dualen Vektorraumes[5] eingehen, die rein affinen Charakter besitzt.

Satz: Sei E der *Vektorraum* über dem affinen R_n, der von den Klassen aller translationsgleichen geordneten Punktepaare des R_n gebildet wird. Dann lassen sich jene Vektoren des *Dualraumes* E^* von E, welche vom Nullvektor verschieden sind, als geordnete Paare von parallelen (nicht identischen) Hyperebenen des R_n darstellen, die bis auf Translationen festgelegt sind.

[4] Für diesen invariantentheoretischen Begriff vgl. *Schouten* [24] S. 12.

[5] Für vektoralgebraische Begriffe vgl. *Bourbaki* [10] und [11].

Beweis: Ein solches paralleles Hyperebenenpaar u ordnet jedem Vektor $X \in E$ eine reelle Zahl $u(X)$ zu, nämlich das Verhältnis von X zu dem Vektor, der von u aus der Geraden (X) ausgeschnitten wird[6]. Ist X parallel zu u, so werde $u(X) = 0$ gesetzt. u ist dann eine Linearform über E (vgl. Abb. 1). Sei umgekehrt $v(X) \not\equiv 0$ eine Linearform über E, so ist $\{P \mid v(\overrightarrow{OP}) = 1\}$ eine Hyperebene. Denn wenn $X_1, \ldots, X_n$ linear unabhängige Vektoren mit $v(X_i) = 1$ sind, so folgt $\overrightarrow{OP} = \alpha X_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i (X_i - X_n)$ und $\alpha = v(\overrightarrow{OP}) = 1$. Damit ist der Linearform $v(X)$ ein geordnetes Paar v paralleler Hyperebenen zugeordnet.

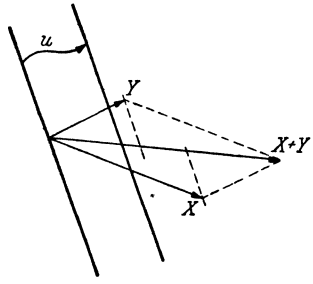

Abb. 1

Es sei noch kurz die geometrische Bedeutung der Operationen in E^* skizziert. Die *Multiplikation* von $u \neq 0$ mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ entspricht wegen $(\lambda u)(X) \overset{\text{def}}{=} \lambda . u(X) = u(\lambda X) = 1$ einer Homothetie von u mit dem Verhältnis $1/\lambda$ bezüglich eines Punktes auf einer der Hyperebenen von u. Die *Addition* zweier linear unabhängiger Vektoren $u, v \in E^*$ verläuft nach der in Abb. 2 angegebenen Konstruktion[7]. Für ihre Rechtfertigung braucht man in der Gleichung $(u + v)(X) \overset{\text{def}}{=} u(X) + v(X)$ nur jeweils Vektoren X parallel zu u bzw. v zu betrachten.

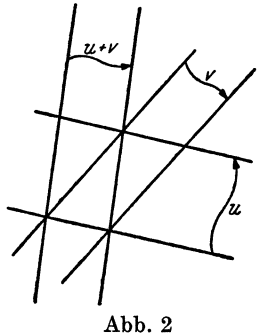

Abb. 2

Das *Skalarprodukt* $\langle X, u \rangle \overset{\text{def}}{=} u(X)$ erhält jetzt durch seine Definition eine geometrische Deutung. Sind übrigens $X \in E$ und $u \in E^*$ keine Nullvektoren, so ist $\langle X, u \rangle = 0$ gleichbedeutend mit dem Parallelismus des Vektors X zum Hyperebenenpaar u.

Die erwähnte Identifizierung vermittelt nun der

Isomorphiesatz: Die Skalardichte $\mathfrak{F}$ gestattet, durch

---

[6] In dieser Arbeit bezeichne $(X_\varrho) = (X_1, \ldots, X_p)$ einen Vektorraum oder eine nur bis auf Translationen festgelegte Ebene, die von Vektoren $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannt wird. $(X_\varrho)_p$ sei dann der lineare Unterraum, welcher durch Abtragen der Vektoren aus (X_ϱ) im Punkt P entsteht.

[7] Vgl. auch *Schouten* [24] S. 8.

$$\mathfrak{F} \,||\, X_1, \ldots, X_{n-1}, X \,|| = u(X)$$

eine invariante Isomorphie

$$\Lambda^{n-1} E \leftrightarrow E^*$$

zu definieren. Dadurch entspricht also dem $(n-1)$-Vektor $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \neq 0$ ein ihm paralleles Paar u von geordneten Hyperebenen, so daß $X_1, \ldots, X_{n-1}$ mit einem Vektor $Y \in E$, der die beiden Hyperebenen im Sinne ihrer Orientierung verbindet, ein positiv orientiertes Parallelotop vom Volumen 1 bilden (vgl. Abb. 3).

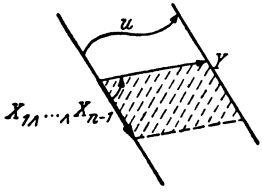

Abb. 3

Beweis: für diese Abbildung gilt zunächst natürlich $\lambda X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow \lambda u$. Sind andererseits Z_1, Z_2 zwei $(n-1)$-Vektoren mit $Z_j \leftrightarrow u_{(j)} \in E^*$, so lassen sie sich in der Form

$$Z_j = X_{1j} \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

darstellen. Daraus folgt wegen

$$\begin{aligned} || X_{11} + X_{12}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || &= || X_{11}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || + \\ &+ || X_{12}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || \end{aligned}$$

aber $Z_1 + Z_2 \leftrightarrow u_{(1)} + u_{(2)}$.

Jetzt kommen wir auf die allgemeinen Inhaltsfunktionen zurück. Sie induzieren nämlich in den jeweiligen Graßmann-Kegeln positiv homogene und konvexe Funktionen. Bevor wir dies nachweisen, soll kurz an einige bekannte Grundeigenschaften der Graßmann-Mannigfaltigkeiten und -Kegel erinnert werden.

Satz:

A. Die *Graßmann-Mannigfaltigkeit* G_n^p, definiert als Gesamtheit der p-dimensionalen Unterräume von E, ist eine ganz-rationale Mannigfaltigkeit der Dimension $p(n-p)$ im $\{\binom{n}{p}-1\}$-dimensionalen projektiven Raum.

B. Der als Menge der *einfachen* p-Vektoren aus $\Lambda^p E$ definierte *Graßmann-Kegel* GK_n^p ist außerhalb des Nullvektors eine $(p(n-p)+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\binom{n}{p}$-dimensionalen affinen Raum $\Lambda^p E$.

Beweis: Für einen p-Vektor $Z \neq 0$ über E ist $V_Z = \{X \in E \mid Z \wedge X = 0\}$ ein Unterraum von E, und zu jeder Basis $X_1, \ldots, X_q$ aus V_Z existiert ein $(p-q)$-Vektor Y mit $Z = Y \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q$. Insbesondere ist also

ein *einfacher* p-Vektor $Z \neq 0$ durch $\dim V_Z = p$ gekennzeichnet und die Proportionalität zweier einfacher p-Vektoren $Z_1 = \lambda Z_2 \neq 0$ äquivalent zu $V_{Z_1} = V_{Z_2}$[8]. Die Abbildung $Z \to V_Z$ definiert daher eine eineindeutige Zuordnung zwischen den p-dimensionalen Unterräumen $V_Z \subset E$ und den von *einfachen* p-Vektoren $Z \neq 0$ erzeugten eindimensionalen Unterräumen $(Z) \subset \Lambda^p E$. Wird jetzt eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von E gewählt und

$$Z = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} Z^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad X = X^i e_i$$

gesetzt, dann folgt

$$Z \wedge X = (p+1) \sum_{j_1 < \ldots < j_{p+1}} Z^{[j_1 \cdots j_p} X^{j_{p+1}]} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{p+1}}.$$

Die Einfachheit von $Z \neq 0$ ist also äquivalent dazu, daß die $\binom{n}{p+1}$ Gleichungen in X^i

$$Z^{[j_1 \cdots j_p} X^{j_{p+1}]} = 0 \tag{1,2}$$

den Rang $n-p$ haben. Sei etwa die Komponente $Z^{1 \cdots p} \neq 0$, so ist bereits

$$\left.\begin{aligned} Z^{\bar{\mu}2 \cdots p} X^1 + Z^{1\bar{\mu}3 \cdots p} X^2 + \ldots + Z^{1 \cdots p-1\bar{\mu}} X^p - Z^{1 \cdots p} X^{\bar{\mu}} = 0 \\ (\bar{\mu} = p+1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{1,3}$$

ein Teilsystem von (1,2) mit dem Rang $n-p$, wie man aus seiner Matrix erkennt. Deshalb hat das Gleichungssystem (1,2) dann und nur dann den Rang $n-p$, wenn alle Größen

$$\frac{Z^{i_1 \cdots i_p}}{Z^{1 \cdots p}}$$

Linearkombinationen der $p(n-p)$ speziellen Größen

$$\frac{Z^{\bar{\mu}2 \cdots p}}{Z^{1\,2 \cdots p}}, \ \ldots, \ \frac{Z^{1 \cdots p-1\,\bar{\mu}}}{Z^{1 \cdots p-1\,p}} \quad (\bar{\mu} = p+1, \ldots, n)$$

darstellen. Hiermit haben wir eine lokale Parameterdarstellung der Graßmann-Mannigfaltigkeit im $(\binom{n}{p}-1)$-dimensionalen projektiven Raum der homogenen Koordinaten $Z^{i_1 \cdots i_p}$ gewonnen, aus der sich unmittelbar die Behauptungen des Satzes ergeben. Die einem p-dimensionalen Unterraum $V_Z \subset E$ zugeordneten Komponenten $Z^{i_1 \cdots i_p}$ sind seine homogenen Graßmann-Koordinaten.

Nunmehr können wir weitere Folgerungen für die Inhaltsfunktionen des Minkowski-Raumes herleiten.

Satz: Die von den Inhaltsfunktionen in den zugehörigen Graßmann-Kegeln GK_n^p induzierten Funktionen

[8] Vgl. *Bourbaki* [11] S. 94/96 Proposition 3, Corollaire 1 und 2.

$$f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) = F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p)$$

haben die Eigenschaften

i. $f^{(p)}(Z) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $Z = 0$ gilt.

ii. $f^{(p)}(\lambda Z) = \lambda f^{(p)}(Z)$ für $\lambda > 0$.

iii. $f^{(p)}(Z_1 + Z_2) \leqq f^{(p)}(Z_1) + f^{(p)}(Z_2)$ für $p < n$, wenn Z_1, Z_2, $Z_1 + Z_2 \in GK_n^p$.

Beweis: Wir setzen $Z = X_1 \wedge \ldots \wedge X_p$ oder in Komponenten

$$Z^{i_1 \cdots i_p} = p!\ X_1^{[i_1} \ldots X_p^{i_p]}.$$

Nun hat $Z \neq 0$ bei geeigneter Reihenfolge der Basisvektoren sicher eine positive Komponente. Ist etwa $Z^{1 \cdots p} > 0$, so transformieren wir die X_ϱ in p neue Vektoren mit den p ersten Komponenten

$$X_\varrho^\mu U_{\varrho'}^\varrho = \delta_{\varrho'}^\mu, \qquad (\mu = 1, \ldots, p). \tag{1,4}$$

Die $n-p$ restlichen Komponenten sind dann nach (1,3)

$$\begin{aligned} X_\varrho^{\bar\mu} U_{\varrho'}^\varrho &= \frac{Z^{1 \cdots p}\, X_\varrho^{\bar\mu}}{Z^{1 \cdots p}}\, U_{\varrho'}^\varrho \\ &= \sum_{\delta=1}^{p} \frac{Z^{1 \cdots \delta-1\, \bar\mu\, \delta+1 \cdots p}\, X_\varrho^\delta}{Z^{1 \cdots p}}\, U_{\varrho'}^\varrho \\ &= \frac{Z^{1 \cdots \varrho'-1\, \bar\mu\, \varrho'+1 \cdots p}}{Z^{1 \cdots p}}, \qquad (\bar\mu = p+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Jetzt ist aber wegen (1.4)

$$\| U_{\varrho'}^\varrho \| = \frac{1}{Z^{1 \cdots p}},$$

so daß man aus Eigenschaft II erhält

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p) = Z^{1 \cdots p} F^{(p)} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \\ \dfrac{Z^{p+1\ 2 \ldots p}}{Z^{1 \cdots p}} & \ldots & \dfrac{Z^{1 \cdots p-1\, p+1}}{Z^{1 \cdots p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{Z^{n\ 2 \ldots p}}{Z^{1 \cdots p}} & \ldots & \dfrac{Z^{1 \cdots p-1\, n}}{Z^{1 \cdots p}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{def}}{=} f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p).$$

Schließlich setzen wir noch $f^{(p)}(0) = 0$. Die Eigenschaften I bis III haben nun jeweils die Beziehungen i bis iii zur Folge. Dabei muß für iii beachtet werden, daß die Summe zweier einfacher p-Vektoren Z_1+Z_2 dann und nur dann wieder einen einfachen p-Vektor darstellt, wenn $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) \geqq p-1$ ist[9]. Diese Aussage läßt sich folgendermaßen einsehen: Ist Z_1+Z_2 ein einfacher p-Vektor und $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) < p$, so existiert ein Vektor $X \in V_{Z_1+Z_2}$, der nicht zu $V_{Z_1} \cap V_{Z_2}$ gehört. Für ihn ist

$$Z_1 \wedge X = -Z_2 \wedge X \neq 0,$$

woraus $\dim(V_{Z_1}+V_{Z_2}) = p+1$ und damit $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) = p-1$ folgt.

Die Funktion $F^{(n)}(X_0)$ führt wegen des zweiten Satzes dieser Nr. natürlich sofort zu einem Volumen im Minkowski-Raum, das dem Lebesgueschen Maß proportional ist:

$$V(\mathfrak{M}) = \mathfrak{F} \mid \mathfrak{M} \mid_n \text{ bzw. } V_-(\mathfrak{M}) = \mathfrak{F}_- \cdot \mid \mathfrak{M} \mid_n, \tag{1,5}$$

je nachdem die meßbare Menge $\mathfrak{M}$ positiv oder negativ orientiert ist. Andererseits ist durch die allgemeine Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_0)$ der Flächeninhalt eines p-dimensionalen Polyeders gegeben, womit nach den verschiedenen aus der euklidischen Geometrie bekannten Verfahren (*Lebesgue* usw.[10]) Flächenmaße für gewisse Klassen p-dimensionaler Flächenstücke konstruiert werden können. Diese Definitionen und ihr gegenseitiges Verhältnis soll hier nicht behandelt werden, in Nr. 4 werden wir lediglich die $(n-1)$-dimensionalen Minkowskischen Flächenmaße einführen.

2. Choquet-Busemannsche Inhaltsfunktionen

Die im Minkowski-Raum vorgegebene eindimensionale Inhaltsfunktion bestimmt als Distanzfunktion einen konvexen Körper, der den Ursprung im Innern enthält. Die Frage, ob sich nun allein aus der Vorgabe einer solchen Eichfigur $\mathfrak{E}$ im R_n eine Skala von Inhaltsfunktionen konstruieren und damit der R_n zu einem Minkowski-Raum im Sinne des letzten Abschnittes ausstatten läßt, kann recht vielfältig beantwortet werden. Die einzige bisher ausführlich untersuchte Lösung dieses Problems führt zu den Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen, die wir hier kurz betrachten wollen[11].

---

[9] Vgl. *Bourbaki* [11] S. 99 Exercice 6.

[10] Vgl. *Cesari* [16], *Nöbeling* [20]—[22] und *M. Kneser* [17].

[11] Vgl. *Bouligand-Choquet* [9], *Busemann* [12], [13] und unsere Note [1].

Zunächst soll ein Volumen eingeführt werden, das ein nicht-triviales Haarsches Maß ist. Ein solches ist aber bis auf einen Faktor eindeutig[12] bestimmt, also dem auf ein beliebiges Einheitsparallelotop bezogenen Lebesgueschen Maß proportional

$$\mathfrak{F} \cdot |\, \mathfrak{M} \,|_n. \tag{2,1}$$

Die noch willkürliche Skalardichte $\mathfrak{F}$ werde jetzt festgelegt durch die

Forderung 1: Das Volumen des Eichkörpers $\mathfrak{E}$ sei eine nur von der Dimension abhängige Konstante, für die aus rein konventionellen Gründen das Volumen der n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel

$$\omega^{(n)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

gewählt wird.

Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{F} = \frac{\omega^{(n)}}{|\, \mathfrak{E} \,|_n},$$

womit das Volumen eindeutig bestimmt ist. Diese Festsetzung erhält ihre Bedeutung erst beim Übergang zum Flächeninhalt, der eingeführt werden soll durch die weitere

Forderung 2: Der p-dimensionale Flächeninhalt eines von den Vektoren $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannten Parallelotops sei gleich seinem Volumen in dem affinen Raum $(X_\varrho)_0$, versehen mit der induzierten Eichfigur $\mathfrak{E} \cap (X_\varrho)_0$.[6]

Hieraus erhält man unmittelbar die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen

$$F^{(p)}(X_\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{für linear abhängige } X_\varrho \\ \dfrac{\omega^{(p)}}{|\, \mathfrak{E} \cap (X_\varrho)_0 \,|_p} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2,2}$$

wobei das im Raum $(X_\varrho)_0$ gebildete p-dimensionale Lebesguesche Maß stets auf das von $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannte Parallelotop als Einheit zu beziehen ist. Für diese speziellen Funktionen haben wir den

Satz: Die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen (2,2) besitzen die Eigenschaften

0′. Die Menge $\{P \mid F^{(1)}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\}$ gewinnt man durch Symmetrisierung der Eichfigur $\mathfrak{E}$ am Ursprung 0. $F^{(1)}(X)$ ist also dann und

[12] Vgl. etwa *Loomis* [19].

nur dann Distanzfunktion von $\mathfrak{E}$, wenn die Eichfigur $\mathfrak{E}$ bezüglich 0 symmetrisch ist.

I'. $F^{(p)}(X_\varrho) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ gilt.

II'. $F^{(p)}(\lambda_\varrho^\varrho X_\varrho) = |\lambda_\varrho^\varrho| \, F^{(p)}(X_\varrho)$.

III'. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Symmetrie von $\mathfrak{E}$ bezüglich 0 ist

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p) \leqq$$
$$\leqq F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1}, \ldots, X_p) + F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a2}, \ldots, X_p) \text{ für } p < n,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn

a) $X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p$ linear abhängig sind oder

b) $\mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y_1 Y_{a1} + y_2 Y_{a2} + \sum_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \text{ mit } y_1 y_2 \geqq 0\}$ ein Zylinderstumpf mit den beiden Schnittflächen $\mathfrak{E} \cap (X_1, \ldots, Y_{ai}, \ldots, X_p)_0$ ist.

Bei streng konvexem Eichkörper $\mathfrak{E}$ kann natürlich Fall b) nicht auftreten.

IV'. $F^{(p)}(X_\varrho)$ ist außerhalb der Nullstellen ebensooft stetig differenzierbar wie die Distanzfunktion $L(X)$ der Eichfigur $\mathfrak{E}$.

Beweis: Während der Eigenschaften 0' bis II' trivial sind, folgt III' aus Teil B des Busemannschen Satzes (vgl. unsere Note [5] Nr. 2, deren Symbolik auch hier benutzt werden soll). Sind nämlich die $p+1$ Vektoren $X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p$ linear unabhängig, so können wir im $(p+1)$-dimensionalen Raum $(X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p)_0$ das Halbbüschel betrachten, welches von dem Träger $T = (X_1, \ldots, X_{a-1}, X_{a+1}, \ldots, X_p)_0$ und der Geraden $\overrightarrow{OP} = Y_{a1} + \lambda(Y_{a2} - Y_{a1})$ erzeugt wird. Für die Schnitte von $\mathfrak{E}$ mit den p-dimensionalen Halbebenen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ dieses Halbbüschels

$$\mathfrak{R}_i \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y_i Y_{ai} + \sum_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \text{ mit } y_i \geqq 0\}$$

ist dann

$$\tfrac{1}{2} \, |\mathfrak{R}_1|_p^{-1} + \tfrac{1}{2} \, |\mathfrak{R}_2|_p^{-1} \geqq |[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]_{1/2}|_p^{-1}$$

und wegen der Konvexität von $\mathfrak{E}$

$$\geqq |\mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y \tfrac{1}{2}(Y_{a1} + Y_{a2}) + \sum_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \text{ mit } y \geqq 0\}|_p^{-1}.$$

Bezieht man dieses in der Halbebene $\lambda = \frac{1}{2}$ gebildete p-dimensionale Maß jetzt auf das von den Vektoren $X_1, \ldots, Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p$ aufgespannte Einheitsparallelotop und beachtet man schließlich die *Symmetrie* der Eichfigur $\mathfrak{E}$, so folgt in der Tat die Konvexität III′. Dabei ist die Symmetrie von $\mathfrak{E}$ wesentlich, da sonst die Symmetriesierung von $\mathfrak{E}$ an 0 nicht notwendig einen konvexen Körper ergibt, also bereits $F^{(1)}(X)$ nicht konvex zu sein braucht. Wegen des Nachweises der Differenzierbarkeit IV′ verweisen wir auf unsere Note [1] S. 363—364.

Die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen sind stets von der Orientierung der zu messenden Parallelotope unabhängig. Aber nach dem eben bewiesenen Satz erscheint ihre Konstruktion ohnehin nur für symmetrische Eichfiguren sinnvoll. Unter dieser Zusatzvoraussetzung besitzt das n-dimensionale Choquet-Busemannsche Maß noch die bemerkenswerte Eigenschaft, mit dem n-dimensionalen Hausdorffschen Maß bezüglich der durch $\mathfrak{E}$ erzeugten Metrik identisch zu sein. Dies wurde zuerst von *Busemann* [13] S. 241—242 erkannt und mittels der isodiametrischen Ungleichung[13] bewiesen.

Weiterhin stellt sich die Frage, wodurch eigentlich die Choquet-Busemannsche Konstruktion von Inhaltsfunktionen aus einer Eichfigur vor anderen möglichen Wegen ausgezeichnet ist. *Busemann* [13] S. 242 bis 243 beantwortet dies mit dem Nachweis, daß ein Volumen (2,1) notwendig die Forderung 1 erfüllt, wenn es folgender Variante des Kolmogoroffschen Prinzips[14] genügt: Bei zwei bezüglich 0 symmetrischen Eichfiguren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ soll aus

$$\bigcup_{i=1}^{M} (P_i + \mathfrak{E}') \supset \mathfrak{E} \supset \bigcup_{i=1}^{N} (Q_i + \mathfrak{E}'),$$

wo sich die N Kugeln $Q_i + \mathfrak{E}'$ höchstens berühren dürfen, für die entsprechenden Volumina stets

$$M \cdot \mathfrak{F} \geqq \mathfrak{F}' \geqq N \cdot \mathfrak{F}$$

folgen.

Auf diese eben skizzierten und die von *Busemann* daran angeschlossenen Untersuchungen über eine „intrinsic area", d. h. ein nur von den geodätischen Abständen abhängiges Flächenmaß, wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

---

[13] Vgl. auch unsere Note [6] Nr. 1.

[14] Vgl. *Kolmogoroff* [18].

3. Transversalität zu einer p-dimensionalen Ebene

Die Inhaltsfunktion erlauben, im Minkowski-Raum einen allgemeinen Transversalitätsbegriff einzuführen.

Definition: Im Minskowski-Raum sei $(X_1, \ldots, X_p)$ eine *orientierte* p-dimensionale Ebene und (Y) eine Gerade. Dann heißt

$$(Y) \textit{ transversal zu } (X_1, \ldots, X_p)$$

oder

$$(X_1, \ldots, X_p) \textit{ normal zu } (Y),$$

wenn bei Parallelprojektion längs Y auf $(X_1, \ldots, X_p)$ der Flächeninhalt jedes p-dimensionalen Parallelotops aus $(Y, X_1, \ldots, X_p)$, dessen Orientierung dabei in die von $(X_1, \ldots, X_p)$, übergeht, nicht vergrößert wird:

$$F^{(p)}(X_\varrho + \lambda_\varrho Y) \geqq F^{(p)}(X_\varrho).$$

Normal- und Transversalraum sind natürlich linear unabhängig. Für ihre Existenz und eventuelle Eindeutigkeit gilt der auf *Busemann* [15] S. 168 zurückgehende

Satz:

A. In einer $(p+1)$-dimensionalen Ebene des Minkowski-Raumes existiert zu jeder Geraden ein Paar orientierter p-dimensionaler *Normalebenen*, deren Orientierungen bezüglich Projektion längs der Geraden entgegengesetzt sind. Dieses Paar ist bis auf Translation eindeutig bestimmt, wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ streng konvex ist.

B. In der $(p+1)$-dimensionalen Ebene existiert zu jeder orientierten p-dimensionalen Ebene eine *transversale Gerade*. Sie ist bis auf Translation eindeutig bestimmt, wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen total differenzierbar ist.

Beweis: Wir geben eine orientierte p-dimensionale Ebene $(A_1, \ldots, A_p)$ sowie eine dazu nicht parallele Gerade (B) vor und zeichnen in dem $(p+1)$-dimensionalen Vektorraum $S \overset{\text{def}}{=} (B, A_1, \ldots, A_p)$ eine feste Basis und Orientierung aus. Diese ermöglicht dann analog zum Isomorphiesatz in Nr. 1 eine Isomorphie $S^* \leftrightarrow \Lambda^p S$, welche in S^* eine Stützfunktion

$$H(u) \overset{\text{def}}{=} f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) = F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p)$$

induziert. Alle weiteren Überlegungen beziehen sich jetzt auf den Raum $(B, A_1, \ldots, A_p)_0$. Die dort definierte Menge

$$\mathfrak{K} = \{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u \rangle \leqq H(u) \text{ für alle } u\} \tag{3,1}$$

enthält sicher den Ursprung 0, der wegen der Stetigkeit von $H(u)$ sogar Innenpunkt ist, und stellt als Durchschnitt aller Halbräume

$$\{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u\rangle \leqq H(u)\} \tag{3,2}$$

einen konvexen Körper dar. Man beachte, daß dies allein aus den Eigenschaften i, ii und der Stetigkeit von $f^{(p)}(Z)$ folgt!

Diese Voraussetzungen genügen nun auch zum *Existenzbeweis des Teiles A*: In jedem der beiden Schnittpunkte $P^{(j)}$ $(j=1;2)$ der Geraden $(B)_0$ mit dem Rand von $\mathfrak{K}$ existiert eine p-dimensionale Stützebene mit der Richtung $u^{(j)}$ an den konvexen Körper $\mathfrak{K}$, für die

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u^{(j)}\rangle = H(u^{(j)}) \tag{3,3}$$

ist; denn jeder Randpunkt von $\mathfrak{K}$ liegt auf einer einen Halbraum (3,2) begrenzenden p-dimensionalen Ebene. Andererseits ist aber wegen $P^{(j)} \in \mathfrak{K}$ für alle p-dimensionalen Ebenenrichtungen u

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u\rangle \leqq H(u). \tag{3,4}$$

Vermöge der eingangs definierten Isomorphie ist nun $u^{(j)} \leftrightarrow X_1^{(j)} \wedge \ldots \wedge X_p^{(j)}$. Für alle $u \leftrightarrow (X_1^{(j)} + \lambda_1 B) \wedge \ldots \wedge (X_p^{(j)} + \lambda_p B)$ gilt dann

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u\rangle = \langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u^{(j)}\rangle,$$

so daß aus (3,3) und (3,4)

$$H(u^{(j)}) \leqq H(u)$$

d. h.

$$F^{(p)}(X_\varrho^{(j)}) \leqq F^{(p)}(X_\varrho^{(j)} + \lambda_\varrho B)$$

folgt. Die oben konstruierten Stützebenen sind also tatsächlich ein Paar p-dimensionaler Normalebenen zu (B) mit der im Satz angegebenen Orientierungseigenschaft. Nehmen wir jetzt strenge Konvexität von $f^{(p)}(Z)$ an, so ist $H(u)$ Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ und bei jeder Stützebene an $\mathfrak{K}$ wird in (3,2) das Gleichheitszeichen für den Berührungspunkt angenommen. Gäbe es jetzt in einem Randpunkt $P \in \mathfrak{K}$ zwei verschiedene Stützebenen mit den Richtungen u und v, dann wäre

$$\langle \overrightarrow{OP}, u+v\rangle = H(u) + H(v) > H(u+v),$$

was aber (3,1) widerspricht.

Zum *Existenzbeweis des Teiles B* benötigen wir auch die Konvexität von $f^{(p)}(Z)$: Weil dann $H(u)$ Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ ist, gilt für den Berührungspunkt P' von $\mathfrak{K}$ mit der Stützebene der Richtung $u' \leftrightarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$

$$\langle \overrightarrow{OP'}, u' \rangle = H(u').$$

Hieraus folgt wie im Anschluß an (3,3), daß $(\overrightarrow{OP'})$ transversal zu $(A_1, \ldots, A_p)$ ist. Setzen wir nun noch die totale Differenzierbarkeit von $F^{(p)}(X_\varrho)$ und damit von $H(u)$ voraus, so ist die Richtungsderivierte

$$H'(u; v) = \lim_{h \to +0} \frac{H(u+hv) - H(u)}{h}$$

$$= \lim_{h \to +0} \left(\frac{\partial H(u)}{\partial u_i} v_i + 0(h) \right) = \frac{\partial H(u)}{\partial u_i} v_i$$

mit $i = 1, \ldots, p+1$. Sie ist die Stützfunktion des Durchschnitts von $\mathfrak{K}$ mit der zur Richtung u gehörigen p-dimensionalen Stützebene. Als lineare Funktion in v ist sie aber Stützfunktion eines Punktes.

Nachdem in einer $(p+1)$-dimensionalen Ebene die Existenz der Transversalgeraden zu einer p-dimensionalen Ebene gesichert ist, wollen wir die Menge aller Transversalgeraden dieser p-dimensionalen Ebene untersuchen, die im n-dimensionalen Minkowski-Raum konstruiert werden können.

Satz: Gegeben sei eine orientierte p-dimensionale Ebene A. Die Transversalgeraden, welche in einer die Ebene A umfassenden $(p+1)$-dimensionalen Ebene liegen und durch einen festen Punkt $0 \in A$ gehen, erzeugen einen konvexen Kegel. Alle solchen Transversalkegel, die zu A durch den Punkt 0 im n-dimensionalen Minkowski-Raum existieren, haben nur den Punkt 0 gemeinsam und bilden ein $(n-p-1)$-parametrisches *konvexes Bündel*. Dies heißt, der Durchschnitt aller Transversalkegel zu A durch 0 mit jeder Hyperebene, die 0 nicht enthält, ist eine $(n-p-1)$-parametrische *konvexe* Schar konvexer Körper:

$$\mathfrak{k}((1-\vartheta) \Lambda_0 + \vartheta \Lambda_1) \subset (1-\vartheta)\, \mathfrak{k}(\Lambda_0) + \vartheta\, \mathfrak{k}(\Lambda_1)$$

für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und je zwei Λ_0, Λ_1 des $(n-p-1)$-dimensionalen Parameterraumes[15].

Wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen total differenzierbar ist, stellt diese Gesamtheit aller Transversalgeraden zu A durch 0 eine $(n-p)$-dimensionale Ebene dar, die A nur im Punkt 0 schneidet.

Beweis: (B_0) und (B_1) seien zwei Geraden, die transversal zu der orientierten p-dimensionalen Ebene $(A_1, \ldots, A_p)$ sind und mit dieser

[15] Der Begriff der konvexen Schar wurde analog zu dem bei *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 32–34 eingeführten Begriff der konkaven Schar gebildet.

einen $(p+2)$-dimensionalen Vektorraum $S \overset{\text{def}}{=} (B_1, B_0, A_1, \ldots, A_p)$ aufspannen. In ihm sollen die angegebenen Vektoren eine Basis und Orientierung auszeichnen. Zunächst betrachten wir jedoch den $(p+1)$-dimensionalen Unterraum $S_\vartheta \overset{\text{def}}{=} ((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1, A_1, \ldots, A_p)$ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, in welchem ebenfalls durch die angegebenen Vektoren eine Basis und Orientierung festgelegt sei. Die beim Existenzbeweis der Transversalgeraden durchgeführte Konstruktion liefert dann in dem affinen Raum $((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1, A_1, \ldots, A_p)_0$ einen konvexen Körper $\mathfrak{K}_\vartheta$. Dessen p-dimensionale Stützebenen können durch die Gleichungen

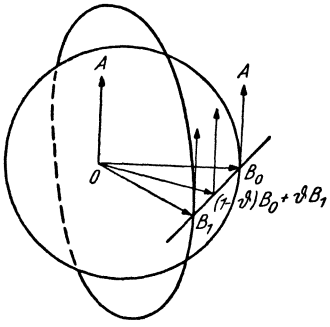

Abb. 4

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \wedge \overrightarrow{OP} = F^{(p)}(X_\varrho)\,((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1) \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p \qquad (3{,}5)$$

dargestellt werden, in denen $X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \in \Lambda^p S_\vartheta$ die Richtung der Stützebene festlegt und P der variable Ebenenpunkt ist. Um jetzt die Stützfunktion von $\mathfrak{K}_\vartheta$ im $(p+2)$-dimensionalen Raum $(B_1, B_0, A_1, \ldots, A_p)_0$ zu finden, müssen wir dort sämtliche $(p+1)$-dimensionalen Stützebenen von $\mathfrak{K}_\vartheta$ bestimmen. Das sind aber alle durch eine p-dimensionale Ebene (3,5) gehenden $(p+1)$-dimensionalen Ebenen. Die Richtung einer solchen $(p+1)$-dimensionalen Stützebene läßt sich also festlegen durch einen einfachen $(p+1)$-Vektor

$$X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \in \Lambda^{p+1} S,$$

wobei $X_0 \in S$ und $X_1, \ldots, X_p \in S_\vartheta$ linear unabhängig sind. Setzt man

$$X_0 \equiv k(X_0)\,(B_1 - B_0) \bmod S_\vartheta,$$

so sind wegen

$$(B_1 - B_0) \wedge ((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta\, B_1) = B_1 \wedge B_0$$

die $(p+1)$-dimensionalen Stützebenen von $\mathfrak{K}_\vartheta$ durch die Gleichungen

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p \wedge \overrightarrow{OP} = k(X_0)\, F^{(p)}(X_\varrho)\, B_1 \wedge B_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$$

gegeben. Zur Bestimmung der Stützfunktion sind sie konventionsgemäß so zu orientieren, daß im positiven Halbraum keine Punkte von $\mathfrak{K}_\vartheta$ liegen. Das bedeutet aber $k(X_0) \geqq 0$. Mittels der analog zum Isomorphiesatz in Nr. 1 definierten Isomorphie $S^* \leftrightarrow \Lambda^{p+1} S$ wird nun in S^* die gesuchte Stützfunktion von $\mathfrak{K}_\vartheta$

$$H_\vartheta(u) \overset{\text{def}}{=} k(X_0)\, f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) \geqq 0 \tag{3,6}$$

induziert, wobei also

$$u \leftrightarrow X_0 \wedge \ldots \wedge X_p.$$

Natürlich ist die Richtung von S_ϑ Linearitätsrichtung dieser Stützfunktion.

Es sei jetzt $0 < \vartheta < 1$. Für $(X_0, \ldots, X_p) \neq (A_1, \ldots, A_p)$ muß wegen $\dim(X_0, \ldots, X_p) \cap S_0 = p$ dann $\dim(X_0, \ldots, X_p) \cap (A_1, \ldots, A_p) = p-1$ sein, was eine Darstellung

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p = (B_1 - B_0 + \sigma B_0 + \tau^\varrho A_\varrho) \wedge (B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D$$

mit $D \in \bigwedge^{p-1}(A_1, \ldots, A_p)$ zur Folge hat. Dies ist aber weiter

$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge (B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D$$
$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge (B_1 + (\xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D.$$

Durch Linearkombination der beiden letzten Ausdrücke erhält man

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p = (1-\vartheta) X_0 \wedge \ldots \wedge X_p + \vartheta X_0 \wedge \ldots \wedge X_p$$
$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge ((1-\vartheta) B_0 + \vartheta B_1 + (\vartheta \xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D$$

und damit nach (3,6)

$$H_\vartheta(u) = f^{(p)}(((1-\vartheta) B_0 + \vartheta B_1 + (\vartheta \xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D)$$
$$\leqq (1-\vartheta) f^{(p)}((B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D) + \vartheta f^{(p)}((B_1 + (\xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D)$$

also

$$H_\vartheta(u) \leqq (1-\vartheta) H_0(u) + \vartheta H_1(u). \tag{3,7}$$

Ist unter obiger Isomorphie

$$v \leftrightarrow Y_0 \wedge \ldots \wedge Y_p,$$

und nehmen wir $(Y_0, \ldots, Y_p) \supset (A_1, \ldots, A_p)$ an, so besteht eine Darstellung

$$Y_0 \wedge \ldots \wedge Y_p = Y \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p.$$

Daraus ergibt sich nach (3,6)

$$H_\vartheta(v) = k(Y) F^{(p)}(A_\varrho) = (1-\vartheta) k(Y) F^{(p)}(A_\varrho) + \vartheta k(Y) F^{(p)}(A_\varrho)$$

also

$$H_\vartheta(v) = (1-\vartheta) H_0(v) + \vartheta H_1(v). \tag{3,8}$$

Jetzt gilt wegen (3,7)

$$H_\vartheta(v+hu) \leqq (1-\vartheta) H_0(v+hu) + \vartheta H_1(v+hu),$$

woraus durch Subtraktion von (3,8)

$$H_\vartheta(v+hu)-H_\vartheta(v) \leqq (1-\vartheta)\,(H_0(v+hu)-H_0(v))+\vartheta(H_1(v+hu)-H_1(v)) \quad (3,9)$$

folgt. H_ϑ ist aber als Stützfunktion eines konvexen Körpers eine konvexe Funktion, so daß ihre Richtungsderivierte existiert und daher (3,9) in die Ungleichung

$$H_{\vartheta'}(v, u) \leqq (1 - \vartheta)\, H_0'(v, u) + \vartheta H_1'(v, u)$$

übergeht. Weil nun $H_{\vartheta'}(v, u)$ die Stützfunktion des Durchschnitts $\mathfrak{T}_\vartheta$ von $\mathfrak{R}_\vartheta$ mit der zur Richtung $(B_1 - B_0) \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$ gehörenden $(p+1)$-dimensionalen Stützebene ist, erhält man schließlich[16]

$$\mathfrak{T}_\vartheta \subset (1 - \vartheta)\, \mathfrak{T}_0 + \vartheta\, \mathfrak{T}_1. \quad (3,10)$$

Damit ist die allgemeine Behauptung bestätigt; denn die Verbindungsgeraden von 0 mit den Punkten von $\mathfrak{T}_\vartheta$ bilden den Transversalkegel von $(A_1, \ldots, A_p)$ im Raum $((1 - \vartheta)\, B_0 + \vartheta\, B_1, A_1, \ldots, A_p)$. Bei totaler Differenzierbarkeit von $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen ist $\mathfrak{T}_\vartheta$ nach dem vorigen Satz ein Punkt, so daß die Mengenrelation (3,10) eine Gleichheit wird, was den Satz vollständig beweist.

Im Spezialfall $p = 1$ ist dieser Satz natürlich einfacher einzusehen, weil dann $F^{(1)}(X)$ als Distanzfunktion unmittelbar einen konvexen Körper definiert.

4. Indikatrix und Isoperimetrix

In diesem Abschnitt benötigen wir neben der Skalardichte $\mathfrak{F}$ nur die Inhaltsfunktionen $F^{(1)}(X)$ und $F^{(n-1)}(X_\varrho)$, von denen wir vorerst auch nur die Eigenschaften I, II sowie ihre Stetigkeit voraussetzen wollen. Es kommt uns jetzt darauf an, die mit diesen beiden Inhaltsfunktionen *invariant* verbundenen Figuren und deren Bedeutung zu untersuchen.

Den von der Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ im R_n erzeugten kompakten Sternbereich

$$\mathfrak{C} \overset{\text{def}}{=} \{P \mid F^{(1)}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\},$$

der den Ursprung im Innern enthält, wollen wir als *Indikatrix* bezeichnen. Auf sie beziehen sich die nächsten Betrachtungen.

Satz 1: Die Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ definiert eine nicht notwendig eindeutige Abbildung $E^* \overset{\text{in}}{\to} E$, so daß für die zugeordneten Vektoren $u \in E^*$ und $U \in E$ gilt

$$\langle U, u\rangle = F^{(1)}(U)^2.$$

---

[16] Vgl. *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 24 unten und S. 29–30.

Diese Abbildung induziert in E^* eine Stützfunktion $L^*(u)$, die gerade die konvexe Hülle der Indikatrix kennzeichnet. Dabei erhält man dann und nur dann eine Abbildung „auf", wenn die Indikatrix konvex ist, eine eindeutige Abbildung, wenn die Indikatrix streng konvex ist, und eine streng konvexe Funktion $L^*(u)$, wenn durch jeden Randpunkt der Indikatrix *höchstens eine* Stützhyperebene existiert.

Beweis: Sei $y \in E^*$ ein Vektor, dessen erste Hyperebene durch den Ursprung geht und dessen zweite Hyperebene die Indikatrix stützt, so werde ihm der Einheitsvektor Y vom Ursprung zu einem Berührungspunkt zugeordnet. Ein beliebiger Vektor $u = \lambda\, y \in E^*$ mit $\lambda \geqq 0$ werde dann in $U = \lambda\, Y \in E$ abgebildet. Diese Abbildung ist natürlich nur bei euklidischer Metrik linear. Im allgemeinen Fall ist aber die vermöge $u \to\!\!\!\!\to U$ in E^* induzierte Funktion

$$L^*(u) \overset{\text{def}}{=} F^{(1)}(U)$$

eine Stützfunktion. Zunächst ist nämlich $L^*(0) = 0$ und, da die Zuordnung $u \to\!\!\!\!\to U$ für $\lambda > 0$ auch $\lambda\, u \to\!\!\!\!\to \lambda\, U$ zur Folge hat,

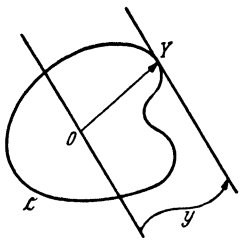

Abb. 5

$$L^*(\lambda\, u) = F^{(1)}(\lambda\, U) = \lambda\, L^*(u) \text{ für } \lambda > 0.$$

Um nun die Konvexität von L^* nachzuweisen, wählen wir zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in E^*$. Dann werde jeweils die erste Hyper-

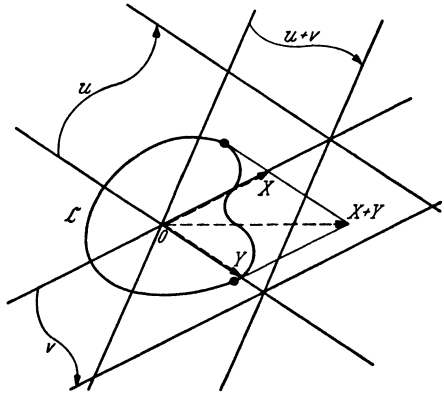

Abb. 6

ebene von u und v durch den Ursprung 0 gelegt und geometrisch $u+v$ konstruiert (vgl. Abb. 6). Dieser Summenvektor soll jetzt zuerst

bezüglich einer Hilfsmetrik H über E^* gemessen werden, die folgendermaßen definiert ist: Man legt die den Einheitsvektoren $\frac{u}{L^*(u)}$ und $\frac{v}{L^*(v)}$ entsprechenden Stützhyperebenen an die Indikatrix und benutzt als Hilfseichkörper jenen Winkelraum dieser beiden Stützhyperebenen, der die Indikatrix enthält. Dann gilt mit den in Figur 6 angegebenen Bezeichnungen

$$\frac{X}{L^*(u)} + \tau\left(\frac{Y}{L^*(v)} - \frac{X}{L^*(u)}\right) = \frac{X+Y}{H(u+v)},$$

woraus mittels Koeffizientenvergleich

$$H(u+v) = L^*(u) + L^*(v)$$

folgt. Weil nun

$$L^*(u+v) \leqq H(u+v)$$

ist, erhält man also

$$L^*(u+v) \leqq L^*(u) + L^*(v).$$

Dabei tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann auf, wenn der Scheitel des genannten Winkelraumes mindestens einen Punkt der Indikatrix enthält.

Mit Hilfe der Skalardichte $\mathfrak{F}$ läßt sich aus der Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ ein $(n-1)$-dimensionaler dualer Flächeninhalt herleiten.

Definition: $X_1, \ldots, X_{n-1}$ seien linear unabhängige Vektoren aus E. Parallel zu ihnen werde eine Stützhyperebene so an die Indikatrix gelegt, daß der Vektor N vom Ursprung zu einem Berührungspunkt eine positive Orientierung von $X_1, \ldots, X_{n-1}, N$ bestimmt. Dann sei der *Dualinhalt* des von den Vektoren $X_1, \ldots, X_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops

$$\overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F} \cdot \| X_1, \ldots, X_{n-1}, N \| > 0.$$

Für ein von $n-1$ linear abhängigen Vektoren erzeugtes Parallelotop sei der Dualinhalt Null.

Korollar 1: Die *duale Inhaltsfunktion* $\overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ besitzt die Eigenschaften i bis iii des letzten Satzes in Nr. 1. Über die Beziehungen von $\overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ zur Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ erteilt folgendes Schema Auskunft:

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^{n-1} E & \leftrightarrow & E^* & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\rightarrow} & E \\ | & & | & & | \\ \overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) & = & L^*(u) & = & F^{(1)}(U). \end{array}$$

Beweis: Dieses Schema erhält man bis auf den die duale Inhaltsfunktion betreffenden Teil direkt aus dem Isomorphiesatz in Nr. 1 und Satz 1. Wird nun dem $(n-1)$-Vektor $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \in \bigwedge^{n-1} E$ der Vektor $u \in E^*$ zugeordnet, so ist nach obiger Definition

$$\begin{aligned}\overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) &= \mathfrak{F} \,||\, X_1, \ldots, X_{n-1}, N \,|| \\ &= \langle N, u\rangle = L^*(u).\end{aligned}$$

Vermöge der Isomorphie $\bigwedge^{n-1} E \leftrightarrow E^*$ spiegeln sich also alle Eigenschaften der im letzten Satz untersuchten Funktion $L^*(u)$ in der dualen Inhaltsfunktion wieder.

Neben der Indikatrix spielt noch eine andere aus der Funktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ mittels der Skalardichte $\mathfrak{F}$ hergeleitete Figur eine Rolle. Dies soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Satz 2: Die Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ induziert mittels der Isomorphie $\bigwedge^{n-1} E \leftrightarrow E^*$ in E^* eine Funktion $F^*(u)$. Der konvexe Körper

$$\mathfrak{Z} \overset{\text{def}}{=} \{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u\rangle \leqq F^*(u) \text{ für alle } u\},$$

der als *Isoperimetrix*[17] bezeichnet werden soll, erzeugt dann eine nicht notwendig eindeutige Abbildung $E \overset{\text{in}}{\to\!\!\!\!\to} E^*$, so daß für die zugeordneten Vektoren $U \in E$ und $u \in E^*$ gilt

$$\langle U, u) = F^*(u)^2.$$

Dabei erhält man dann und nur dann eine Abbildung „auf", wenn $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ konvex ist, und eine eineindeutige Abbildung, wenn $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ konvex und außerhalb des Nullvektors total differenzierbar ist.

Beweis: Ist $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow u \in E^*$, so sei

$$F^*(u) \overset{\text{def}}{=} f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}).$$

Sind jetzt P, Q zwei Punkte der Isoperimetrix, dann folgt für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ unmittelbar

$$\langle \overrightarrow{OP} + \vartheta \overrightarrow{PQ}, u\rangle = \langle (1-\vartheta)\overrightarrow{OP} + \vartheta \overrightarrow{OQ}, u\rangle \leqq F^*(u),$$

also die Konvexität der Isoperimetrix. Natürlich ist $F^*(u)$ im allgemeinen keine Stützfunktion. Sei jetzt Y der Verbindungsvektor des Ursprungs mit einem Randpunkt der Isoperimetrix, so werde ihm jenes parallele Hyperebenenpaar y zugeordnet, dessen erste Hyperebene durch den

[17] Vgl. *Busemann* [15] Nr. 4.

Ursprung geht, dessen zweite Hyperebene die Isoperimetrix in jenem Randpunkt stützt und für das $F^*(y) = 1$ ist. Solch ein Vektor $y \in E^*$ existiert wegen der Stetigkeit von $F^*(u)$ sicher. Einem beliebigen Vektor $U = \lambda\, Y \in E$ mit $\lambda \geqq 0$ werde dann $u = \lambda\, y \in E^*$ zugeordnet. Notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes $u \in E^*$ in einer der Definitionsungleichungen der Isoperimetrix das Gleichheitszeichen angenommen wird, ist die Konvexität von $F^*(u)$. Die Bedingung für die Eineindeutigkeit unserer Abbildung entnimmt man schließlich *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 26.

Die Isoperimetrix erlaubt nun, eine duale Längenmessung einzuführen, deren Eigenschaften wir zusammenfassen in dem

Korollar 2: Die als Distanzfunktion der Isoperimetrix definierte *duale Längenfunktion* $\overline{F}(U)$ über E besitzt die Eigenschaften I bis III in Nr. 1. Für die Beziehungen von $\overline{F}(U)$ zur $(n-1)$-dimensionalen Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ gilt das Schema:

$$\begin{array}{ccccc} E & \overset{\text{in}}{\twoheadrightarrow} & E^* & \leftrightarrow & \bigwedge^{n-1} E \\ | & & | & & | \\ \overline{F}(U) & = & F^*(u) & = & f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}). \end{array}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Isomorphiesatz in Nr. 1 und Satz 2.

In einem *2-dimensionalen Minkowski-Raum* verdienen diese Betrachtungen besonderes Interesse, weil dort die ursprüngliche Längenfunktionen $F^{(1)}(X)$ und die daraus hergeleiteten Funktionen $\overline{L}(X)$ und $\overline{F}(U)$ über demselben Raum E definiert sind. Insbesondere muß also ein Zusammenhang zwischen Indikatrix und Isoperimetrix bestehen. Wir wenden uns deshalb jetzt diesem Spezialfall zu[18].

Satz 3: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum besteht der Rand der *Isoperimetrix* aus der Menge aller Punkte Q, die sich folgendermaßen konstruieren lassen (vgl. Abb. 7): Man legt an die Indikatrix eine Stützgerade mit dem Berührungspunkt P und bestimmt Q so, daß

a) $\overrightarrow{OQ}$ parallel zu jener Stützgeraden und

b) $\mathfrak{F}\,||\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}|| = 1$ ist.

Die Gerade parallel zu $\overrightarrow{OP}$ durch Q stützt dann die Isoperimetrix.

Beweis: Nach dem Isomorphiesatz in Nr. 1 wird bei der Isomorphie $E \leftrightarrow E^*$ jedem $X \in E$ die Linearform $u(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}\,||X, Y|| \in E^*$ zugeordnet. Die damit in E^* induzierte Funktion $F^*(u) = F^{(1)}(X)$ definiert

[18] Vgl. auch *Busemann* [14] insbesondere S. 868.

dann nach Satz 2 die konvexe Isoperimetrix. Setzt man nun $X = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}$, so folgt für die zugeordnete Linearform $u \in E^*$ nach der Konstruktion unseres Satzes

$$\langle \overrightarrow{OQ}, u \rangle = \mathfrak{F} \,||\, \lambda \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \,|| =$$
$$= \lambda \leqq F^{(1)}(\lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}) = F^*(u).$$

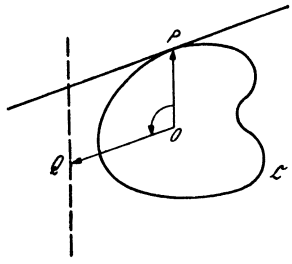

Abb. 7

Da in dieser Ungleichung speziell für $X = \overrightarrow{OP}$ das Gleichheitszeichen angenommen wird, so liegt Q tatsächlich auf dem Rand der Isoperimetrix, und jeder ihrer Randpunkte kann so gewonnen werden.

Die Beziehung zwischen $F^{(1)}(X)$ und der in obiger Definition eingeführten eindimensionalen dualen Inhaltsfunktion $\overline{L}(X)$ wird gekennzeichnet durch das Abbildungsschema:

$$\begin{array}{ccccc} E = \wedge E & \leftrightarrow & E^* & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\!\rightarrow} & E \\ | & & | & & | \\ X & \leftrightarrow & u = \lambda\, y & \rightarrow\!\!\!\!\rightarrow & U = \lambda\, Y \\ | & & | & & | \\ \overline{L}(X) & = & L^*(u) & = & F^{(1)}(U), \end{array}$$

wie durch Spezialisierung aus Korollar 1 folgt. Wendet man nun die Konstruktion des obigen Satzes auf Abb. 8 an, so ergibt sich das

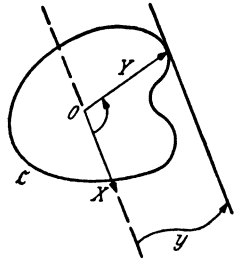

Abb. 8

Korollar 3: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum ist der Körper $\{P \mid \overline{L}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\}$ die am Ursprung gespiegelte Isoperimetrix.

Der Satz 3 erlaubt uns, in einer Minkowski-Ebene die Isoperimetrix aus der Indikatrix zu konstruieren. In entsprechender Weise kann man aber auch umgekehrt die Indikatrix aus der Isoperimetrix „fast" zurückgewinnen.

Satz 4: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum besteht der Rand der *konvexen Hülle der Indikatrix* aus der Menge aller Punkte P, die sich folgendermaßen ergeben (vgl. Abb. 9): Man legt an die Isoperimetrix eine Stützgerade mit dem Berührungspunkt Q und bestimmt P so, daß

a) $\overrightarrow{OP}$ parallel jener Stützgeraden und

b) $\mathfrak{F}\,||\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}|| = 1$ ist.

Die Gerade parallel zu $\overrightarrow{OQ}$ durch P stützt dann die Indikatrix.

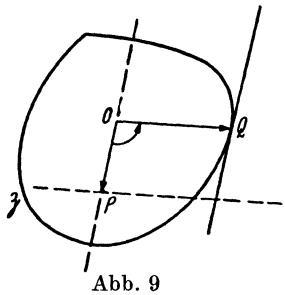

Abb. 9

Beweis: Setzt man $X = -\lambda\overrightarrow{OP} - \mu\overrightarrow{OQ}$, so gilt die zugeordnete Linearform $u \in E^*$ nach der Konstruktion unseres Satzes und Korollar 3

$$\langle\overrightarrow{OP}, u\rangle = \mathfrak{F}\,||-\mu\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}|| = \\ = \mu \leqq \overline{L}(-\lambda\overrightarrow{OP} - \mu\overrightarrow{OQ}) = L^*(u).$$

Dabei wird speziell für $X = -\overrightarrow{OQ}$ das Gleichheitszeichen angenommen, so daß P in der Tat auf dem Rand des durch die Stützfunktion $L^*(u)$ definierten konvexen Körpers liegt. Dieser ist aber nach Satz 1 gerade die konvexe Hülle der Indikatrix.

Nach Korollar 2 wird der Zusammenhang speziell zwischen $F^{(1)}(X)$ und der dualen Längenfunktion $\overline{F}(X)$ durch folgendes Schema vermittelt:

$$\begin{array}{ccccc} E & \overset{\text{in}}{\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} & E^* & \leftrightarrow & \bigwedge E = E \\ | & & | & & | \\ U = \lambda Y & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & u = \lambda y & \leftrightarrow & X \\ | & & | & & | \\ \overline{F}(U) & = & F^*(u) & = & F^{(1)}(X). \end{array}$$

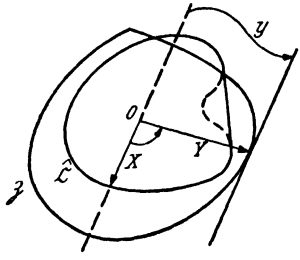

Abb. 10

Wenn bei dieser Abbildung der Endpunkt des Vektors U den Rand der Isoperimetrix durchläuft, so liegen die Endpunkte der Bildvektoren X auf dem Rand der konvexen Hülle $\hat{\mathfrak{C}}$ der Indikatrix, wie man aus der auf Abb. 10 angewandten Konstruktion des letzten Satzes erkennt.

Nach diesen speziellen Betrachtungen wollen wir im n-dimensionalen Minkowski-Raum die verschiedenen isodiametrischen und isoperimetrischen Probleme diskutieren, die sich für Indikatrix $\mathfrak{C}$ und Isoperimetrix $\mathfrak{J}$ aus den Sätzen unserer Note [6] gewinnen lassen. Hierzu müssen wir *invariante* Minkowski-Oberflächen einführen, die sich von den entsprechenden Minkowskischen Relativ-Oberflächen in [6] Nr. 2 gemäß (1,5) um die Skalardichte $\mathfrak{F}$ unterscheiden, also im Gegensatz zu

den Relativ-Oberflächen von einer speziellen Vektorbasis unabhängig sind.

Definition: Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}$ seien äußere und innere *Minkowski-Oberfläche*[19]

$$\Phi_+(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}+r\mathfrak{Z}) - V(\mathfrak{K})}{r}, \quad \Phi_-(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}) - V(\mathfrak{K}-r\,\mathfrak{Z}^*)}{r}$$

sowie äußere und innere *Minkowskische Dualoberfläche*

$$\bar{\Phi}_+(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}+r\,\hat{\mathfrak{C}}) - V(\mathfrak{K})}{r}, \quad \bar{\Phi}_-(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}) - V(\mathfrak{K}-r\hat{\mathfrak{C}}^*)}{r},$$

wobei $\hat{\mathfrak{C}}$ die konvexe Hülle der Indikatrix bezeichnet.

Für die äußere Minkowskische Oberfläche und Dualoberfläche eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops $\mathfrak{P}$, das von den Vektoren $X_1, \ldots, X_{n-1}$ aufgespannt wird, gelten dann die Relationen

$$\Phi_+(\mathfrak{P}) \leqq f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) + f^{(n-1)}(-X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}),$$

wo bei konvexer Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}$ stets das Gleichheitszeichen steht, und

$$\bar{\Phi}_+(\mathfrak{P}) = \bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) + \bar{L}(-X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}).$$

Wählt man nämlich vermöge des Isomorphiesatzes der Nr. 1 die Zuordnung $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow u$ und sind $P_\pm$ Berührungspunkte von $\mathfrak{Z}$ mit den Stützhyperebenen der Richtungen $\pm u$, so ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} V(\mathfrak{P}+r\mathfrak{Z}) &= \mathfrak{F}\,||X_1, \ldots, X_{n-1}, \overrightarrow{OP}_+||+\mathfrak{F}\,||-X_1, \ldots, X_{n-1}, \overrightarrow{OP}_-||+0(r) \\ &= \langle \overrightarrow{OP}_+, u\rangle + \langle \overrightarrow{OP}_-, -u\rangle + 0(r) \\ &\leqq F^*(u) + F^*(-u) + 0(r),\end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Der analoge Schluß zur Bestätigung der zweiten Relation führt allerdings zur Gleichheit, weil $L^*(u)$ nach Satz 1 stets Stützfunktion ist, ohne daß die Indikatrix konvex zu sein braucht. Natürlich sind innere Minkowskische Oberfläche und Dualoberfläche eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops immer Null.

In der Minkowski-Geometrie gelten nun für kompakte Mengen mit Innenpunkten nach [6] Nr. 2 die *isoperimetrischen Ungleichungen*:

---

[19] $\mathfrak{M}^*$ bezeichne das Spiegelbild der Menge $\mathfrak{M}$ bezüglich des Ursprunges 0.

$$\Phi_{\pm}(\mathfrak{R}) \geqq n\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{R})\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{Z}),$$

wobei die Gleichheit erzeugenden konvexen Körper homothetisch zur *Isoperimetrix* $\mathfrak{Z}$ bzw. ihrem Spiegelbild $\mathfrak{Z}^*$ sein müssen, und

$$\bar{\Phi}_{\pm}(\mathfrak{R}) \geqq n\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{R})\; V^{\frac{1}{n}}(\hat{\mathfrak{C}}),$$

wo die zur Gleichheit führenden konvexen Körper homothetisch zur *konvexen Hülle der Indikatrix* $\hat{\mathfrak{C}}$ bzw. deren Spiegelbild $\hat{\mathfrak{C}}^*$ sind.

Unter den sehr allgemeinen Voraussetzungen dieser Nummer erhält man aus [6] Nr. 1 nur für die in Korollar 2 eingeführte Duallänge die entsprechende *isodiametrische Ungleichung*:

$$\bar{d}(\mathfrak{R}) \geqq 2\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{R})\, V^{-\frac{1}{n}}(\mathfrak{Z}).$$

Dabei wird für den in der Duallänge gemessenen Durchmesser $\bar{d}$ das Gleichheitszeichen nur angenommen, wenn $\mathfrak{R}$ homothetisch zu einer *symmetrischen Isoperimetrix* ist. Setzen wir zum Schluß zusätzlich $F^{(1)}(X)$ als konvex voraus, so gilt auch für die ursprüngliche Längenmessung des Minkowski-Raumes

$$d(\mathfrak{R}) \geqq 2\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{R})\, V^{-\frac{1}{n}}(\mathfrak{C}),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für Homothetische zu einer *symmetrischen Indikatrix* steht.

Literatur

[1] *Barthel, W.*: Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Math. Zeitschr. **58**, 358—375 (1953).

[2] *Barthel, W.*: Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie. Math. Zeitschr. **62**, 23—36 (1955)

[3] *Barthel, W.*: Extremalprobleme in der Finslerschen Inhaltsgeometrie. Annales Universitatis Saraviensis - Scientia **4**, 171—183 (1955).

[4] *Barthel, W.*: Die beiden isoperimetrischen Probleme der Minkowski-Geometrie. Intern. Math. Nachr. **47/48**, 54—55 (1957).

[5] *Barthel, W.*: Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz. Math. Zeitschr.

[6] *Barthel, W.*: Zur isodiametrischen und isoperimetrischen Ungleichung in der Relativgeometrie. Comm. Math. Helv. **33**, (1959).

[7] *Barthel, W.*: Über metrische Differentialgeometrie, begründet auf dem Begriff eines p-dimensionalen Areals. Math. Ann. **137**, 42—63 (1958).

[8] *Bonnesen, T.* und *W. Fenchel*: Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934.

[9] *Bouligand, G.* und *G. Choquet*: Problèmes liés à des métriques variationelles. C. R. Acad. Sci., Paris **218**, 696—698 (1944).

[10] *Bourbaki, N.*: Algèbre linéaire, Paris 1947.

[11] *Bourbaki, N.*: Algèbre multilinéaire, Paris 1948.

[12] *Busemann, H.*: Intrinsic area. Proc. Nat. Acad. Sci. **32**, 5—8 (1946).

[13] *Busemann, H.*: Intrinsic area. Ann. Math. **48**, 234—267 (1947).

[14] *Busemann, H.*: The isoperimetric problem in the Minkowski plane. Amer. J. Math. **69**, 863—871 (1947).

[15] *Busemann, H.*: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950).

[16] *Cesari, L.*: Surface area. Annals of Mathematics Studies 35, Princeton 1956.

[17] *Kneser, M.*: Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmaß. Arch. Math. **6**, 382—390 (1955).

[18] *Kolmogoroff, A.*: Beiträge zur Maßtheorie. Math. Ann. **107**, 351—366 (1933).

[19] *Loomis, L. H.*: Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure. Ann. Math. **46**, 348—355 (1945).

[20] *Nöbeling, G.*: Über die Länge euklidischer Kontinuen I, II. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. **52**, 132—160, 189—197 (1942).

[21] *Nöbeling, G.*: Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen. Math. Zeitschr. **48**, 747—771 (1942/43).

[22] *Nöbeling, G.*: Über die Flächenmaße im euklidischen Raum. Math. Ann. **118**, 687—701 (1941/43).

[23] *Pauc, Chr.*: Referat zu Busemann [15], Zentralblatt für Math. **40**, S. 375 bis 378.

[24] *Schouten, J. A.*: Ricci-Calculus, Berlin 1954.

Minimal Matrix Norms

By

Alston S. Householder, Oak Ridge National Laboratory*

(Received November 16, 1958)

A matrix norm, $|| A ||$, will be taken to be any real-valued function of the elements of a square matrix A, whether real or complex, which satisfies the following four conditions [2]:

I. $A \neq 0 \rightarrow || A || > 0$;

II. $\alpha \geq 0 \rightarrow || \alpha A || = \alpha || A ||$;

III. $|| A + B || \leq || A || + || B ||$;

IV. $|| AB || \leq || A ||\ || B ||$.

Let $\varrho(A)$ represent the spectral radius of A, which is the maximum of $|\lambda_i(A)|$ where $\lambda_i(A)$ is any proper value of A. This is not a norm function as the term is used here, since of the four conditions only (II) is satisfied in general by $\varrho(A)$. However, it is known that for any fixed A, $\varrho(A)$ is the greatest lower bound of $|| A ||$ for all possible norms [3]. Indeed, it can be shown that the bound is actually achieved for a fixed A if and only if A is similar to a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \varrho(\Lambda) > \varrho(B),$$

where Λ is diagonal. Any such matrix will be said to be of class M. When A is of class M, any norm for which $|| A || = \varrho(A)$ will be called minimal for A. The present paper will be directed toward the construction of norms that are minimal for a given matrix of class M, and, conversely, the construction of matrices of class M for which a given norm is minimal, if any such exist. Evidently if $A \neq 0$ and $\varrho(A) = 0$, then A cannot be of class M.

---

* Operated by Union Carbide Corporation for the U. S. Atomic Energy Commission.

If A and B are both of class M, then there may or may not exist a norm that is minimal for both, but if there is such a norm, then

$$\varrho(A + B) \leq \varrho(A) + \varrho(B),$$
$$\varrho(A\ B) \leq \varrho(A)\ \varrho(B).$$

In other words, the spectral radius does satisfy the conditions of a norm function for any subclass of matrices possessing a common minimal norm.

Given any vector x, one can form a matrix X everywhere null except that its ith column is x (i being arbitrary but fixed), and if one defines the vector norm

$$|| x || = || X ||,$$

this scalar function of the elements of x satisfies the conditions (I), (II), and (III) expressed with vectors, instead of with matrices, as arguments. Moreover, (IV) implies that for any vector x and any matrix A, the vector and matrix norms are related by

$$|| A\ x || \leq || A ||\quad || x ||.$$

The vector norm is then said to be consistent with the matrix norm [2]. Given any vector norm, the points defined by

$$K\colon\ || x || \leq 1$$

form a bounded convex body, which is to say a closed convex set in the complex n-space, with interior points, and the origin is an interior point [1, 4]. Conversely, given any bounded convex body K with the origin in the interior, a vector norm can be defined by

$$x = x'\ ||\ x\ ||_K,$$

where x' is that vector from the origin in the direction of x (or any vector when $x = 0$) which terminates on the boundary of K[1]. Hereafter any convex body being considered will be understood to be bounded, and to contain the origin as an interior point.

For any convex body K, let $A\ K$ designate the set of points $y = Ax$ with $x \in K$. For $A = \alpha\ I$, a scalar matrix, $\alpha\ K$ may be written in place of AK. Let ν be the smallest non-negative real scalar for which $A\ K \subset \nu\ K$. This defines an association of non-negative real numbers $\nu(A)$ with matrices A, and $\nu(A)$ is a norm, hence will be designated

$$\nu(A) = ||\ A\ ||_K.$$

Clearly the norms are consistent.

Lemma 1. *For any matrix A,*

$$|| A ||_K \leq || A ||,$$

where the norm on the right is any matrix norm consistent with the vector norm belonging to K.

This lemma follows immediately from the consistency property together with the obvious fact that there exists a vector x with $|| x || = 1$ and

$$|| A x ||_K = || A ||_K,$$

which is to say that $A K$ and $|| A ||_K K$ have at least one common boundary point. This permits attention to be restricted to those matrix norms belonging to convex bodies. Then K will be said to be minimizing for any matrix A for which the norm belonging to K is minimal. Any K is minimizing for I.

For any two convex sets H and K, let $H \cap K$ represent the intersection, $H \vee K$ the convex hull, and $H + K$ the Minkowski sum, which is the set of all $x + y$ with $x \in H$ and $y \in K$. These are evidently convex, and they are bounded if H and K are bounded. For any x let $[x]$ represent all λx for λ real or complex satisfying $| \lambda | \leq 1$. For any K let $[K]$ represent the convex hull of all $[x]$ with $x \in K$. The operation will be called equilibration.

Lemma 2. *Let* H *and* K *be minimizing for* A. *Then:*

i) *If* $\varkappa \neq 0$, $\varkappa K$ *is minimizing for* A;

ii) *If* G *is nonsingular,* $G K$ *is minimizing for* $G A G^{-1}$;

iii) *If* $\alpha \geq 0$, K *is minimizing for* αA;

iv) $H \cap K$, $H \vee K$ *and* $H + K$ *are minimizing for* A.

One verifies (iii) and (iv) directly. In view of (iii) it is permissible to assume, when convenient, that $\varrho(A) = 1$ or that $|| A ||_K = 1$, unless $A = 0$. If $A = 0$, then (ii) is trivial; otherwise let $\varrho(A) = 1$. Then K is minimizing for A if and only if $A K \subset K$. But then $G A K = G A G^{-1} (G K) \subset G K$. For the second part of (i), let $G = \varkappa I$; thereafter the first part follows immediately.

Hereafter it will be convenient to let $| x |$ and $| A |$ represent the vector and matrix whose elements are the moduli of the elements of x and of A, respectively. Also let $x \leq y$ signify for real x and y that every element of x is not greater than the corresponding element of y, and analogously for matrices, and for other signs of inequality. The columns of I will be designated e_i, and $e = \Sigma e_i$ is the vector of ones.

Lemma 3. *Let $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ be a sonsingular matrix, with vectors $g_1, g_2, \ldots, g_n$ as columns, let*

$$K = [g_1] \vee [g_2] \vee \ldots \vee [g_n],$$

which is to say that $x \in K$ in case $x = G\,y$ with $e^T \mid y \mid \leq 1$. Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K \subset K$;

ii) $e^T \mid G^{-1}\,x \mid \leq 1 \rightarrow e^T \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq 1$;

iii) $e^T \mid G^{-1}\,A\,G \mid \leq e^T$;

iv) $e^T \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq e^T \mid G^{-1}\,x \mid$ *for every* x.

If $x = G\,y$, then $x \in K$ if and only if $e^T \mid y \mid = e^T \mid G^{-1}\,x \mid \leq 1$. Hence (ii) is the analytic statement of (i). To prove (ii) $\rightarrow$ (iii), let $x = g_i$. Then $e^T \mid G^{-1}\,x \mid = e^T\,e_i = 1$, whence $e^T \mid G^{-1}\,A\,g_i \mid \leq 1$. Since this holds for every i, (iii) holds. To show (iii) $\rightarrow$ (iv), take $x = G\,y$, and observe that for any y, $e^T \mid G^{-1}\,A\,G\,y \mid \leq e^T \mid G^{-1}\,A\,G \mid \mid y \mid \leq e^T \mid y \mid$. It is obvions that (iv) implies (ii).

Corollary. *Let $G^{-1} = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ be a non-negative, nonsingular diagonal matrix; $g = G^{-1}\,e$, $g_i = G\,e_i$,*

$$K_g = [g_1] \vee \ldots \vee [g_n].$$

Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K_g \subset K_g$;

ii) $g^T \mid x \mid \leq 1 \rightarrow g^T \mid A\,x \mid \leq 1$;

iii) $g^T \mid A \mid \leq g^T$;

iv) $g^T \mid A\,x \mid \leq g^T \mid x \mid$ *for every* x.

Lemma 4. *Let $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ be a nonsingular matrix; and let*

$$K' = [g_1] + [g_2] + \ldots + [g_n],$$

which is to say that $x \in K'$ in case $x = G\,y$ with $\mid y \mid \leq e$. Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K' \subset K'$;

ii) $\mid G^{-1}\,x \mid \leq e \rightarrow \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq e$;

iii) $\mid G^{-1}\,A\,G \mid e \leq e$.

Again (ii) is the analytic statement of (i), since $x \in K'$ if and only if $\mid y \mid = \mid G^{-1}\,x \mid \leq e$. Assuming (iii), suppose $\mid G^{-1}\,x \mid \leq e$. Then

$|G^{-1}Ax| \leq |G^{-1}AG|\ |G^{-1}x| \leq |G^{-1}AG|\,e \leq e$. Now assume (ii), and let $|D| = I$, $x = GDe$. Then $|G^{-1}x| = e$, and hence $|G^{-1}AGDe| \leq e$. This holds for any choice of diagonal matrix D with diagonal elements of unit modulus. Let $a_{i.}'$ be the ith row of $G^{-1}AG$. Then $|a_{i.}'De| \leq 1$. Choose D so that $|a_{i.}'De| = |a_{i.}'|\,e$. Then $|a_{i.}'|\,e \leq 1$. But this holds for any i, whence (iii) holds.

Corollary. *Let* $G = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *be a non-negative, nonsingular diagonal matrix*; $g = Ge$, $g_i = Ge_i$;

$$K_g' = [g_1] + [g_2] + \ldots + [g_n].$$

Then the following conditions are equivalent:

i) $AK_g' \subset K_g'$;

ii) $|x| \leq g \rightarrow |Ax| \leq g$;

iii) $|A|\,g \leq g$.

Theorem 1. *Let* A *be irreducible and*

$$E = [e_1] \vee \ldots \vee [e_n].$$

Then E *is minimizing for* A *if and only if* $A = \omega D^{-1} S^T D$, *where* $S \geq 0$, $Se = e$ (S *is stochastic*), ω *is an arbitrary scalar, and* $|D| = I$.

Let $|\omega| = 1$. Then $|A| = S^T$, $e^T|A| = e^T$. Hence $AE \subset E$ by (iii) of the corollary to lemma 3. Hence $e^T DA = e^T D$, $\varrho(A) \geq 1$. Hence $\varrho(A) = 1$ and E is minimizing for A. Conversely, if E is minimizing for A, then $\varrho(A) = 1$, $AE \subset E$. Hence $e^T|A| \leq e^T$, $\varrho(|A|) \leq 1$. But $\varrho(|A|) \geq \varrho(A) = 1$, whence $\varrho(|A|) = 1$, $e^T|A| = e^T$. The result then follows from a theorem due to Wielandt [6].

Any K, as described in Lemma 3, is of the form GE, and the conditions that such a K be minimizing for A are readily inferred. An analogous remark permits extension of the next theorem.

Theorem 2. *Let* A *be irreducible, and let*

$$E' = [e_1] + \ldots + [e_n].$$

Then E' *is minimizing for* A *if and only if* A *has the form*

$$A = \omega D^{-1} S D,$$

where S *is stochastic,* ω *is an arbitrary scalar, and* $|D| = I$.

The proof applies (iii) of the corollary to lemma 4 and the theorem of Wielandt.

If S is any sphere with center at the origin, then

$$\|A\|_S^2 = \varrho(A^*A) = \varrho(AA^*).$$

If Ω is any unitary matrix, then

$$|| \Omega^* A \Omega ||_S = || A ||_S.$$

Hence the sphere is minimizing for any normal matrix. More generally, however:

Theorem 3. *A sphere S with center at the origin is minimizing for A if and only if A is unitarily similar to a matrix the form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad \varrho^2(\Lambda) \geq \varrho(M^*M),$$

where Λ is diagonal.

It is sufficient to consider a unit sphere S. Then the vector norm belonging to S is the Euclidean norm. Suppose $\varrho(\Lambda) = 1$. Then $\Lambda^* \Lambda \leq I$, and if $x^* x = 1$, then

$$x^* A^* A x \leq x^* x,$$

whence $A S \subset S$ and S is minimizing. Conversely, let S be the unit sphere, and suppose $A S \subset S$. Apply a unitary transformation to A to reduce it to upper triangular form in such a way that the proper values are arranged along the diagonal in order of decreasing modulus. Let the transformed matrix be

$$B = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

where P is triangular with all diagonal elements of unit modulus. For any vector x partitioned in conformity with B, let

$$x^* x = u^* u + v^* v$$

and form

$$\begin{aligned} x^* B^* B x &= (P u + Q v)^* (P u + Q v) + v^* M^* M v \\ &= u^* P^* P u + 2 v^* Q^* P u + v^*(Q^* Q + M^* M) v \leq x^* x. \end{aligned}$$

Taking $v = 0$, $u^* u = 1$, $u^* P^* P u \leq 1$. But all diagonal elements of P are of unit modulus, whence, necessarily, $P^* P = I$, $| P | = I$. Hence for arbitrary x

$$2 v^* Q^* P u + v^*(Q^* Q + M^* M) v \leq v^* v.$$

Let $P u = \tau Q v$. Then for an arbitrary scalar τ,

$$v^*[2 \tau + 1) Q^* Q + M^* M] v \leq v^* v$$

and this can hold only if $Q = 0$. But then for any v,

$$v^* M^* M v \leq v^* v$$

which is to say that $\varrho(M^* M) \leq 1$.

Along with any norm can be associated a dual, designated by a prime, and such that for every A,

$$|| A ||' = || A^* ||.$$

That is one takes the original norm of the conjugate transpose of the matrix, rather than of the matrix itself. Since this is clearly a norm, it is to be expected that it belongs to some convex body, and, in fact, if the original norm belongs to K, then the dual belongs to K' the polar of K. This is defined as follows: $x \in K'$ in case $Re\, u^* x \leq 1$ for every $u \in K$ [5, 3]. *Then A is minimized by K if and only if A^* is minimized by K', the polar of K.*

References

1. *T. Bonnesen* and *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Julius Springer, 1934.
2. *V. N. Faddeeva*, Vyčislitel'nye metody lineĭnoĭ algebry. Moscow, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo, 1950.
3. *Alston S. Householder*, The approximate solution of matrix problems. J. Assoc. Comp. Mach. 5 (1958) 205–243.
4. *A. Kolmogoroff*, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. 5 (1934) 29–33.
5. *John von Neumann*, Some matrix inequalities and metrization of matrix-space. Bull. Inst. Math. Mech. Univ. Tomsk 1 (1937) 286–299.
6. *Helmut Wielandt*, Unzerlegbare, nichtnegative Matrizen. Math. Z. 52 (1950) 642–648.

Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln

Von

A. Florian, Graz

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 25. November 1958)

Anläßlich eines Gespräches teilte mir Prof. *L. Fejes Tóth* das folgende Resultat von *J. Molnár* mit: Gegeben seien drei Kreisscheiben mit den Radien r_1, r_2, r_3, gesucht ist der größte Kreis, der sich von den drei Kreisen überdecken läßt. Alle Kreise werden, wie im folgenden die Kugeln, als abgeschlossen betrachtet. Damit lautet das Resultat von *Molnár*: Läßt sich mit den drei Durchmessern als Seiten ein spitzwinkliges Dreieck konstruieren, so ist der gesuchte Kreis der Umkreis dieses Dreiecks. Sonst — wenn sich also aus den drei Durchmessern kein Dreieck oder nur ein stumpfwinkliges bilden läßt — ist der größte überdeckbare Kreis der größte der drei. Dabei ist noch bemerkenswert: Überdecken drei Kreise den Umfang eines größeren Kreises, so überdecken sie auch das Innere[1].

Prof. *Fejes Tóth* legte mir die Frage nach dem analogen Problem im dreidimensionalen Raum vor. Da man mit drei Kugeln höchstens die größte der drei überdecken kann, lautet das Problem: Wie groß ist die größte Kugel, die man mit vier Kugeln K_i ($i=1, 2, 3, 4$) der Radien r_i überdecken kann?

Die vollständige Lösung scheint recht schwierig zu sein. Hier sollen einige Teilresultate in dieser Richtung angegeben werden. Wir betrachten die größte Kugel, deren Oberfläche sich von den vier Kugeln überdecken läßt, und zeigen einige ihrer geometrischen Eigenschaften. Speziell wird folgen, daß sie gleichzeitig die größte Kugel ist, die sich von den Kugeln K_i vollständig überdecken läßt. Ihr Radius r hängt noch von

[1] Auf der Kugel gilt dies nicht mehr: Drei Kalotten, die den Rand einer größeren Kalotte überdecken, brauchen nicht deren Inneres zu überdecken.

zwei geeignet zu wählenden Variablen ab. Die vollständige Lösung des Problems würde die Bestimmung des Maximus dieser Funktion erfordern.

Es sei K die größte Kugel (Radius r), deren Oberfläche von den vier Kugeln K_i (Radien r_i) überdeckt werden kann. Offenbar ist $r \geqq \operatorname{Max}\{r_i\}$; wir nehmen

$$r > \operatorname{Max}\{r_i\}$$

an. Die Kugeln K_i schneiden von K vier Kalotten ab, die zusammen die Oberfläche von K überdecken. Die Basisebenen dieser Kalotten schließen ein Tetraeder T ein, das den Mittelpunkt M von K im Inneren enthält und selbst in K enthalten ist. Umgekehrt gibt es zu jedem solchen Tetraeder eine Überdeckung der Oberfläche von K durch vier Kugeln. Wir zeigen einige geometrische Eigenschaften von T für die größte Kugel K.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt M, $\mathfrak{x}_i$ seien die Eckpunkte von T, $\mathfrak{a}_i$ die Fußpunkte der Normalen von M auf die Tetraederflächen, $\mathfrak{a}_4$ liegt in der Ebene $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ (Punkte und ihre Ortsvektoren werden mit den gleichen Buchstaben bezeichnet). Damit lauten die Bedingungen für das Tetraeder T

$$\left.\begin{array}{l} |\,\mathfrak{x}_i\,| \leqq r, \\ \sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} \leqq r_i < r, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ M \text{ liegt im Innern von } T. \end{array}\right\} \tag{1}$$

r ist die größte Zahl, mit der diese Bedingungen gleichzeitig erfüllbar sind. (ij) sei die Verbindungsgerade von $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j$, (ijk) die Ebene durch $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_k$.

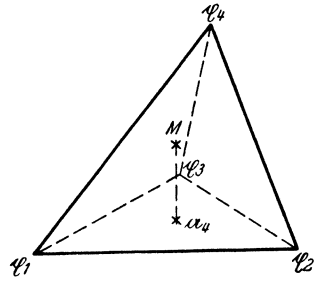

Abb. 1

1. Es gilt $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} = r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, d. h. $\mathfrak{a}_i$ ist Mittelpunkt von K_i. K schneidet also die Kugeln K_i in Hauptkreisen.

Beweis:

a) Wäre $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} < r_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, so könnte man r bei festen $\mathfrak{x}_i$ so vergrößern, daß (1) gültig bleibt, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von r.

b) Es sei etwa $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_1^2} = r_1$, aber $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} < r_i$ $(i = 2, 3, 4)$. Hält man $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ fest, so kann man $|\,\mathfrak{a}_1\,|$ durch geeignete Verschiebung von $\mathfrak{x}_4$ vergrößern, wenn $\mathfrak{a}_1$ nicht auf (23) liegt. In diesem Fall hätte man

$\mathfrak{x}_2$ oder $\mathfrak{x}_3$ statt $\mathfrak{x}_4$ zu nehmen und die anderen Punkte festzuhalten. In mindestens einem Fall käme man damit auf a) zurück.

c) Es sei $\sqrt{r^2 - a_1^2} = r_1$, $\sqrt{r^2 - a_2^2} = r_2$, $\sqrt{r^2 - a_i^2} < r_i$ $(i = 3, 4)$. Hält man $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$ fest, so kann man $|\mathfrak{a}_2|$ bei konstantem $|\mathfrak{a}_1|$ durch Verschieben von $\mathfrak{x}_1$ vergrößern, außer es liegt $\mathfrak{a}_2$ auf (34). In diesem Fall vertauscht man $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, wobei nun $|\mathfrak{a}_2|$ fest bleibt und $|\mathfrak{a}_1|$ vergrößert wird. Das ergibt wieder b). $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ können nicht gleichzeitig auf (34) liegen, da sonst (134) und (234) zusammenfallen würden.

d) Es sei $\sqrt{r^2 - a_i^2} = r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\sqrt{r^2 - a_4^2} < r_4$. Liegt $\mathfrak{a}_3$ nicht auf (14), so hält man $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$ fest und verschiebt $\mathfrak{x}_2$ in (234). Dabei bleiben $|\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}_2|$ konstant, während bei geeigneter Verschiebung $|\mathfrak{a}_3|$ zunimmt. Liegt $\mathfrak{a}_3$ auf (14), so vertauscht man die Rollen von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Liegt $\mathfrak{a}_3$ auf (14) und (24), so ist $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{x}_4$, also $|\mathfrak{x}_4| < r$. Dann hält man $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ fest und verschiebt $\mathfrak{x}_4$ auf (34), wodurch man $|\mathfrak{a}_3|$ vergrößern kann, während $|\mathfrak{a}_1|$ und $|\mathfrak{a}_2|$ konstant bleiben. Dies würde wieder auf c) führen. Damit ist die Behauptung gezeigt.

2. Die Eckpunkte von T liegen auf der Oberfläche von K. Die Seitenflächen des Tetraeders haben also die Umkreisradien r_i.

Beweis: Wäre etwa $|\mathfrak{x}_1| < r$, so könnte man $|\mathfrak{a}_4|$ bei konstanten $|\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_3|$ vergrößern, wenn $\mathfrak{a}_4$ nicht auf (23) liegt, indem man $\mathfrak{x}_1$ auf (14) verschiebt. Liegt $\mathfrak{a}_4$ auf (23), so vertauscht man $\mathfrak{x}_3$ oder $\mathfrak{x}_2$ mit $\mathfrak{x}_4$. Damit käme man auf d) in 1. zurück. Der Fall, daß gleichzeitig $\mathfrak{a}_4$ auf (23), $\mathfrak{a}_2$ auf (34) und $\mathfrak{a}_3$ auf (24) liegen, kann nicht eintreten. Denn dann wäre (234) die Ebene durch die Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$. M und $\mathfrak{x}_1$ sollen nun festgehalten und $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1$ so in drei paarweise orthogonale Vektoren übergeführt werden, daß M stets in dem dadurch bestimmten Winkelraum bleibt. Dann liegt M offenbar außerhalb des Tetraeders, das von den durch die drei Vektoren aufgespannten Ebenen und durch jene Ebene begrenzt wird, die die Fußpunkte der Normalen von M auf die drei anderen Ebenen enthält. Da M vorher innerhalb T gelegen war, müßte in einer Zwischenstellung M in der Ebene der Fußpunkte der Normalen von M auf die drei anderen Tetraederebenen liegen. Die erste Ebene würde dann auf den drei anderen senkrecht stehen, was unmöglich ist.

3. Die Kugeln K_i überdecken auch das Innere von K.

Beweis: Es sei P ein Punkt außerhalb K_i. Man lege durch P und den Mittelpunkt von K_i eine Ebene normal auf die zugehörige Tetraederfläche. Die Schnittgerade der beiden Ebenen schneidet den

Umkreis des Dreiecks in zwei Punkten. Die (parallelen) Tangenten in diesen Punkten an den Umkreis bestimmen mit P zwei Ebenen, die aus der Einheitskugel um P ein Zweieck mit einem Winkel kleiner als $\pi/2$ ausschneiden, da P außerhalb K_i liegt. Daher ist sein Inhalt kleiner als π. Um so mehr ist der räumliche Winkel, unter dem die Tetraederfläche von P aus gesehen wird, kleiner als π. Wendet man dies auf alle vier Kugeln K_i an, so folgt, daß sie zusammen das Tetraeder T überdecken. Denn würde ein innerer Punkt P von T keiner Kugel K_i angehören, so wäre die Summe der räumlichen Winkel der Tetraederflächen aus P kleiner als 4π; das ergibt einen Widerspruch. Somit überdecken die K_i zusammeu auch das Innere von K.

Daraus folgt, daß, die größte Kugel, deren Oberfläche von den vier Kugeln K_i überdeckt werden kann, gleichzeitig die größte Kugel ist, die man mit den K_i vollständig überdecken kann.

4. Die Punkte $\mathfrak{a}_i$ liegen innerhalb oder am Rande der entsprechenden Tetraederflächen.

Läge etwa $\mathfrak{a}_1$ außerhalb des Dreiecks $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$, so gäbe es eine Seite des Dreiecks, etwa (34), die $\mathfrak{a}_1$ vom gegenüberliegenden Eckpunkt $\mathfrak{x}_2$ trennt. Verschiebt man $\mathfrak{x}_2$ auf (21) gegen $\mathfrak{x}_1$, so bleiben $|\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{a}_4|$ konstant, während $|\mathfrak{a}_1|$ zunimmt. Das würde auf d) in 1. führen.

Aus 1. bis 4. folgt: Es gibt dann und nur dann eine Kugel K, die größer als die größte der K_i ist und von den K_i überdeckt werden kann, wenn es ein Tetraeder gibt, das seinen Umkugelmittelpunkt im Inneren enthält und dessen Seitenflächen die Umkreisradien r_i besitzen. Der gesuchte größte Kugelradius ist gleich dem größten Umkugelradius der Tetraeder mit dieser Eigenschaft. Dabei kann man sich auf Tetraeder beschränken, die die Fußpunkteigenschaft 4 besitzen. Da ein Tetraeder durch sechs Größen, etwa seine sechs Kanten, eindeutig bestimmt ist, jedoch nur die vier Umkreisradien der Seitenflächen vorgeschrieben sind, hängt der Umkugelradius r noch von zwei geeignet zu wählenden Variablen ab. Damit ist die Lösung des Problems auf die Ermittlung des Maximums dieser Funktion zurückgeführt.

Ist die größte überdeckbare Kugel größer als die größte der K_i, so ist sie auch die größte Kugel, deren Oberfläche sich von vier Kalotten mit den Basisradien r_i überdecken läßt. Ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, so ist daher das Problem äquivalent mit dem der Überdeckung einer Kugel durch vier kongruente Kalotten bei minimaler Überdeckungsdichte. In diesem Fall müssen die Mittelpunkte der Kalotten in den Ecken

eines regulären Tetraeders liegen[2]. Daher ist die größte überdeckbare Kugel die Umkugel des regulären Tetraeders mit den Umkreisradien r_1 der Seitenflächen.

[2] *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953, S. 114.

Boundedness of Solutions of a Linear Equation

By

W. R. Utz (University of Missouri)

(Received Dezember 15, 1958)

The well-known Euler equation

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0, \tag{1}$$

where a, b are real constants, $t > 0$ and $x' = dx/dt$, becomes the equation

$$x'' + (a - 1)\, x' + bx = 0, \quad x' = dx/dz, \tag{2}$$

upon setting $z = ln\, t$. It is easily seen that a solution of (1) is bounded as $t \to \infty$ when, and only when, the corresponding solution of (2) is bounded as $t \to \infty$.

In this note we consider the boundedness of solutions, as $t \to \infty$, of the equation

$$x'' + \frac{a}{t}\, x' + q(t)\, x = 0,\ t > 0, \tag{3}$$

for certain choices of $q(t)$ and the real constant a.

Although equation (3) is generally not integrable in closed form it includes some interesting equations, besides the Euler equation, which can be solved in closed form. For example, the equation

$$t^2 x'' + 2\, atx' + (a(a - 1) + t^2)\, x = 0 \tag{4}$$

is reduced by the transformation

$$x = v\, t^{-a},\ t > 0,$$

to an equation easily integrated. Equation (4), for $a = 1$, has been considered by De Castro Brzezicki [2] and for $a = 1/2$ is a Bessel equation.

Theorem 1. *If* $0 \leq a \leq 2$ *and if for all large* t,

$$q'(t) \leq 0$$

and

$$t^a\, q(t) > \delta > 0$$

then each solution of (3) *valid for all large t is bounded as* $t \to \infty$.

Proof. Let $t = t_0 > 0$ be sufficiently large to satisfy the hypotheses of the theorem. Let

$$x = v\, t^{-a/2}$$

then (3) becomes

$$v'' + H(t)\, v = 0 \tag{5}$$

where

$$H(t) = q(t) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{2a - a^2}{4}\right). \tag{6}$$

Multiply (5) by v' and integrate by parts to secure

$$v'^2 + H(t)\, v^2 - \int_{t_0}^{t} v^2 H'(t)\, dt = c_1. \tag{7}$$

Since $q'(t) \leq 0$ and $0 \leq a \leq 2$, we have $H'(t) \leq 0$ and since t^a $q(t) > \delta > 0$ for $t \geq t_0$ implies $q(t) > 0$ it follows that $H(t) > 0$ for $t \geq t_0$ and $0 \leq a \leq 2$. Thus each term of the left hand side of (7) is non-negative and $H(t)\, v^2$ must be bounded as $t \to \infty$. However, $H(t)\, v^2 = = H(t)\, t^a\, t^2$ and since $t^a\, q(t) > \delta > 0$ and $0 \leq a \leq 2$ it follows that $H(t)\, t^a > \delta > 0$. Hence x is bounded as $t \to \infty$. This completes the proof of the theorem.

The following lemmas are useful in the proof of Theorem 2.

Lemma 1. *If all solutions of the equation*

$$x'' + a(t)\, x = 0$$

are bounded as $t \to \infty$, *then all solutions of*

$$x'' + (a(t) + b(t))\, x = 0$$

are bounded as $t \to \infty$ *if*

$$\int^{\infty} |\, b(t)\, |\, dt < \infty.$$

Lemma 2. *If* $a'(t) \geq 0$ *for all* $t \geq t_0$ *and if* $a(t) > 0$ *for some value of* $t \geq t_0$, *then any solution of*

$$u'' + a(t)\, u = 0$$

valid for all large t is bounded as $t \to \infty$.

Lemma 1 is well-known [1, p. 112]. Lemma 2 is easily proved following the proof found in [1, p. 113] for a weaker result.

Theorem 2. *If* $x = x(t)$ *is a solution of* (3) *valid for all large t and if in* (3), $a \geq 0$, $q'(t) \geq 0$ *for all* $t \geq t_0$ *and* $q(t) > 0$ *for some value of* $t \geq t_0$, *then* $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Proof. We secure equations (5) and (6) as in the proof of Theorem 1. Since by Lemma 2 the solutions of the equation

$$x'' + q(t)\, x = 0$$

are bounded, the boundedness of the solutions of (5) follow from Lemma 1. However, if v is bounded and $a \geq 0$ then

$$\lim_{t \to \infty} x = \lim_{t \to \infty} v\, t^{-a/2} = 0$$

and the theorem is proved.

With no extra effort one may secure Theorem 2 for the equation

$$x'' + \frac{a}{t^b}\, x' + q(t)\, x = 0$$

where a ≥ 0, $1 \geq b > 1/2$, $q'(t) \geq 0$ and $q(t) > 0$ for large t.

References

1. *Bellman, Richard.* Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953.
2. *De Castro Brzezicki, A.* "Estudio y resolucion de la ecuacion diferencial $xy'' + ny' + axy = 0$," Gaceta Mat., Tomo 3 (1951) pp. 153—155.

Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten

Von

Karl-Walter Gaede, München

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 23. Dezember 1958)

Werden die Koeffizienten einer Gleichung n-ten Grades

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \tag{1}$$

nicht als fest vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen betrachtet, sondern als Zufallsgrößen, so sind die Lösungen von (1) nicht mehr wohlbestimmte Zahlen sondern wieder Zufallsgrößen.

Es stellt sich nun das Problem, bei vorgegebener Verteilung der A_ν die Verteilung der Wurzeln von (1) zu bestimmen.

Hierzu liegen bisher nur Ergebnisse vor für den Fall, daß $A_0 = 1$ *eine Konstante* ist, ferner *alle* n Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Zufallsgrößen sind und

Fall a) alle reell sind und die gemeinsame n-dimensionale Verteilungsdichte $g(a_1, \ldots, a_n)$

Fall b) die Form $A_\nu = S_\nu + i\,T_\nu$ haben, wobei die S_ν, T_ν die gemeinsame $2n$-dimensionale Verteilungsdichte $h(s_1, t_1, \ldots, s_n, t_n)$ besitzen.

Für Fall a) bestimmt *J. W. Hamblen* [4][1] die gemeinsame Dichte der Wurzeln bei quadratischen Gleichungen und daraus die Randdichten der einzelnen Wurzeln, und zwar für beliebige Dichte der Koeffizienten. *Finzel* [3] betrachtet die Gleichung n-ten Grades und beschränkt sich hierbei auf konstante Dichte der Koeffizienten. Verfasser behandelt in [5] die Gleichung n-ten Grades mit beliebiger Verteilungsdichte der Koeffizienten und untersucht genauer die Gleichung dritten Grades in der Form (1) sowie in der Form $x^3 + A_2 x + A_3 = 0$. Weiterhin wird

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

für Fall b) in [5] die gemeinsame Dichte der Wurzeln von (1) allgemein (Grad und Koeffizientendichte beliebig) berechnet.

M. A. Girshick [1] beschränkt sich hier auf eine gewisse Normalverteilung und *W. Specht* [2] auf eine konstante Dichte der Koeffizienten.

Im Folgenden setzen wir voraus, daß die A_ν ($\nu=0, 1, \ldots, n$) reell sind, verlangen aber nicht mehr, daß *alle* A_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) Zufallsgrößen sind, lassen aber zu, daß auch A_0 Zufallsgröße ist.

(Unter diesen Voraussetzungen versagen die in den angeführten Arbeiten entwickelten Methoden.)

1. Gegeben sei also die Gleichung n-ten Grades (1).

Von den $n+1$ Koeffizienten seien die m Koeffizienten

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu_m}$$

mit

$$0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m \leq n;\ 1 \leq m \leq n+1$$

Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Verteilungsdichte $g(a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_m})$; die übrigen $n+1-m$ Koeffizienten seien (reelle) Konstanten.

Besonders aufschlußreich ist die Randverteilung einer reellen Wurzel von (1), *wenn bekannt ist, daß in einem Intervall der reellen Achse nur diese eine Wurzel liegen kann*; dann gibt nämlich die Verteilung der Wurzel das gesamte Lösungsverhalten der Gleichung in diesem Intervall wieder.

Wir geben deshalb eine Methode an, nach der die Verteilungsfunktion einer solchen reellen Wurzel berechnet werden kann, ohne daß es nötig ist, zuerst die gemeinsame Verteilungsdichte aller n Wurzeln zu berechnen.

Wir deuten die a_{ν_μ} als Koordinaten in einem *m-dimensionalen* euklidischen Raum, den wir als Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^*$ bezeichnen. (Die konstanten Koeffizienten gehören also nicht diesem Koeffizientenraum an.)

Setzen wir in (1) für x eine feste reelle Zahl ξ ein, so wird dadurch zwischen den Zufallskoeffizienten A_{ν_μ} eine lineare Beziehung hergestellt, d. h. alle die Punkte im Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^*$, zu denen Gleichungen mit einer reellen Wurzel ξ gehören, erfüllen eine Hyperebene $E(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$, und wandert ξ in dem Intervall I ($\alpha \leq \xi \leq \beta$), so entspricht dem in $\mathfrak{R}^*$ eine (einparametrige) Hyperebenenschar $\mathfrak{E}$ (I).

Ist nun die Koeffizientenverteilungsdichte g in einem Bereich $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{R}^*$ von Null verschieden und außerhalb $\mathfrak{L}$ identisch Null, so kann

der Fall eintreten, daß jeder Koeffizientenpunkt des interessierenden Bereiches $\mathfrak{L}$ in genau einer Hyperebene einer zu einem gewissen Intervall I gehörigen Hyperebenenschar $\mathfrak{E}(I)$ gelegen ist und jede Hyperebene der Schar $\mathfrak{E}(I)$ mindestens einen Punkt mit $\mathfrak{L}$ gemeinsam hat. I ist festgelegt durch $\mathfrak{L}$ und durch Vorgabe eines Innenpunktes ξ_1 von $\mathfrak{L}$.

Um zu kennzeichnen, daß das Intervall durch ξ_1 festgelegt wurde, nennen wir es $I_1(\xi_1)$. (Die Vorgabe von ξ_1 ist nötig, weil zu einem $\mathfrak{L}$ mehrere Intervalle I gehören können, von denen jedes durch Angabe eines seiner Punkte ξ_ν fesgelegt werden kann.)

In diesem Intervall $I_1(\xi)$ kann demnach nur genau eine Wurzel jeder der zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Gleichungen liegen. Wir bezeichnen sie mit X_1 und bestimmen die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ von X_1.

Jede Ebene $E(\xi)$ der Schar $\mathfrak{E}(I_1)$ zerlegt den Definitionsbereich $\mathfrak{R}$ der Koeffizientenverteilungsdichte g so in zwei Klassen $\mathfrak{R}(\xi)$ und $\overline{\mathfrak{R}}(\xi)$ von Punkten (wobei wir die Ebene $E(\xi)$ als zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörig betrachten), daß für alle zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörigen Gleichungen $X_1 \leq \xi$ gilt, entsprechend gilt für die zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörenden Gleichungen $X_1 > \xi$.

Nun ist die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ gegeben als $\Phi_1(x_1) = = w(X_1 \leq x_1)$, womit wir finden

$$\Phi_1(x_1) = \begin{cases} 0 \quad \text{für } x_1 < \text{linker Endpunkt von } I_1 \\ \int\limits_{\mathfrak{R}(x_1)} \cdots \int g((a_{\nu_\mu}))\, da_{\nu_1} \ldots da_{\nu_m} \quad \text{für } x_1 \in I_1 \\ 1 \quad \text{für } x_1 > \text{rechter Endpunkt von } I_1. \end{cases} \tag{2}$$

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen die Voraussetzungen erfüllt sind, die zur Rechenvorschrift (2) führten.

Diese Frage wird z. B. durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz:

Gegeben sei eine Gleichung n-ten Grades

$$f(x) \equiv A_0\, x^n + A_1\, x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

von der m Koeffizienten

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_m}\ (0 \leq \nu_1 < \nu_2 \ldots < \nu_m \leq n;\ 1 \leq m \leq n+1)$$

Zufallsgrößen sind mit der gemeinsamen Verteilungsdichte $g(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m})$, die in einem konvexen Bereich $\mathfrak{L}$ des m-dimensionalen Koeffizientenraumes stets größer Null ist, während sie außerhalb $\mathfrak{L}$ identisch verschwindet.

Durch die Ebene $f(x_1) = 0$ werde $\mathfrak{L}$ in zwei Bereiche $\mathfrak{R}(x_1)$ und $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ zerlegt, so daß

$$F(x_1) = \int_{\mathfrak{R}(x_1)} \dots \int g(a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m})\, da_{\nu_1} \dots da_{\nu_m}$$

eine monoton wachsende Funktion ist. Gibt es nun zwei Zahlen $\alpha_1 < \beta_1$, so daß $F(\alpha_1) = 0$ und $F(\beta_1) = 1$ wird, wobei der Durchschnitt der Hyperebenen $f(\alpha_1) = 0$ und $f(\beta_1) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht leer ist und hat ferner der Durchschnitt der Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ für $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ mit $\mathfrak{L}$ keinen Punkt gemeinsam, so heißt die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ der (einzigen) in I_1 gelegenen reellen Zufallswurzel X_1

$$\Phi_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 < \alpha_1 \\ F(x_1) & \text{für} \quad I_1\{\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1\} \\ 1 & \text{für} \quad x_1 > \beta_1 \end{cases}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es eine Hyperebene $f(x_1) = 0$, die $\mathfrak{L}$ in zwei Teilbereiche mit positivem m-dimensionalen Inhalt zerlegt. Aus der Bedingung $F(x_1) = \int_{\mathfrak{R}(x_1)} \dots \int g\, da_{\nu_1} \dots da_{\nu_m}$ monoton wachsend, läßt sich entscheiden, welcher dieser beiden Bereiche $\mathfrak{R}(x_1)$ ist.

Wegen der Stetigkeit der Abhängigkeit der Ebenen $f(x) = 0$ vom Scharparameter x, hat für genügend kleines $h (0 < h < \varepsilon_1)$ die Ebene $f(x_1 + h) = 0$ auch noch die Eigenschaft, $\mathfrak{L}$ in zwei nichtleere Teilbereiche zu zerlegen. Da die Koeffizientendichte in $\mathfrak{L}$ stets positiv ist, kann der Durchschnitt von $f(x_1 + h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht ganz in $\mathfrak{R}(x_1)$ liegen, weil sonst $F(x_1 + h) < F(x_1)$ wäre, was ein Widerspruch gegen das monotone Wachsen von $F(x_1)$ ist.

Weiterhin sind die Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ nicht identisch, denn aus der Identität würde folgen (mit $x_2 = x_1 + h$)

$$x_1^{n-\nu_1} : x_1^{n-\nu_2} : \dots : x_1^{n-\nu_m} : f(x_1) - \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu_\mu} x^{n-\nu_\mu}$$

$$= x_2^{n-\nu_1} : x_2^{n-\nu_2} : \dots : x_2^{n-\nu_m} : f(x_2) - \sum_{=1}^{m} A_{\nu_\mu} x_2^{n-\nu_\mu}$$

Faßt man diese Gleichung bei vorgegebenem x_1 als Bestimmungsgleichung für x_2 auf, so hat sie neben der trivialen Lösung $x_2 = x_1$ sicher nur endlich viele Lösungen. Wenn also h nur klein genug ist $(0 < h < \varepsilon_2)$, ist $x_2 = x_1 + h$ nicht Lösung obiger Gleichung, d. h. die Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ nicht identisch; selbstverständlich fallen dann auch die Hyperebenen $f(x_1 + \vartheta h) = 0$, $(0 < \vartheta < 1)$ mit $f(x_1) = 0$ nicht zusammen.

Der Monotonie von $F(x)$ würde es noch nicht widersprechen, wenn ein Teil von $f(x_1 + h) = 0$ in $\mathfrak{R}(x_1)$ läge, ein anderer in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$.

Dann wäre aber wegen der Konvexität von $\mathfrak{L}$ der Durchschnitt des Schnittgebildes von $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht leer, (wir sagen kurz: $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ schneiden sich in $\mathfrak{L}$). Wegen der Monotonie von $F(x)$ kann der Durchschnitt von $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht ganz in $\mathfrak{R}(x_1)$ oder in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1 + h)$ gelegen sein, folglich müßten sich (wieder wegen der Konvexität von $\mathfrak{L}$) entweder $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ oder $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ $(0 < \vartheta < 1)$ in $\mathfrak{L}$ schneiden. In dieser Schlußweise fortfahrend, fänden wir zwei Ebenen $f(\tilde{x}_1) = 0$ und $f(\tilde{x}_1 + \varepsilon) = 0$ $(x_1 \leq \tilde{x}_1 \leq x_1 + h;\ \varepsilon > 0)$ bei beliebig kleinem ε, die sich in $\mathfrak{L}$ schnitten. In $\mathfrak{L}$ lägen also Koeffizientenpunkte, zu denen Gleichungen mit den Wurzeln $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_1 + \varepsilon$ gehörten bei beliebig wenig von Null verschiedenem ε, d. h. im Intervall $x_1 \ldots x_1 + h$ läge eine Doppelwurzel und es verschwänden für ein x in diesem Intervall $f(x)$ und $f'(x)$ gleichzeitig, was aber nach Voraussetzung nicht eintreten darf.

Damit ist nun gezeigt, daß der Durchschnitt von $f(x_1 + h) = 0$ $(0 < h < \text{Min}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ mit $\mathfrak{L}$ ganz in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ gelegen ist.

Da nach Voraussetzung für ein gewisses Intervall $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ $F(x_1)$ mit wachsendem x_1 von 0 bis 1 wachsen soll, ist durch wiederholte Anwendung unseres Schlusses bewiesen, daß durch jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ genau eine Ebene der Schar $f(x) = 0$ für $x_1 < x \leq \beta_1$ geht und jede Ebene dieser Schar $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ schneidet.

Setzen wir nun $h = -h_1$ $(h_1 > 0)$, so lassen sich hierfür alle unsere Schlüsse in zum Fall $h > 0$ analoger Weise wiederholen, womit die einfache Überdeckung von $\mathfrak{R}(x_1)$ durch die Ebenen der Schar $f(x) = 0$ für $\alpha_1 \leq x \leq x_1$ bewiesen ist. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, unter denen (2) gilt, und unser Satz ist bewiesen.

Bemerkungen:

a) Aus unserem Beweis folgt, daß $F(x_1)$ *stark* monoton wachsend ist.

b) Ist die Koeffizientendichte $g(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m})$ zentralsymmetrisch in bezug auf den Punkt $M_0: (a_{\nu_1}^{(0)}\, a_{\nu_2}^{(0)}, \ldots, a_{\nu_m}^{(0)})$, so hängt $F(x_1)$ nur von dem Abstand $d(x_1 \mid M_0)$ der Hyperebene $f(x_1) = 0$ von M_0 ab; es gilt also $F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0))$, wobei $F(d)$ eine stark monoton wachsende Funktion ist. Der Abstand $d(x_1 \mid M_0)$ ist gemäß der Hesseschen Normalform der Hyperebene $f(x_1) = 0$ gegeben durch

$d(x_1 \mid M_0) = \dfrac{f_0(x_1)}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} x^{2(n-\nu_\mu)}}}$, wobei $f_0(x_1)$ aus $f(x_1)$ dadurch entsteht, daß die A_{ν_μ} durch $a_{\nu_\mu}^{(0)}$ ersetzt werden. Das Vorzeichen werde so gewählt, daß $d(x_1 \mid M_0)$ für wachsendes x_1 nicht abnimmt.

Die Ebene durch den Punkt M_0 entspricht dem Parameterwert x_0, wobei x_0 die (einzige) im Intervall $\alpha_1 \ldots \beta_1$ gelegene Nullstelle von $f_0(x) = 0$ ist.

Wegen der Symmetrie der Koeffizientendichte ist x_0 also die Mediane der Verteilung von X_1.

c) Der Definitionsbereich $\mathfrak{L}$ der Koeffizientendichte muß nicht notwendig beschränkt sein.

d) Eine hinreichende Bedingung dafür, daß für $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ das Schnittgebilde von $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ keinen Punkt gemeinsam hat, erhält man auf folgende Art: Existiert für jedes x_1 mit $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ eine Ebene $l(x_1) \equiv \varkappa(x_1)\, f(x_1) + \lambda(x_1)\, f'(x_1) = 0$ (mit nicht gleichzeitig verschwindenden sonst aber beliebigen Funktionen $\varkappa(x_1)$ und $\lambda(x_1)$), deren Durchschnitt mit $\mathfrak{L}$ leer ist, so schneiden sich $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ sicher nicht in $\mathfrak{L}$.

2. *Beispiel*:

Gegeben sei die Zufallsgleichung

$$f(x) \equiv A_0\, x^5 + A_1\, x^4 + A_2\, x^3 - 3 = 0$$

deren Zufallskoeffizienten A_0, A_1, A_2 die gemeinsame Verteilungsdichte:

$$g(a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} C \exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left((a_0 - 2)^2 + a_1^2 + a_2^2\right)\right] \\ \qquad\qquad \text{für } \mathfrak{L}: (a_0 - 2)^2 + a_1^2 + a_2^2 \leq 1{,}44^2 \\ 0 \qquad\qquad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\sigma > 0$ und $C^{-1} = 2\sqrt{2\pi^3}\,\sigma^3 \left\{ \left(H\left(\dfrac{1{,}44}{\sigma}\right) - \tfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1{,}44}{\sigma}\, h\left(\dfrac{1{,}44}{\sigma}\right) \right\}$

haben, wobei

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\, x^2\right) \qquad -\infty \ldots x \ldots \infty$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt \qquad -\infty \ldots x \ldots \infty$$

ist.

Die Koeffizientenverteilung ist zentralsymmetrisch mit dem Zentrum

$$M_0 : A_0 = 2,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0.$$

Die Gleichung $f_0(x) = 0$, also $2x^5 - 3 = 0$ hat die reelle Wurzel $x_0 = \sqrt[5]{1{,}5}$ und wir wollen die Verteilung $\Phi(x_1)$ derjenigen reellen Wurzel X_1 bestimmen, die in einem Intervall variiert, das x_0 enthält.

Da der Koeffizient von X^0 konstant $\neq 0$ ist, hat keine zu $\mathfrak{L}$ gehörige Gleichung die Lösung $x = 0$, folglich ist das Variationsintervall von X_1 ganz in der positiven reellen Achse gelegen.

Nach Bemerkung b) ist $F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0))$ und

$$d(x_1 \mid M_0) = \frac{2x_1^5 - 3}{\sqrt{x_1^{10} + x_1^8 + x_1^6}} \tag{3}$$

Für $I\{0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}6590\}$ (auf vier Stellen genau) wächst $d(x_1 \mid M_0)$ monoton von $d = -1{,}44$ nach $d = 1{,}44$, d. h. $F(x_1) = \tilde{F}(d)$ ist in $I_1(0{,}9121 \leq x \leq 1{,}6590)$ monoton wachsend, da $\tilde{F}(d)$ stark monoton wächst.

Für $\tilde{F}(d)$ erhalten wir nach einiger Rechnung:

$$\tilde{F}(d) = \frac{H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{R}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma}) - H(-\frac{d}{\sigma}) - \frac{d}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma})}{2(H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{1}{2} - \frac{R}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma}))} \quad \text{für } -R \leq d \leq R,\ R = 1{,}44 \tag{4}$$

und $\tilde{F}(d)$ wächst in diesem Intervall monoton. Demnach ist

$$F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0)) \text{ für } I\{0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}659\}, \tag{5}$$

wobei d aus (3) zu entnehmen ist.

Um zu untersuchen, ob sich für $x_1 \in I$ die Ebenen $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ in $\mathfrak{L}$ schneiden, setzen wir nach Bemerkung d)

$$\begin{aligned} l(x_1) &= f(x_1) + \lambda(x)\, f'(x_1) \\ &= A_0(x_1^5 + \lambda\, 5\, x_1^4) + A_1(x_1^4 + \lambda\, 4\, x_1^3) + A_2(x_1^3 + \lambda\, 3\, x_1^2) - 3 \end{aligned}$$

und wir beweisen, daß es zu jedem $x_1 \in I$ eine Ebene $l(x_1) = 0$ gibt, deren Abstand $\delta(x_1)$ von M_0 dem Betrag nach größer als $R = 1{,}44$ ist; d. h. $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ *schneiden* sich für $x_1 \in I$ *nicht* in $\mathfrak{L}$. Es ist nämlich

$$\delta(x_1) = \frac{2(x_1^5 + \lambda\, 5\, x_1^4) - 3}{-\sqrt{(x_1^5 + 5\, x_1^4\, \lambda)^2 + (x_1^4 + 4\, x_1^3\, \lambda)^2 + (x_1^3 + 3\, x_1^2\, \lambda)^2}}.$$

Für $0 < x_1 \leq 1$ setzen wir $\lambda = -\frac{1}{5}\, x_1$ und erhalten $\delta(x_1) = \frac{15}{\sqrt{x_1^8 + 4\, x_1^6}}$;

da diese Funktion monoton fällt, ist für

$$0 < x_1 \leq 1 \quad \delta(x_1) \geq \delta(1) = 3 \cdot \sqrt{5} > R$$

Für $x_1 \geq 1$ verwenden wir $\lambda = -x_1$ und bekommen

$$\delta(x_1) = \frac{8x_1^5 + 3}{\sqrt{16x_1^{10} + 9x_1^8 + 4x_1^6}} > \frac{8x_1^5}{\sqrt{16x_1^{10} + 9x_1^8 + 4x_1^6}}$$

und da letztere Funktion für $x_1 \geq 1$ monoton wächst

$$\delta(x_1) > \frac{8}{\sqrt{29}} > R = 1{,}44.$$

Damit ist auch die letzte Bedingung des Satzes erfüllt und wir erhalten nach diesem Satz unter Verwendung von (3) und (4):

Die Verteilungsfunktion $\Phi(x_1)$ der in der Umgebung von $x_0 = \sqrt[5]{1{,}5}$ gelegenen reellen Wurzel X_1 der zu Beginn dieses Abschnittes 2 gegebenen zufälligen Gleichung ist gegeben durch

$$\Phi(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < 0{,}9121 \\ \dfrac{H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{R}{\sigma} h(\frac{R}{\sigma}) - H(-\frac{d}{\sigma}) - \frac{d}{\sigma} h(\frac{R}{\sigma})}{2(H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{1}{2} - \frac{R}{\sigma} h(\frac{R}{\sigma}))} & \text{für } 0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}6590 \\ 1 & \text{für } x_1 > 1{,}6590 \end{cases}$$

mit $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} h(t)\, dt$

$$d = \frac{2x_1^5 - 3}{\sqrt{x_1^{10} + x_1^8 + x_1^6}} \text{ und } R = 1{,}44.$$

Setzen wir $\dfrac{R}{\sigma} = 4$, d. h. $\sigma = 0{,}36$, so ergibt sich folgendes Bild:

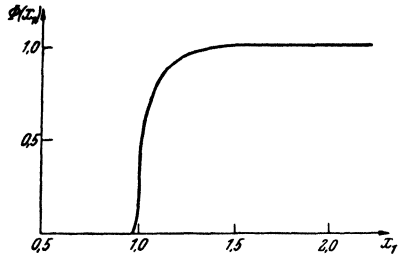

Abb. 1

Literatur

[1] *M. A. Girshick*, Note on the Distribution of Roots of a Polynomial with Random Complex Coefficients. Ann. Math. Statist. Bd. 13 (1942), S. 235—238.
[2] *W. Specht*, Untersuchungen über die Wurzelverteilung algebraischer Gleichungen. Math. Nachrichten Bd. 4 (1950/51), S. 126—149.
[3] *L. Finzel*, Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. Mathem. Nachrichten Bd. 11 (1954), S. 85—104.
[4] *W. Hamblen*, Distribution of Roots of Quadratic Equations with Random Coefficients. Ann. Math. Statist. Bd. 27 (1956), S. 1136—1143.
[5] *K. W. Gaede*, Zur Verteilung der Wurzeln zufälliger algebraischer Gleichungen (Diss. T.-H. München, 1959).

Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen (II)*

Von

Gilbert Helmberg, New Orleans

(Eingegangen am 30. Dezember 1958)

Gegeben sei eine kompakte, nicht notwendigerweise kommutative Gruppe G, die als topologischer Raum dem Trennungsaxiom T_1 genügt. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine Konstruktion einer in G gleichverteilten Folge unter Verwendung von Folgen, die in Untergruppen der Gruppe G gleichverteilt sind. Die angegebene Konstruktion beruht auf einer Verallgemeinerung der in [2] enthaltenen Ergebnisse. Wir führen hier nur die wichtigsten Bezeichnungen, Definitionen und Sätze aus dieser Arbeit nochmals an, werden im übrigen aber auf sie verweisen, wo wir an die dort enthaltenen Ergebnisse und deren Beweise anknüpfen können.

Das normierte Haarsche Maass auf G werde mit μ bezeichnet, ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen von G mit $\{R^{(\lambda)}: \lambda \in \Lambda\}$, und der Grad von $R^{(\lambda)}$ mit r_λ. Hiebei soll $R^{(1)}$ die triviale Darstellung von G sein. Unter einer Untergruppe werden wir immer eine abgeschlossene Untergruppe von G verstehen, unter einer Folge immer eine Folge von Elementen der Gruppe G.

Definition [2] 1: Es sei $\{x_\nu : \nu \in \omega\}$ eine Folge in G und für eine abgeschlossene Untermenge M von G, $N(M)$ die Anzahl der Elemente in der Menge $\{x_\nu : x_\nu \in M, \nu \leqq N\}$. Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ heiße gleichverteilt in G, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N(M)}{N} = \mu(M) \qquad [2]\ (1)$$

für alle abgeschlossenen Untermengen M von G gilt, deren Rand das Haarsche Maass 0 hat.

---

* Abgefaßt mit teilweiser Unterstützung aus Mitteln der National Science Foundation, USA.

Definition [2] 3: Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ von Elementen der Untergruppe H heiße gleichverteilt in H, wenn sie in der topologischen Gruppe H mit Bezug auf die durch G in H induzierte Topologie und das normierte Haarsche Maass der kompakten Gruppe H gleichverteilt ist.

Hilfssatz [2] 1 (*Eckmann*): Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ ist dann und nur dann gleichverteilt in G, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(x_\nu) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \lambda \neq 1. \qquad [2]\,(1')$$

Der Beweis der Gleichverteilung einer Folge in G läuft also auf eine Abschätzung einer Matrix hinaus. Hiezu verwenden wir eine Matrix-Norm, die der Matrix $A = (a_{ij})$ vom Grad r_λ die Matrix $\| A \| = (| a_{ij} |)$ zuordnet. Wir schreiben $\| A \| \leq \| B \|$ für die simultanen Ungleichungen $| a_{ij} | \leq | b_{ij} |$ $(i, j \leq r_\lambda)$. Verstehen wir unter $F^{(\lambda)}$ die Matrix des Grades r_λ, deren Koeffizienten sämtlich 1 sind, so gilt (alle Matrizen haben den Grad r_λ)

$$\| kA \| = | k | \cdot \| A \| \qquad (k \in K = \text{komplexer Zahlkörper})$$

$$\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$$

$$\| A\,B \| \leq \| A \| \cdot \| B \| \qquad [2]\,(2)$$

$$\| A \| \cdot \| B \| \leq \| C \| \cdot \| D \| \text{ wenn } \| A \| \leq \| C \| \text{ und } \| B \| \leq \| D \|$$

$$\| A \| \leq a F^{(\lambda)} \qquad \text{wenn } a \geq \max \{ | a_{ij} | : 1 \leq i, j \leq r_\lambda \}$$

$$\| R^{(\lambda)}(g) \| \leq F^{(\lambda)} \qquad \text{wenn } g \in G$$

$$(F^{(\lambda)})^m = r_\lambda^{m-1} F^{(\lambda)}.$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauscht werden darf, werden wir $\prod_{l=1}^{m} h_l$ für das Produkt $h_1 h_2 \ldots h_m$ schreiben. Weiters werden wir für

$$\sum_{j_1=\underline{j}_1}^{\overline{j}_1} \sum_{j_2=\underline{j}_2}^{\overline{j}_2} \cdots \sum_{j_m=\underline{j}_m}^{\overline{j}_m}$$

kurz $\sum_{\underline{j}_l \leq j_l \leq \overline{j}_l}$ — schreiben, wenn es klar ist, daß l von 1 bis m läuft.

Hauptergebnis der vorausgegangenen Arbeit, auf die wir uns hier beziehen, ist der folgende Satz:

Satz [2] 2: Es seien g_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ n Elemente von G derart, daß für jedes $\lambda \neq 1$ mindestens eines von ihnen in $R^{(\lambda)}$ nicht den Eigenwert 1 besitzt. Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n}(g_k)^{i_k}$ $(0 \leq i_k < \infty, k = 1, 2, \ldots, n)$ derart zu einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente g_ν mit $1 \leq \nu \leq (i+1)^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n}(g_k)^{i_k}$ mit $0 \leq i_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt.

Hieraus werden ähnliche, zum Teil mehr detailierte Sätze über gleichverteilte Folgen in Untergruppen, endlichen Gruppen und Abelschen Gruppen abgeleitet. Für Abelsche Gruppen ergibt sich insbesonders, daß die in Satz [2] 2 genannte Bedingung für die Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, was im nicht-kommutativen Falle im allgemeinen nicht zutrifft. Die folgenden Ausführungen zeigen, daß sich diese Sätze wesentlich verallgemeinern lassen.

Satz 1: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von Untergruppen der Gruppe G gegeben, das folgenden Bedingungen genügt:

a) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ sei eine in H_k gleichverteilte Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ gegeben;

b) für jedes $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 1$ existiere mindestens ein Index $\bar{k}$ derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ nicht enthält.

Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k} = h_{1\nu_1} h_{2\nu_2} \ldots h_{n\nu_n}$ $(\nu_k \in w, k = 1, 2, \ldots, n)$ derart zu einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente g_ν mit $1 \leq \nu \leq i^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $1 \leq \nu_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt.

Beweis: Wir schicken die Bemerkung voraus, daß die gewünschte Anordnung der Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ in folgender Weise erreicht wird: es sei $g_1 = \prod_{k=1}^{n} h_{k1}$; die nächsten $(2^n - 1)$ Elemente g_ν $(1 < \nu \leq 2^n)$ seien die in beliebiger Reihenfolge angeordneten Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $\max \nu_k = 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$; allgemein seien die $[i^n - (i-1)^n]$ Elemente

g_ν $((i-1)^n < \nu \leq i^n)$ die in beliebiger Reihenfolge angeordneten Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $\max \nu_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Für den Beweis des Satzes 1 beziehen wir uns auf den Beweis des Satzes 2 in [2]. Wir haben zu zeigen, daß

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = 0 \qquad \text{für } \lambda \neq 1. \tag{1}$$

(Das Symbol O steht hier und auch später an entsprechenden Stellen für die Null-Matrix.) Wir wollen annehmen, daß für ein gegebenes $\lambda \neq 1$ die Untergruppe $H_{\bar{k}}$ die Bedingung b) erfüllt. Ist i die größte in $N^{1/n}$ enthaltene ganze Zahl, so erhalten wir ähnlich wie in [2] (6)

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = \frac{i^n}{N}\left[\frac{1}{i^n} \sum_{1\leq i_k\leq i} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}\right) + \frac{I}{i^n} \sum_{\nu=i^n+1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu)\right] \tag{2}$$

$$\frac{1}{i^n} \sum_{1\leq i_k\leq i} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}\right) = \prod_{k=1}^{\bar{k}-1}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_k=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{ki_k})\right\} \cdot \frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=\bar{k}+1}^{n}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_k=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{ki_k})\right\}. \tag{3}$$

In (2) und (3) kann es vorkommen, daß je nach den Werten von N und $\bar{k}$ gewisse Summanden bzw. Faktoren nicht in Erscheinung treten. Die in geschwungenen Klammern stehenden Matrizen werden wie in [2] (8) mittels der in [2] (2) eingeführten Matrix-Norm abgeschätzt.

Untersuchen wir nun den mittleren Faktor der rechten Seite von (3). Es sei $S_{\bar{k}}^{(\lambda)}$ eine Matrix von der Eigenschaft, daß $R^{*(\lambda)} = S_{\bar{k}}^{(\lambda)-1} R^{(\lambda)} S_{\bar{k}}^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, als Darstellung von $H_{\bar{k}}$ in vollständig reduzierter Gestalt erscheint und entlang der Hauptdiagonale die irreduziblen Darstellungen $R'^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ von $H_{\bar{k}}$ enthält. (T ist eine endliche Indexfolge.)

$$\frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}}) = S_{\bar{k}}^{(\lambda)}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{*(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}})\right\} S_{\bar{k}}^{(\lambda)-1} \tag{4}$$

Infolge der Gleichverteilung der Folge $\{h_{\bar{k}\nu} : \nu \in w\}$ in $H_{\bar{k}}$ und der speziellen Wahl der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sum_{\nu=1}^{i} R'^{(\tau)}(h_{\bar{k}\nu}) = O \qquad \text{für alle } \tau \in T.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß mit wachsendem i die Matrixnorm des

mittleren Faktors der rechten Seite in (4) und damit auch die Matrixnorm der linken Seite in (4) gegen O strebt. Ähnlich wie in [2] (9) schließen wir, daß die linke Seite in (3) für wachsendes i gegen O strebt.

Der zweite Summand der rechten Seite in (2) wird genau so abgeschätzt wie in [2] (10) und strebt für wachsendes i in Matrixnorm gegen O. Damit strebt auch die linke Seite von (2) für wachsendes N in Matrixnorm gegen O und die Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G ist bewiesen.

Satz 2: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ separabler Untergruppen von G gegeben, das der Bedingung b) des Satzes 1 genügt. Dann gilt $G = H_1 H_2 \ldots H_n$.

Beweis: H_k (k=1, 2, …, n) enthält eine abzählbare, in H_k dichte Untermenge. Diese kann, wie *E. Hlawka* ([1] 6.) gezeigt hat, zu einer in H_k gleichverteilten Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ angeordnet werden. Die mittels dieser Folgen wie in Satz 1 konstruierte Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ ist in G gleichverteilt. Die Menge aller Elementen der Form $h_{1\nu_1} h_{2\nu_2} \ldots h_{n\nu_n}$ ist daher dicht in G und im Komplex $H_1 H_2 \ldots H_n$ enthalten. Dieser Komplex bildet eine kompakte und daher abgeschlossene Untermenge von G und ist deshalb mengentheoretisch identisch mit G.

Wir bemerken, daß die Anordnung, in der die Untergruppen H_k miteinander multipliziert werden, beliebig gewählt werden kann. Das gleiche gilt für die Verwendung der Folgen $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ in Satz 1.

Satz 3: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von Untergruppen der Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und folgenden Bedingungen genügen:

a) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ sei eine in H_k gleichverteilte Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ gegeben;

b) für jedes $\lambda \in \Lambda$ existiere mindestens ein Index $\bar{k}$ derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ genau so oft enthält, wie sie, beschränkt auf H, die triviale Darstellung der Untergruppe H enthält.

Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ $(\nu_k \in w, k = 1, 2, \ldots, n\}$ derart zu einer Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente h_ν mit $1 \leq \nu \leq i^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $1 \leq \nu_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ in H gleichverteilt.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt unter Benützung von Satz 1 genau so wie der entsprechende Beweis des Satzes 3 in [2].

Satz 4: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von separablen Untergruppen der Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und der Bedingung b) des Satzes 3 genügen. Dann gilt $H = H_1 H_2 \ldots H_n$.

Der Beweis erfolgt ähnlich wie der Beweis des Satzes 2 unter Verwendung von Satz 3.

Die angegebenen Sätze lassen sich ähnlich wie in [2] 4. auf endliche Gruppen übertragen. Es sei allgemein $o(G)$ die Ordnung der endlichen Gruppe G. Aus den Elementen einer Untergruppe H von G bilden wir eine Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$, indem wir die $o(H)$ verschiedenen Elemente von H in beliebiger Anordnung als h_ν mit $(p-1)\, o(H) < \nu \leq p o(H)$ $(p \in w)$ verwenden. Es läßt sich leicht zeigen, daß die erhaltene Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ im Sinne der in [2] gegebenen Definitionen 1 und 3 in H gleichverteilt ist. Als Analogon zu [2], Lemma 4, erhalten wir:

Lemma: Es seien H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ endliche Untergruppen der kompakten Gruppe G. Der Komplex $H_1 H_2 \ldots H_n$ enthält dann und nur dann jedes Element der Guppe G gleich oft, wenn die mittels der Folgen $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nach dem Satz 1 angegebenen Verfahren gebildete Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt ist.

Beweis: Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfache von $o(H_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ enthält im Indexbereich $1 \leq \nu \leq (pm)^n$ $(p \in w)$ alle Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ $(1 \leq \nu_k \leq pm,$ $k = 1, 2. \ldots, n)$, d. h. $\dfrac{(pm)^n}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)}$ mal die Elemente des Komplexes $H_1 H_2 \ldots H_n$. Enthält dieser jedes Element von G gleich oft, so ist G endlich, und wir haben für $\lambda \neq 1$

$$\sum_{1 \leq \nu_k \leq o(H_k)} R^{(\lambda)} \left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = O$$

$$\sum_{\nu=1}^{(pm)^n} R^{(\lambda)}(g_\nu) = O$$

Mittels derselben Abschätzung wie in [2] überzeugen wir uns davon, daß

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = O \qquad \text{für } \lambda \neq 1.$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$, daß G endlich ist. Nach dem oben gesagten gilt

$$\frac{1}{(pm)^n} \sum_{\nu=1}^{(pm)^n} R^{(\lambda)}(g_\nu) = \frac{1}{(pm)^n} \cdot \frac{(pm)^n}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)} \sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)} \cdot \sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) \qquad (p \in w).$$

Zusammen mit (1) ergibt dies

$$\sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = 0 \qquad \text{für } \lambda \neq 1$$

Auf grund der Treue eines vollständigen Systems irreduzibler Darstellungen folgt, daß der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element von G gleich oft $\left(\text{d. h. } \frac{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)}{o(G)} \text{ mal}\right)$ enthält.

Wenden wir dieses Lemma zusammen mit Satz 1 auf eine endliche Gruppe G an, so ergibt sich:

Satz 5: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ von Untergruppen der endlichen Gruppe G gegeben, das der Bedingung b) des Satzes 1 genügt. Dann enthält der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element der Gruppe G gleich oft.

Es sei bemerkt, daß sich dieser Satz natürlich ohne Schwierigkeit auch direkt beweisen läßt, da unter der angegebenen Bedingung für $\lambda \neq 1$ ein Faktor der rechten Seite in der Identität

$$\sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{\nu_k=1}^{o(H_k)} R^{(\lambda)}(h_{k\nu_k})$$

die O-Matrix ist.

Ähnlich wie Satz 3 aus Satz 1, ergibt sich aus Satz 5 der folgende:

Satz 6: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ von Untergruppen der endlichen Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und der Bedingung b) des Satzes 3 genügen. Dann enthält der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element der Untergruppe H gleich oft.

Als Beispiel kann die alternierende Gruppe A_5 von fünf Variablen dienen. Ihre fünf inäquivalenten irreduziblen Darstellungen haben die Grade $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$. Es sei H_1 die Diedergruppe der Ordnung 10, erzeugt von den Permutationen (12345) und (12) (34), und H_2 die alternierende Gruppe von vier Variablen, erzeugt von den Permutationen (123) und (12) (34). Bezeichnen wir mit $d^{(\lambda)}(H)$ die Anzahl der in $R^{(\lambda)}$ enthaltenen trivialen Darstellungen der Untergruppe H, dann gilt (siehe [3], Satz 2)

$$\frac{60}{o(H)} = \sum_{\lambda=1}^{5} r_\lambda d^{(\lambda)}(H).$$

Hieraus können wir ablesen, daß die triviale Darstellung von H_1 außer in $R^{(1)}$ nur in $R^{(5)}$ enthalten ist und die der Untergruppe H_2 außer in $R^{(1)}$ nur in $R^{(4)}$. Für H_1 und H_2 treffen also die Voraussetzungen des Satzes 5 (und 1) zu. In der Tat enhält der Komplex $H_1 H_2$ ebenso wie $H_2 H_1$ jedes Element der Gruppe $G = A_5$ genau zweimal.

Die angegebenen Bedingungen b) der Sätze 1 bis 6 sind im Falle einer nichtkommutativen Gruppe G hinreichend, aber nicht notwendig für die Gleichverteilung der Folgen $\{g_\nu : \nu \in w\}$ bzw. $\{h_\nu : \nu \in w\}$, wie das in [2] gegebene Beispiel zyklischer Untergruppen der alternierenden Gruppe von vier Variablen zeigt. Im Falle einer abelschen Gruppe sind die erwähnten Bedingungen jedoch auch notwendig, was genau wie im Beweis des Satzes 7 in [2] gezeigt werden kann. Diese Feststellung läßt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Satz 7: Es sei ein System $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von Folgen gegeben, die in den Normalteilern N_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ der kompakten Gruppe G beziehungsweise gleichverteilt sind. Dann ist für die Gleichverteilung irgend einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G, deren Glieder endliche Produkte von Gliedern der Folgen $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, notwendig, daß für jedes $\lambda \neq 1$ mindestens ein Index $\bar{k}$ existiert derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G, beschränkt auf $N_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung von $N_{\bar{k}}$ nicht enthält.

Beweis: Aus der Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G folgt, daß die Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Normalteiler N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in G dicht ist. Infolge der Vertauschbarkeit der Normalteiler untereinander ergibt sich $G = N_1 N_2 \ldots N_n$. Enthält $R^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung des Normalteilers N von G, so enthält sie diese r_λ mal, d. h. keine andere irreduzible Darstellung von N (siehe [3], Satz 3).

Wäre für ein bestimmtes $\lambda \neq 1$ die Bedingung des Satzes 7 nicht erfüllt, dann würde in $R^{(\lambda)}$ jedes Element jedes Normalteilers N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ durch die Einheitsmatrix dargestellt. Das gleiche gelte damit auch für jedes Element von von G, d. h. $R^{(\lambda)}$ wäre die triviale Darstellung, was einen Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \neq 1$ ergibt.

Satz 8: Es sei ein System $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von Folgen gegeben, die in den Normalteilern N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der kompakten Gruppe G beziehungsweise gleichverteilt sind, welche ihrerseits sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind. Dann ist für die Gleichverteilung irgend einer Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ in H, deren Glieder endliche Produkte von Gliedern der Folgen $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, notwendig, daß für jedes $\lambda \in \Lambda$ mindestens ein Index $\bar{k}$ existiert derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G, beschränkt auf $N_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung des Normalteilers $N_{\bar{k}}$ genau so oft enthält, wie sie, beschränkt auf H, die triviale Darstellung der Untergruppe H enthält.

Beweis: Wie im Beweis des Satzes 7 sehen wir, daß H mit dem von $\{N_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ erzeugten Normalteiler $N = N_1 N_2 \ldots N_n$ von G identisch ist. Da N_k eine Untergruppe von H ist, gilt in der oben eingeführten Schreibweise $0 \leq d^{(\lambda)}(H) \leq d^{(\lambda)}(N_k) \leq r_\lambda$. Es sei für ein bestimmtes $\lambda \varepsilon \Lambda$ $d^{(\lambda)}(H) < d^{(\lambda)}(N_k)$ für alle $k=1, 2, \ldots, n$. Wie im Beweis von Satz 7 bemerkt, ist dann $d^{(\lambda)}(N_k) = r_\lambda$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$, d. h. jedes Element von N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ wird durch die Einheitsmatrix dargestellt und das gleiche gilt für jedes Element von $H = N$. Dies widerspricht aber der Annahme $d^{(\lambda)}(H) < r_\lambda$, aus der $d^{(\lambda)}(H) = 0$ folgt.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die Bedingung b) in den Sätzen 1 bis 6 auch dann notwendig ist, wenn nur $(n - 1)$ der Untergruppen H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ Normalteiler von G sind. Die angegebene beweisführung ist jedoch ohne Einführung weiterer Bedingungen nicht verwendbar, um die Notwendigkeit der Bedingung b) der Sätze 3, 4 und 6 zu zeigen, falls die Untergruppen H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ Normalteiler der Untergruppe H sind. Grund dafür ist, daß eine irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G ohne weiteres mehrere verschiedene nichttriviale irreduzible Darstellungen der Untergruppe H enthalten kann. Tatsächlich läßt sich als Gegenbeispiel die alternierende Gruppe von vier Variablen anführen. Es seien H_1 und H_2 die zyklischen Gruppen der Ordnung 2, erzeugt von den Permutationen (12) (34) und (13) (24) beziehungsweise,

und H die abelsche Gruppe vom Typ (2,2), die von beiden Permutationen erzeugt wird. H ist das direkte Produkt seiner Normalteiler H_1 und H_2. Die vier nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen der Gruppe $G = A_4$ haben die Grade $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = 3$. Auf Grund der Gleichung

$$\frac{12}{o(H)} = \sum_{\lambda=1}^{4} r_\lambda d^{(\lambda)}(H) \text{ ergibt sich } d^{(4)}(H) = 0,\ d^{(4)}(H_1) = d^{(4)}(H_2) = 1.$$

Trotzdem enthält die Komplex $H_1 H_2$ jedes Element von H genau einmal, d. h. die nach dem im Lemma verwendeten Prinzip konstruierte Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ ist in H gleichverteilt.

Literatur

[1] *E. Hlawka*, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 2 IV (1955), 33–47.

[2] *G. Helmberg*, A Theorem on Equidistribution in Compact Groups, Pacific Journal of Math., Vol. 8, Nr. 2 (1958), 227–241.

[3] *G. Helmberg*, Generating Sets of Elements in Compact Groups, eingereicht beim Pacific Journal of Math.

Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen

Von

Hans Hornich, Wien

(Eingegangen am 14. Januar 1959)

Der Nachweis einer Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (1) bietet schon bei stetig differenzierbaren Koeffizienten gewisse eigentümliche Schwierigkeiten, wie sie bei dem Existenzbeweis von *Kamke*[1] und dem Beispiel von *Wazewski*[2] deutlich werden. Setzt man die Koeffizienten nur als stetig voraus, so hat *Perron*[3] schon darauf hingewiesen, daß auch in ganz einfachen Fällen Unlösbarkeit vorliegt, sobald man von der Lösungsfunktion stetige Differenzierbarkeit fordert. Aber auch wenn man diese Forderung reduziert und bloß Stetigkeit und die Existenz der entsprechenden Richtungsableitung von der Lösung verlangt, so ist bei nur stetigen Koeffizienten die Lösbarkeit von (1) nicht einmal im Kleinen garantiert, wie das Beispiel von *Hornich*[4] zeigt; hiebei spielen geschlossene Lösungswege der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung (2) eine Rolle.

In dieser Arbeit soll nun ein Existenzbeweis bei linearen partiellen Differentialgleichungen (1) mit stetigen Koeffizienten gegeben werden; es zeigt sich, daß außer dem Verbot von geschlossenen Lösungswegen von (2) noch andere Bedingungen für die Lösbarkeit von (1) wesentlich sind.

I.

Sei G ein beschränktes einfachzusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene und auf G eine gleichmäßig stetige Funktion $\alpha(x, y)$ gegeben.

---

[1] Math. Zeitschr. **41**, S. 56, **42**, 287. **49**, S. 256, Math. Ann. **99**, S. 602, Vgl. ferner u. a. *Plis*, Bull. Acad. Pol. **IV**, S. 126.

[2] Mathematica **8**, S. 103. Math. Zeitschr. **43**, S. 522.

[3] Math. Zeitschr. **27**, S. 550.

[4] Monatsh. f. M. **59**, S. 34, Jb. d. DMV **58**, S. 103.

Wir fragen nach den Bedingungen für die Funktion $\alpha(x, y)$, bzw. für das Vektorfeld $\mathfrak{e} = (\cos \alpha(x, y), \sin \alpha(x, y))$, unter denen die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{e}} = \cos \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{1}$$

für jede in G gleichmäßig stetige Funktion $f(x, y)$ eine Lösung in G hat.

Als Lösung in G von (1) wird dabei jede in G stetige Funktion u verstanden, die in jedem Punkt von G in der durch den Winkel α gegen die x-Achse gegebenen Richtung eine Ableitung hat, die gleich f ist.

Die aufzustellenden Bedingungen beziehen sich naturgemäß auf den Verlauf der Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$d x : d y = \cos \alpha(x, y) : \sin \alpha(x, y) \tag{2}$$

Wir bezeichnen jede stetig differenzierbare Kurve $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s Bogenlänge) in G, welche (2) genügt, als *Lösungskurve* von (2). Weiter heiße eine stetige und rektifizierbare Kurve $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s Bogenlänge) in G ein *Lösungsweg* von (2), wenn die — fast überall in s differenzierbaren — Funktionen $x(s)$, $y(s)$ fast überall in s die Gleichung (2) erfüllen. Haben zwei Intervalle, in denen $x(s)$, $y(s)$ stetig differenzierbar sind, einen Endpunkt gemein, so werden die entsprechenden Lösungskurven am gemeinsamen Endpunkt stetig differenzierbar verlaufen oder dort eine Spitze aufweisen.

Es wird sich auch als notwendig erweisen, die Funktion $\alpha(x, y)$ stetig auf den Rand von G zu erweitern (was wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von α möglich ist) und auch zuzulassen, daß die Lösungswege, außer Endpunkten, auch Punkte auf dem Rand von G haben; wir merken das speziell an, indem wir dann von Lösungswegen auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ sprechen.

Im folgenden werde stets vorausgesetzt:

Es gibt auf G und auch auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ keine geschlossenen Lösungswege.

Diese Voraussetzung ist für die Lösbarkeit von (1) in G notwendig: gibt es einen geschlossenen Lösungsweg C in G, etwa $x(s)$, $y(s)$ $(0 \leq s \leq L)$, so muß für eine Lösung u von (1) gelten:

$$(\mathfrak{C}) \quad \int d u = \int_0^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{e}\, \mathfrak{t}) \left[\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right] d s = \int_0^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{e}\, \mathfrak{t})\, f\, d s = 0$$

wo $\mathfrak{t}$ der Tangentenvektor $(x'(s), y'(s))$ von C, also $(\mathfrak{e}\, \mathfrak{t}) = \pm 1$ ist.

Wählt man nun f gleichmäßig stetig auf G und so, daß $\int_0^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t})\, f\, d\, s \neq 0$ ausfällt, so ist für diese Funktion f die Differentialgleichung (1) unlösbar.

Wir bilden zu jedem Punkt p von G die größte, p enthaltende Teilmenge $L(p)$ von G, so daß man von p aus zu jedem Punkt q von $L(p)$ auf einem Lösungsweg von (2) gelangen kann. Diese durch p bzw. durch jeden ihrer Punkte eindeutig festgelegte Menge heiße der zu p gehörige *Lösungskomplex*, kurz Lösungskomplex von G.

Zwei Lösungskomplexe von G sind entweder identisch oder zueinander fremd. Das Gebiet G ist als Summe von Lösungskomplexen eindeutig darstellbar.

Ein Lösungskomplex ist natürlich stets eine zusammenhängende Menge, i. a. weder in G abgeschlossen noch offen, kann aber offene Teilgebiete von G enthalten.

Wegen des Verbots von geschlossenen Lösungswegen gibt es zwischen zwei Punkten eines Lösungskomplexes L nur einen in L verlaufenden Lösungsweg zwischen diesen Punkten, wobei wir zweimal in verschiedener Richtung durchlaufene Wegstücke stets getilgt denken.

Sind p und q zwei Punkte eines Lösungskomplexes L und ist u eine Lösung von (1) auf G, so ist das Integral über den Lösungsweg C zwischen p und q:

$$(\mathfrak{C}) \int_p^q du = (\mathfrak{C}) \int_p^q (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t}) \left[\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right] d\, s = (\mathfrak{C}) \int_p^q (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t})\, f\, d\, s = \\ = u(q) - u(p). \tag{3}$$

Gibt man also auf einem Punkt p von L den Wert $u(p)$ einer Lösungsfunktion u von (1) vor, so ist damit u auch auf dem ganzen Lösungskomplex eindeutig festgelegt; es bleibt dabei nur die Frage, ob die so auf L bestimmte Funktion dort auch stetig ist. Zuvor untersuchen wir weiter den Aufbau der Lösungskomplexe auf G.

Es gibt in G höchstens abzählbar unendlichviele Lösungskomplexe, die mehr als nur eine Lösungskurve enthalten. Enthält nämlich der Lösungskomplex L außer der Lösungskurve C noch einen Lösungsweg C', der in C etwa im Punkt p einmündet, so gibt es eine von C und C' und einem hinreichend kleinen Kreisstück um den Punkt p begrenzte offene Menge O, so daß alle Lösungskurven durch O auch C oder C' treffen; also gehört dann auch O zu L und L enthält eine offene Menge. Da es aber höchstens abzählbar unendlichviele paarweise fremde offene Mengen in G geben kann, ist der Satz gezeigt.

Wir treffen nun die später durch eine stärkere zu ersetzende Annahme:

Die Länge der Lösungskurven in G sei beschränkt.

Dann läßt sich jede Lösungskurve C nach beiden Richtungen bis an den Rand von G fortsetzen und trennt das Gebiet G in zwei Teilgebiete. Führte die unbeschränkt in G fortgesetzte Lösungskurve C zu keinem Randpunkt von G, so wäre C abgeschlossen und hätte vom Rand von G einen positiven Abstand d. Dann könnte von jedem Punkt von C die Kurve mindestens um einen Bogen der Länge d fortgesetzt werden, und da C keine geschlossenen Teilkurven enthält, wäre C von unendlicher Länge. Also läßt sich jede Lösungskurve beiderseits bis an den Rand fortsetzen und hat, weil es auch auf $\overline{G}$ keine geschlossenen Lösungskurven gibt, zwei verschiedene Randpunkte. Dann wird G durch C in zwei Gebiete zerlegt, die den beiden Ufern von C entsprechen.

Sei Λ eine zusammenhängende Menge von abzählbarvielen Lösungskomplexen aus G. Dann gibt es nur abzählbarviele Lösungskomplexe, die mit dem Rand von Λ[5] Punkte gemeinsam haben.

Nach dem Vorigen brauchen wir nur diejenigen Lösungskomplexe zu berücksichtigen, die nur aus einer Lösungskurve bestehen und nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ enthalten. Jede solche Lösungskurve zerlegt nun G in zwei Teilgebiete, so daß eines dieser Gebiete die Menge Λ enthält. Diese Lösungskurve bestimmt also auch ein zu Λ fremdes Teilgebiet von G. Sind nun C_1 und C_2 zwei verschiedene Lösungskomplexe, die je aus einer Lösungskurve bestehen und die nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ enthalten, und seien G_1 resp. G_2 die von C_1 resp. C_2 bestimmten, zu Λ fremden Teilgebiete von G; dann sind G_1 und G_2 zueinander fremd. Wäre das nicht der Fall, so könnten wir C_1 und C_2 innerhalb $G_1 \cup G_2$ durch einen Polygonzug Π_1 verbinden. Ebenso kann man aber, da C_1 und C_2 Häufungspunkte von Λ enthalten und Λ zusammenhängend ist, C_1 und C_2 durch einen Polygonzug Π_2 verbinden, der in dem Λ enthaltenden Gebiet von $G - C_1 - C_2$ verläuft. Also gibt es auch einen geschlossenen Weg innerhalb G, der sowohl im Innern als im Äußeren Endpunkte von Lösungskurven, also Randpunkte von G enthält, entgegen dem, daß G einfachzusammenhängend ist. — Also gibt es auch nur höchstens abzählbar unendlichviele Lösungskurven, die nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ

[5] Rand von Λ sei die Menge aller Punkte von G, die Häufungspunkte von Λ und von $G - \Lambda$ sind.

enthalten, sonst gäbe es ja mehr als abzählbarviele paarweise fremde Gebiete in G.

Es gibt daher zu jedem Punkt p von G eine größte, aus abzählbarvielen Lösungskomplexen bestehende, p enthaltende zusammenhängende Teilmenge von G; diese heiße die zum Punkt p gehörige *Lösungskomponente*. Eine Lösungskomponente von G ist durch jeden ihrer Punkte eindeutig bestimmt und G ist als Summe von Lösungskomponenten eindeutig darzustellen. Zwei Lösungskomponenten sind entweder identische oder zueinander fremde Mengen.

Nach dem obigen ist die zu p gehörige Lösungskomponente K eine in G *abgeschlossene* Menge.

Enthält K eine nichtleere offene Menge, so gibt es in K auch Lösungskomplexe L_i mit nichtleeren offenen Mengen. Der Rand von K in bezug auf G besteht aus Lösungskurven. Jede solche Lösungskurve zerlegt G in zwei Teilgebiete, deren eines zu K fremd ist.

Enthält K keine offene Menge, so gibt es in K auch keine Lösungskomplexe, die offene Mengen enthalten, also ist jeder Lösungskomplex von K eine Lösungskurve und K reduziert sich gleichfalls auf eine Lösungskurve.

Für den Aufbau einer Lösung von (1) auf G wird sich — außer dem schon verwendeten Verbot von geschlossenen Lösungswegen — für den Verlauf der Lösungen von (2) noch folgende Bedingung als notwendig erweisen:

(B) Besteht die Lösungskomponente K aus den abzählbarvielen Lösungskomplexen $L_n (n = 1, 2, \ldots)$ also $K = \sum_n L_n$, und ist in L_n das Supremum aller Längen der Lösungswege zwischen je zwei Punkten aus L_n gleich σ_n, so konvergiere $\sum_n \sigma_n$, und es sei gleichmäßig für alle K: $\sum_n \sigma_n < \sigma$.

Insbesonders gilt also für die Längen der Lösungswege in einem Lösungskomplex:

(B*) Die Länge der Lösungswege zwischen je zwei Punkten eines Lösungskomplexes von G ist gleichmäßig beschränkt.

Diese Voraussetzung soll ein zu starkes Auseinanderstreben der Lösungskomplexe verhindern. Wir werden später an Beispielen ihre Notwendigkeit für den Existenzsatz zeigen.

Unter dieser Voraussetzung gilt dann das folgende für den Beweis des Existenzsatzes zu verwendende *Lemma*:

Sei $L_1, L_2, \ldots$ eine Folge von — gleichen oder verschiedenen — Lösungskomplexen auf G. Sei ferner p_n ein Punkt von L_n und es konvergiere $p_n \to p_0$, wo p_0 ein Punkt des Lösungskomplexes L_0 sei. Die Funktion u sei auf den Lösungskomplexen L_n und L_0 so bestimmt, daß für je zwei Punkte eines Lösungskomplexes die Relation (3) gelte und daß

$$\lim u(p_n) = u(p_0)$$

sei. Dann gilt für jede konvergente Folge von Punkten $q_1, q_2, \ldots$ mit q_n in L_n und $\lim q_n = q_0$ in L_0 auch

$$\lim u(q_n) = u(q_0).$$

Wir untersuchen zunächst die Aussage des Lemmas in einigen Spezialfällen.

Sind alle L_n identisch $L_1 = L_2 = \ldots = L_0$, und setzt man $p_1 = p_2 = \ldots = p_0$ und $u(p_1) = u(p_2) = \ldots = u(p_0)$, so liefert unser Lemma den Nachweis der Stetigkeit der nach (3) gebildeten Funktion u auf unserm Lösungskomplex, auf dem u für p_0 vorgegeben ist. Liegen die p_n und q_n auf dem Lösungskomplex L_1, p_0 und q_0 aber auf dem Lösungskomplex L_2, so zeigt unser Lemma, daß wir die Funktion u stetig von L_1 auf L_2 fortsetzen können, wenn $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend ist.

Auf dieselbe Art können wir u in endlichviele Lösungskomplexe $L_1, L_2, \ldots, L_n$ fortsetzen, wenn etwa u auf L_1 gegeben ist und $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend ist, ebenso $L_2 \cup L_3$, usf. etwa bis $L_{n-1} \cup L_n$. Dabei ist zu bemerken, daß zwei nicht in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende L_i stets getrennt sind: wäre nämlich $L_1 \cup L_3$ ebenfalls zusammenhängend, so seien C_1, C_2, C_3 drei Lösungskurven aus L_1, L_2, L_3; wir verbinden C_1 mit C_2 in $L_1 \cup L_2$ durch eine Kurve γ_3, C_2 mit C_3 in $L_2 \cup L_3$ durch eine Kurve γ_1 und C_3 mit C_1 in $L_3 \cup L_1$ durch eine Kurve γ_2. Dann ist $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (ev. mit gewissen Teilbogen aus C_1, C_2, C_3) eine geschlossene Kurve k in G. Das Innere von k liegt in der Summe $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Es gibt dann im Innern von k oder auf k einen Punkt p, der in dem Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen $\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2 \cap \overline{L}_3$ liegt[6]. Gehört p etwa zu L_1, so legen wir eine Lösungskurve C_1' durch p; nun ist p Häufungspunkt von L_2 und von L_3, also auch von Lösungskurven C_2' und C_3', die zu L_2 und zu L_3 gehören. Dies ist ersichtlich aber unmöglich, da jede Lösungskurve ja das Gebiet G trennt.

---

[6] Zum Beweis vgl. etwa *Hornich*, Anz. d. Wiener Akad. **66**, S. 212.

Beweis des Lemmas: Sei C_n der Lösungsweg zwischen p_n und q_n auf L_n und C_0 der Lösungsweg zwischen p_0 und q_0 auf L_0. Zunächst sei $p_0 \neq q_0$. C_n bzw. C_0 sei dargestellt durch

$$x = x_n(t),\ y = y_n(t),\ \text{bzw.}\ x = x_0(t),\ y = y_0(t) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

wobei der Parameter t jeweils bis auf einen konstanten Faktor die von p_n, bzw. p_0 an gezählte Bogenlänge sei. Wegen der Beschränktheit der Längen von C_n und C_0 (Voraussetzung B*) sind die Funktionen $x_n(t)$, $y_n(t)$ gleichmäßig stetig für alle n und $0 \leq t \leq 1$. Wir können nun eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ so auswählen, daß etwa für alle rationalen t

$$x_{n_k}(t) \to x(t) \text{ und } y_{n_k}(t) \to y(t)$$

konvergiert; die $x_{n_k}(t)$ und $y_{n_k}(t)$ konvergieren dann auch für alle $0 \leq t \leq 1$, u. z. gleichmäßig und die Grenzfunktionen $x(t)$, $y(t)$ sind stetig; die Grenzkurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ ist wieder rektifizierbar. Die Grenzkurve braucht nicht in G zu liegen, liegt aber stets in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$. Die Funktionen genügen fast überall der Differentialgleichung (2). Die Grenzkurve ist daher ein Lösungsweg in $\overline{G}$ zwischen den Punkten p_0 und q_0. Da ein solcher aber eindeutig auch in $\overline{G}$ festgelegt ist, ist diese Grenzkurve C mit C_0 ev. bis auf zweifach in verschiedener Richtung durchlaufene Stücke eines Lösungsweges identisch. Sieht man von solchen für unser Problem unwesentlichen Wegstücken ab, so konvergieren alle C_n gegen C_0 und es ist für unsere Funktion u:

$$\lim (C_n) \int_{p_n}^{q_n} du = \lim (C_n) \int_{p_n}^{q_n} (\mathrm{e}\ \mathrm{t})\, f\, ds = (C_0) \int_{p_0}^{q_0} (\mathrm{e}\ \mathrm{t})\, f\, ds = (C_0) \int_{p_0}^{q_0} du$$

also

$$\lim (u(q_n) - u(p_n)) = u(q_0) - u(p_0)$$

und

$$\lim u(q_n) = u(q_0).$$

Endlich kann in unserem Lemma auch $p_0 = q_0$ genommen werden: wir brauchen nur eine weitere Punktfolge mit einem Grenzpunkt $\neq p_0$ in L_0 heranzuziehen und das eben gezeigte Lemma zweimal anzuwenden.

Sei p ein Punkt von G und L der p enthaltende Lösungskomplex. Wir wählen u an der Stelle p willkürlich und bestimmen u nach (3) in L. Nach dem Lemma ist dann u auf L stetig. Ferner ist nach dem Lemma u auch in den ev. vorhandenen Häufungspunkten von L in

G, die nicht in L liegen, bestimmt. Es ist daher u auch in den Lösungskomplexen, die solche Häufungspunkte enthalten, gegeben und ferner auch in jedem Lösungskomplex, von dem ein Häufungspunkt in L liegt. Endlich ist in jeder zusammenhängenden Vereinigungsmenge von endlichvielen Lösungskomplexen $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$, die den Punkt p enthält, die Funktion u eindeutig und stetig festgelegt, sobald u im Punkt p gegeben ist.

Nun enthält die zu p gehörige Lösungskomponente K u. U. unendlichviele Lösungskomplexe (vgl. Beispiel c), etwa $K = \sum_{i=1}^{\infty} L_i$. Nach unserer Voraussetzung B strebt das Supremum s_i der Länge aller Lösungswege in L_i mit $i \to \infty$ gegen Null. Für hinreichend große i gibt es in L_i daher nur beliebig kurze Lösungskurven C_i; jede solche Kurve trennt das Gebiet G.

Sei nun $(p_1, p_2, \ldots)$ eine konvergente Punktfolge aus K und es liege p_i in L_{n_i}. Dann ist $p_0 = \lim p_i$ sicher nicht ein Punkt von G, wenn $\lim n_i = +\infty$ ist. Liegt nämlich p_i auf der Lösungskurve C_{n_i} von L_{n_i}, so ist diese von einer Länge $< s_{n_i}$, also von beliebig kleiner Länge für hinreichend große n_i. Dann gibt es in beliebiger Nähe von p_0 auch Randpunkte von G und weil der Rand von G abgeschlossen ist, gehört p_0 als Limes der p_i zum Rand von G, also nicht zu G.

Um die Stetigkeit von u in der Lösungskomponente K zu zeigen, brauchen wir daher nur die konvergenten Punktfolgen $(p_1, p_2, \ldots)$ mit p_i in L_{n_i} mit beschränkten n_i zu betrachten; für die Vereinigungsmengen $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ endlichvieler L_i ist aber die Stetigkeit von u nach dem Lemma gegeben.

Es bleibt noch die Lösung für das ganze Gebiet G zu bestimmen. Dazu zeigen wir das folgende erweiterte Lemma:

Sei $K_1, K_2, \ldots$ eine Folge von paarweise verschiedenen Lösungskomponenten und p_n ein Punkt von K_n, so daß $p_n \to p_0$, wobei p_0 der Lösungskomponente K_0 angehöre. Seien ferner die Werte $u(p_n)$ so gewählt, daß $u(p_n) \to u(p_0)$ konvergiere. Die dadurch in den K_n und in K_0 bestimmten Werte von u sind dann so beschaffen, daß für jede konvergente Folge von Punkten $q_1, q_2, \ldots$ mit q_n in K_n und $q_n \to q_0$, q_0 in K_0, die Werte $u(q_n) \to u(q_0)$ konvergieren.

Gehören p_n und q_n, sowie p_0 und q_0 innerhalb der Mengen K_n und K_0 stets zu demselben Lösungskomplex, so erhalten wir unser früheres Lemma.

Wir stellen die Komponenten K als Summen ihrer Lösungskomplexe dar:

$$K_n = \sum_m L_{nm} \qquad K_0 = \sum_m L_{0m}$$

Dabei denken wir uns die L_{nm} und L_{0m} so numeriert, daß p_0 in L_{00}, p_n in L_{n0}, q_0 in L_{0k_0} und q_n in L_{nk_n} liegt; weiter seien für jedes n die Vereinigungsmengen $L_{nr-1} \cup L_{nr}$ $(r = 1, \ldots, k_n)$ und ebenso die Mengen $L_{0r-1} \cup L_{0r}$ $(r = 1, \ldots, k_0)$ zusammenhängende Mengen.

Seien nun L_1, L_2 zwei Lösungskomplexe, p ein Punkt in L_1, q in L_2. Ferner sei $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend; dann gibt es etwa in L_1 eine Punktfolge $r_1\ r_2\ \ldots$ die gegen einen Punkt r_0 in L_2 konvergiert. Wir können dann p mit r_n durch einen Lösungsweg C_n in L_1 verbinden und genau wie im Beweis unseres Lemmas folgt die Existenz einer stetigen rektifizierbaren Grenzkurve $x = x(t)$ $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ zwischen p und r_0 die fast überall der Differentialgleichung (2) genügt und in der abgeschlossenen Hülle von L_1 also auch in $\overline{G}$ verläuft. Da weiter r_0 und q in L_2 durch einen Lösungsweg in L_2 verbunden werden können, gibt es auch einen in $\overline{G}$ verlaufenden Lösungsweg zwischen p und q. Seine Länge ist $\leq \sigma_1 + \sigma_2$, wo σ_1, σ_2 die oberen Schranken der Längen der Lösungswege in L_1, L_2 sind.

Ist nun σ_{nm} das Supremum der Längen der Lösungswege in L_{nm}, so ist nach der Voraussetzung B die Summe $\sum_m \sigma_{nm}$ gleichmäßig für alle n beschränkt, etwa $\leq \sigma$. Wir können also für jedes n die Punkte p_n und q_n durch einen in $\overline{G}$ verlaufenden Lösungsweg W_n mit einer Länge $\leq \sigma$ verbinden. Wieder wie im Beweis unseres Lemmas gibt es dann eine stetige rektifizierbare Grenzkurve W dieser W_n, etwa $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ zwischen p_0 und q_0 von einer Länge $\leq \sigma$, die fast überall der Differentialgleichung (2) genügt und mit dem in der abgeschlossenen Hülle von K_0 zwischen p_0 und q_0 zu bildenden Lösungsweg übereinstimmt. Es gilt dann:

$$u(q_0) - u(p_0) = (W) \int_{p_0}^{q_0} du = \lim\,(W_n) \int_{p_n}^{q_n} du = \lim\,(u(q_n) - u(p_n))$$

und daher auch

$$u(q_0) = \lim u(q_n).$$

Auf Grund des damit gezeigten erweiterten Lemmas können wir nun Lösungsfunktionen u von (1) in G konstruieren und auch gleich feststellen, inwieweit wir die Funktionen u willkürlich angeben können.

Seien K', K'' zwei verschiedene Lösungskomponenten; wir verbinden die Punkte p' auf K' und p'' auf K'' durch einen Polygonzug Π in G. Sind q', q'' Punkte von Π, die derselben Lösungskomponente angehören, so denken wir uns das offene Intervall zwischen q' und q'' von Π getilgt. In der schließlich verbleibenden Menge Π' gehören je zwei verschiedene Punkte auch zu verschiedenen Lösungskomponenten, außer den Endpunkten q_n', q_n'' der getilgten Intervalle. Wir wählen nun $u(q_1')$, dann ist auch $u(q_1'')$ bestimmt; sodann $u(q_2')$, wodurch auch $u(q_2'')$ bestimmt ist usw.; dabei wählen wir die $u(q_n')$ so, daß sie auf der Menge der q_n' und deren Häufungspunkte stetig sind. Ist nun q ein Häufungspunkt von Punkten q_n'', $q = \lim q_{n_k}''$, so ist auch $q = \lim q_{n_k}'$. Nach unserer Konstruktion ist aber $u(q) = \lim u(q_{n_k}')$, also nach unserm Lemma auch $= \lim u(q_{n_k}'')$ und u auch für die Menge der q_n'' und deren Häufungspunkte stetig. Setzen wir u auf den verbliebenen Intervallen von Π' noch stetig fest, so ist nach unserm Lemma u für alle Lösungskomponenten zwischen K' und K'' stetig erklärt. Die Iteration des Verfahrens liefert schließlich für ganz G eine Lösungsfunktion u.

Die Analogie mit dem klassischen Cauchyschen Problem bei stetig differenzierbaren Koeffizienten in (1) ist deutlich: an Stelle der Lösungskurven treten hier die Lösungskomponenten K, für die der Wert an je einer Stelle vorgegeben werden kann.

Wir formulieren zusammenfassend den hier gezeigten *Existenzsatz*: *Sei G ein beschränktes einfachzusammenhängendes Gebiet. In G sei $a(x, y)$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Ferner gelte für die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung* (2):

A. es gibt auf G und auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$ keine geschlossenen Lösungswege von (2);

B. besteht die Lösungskomponente K aus den abzählbarvielen Lösungskomplexen L_n, so konvergiert die Summe der Suprema σ_n der Längen aller Lösungswege zwischen zwei Punkten aus L_n $\sum_n \sigma_n \leq \sigma$ und ist gleichmäßig beschränkt für alle K.

Dann hat die partielle Differentialgleichung (1) *für jede in G gleichmäßig stetige Funktion f eine Lösung in G. Man kann dabei für eine in G dichtliegende Menge von Lösungskomponenten die Werte von u an je einer Stelle dieser Lösungskomponenten in der angegebenen Weise willkürlich vorgeben.*

Die homogene Differentialgleichung

$$\cos \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hat eine nichttriviale (nichtkonstante) Lösung dann und nur dann, wenn mehr als nur eine Lösungskomponente in G existiert.

II.

Wir zeigen noch, daß die angegebenen Bedingungen für die Lösbarkeit von (1) auch notwendig sind. Sieht man von der sicher notwendigen Bedingung ab, daß keine geschlossenen Lösungswege in G existieren sollen, so geben wir zu der Bedingung, daß G einfachzusammenhängend sei, sowie zu der Bedingung (B) bzw. der schwächeren Bedingung (B*) unseres Existenzsatzes drei Beispiele, in denen die Differentialgleichung (1) unlösbar ist. In allen Beispielen gibt es keine geschlossenen Lösungswege von (2) in G.

Beispiel a

Sei

$$g(x) = \exp\left[-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right].$$

G sei das offene Quadrat $|x| < 2$, $|y| < 2$, aus dem die abgeschlossene Menge K:

$$|x| \leq 1, \ |y| \leq g(x)$$

herausgenommen sei.

Auf G betrachten wir die Kurvenschar

$$\begin{aligned} y &= C \text{ für } |x| \geq 1 \\ &= C + g(x) \text{ für } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

für alle $C > 0$, soweit natürlich diese Kurven innerhalb G liegen; analog ferner

$$\begin{aligned} y &= C \text{ für } |x| \geq 1 \\ &= C - g(x) \text{ für } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

für alle $C < 0$ und endlich die geraden Strecken

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad -2 < x < -1 \\ y &= 0, \quad 1 < x < 2. \end{aligned}$$

Durch jeden Punkt von G geht genau eine der angegebenen Kurven und wir bestimmen die Funktion $\alpha(x, y)$ auf G so, daß α den Richtungswinkel der durch den Punkt (x, y) gehenden Kurve gibt. Dabei sei

$|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gewählt. Es ist α in G gleichmäßig stetig und sogar beliebig oft differenzierbar. Die oben angegebenen Kurven auf G sind jeweils sowohl Lösungskomplexe als Lösungskomponenten, es gibt keine geschlossenen Lösungskurven in G, wohl aber in $\overline{G}$ und die Bedingung B unseres Existenzsatzes ist erfüllt. G ist nicht einfachzusammenhängend.

Wir setzen $f = y$ und zeigen, daß dann die Differentialgleichung (1) unlösbar ist. Wäre u eine Lösung von (1) in G so können wir o. B. d. A. etwa $u(-\frac{3}{2}, 0) = 0$ annehmen. Sei nun (ε_n) eine Folge von Zahlen $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ und seien $P_n(-\frac{3}{2}, \varepsilon_n)$ und $Q_n(\frac{3}{2}, \varepsilon_n)$ zwei Punkte, die also auf derselben Lösungskurve C_n von (2) liegen. Dann ist

$$u(\tfrac{3}{2}, \varepsilon_n) - u(-\tfrac{3}{2}, \varepsilon_n) = (C_n) \int_{P_n}^{Q_n} [\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial y}]\, d s =$$

$$= (C_n) \int_{P_n}^{Q_n} y\, d s > \int_{-1}^{+1} g(x)\, d x > 0.$$

Andererseits liefert die durch die Punkte $\overline{P}_n(-\frac{3}{2}, -\varepsilon_n)$ und $\overline{Q}_n(+\frac{3}{2}, -\varepsilon_n)$ gehende Lösungskurve $\overline{C}_n$ von (2):

$$u(\tfrac{3}{2}, -\varepsilon_n) - u(-\tfrac{3}{2}, -\varepsilon_n) = (\overline{C}_n) \int_{\overline{P}_n}^{\overline{Q}_n} [\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x}]\, d s =$$

$$= (\overline{C}_n) \int_{\overline{P}_n}^{Q_n} y\, d s < -\int_{-1}^{+1} g(x)\, d x < 0$$

was zur Stetigkeit von u in $(-\frac{3}{2}, 0)$ und $(\frac{3}{2}, 0)$ sofort einen Widerspruch gibt.

Beispiel b

Sei $A_0 = 0$, $A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2}$ und $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$. Wir bilden für jedes ganze $n \geq 0$ die Schar der Kurven $S'_n(\lambda)$:

$$y = 2A_n + \frac{\lambda}{(n+1)^2} \sin^2 x,\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 1)$$

ferner die Kurven $T_n(\lambda)$:

$$y = 2A_n + \frac{1}{(n+1)^2} \sin^2 x + \frac{\lambda}{(n+1)^2} \cos^2 x\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 2)$$

und endlich die Kurven $S''(\lambda)$

$$y = 2A_n + \frac{1}{(n+1)^2}(1+\cos^2 x) + \frac{\lambda}{(n+1)^2} \sin^2 x\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 1).$$

Die von allen diesen Kurven mit $n = 0, 1, \ldots$ überdeckte Menge (wir lassen nur diese gerade Strecke $S_0(0)$ fort) sei M; ferner sei G das Gebiet

$$|x| < \pi, \quad 0 < y < 2A + 1.$$

Wir bestimmen die Funktion $\alpha(x, y)$ auf M so, daß α den Richtungswinkel der Kurve S'_n, S''_n bzw. T_n, die durch den Punkt (x, y) geht, liefert, wobei $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gewählt werde; auf den Punkten von $G - M$ werde $\alpha = 0$ gesetzt. Die Kurven S'_n, S''_n, T_n, bzw. die Strecken $y = \text{const.}$ auf $G - M$ sind dann die Lösungskurven der Differentialgleichung (2). Man sieht sofort, daß α in G gleichmäßig stetig ist.

Alle Kurven $S'_n(\lambda)$ münden in den Punkt $(0, 2A_n)$ und alle Kurven $T_n(\lambda)$ münden in den Punkt $(\frac{\pi}{2},\ 2A_n + \frac{1}{(n+1)^2})$. Ferner ist die Kurve $S'_n(1) = T_n(0)$. Also bildet die Vereinigungsmenge aller Kurven S'_n $(n > 0)$, S''_n $(n \geq 0)$, T_n $(n \geq 0)$ mit ihren geradlinigen Fortsetzungen $y = \text{const.}$ auf $G - M$ einen Lösungskomplex L. Jede Kurve S_0' $(\lambda > 0)$ mit ihrer geradlinigen Fortsetzung für $x > \frac{\pi}{2}$ bildet für sich einen Lösungskomplex und eine Lösungskomponente. Die geraden Strecken $|x| < \pi$, $y = c$ mit $2A \leq c \leq 2A + 1$ bilden die weiteren Lösungskomplexe L_c von G. Es ist weiter $L \cup L_{2A} = K_0$ eine Lösungskomponente, jeder Lösungskomplex $L_c (c > 2A)$ ist ebenfalls Lösungskomponente.

Es ist also schon in dem Lösungskomplex L die Länge der Lösungswege unbeschränkt und daher die Bedingung (B) des Existenzsatzes, ja sogar die schwächere Bedingung (B*) nicht erfüllt.

Wir definieren eine Funktion f u. z. sei für

$$2\,A_n \leq y \leq 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2\,A_n)\,(n+1)^2\,\pi\right]$$

und für

$$2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq y \leq 2\,A_{n+1}$$

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2\,A_n - \frac{1}{(n+1)^2})\,(n+1)^2\,\pi + \pi\right],$$

während für $y \geq 2\,A$ die Funktion $f = 0$ sei. Es ist dann f auf G gleichmäßig stetig und wir zeigen, daß für diese Funktion die Differentialgleichung (1) unlösbar ist.

Eine Lösung u wäre auf jeder der geraden Strecken

$$y = 2\,A_n \text{ und } y = 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

konstant, etwa $u = k_n$ für $y = 2\,A_n$.

Nun ist

$$k_{n+1} - k_n = (S'_n(1)) \int f\,ds - (T_n(2)) \int f\,ds.$$

Es ist $f \geq 0$ für $S_n(1)$ und $f \leq 0$ für $T_n(2)$, u. z. ist für $S_n(1)$

$$f = \frac{1}{n} \sin(\pi \sin^2 x)$$

und für $T_n(2)$

$$f = \frac{1}{n} \sin(\pi \cos^2 x + \pi).$$

Beschränkt man sich auf das Intervall

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\,\pi}{6},$$

so ist dort stets $|f| \geq \frac{1}{n\sqrt{2}}$ und daher

$$k_{n+1} - k_n \geq \frac{\pi}{3\sqrt{2}\,n}$$

Also divergiert $k_n \to \infty$ und es ist u notwendig für $y = 2\,A$ unstetig.

Beispiel c

Mit den Bezeichnungen A_n und A wie oben bilden wir für jedes natürliche n die Schar der Kurven: $S_n(\lambda)$

$$y = 2A_n - \frac{1}{n^2} + \frac{\lambda}{n^2}\cos^2\frac{x}{\lambda} \text{ mit } -\frac{\pi}{2}\,|\,\lambda\,| \leq x \leq 0$$

für alle $0 < |\,\lambda\,| < 1$, sowie die gerade Strecke $S_n(0)$

$$y = 2A_n - \frac{1}{n^2} \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0.$$

Die von dieser Schar überdeckte Menge sei M_n. Ferner sei Q das Rechteck

$$0 < x < 1$$
$$0 < y < 2A + 1.$$

Dann ist $Q + \sum_1^\infty M_n = G$ eine offene Menge. Die Funktion $\alpha(x_1, x_2)$ auf G werde so bestimmt, daß α in M_n den Richtungswinkel der Kurvenschar $S_n(\lambda)$ liefert, wobei $|\,\alpha\,| < \frac{\pi}{2}$ gewählt werde; auf Q sei $\alpha = 0$. Die Kurven $S_n(\lambda)$ bzw. die Strecken $y = \text{const}$ auf Q sind also die Lösungskurven der Differentialgleichung (2). Man bestätigt, daß α in G gleichmäßig stetig ist.

Da alle Kurven von $S_n(\lambda)$ auf der geraden Strecke $S_n(0)$ münden, bilden diese mit ihren geradlinigen Fortsetzungen $y = \text{const.}$ auf Q jeweils einen Lösungskomplex L_n. Ferner ist jede gerade Strecke in Q

$$y = 2A_n;\ 0 < x < 1$$

für sich wieder ein Lösungskomplex (eine Lösungskurve), den wir etwa mit L'_n bezeichnen. Alle geraden Strecken $0 < x < 1$, $y = c$ mit $2A \leq c < 2A + 1$ sind ebenfalls Lösungskomplexe, wir bezeichnen diese etwa mit L''_c.

Die in G abgeschlossene Vereinigungsmenge $\sum_{n=1}^\infty L_n \cup \sum_{n=1}^\infty L'_n \cup L''_{2A}$ bildet eine Lösungskomponente K. Jedes L''_c mit $c > 2A$ ist gleichfalls Lösungskomponente.

Ersichtlich sind zwar alle Lösungswege in G von beschränkter Länge, aber die Bedingung B ist für K nicht erfüllt.

Wir setzen nun für

$$2A_{n-1} \leq y \leq 2A_n$$

die Funktion

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2A_{n-1})\, n^2 \pi\right],$$

während für $y \geq 2A$ die Funktion $f = 0$ gesetzt werde. f ist auf G gleichmäßig stetig.

Wir zeigen, daß für diese Funktion f die Differentialgleichung (1) in G unlösbar ist.

Zunächst wäre die Lösung u auf jeder der geraden Strecken in G

$$y = 2A_n$$

konstant, etwa $= k_n$. Nun ist

$$k_n - k_{n-1} = \lim_{\lambda \to 1} \left[(S_n(\lambda) \int f\, ds - (S_n(-\lambda)) \int f\, ds\right].$$

Es ist $f \geq 0$ für $S_n(\lambda)$ und $f \leq 0$ für $S_n(-\lambda)$ bei $\lambda > 0$.

Beschränken wir uns auf das Intervall $-\frac{2\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$, so strebt dort für $S_n(\lambda)$ und $S_n(-\lambda)$ für $\lambda \to 1$ der absolute Betrag $|f|$ gegen Werte $\geq \frac{1}{n\sqrt{2}}$ und daher ist

$$k_n - k_{n-1} \geq \frac{\pi}{3\sqrt{2}\, n}.$$

Also divergiert $k_n \to \infty$ und es ist u für $0 < x < 1$ und $y \to 2A$ unstetig.

Kummer's Congruences (mod 2^r)

By

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

(Received January 26, 1959)

1. Put

$$\frac{2\,e^{xt}}{e^t+1}=\sum_0^\infty E_n(x)\,\frac{t^n}{n!},\quad E_n=2^n\,E_n\,(1/2) \tag{1.1}$$

so that $E_n(x)$ is the Euler polynomial of degree n and E_n is the Euler number in the even suffix notation. It is well-known that E_n satisfies

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}E_{n+sw}\equiv 0 \pmod{(p^n,\,p^{rc})}, \tag{1.2}$$

where p is an odd prime and w is a positive integer such that

$$p^{c-1}(p-1)\mid w.$$

For $p=2$, as *Nielsen* points out in his book [3, p. 274], the method of proof no longer applies. Moreover the work of *Stern* [5], which is reproduced by *Bachmann* [1, p. 37], is based on a quastionable use of divergent series, as noted by *Frobenius* [2, p. 845]. *Frobenius* has, however, stated the following result:

If a, b, r are integers, $a\geq 0$, $b>0$, $r>0$, then the power of 2 dividing the number

$$E^{2a}(1-E^{2b})^r \tag{1.3}$$

is the same as the power of 2 dividing the number

$$(2\,b)^r\,.\,r! \tag{1.4}$$

We shall sketch a proof of *Frobenius'* result. It is convenient to use the notation of *Nörlund* [4, Ch. 2].

In particular if

$$C_n=2^n\,E_n(0),$$

then

$$E^n=(C+1)^n,\quad C^n=(E-1)^n, \tag{1.5}$$

$$C_{n-1} = 2^n(1 - 2^n)\frac{B_n}{n}, \tag{1.6}$$

where B_n is the Bernoulli number defined by

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_0^\infty B_n \frac{t^n}{n!}.$$

If $f(x)$ is an arbitrary polynomial, it follows from (1.6) that

$$f'(C) = f(2\,B) - f(4\,B). \tag{1.7}$$

In particular

$$n(C + 1)^{n-1} = (2\,B + 1)^n - (4\,B + 1)^n.$$

Since $(2\,B + 1)^n = 0$ for n odd, we get

$$f'(E) = -f(4\,B + 1), \tag{1.8}$$

where now $f(x)$ is odd.

In (1.8) take

$$f(x) = x^{2a+1}(1 - x^{2b})^r.$$

Then since

$$(4\,B + 1)^{2b} - 1 = \sum_{j=1}^{2b} \binom{2b}{j} (4\,B)^j,$$

it follows easily that

$$f(4\,B + 1) \equiv 0 \pmod{2^{re+r}}, \tag{1.9}$$

where 2^e is the highest power of 2 dividing $2\,b$.

As for the left member of (1.8), we have

$$f'(E) = (2\,a + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r - 2\,r\,b\,E^{2a+2b}\,(1 - E^{2b})^{r-1}.$$

Thus, using (1.9)

$$(2\,a + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r \equiv 2\,r\,b\,E^{2a+2b}(1 - E^{2b})^{r-1} \pmod{2^{re+r}}.$$

Repeated application of this congruence leads to

$$(2\,a + 1)(2\,a + 2\,b + 1) \ldots (2\,a + 2(r - 1)\,b + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r \equiv$$
$$\equiv (2\,b)^r\,r! \pmod{2^{re+r}}. \tag{1.10}$$

Since $2^r \nmid r!$, it is clear that (1.10) contains the result of Frobenius cited above. We may state

Theorem 1. *Let* $2^e \mid 2\,b$, $2^{e+1} \nmid 2\,b$, *Then for* $a \geq 0$, $r \geq 0$, (1.10) *holds. In particular the power of* 2 *dividing* $E^{2a}(1 - E^{2b})^r$ *is the same as the power of* 2 *dividing* $(2\,b)^r\,r!$

2. To find congruences for the Bernoulli numbers we recall the explicit formula

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^n. \tag{2.1}$$

This yields

$$B^{2a}(1 - B^{2b})^r = \sum_k \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r = S_1 + S_2,$$

where

$$S_1 = \sum_{k<2^t-1} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (1-)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r,$$

$$S_2 = \sum_{k\geq 2^t-1} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r;$$

t will be chosen later. Let $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$, so that

$$s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{(2^{2a}, 2^{(e+2)r})};$$

thus

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{(2^{2a}, 2^{(e+2)r})}. \tag{2.2}$$

On the other hand we have also

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{k!} \tag{2.3}$$

We apply (2.2) to S_1 and (2.3) to S_2. It follows first that

$$S_1 \equiv 0 \pmod{(2^{2a-t+1}, 2^{(e+2)r-t+1})} \tag{2.4}$$

As for S_2, consider the quotient $k!/(k+1)$. Now for $k = 2^t - 1$, we get 2^z, where

$$z = (2^t - t - 1) - t = 2^t - 2t - 1. \tag{2.5}$$

This is indeed the minimum exponent (for $t \geq 2$). Consequently

$$S_2 \equiv 0 \pmod{2^z}, \tag{2.6}$$

where z is defined by (2.5).

To simplify the discussion we assume $2a \geq (e+2)r$, so that (2.4) reduces to

$$S_1 \equiv 0 \pmod{2^{(e+2)r-t+1}}.$$

If we pick t to satisfy

$$2^t \leq (e+2)r + 2 < 2^{t+1}, \tag{2.7}$$

then certainly

$$z = 2^t - 2t - 1 < (e+2)r - t + 1$$

and it follows that

$$B^{2a}(1 - B^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^z}. \tag{2.8}$$

We have proved

Theorem 2. *Let* $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ *and suppose that* $2a \geq (e+2)r > 2$. *Define the integer* t *by means of* (2.7). *Then if* $t \geq 3$, (2.8) *holds with* $z = 2^t - 2t - 1$. *For* $t = 2$, (2.8) *holds with* $z = 1$.

The last sentence of the theorem is a consequence of the congruence

$$2B_{2a} \equiv 1 \pmod 4 \qquad (a \geq 1), \tag{2.9}$$

since this implies

$$2B^{2a}(1 - B^{2b})^r \equiv \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \equiv 0 \pmod 4$$

for all $a, r \geq 1$.

Presumably (2.8) is sharp when t is large. As an example of (2.8), take $r = 1$, $2b = 2^e$; also assume for simplicity that $e + 4 = 2^t$. Then $z = 2^t - 2t - 1$ and (2.8) reduces to

$$B_{2a} \equiv B_{2a+2b} \pmod{2^z} \qquad (2a \geq e + 2).$$

3. It is clear from (1.6) that the number C_{2a-1} is exactly divisible by 2^{2a-k-1}, where $2^k \mid 2a$, $2^{k+1} \nmid 2a$. Consider the number

$$C'_{2a-1} = 2^{2-2a} a C_{2a-1} = 2(1 - 2^{2a}) B_{2a}, \tag{3.1}$$

which is evidently an odd integer. Indeed it follows from (2.9) that

$$C'_{2a-1} \equiv 1 \pmod 4. \tag{3.2}$$

We get, using (3.1),

$$C'^{2a-1}(1 - C'^{2b})^r = 2B^{2a}(1 - B^{2b})^r - 2^{1+2a} B^{2a}(1 - 2^{2b} B^{2b})^r.$$

Since

$$2^{1+2a} B^{2a}(1 - 2^{2b} B^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{2a}},$$

we may apply Theorem 2 to get the following.

Theorem 3. *With the notation of Theorem 2, we have*

$$C'^{2a-1}(1 - C'^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{z+1}}. \tag{3.2}$$

4. The numbers [4, p. 28]

$$D_n = (2B + 1)^n = (2 - 2^n) B_n \tag{4.1}$$

vanish for n odd, while for n even both numerator and denominator are odd. Moreover by (2.8) we have

$$D_{2a} \equiv 1 \pmod 4, \tag{4.2}$$

which holds for all $a \geq 0$. Thus it is obvious that

$$D^{2a}(1 - D^{2b})^r \equiv 0 \pmod 4 \quad (r \geq 1).$$

This can easily be improved by using the first of (4.1); indeed it follows from

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = (2B+1)^{2a}\{1-(2B+1)^{2b}\}^r$$
$$= (2B+1)^{2a}\{-2b(2B)-\binom{2b}{2}(2B)^2+\dots\}^r$$

that

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{re+r-1}}, \tag{4.3}$$

where $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ and $a \geq 0$.

To further improve (4.3), we note that (4.1) implies

$$D^2 = 1 + 4B(B+1),$$

so that

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = (1+4B(B+1))^a\{1-(1+4B(B+1))^b\}^r$$
$$= -(1+4B(B+1))^a\{\sum_{j=1}^{b}\binom{b}{j}4^jB^j(B+1)^j\}^r.$$

This yields

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = 2^{re+r}\sum_{j=r}^{R}A_jB^j(B+1)^j, \tag{4.4}$$

where the A_j are integers and R is a certain integer whose precise value is immaterial. Note incidentally that

$$4^rB^r(B+1)^r = (D^2-1)^r. \tag{4.5}$$

We now again use (2.1) to get

$$B^n(B+1)^n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}s^n(s+1)^n \tag{4.6}$$
$$= 2^n\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}(\tfrac{1}{2}s(s-1))^n.$$

Evidently the highest power of 2 occuring in the denominator of the extreme right member of (4.6) is $2^{e'}$, where

$$2^{e'} \leq 2n < 2^{e'+1}.$$

Therefore

$$B^n(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^{e'+1}}. \tag{4.7}$$

We can refine (4.7) somewhat. For even $n > 2$, we have

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}(\tfrac{1}{2}s(s-1))^n \equiv \sum_{s\equiv 1,2 \pmod 4}(-1)^s\binom{k}{s} \pmod 8.$$

A little computation leads to

$$\sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} \equiv 0 \pmod 8$$

for $k \equiv 3 \pmod 4$. For $k \equiv 1 \pmod 4$; $k+1$ is divisible only by 2; even k may of course be ignored. Hence it follows that the denominator of

$$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (\tfrac{1}{2} s(s+1))^n$$

is divisible by at most

$$2^{\max(1, e'-3)}. \tag{4.8}$$

When n is odd and ≥ 3, we have

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (\tfrac{1}{2} s(s+1))^n \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} s(s+1) \pmod 8.$$

As above it can be verified that

$$\tfrac{1}{2} \sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} s(s+1) \equiv 0 \pmod 8$$

for $k \equiv 7 \pmod 8$. Thus we find that (4.8) applies for n odd also. Consequently in place of (4.7) we have

$$B^n(B+1)^n \equiv 0 \pmod{(2^{n-1}, 2^{n-e'+3})} \tag{4.9}$$

Since the exponent $n - e'$ is a non-decreasing function of n, it follows from (4.4) and (4,9) that

$$D^{2a}(1 - D^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{re+r+\min(r-1,\, r-r'+3)}}. \tag{4.10}$$

Where r' is defined by

$$2^{r'} \leq 2r < 2^{r'+1}. \tag{4.11}$$

This completes the proof of

Theorem 4. *Let* $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ *and define* r' *by means of* (4.11). *Then* D_n *satisfies* (4.10) *for all* $a \geq 1$, $r \geq 1$.

The congruences (4.7) and (4.9) may be compared with (2.8). Exactly as in the proof of (4.7) we can show that

$$B^a(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^{n-e'}} \qquad (a \geq n) \tag{4.12}$$

where now

$$2^{e'} \leq a + n < 2^{e'+1}$$

If a is comparitively large, we can improve (4.10) pretty much as in the proof of Theorem 2. We find that

$$B^a(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^z} \quad (a \geq n), \tag{4.13}$$

where

$$z = 2^t - 2t - 1, \quad 2^t \leq n + 2.$$

References

1. *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie vol. 2, Leipzig, 1910.
2. *G. Frobenius*, Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (1910), pp. 809—847.
3. *N. Nielsen*, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923.
4. *N. E. Nörlund*, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924.
5. *M. A. Stern*, Zur Theorie der Eulerschen Zahlen, J. reine angew. Math., vol. 79 (1875), pp. 67—98.

Duke University.

Buchbesprechungen

Mathematische Werke. Von *E. Hecke.* (Herausgegeben im Auftrag der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.) 955 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1959. Geb. DM 70.—.

Die Göttinger Akademie der Wissenschaften hat in dem vorliegenden Band in begrüßenswerter Weise die Abhandlungen von *E. Hecke* herausgegeben. Dafür ist die mathematische Fachwelt der Akademie zu größtem Dank verpflichtet. Haben ja doch die Abhandlungen auch jetzt noch das größte aktuelle Interesse.

Die Abhandlungen wurden von den Herren *M. Deuring, W. Maak, H. Petersson* und *B. Schoeneberg* mit Bemerkungen und Berichtigungen versehen. Eine Würdigung des Werkes, von *C. L. Siegel,* und die Übersetzung der Gedächtnisrede von *J. Nielsen* leiten die Ausgabe ein. *E. Hlawka,* Wien

Grundzüge der theoretischen Logik. Von *D. Hilbert* † und *W. Ackermann.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 27.) Vierte Auflage. VIII, 188 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Brosch. DM 33.—; Gzln. DM 36.60.

Die neue Auflage hat gegenüber der letzten zahlreiche Änderungen, speziell auch in der Symbolik, Erweiterungen und Zusätze erfahren; so ist ein Kapitel über den intuitionistischen Aussagenkalkül und eines über die strenge Implikation dazugekommen. Auch in dieser Auflage haben wir wieder die beste Einführung in das Gebiet vor uns. *H. Hornich,* Wien

Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Von *R. Carnap,* bearbeitet von *W. Stegmüller.* VIII, 261 S. Wien: Springer-Verlag. 1959. Geb. S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60, £ 2/14/6.

Die von *Carnap* entwickelte Theorie der Induktion und der Wahrscheinlichkeit ist hier aus Originalarbeiten sowie seinem Buche „Logical Foundations of Probability" von *Stegmüller* bearbeitet sowie mit einer Einleitung über die Carnapsche Theorie versehen worden. Das Buch zerfällt in zwei deutlich getrennte Teilabschnitte. Der erste Teil erörtert die philosophische Problematik der Induktion und der Wahrscheinlichkeit. Jedes induktive Schließen ist ein Schließen auf Grund von Wahrscheinlichkeit, so daß die Wahrscheinlichkeitslogik mit der induktiven Logik zusammenfällt. Die Wahrscheinlichkeit wird als logische Relation zwischen einer Hypothese und gegebenen Prämissen betrachtet. Dabei wird die induktive Wahrscheinlichkeit von einer statistischen Wahrscheinlichkeit getrennt, welche letztere eine quantitativ faßbare Erfahrungstatsache physikalischer Systeme darstellt und in engem Zusammenhang zur relativen Häufigkeit steht. Dieser zweite Wahrscheinlichkeitsbegriff ist als Grundlage der induktiven Logik unbrauchbar.

Das zweite Ziel des Buches ist der Aufbau eines Systems der induktiven Logik, welches mit Hilfe der Methoden der symbolischen Logik und Semantik

konstruiert wird; dieses System ist jedoch noch nicht so weit, um den gesamten Wissenschaftsbereich zu erfassen.

Die induktive Logik und das induktive Schließen stellt die Grundlage jeder erfahrungswissenschaftlicher Arbeit dar. Der Aufbau eines Systems der induktiven Logik, die natürlich in keiner Weise den „wissenschaftlichen Instinkt" und andere nicht rationale Faktoren der Erkenntnisgewinnung ersetzen kann und soll, dient zur Klärung des Bestätigungsgrades bestehender Hypothesen auf Grund gegebener Daten. Dadurch wird nicht zuletzt in der Statistik eine wesentliche Klärung der Grundbegriffe erreichbar sein. *H. Brauner*, Wien

Axiomatic Set Theory. Von *P. Bernays*, mit einer historischen Einleitung von *A. A. Fraenkel*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 226 S. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1958, hfl. 22.50.

Das vorliegende Werk besteht aus zwei Teilen. Der erste, einführende Teil von *A. A. Fraenkel* gibt eine kurze und prägnante Übersicht über die geschichtliche Entwicklung der axiomatischen Methoden der Mengenlehre unter besonderer Berücksichtigung der Axiomatik *Zermelos*. Die Erweiterungen und Umformungen, die die Theorie in den Händen von *Fraenkel, von Neumann, Quine* und *Bernays* erfahren hat, werden charakterisiert. Der Problematik des Auswahlaxioms, das ja in vielen Zweigen der Mathematik eine wichtige Rolle spielt und oft zu merkwürdigen Resultaten führt, ist ein kurzer Abschnitt gewidmet. Das Unendlichkeitsaxiom sowie einige weitere Axiome (Axiom der Ersetzbarkeit und Fundierung) werden kurz besprochen, das *Gödel*sche Resultat über die Verträglichkeit der Kontinuumshypothese mit gewissen Axiomensystemen wird diskutiert. Der einführende Teil schließt mit einer kurzen Besprechung der Axiomensysteme von *Bernays, Gödel* und *von Neumann*. Der zweite Teil von *P. Bernays* ist der Axiomatik der Mengenlehre gewidmet und trägt enzyklopädischen Charakter. Er ist die Frucht der Arbeiten des Autors, die in den Jahren von 1937 bis 1954 im Journal of Symbolic Logic erschienen sind. Gegenüber den genannten Arbeiten ist jedoch hier die Formalisierung des Systems weit mehr vorangetrieben. Das erste Kapitel beschreibt den formal-logischen Rahmen, in dem sich die folgenden Ausführungen bewegen; es führt in den Prädikaten- und Klassenkalkül ein und erläutert den Begriff der Paarklassen. Die eigentliche mengentheoretische Axiomatik beginnt mit dem 2. Kapitel. Es werden drei logische Konstanten benützt und drei charakterisierende Axiome (A_1 bis A_3) eingeführt; die eine dieser logischen Konstanten spielt die Rolle der Nullmenge; sie wird in A_1 axiomatisch charakterisiert. Das Aussonderungsaxiom *Zermelos* und das Ersetzungsaxiom *Fraenkels* sind auf Grund der Axiome beweisbare Sätze. Das 3. Kapitel behandelt die Theorie der Ordinalzahlen, natürlichen Zahlen und der endlichen Mengen. Die Definition der Ordinalzahlen geschieht ohne Verwendung des Begriffs der Ordnungstype. Das allgemeine Rekursionstheorem (*von Neumann*) wird im 4. Kapitel bewiesen. Es wird zur Einführung der Funktionen von Ordnungszahlen benützt und dient als Basis zur Behandlung der transfiniten Rekursion. Das 5. Kapitel behandelt die Begriffe der Mächtigkeit, Ordnung und Wohlordnung von Mengen. Bis hierher werden nur die Axiome A_1 bis A_3 benützt. Erst im 6. Kapitel werden das Axiom der Potenzmenge, das Unendlichkeitsaxiom sowie das Auswahlaxiom eingeführt und deren verschiedene Formulierungen (Lemma von *Zorn*) untersucht. Das folgende Kapitel ist den Anwendungen gewidmet: Theorie der reellen Zahlen, Kardinalzahlarithmetik und abstrakte Theorien (Gruppentheorie, Topologie, usw.). Das abschließende

Kapitel behandelt weitere Verschärfungen des Axiomensystems (Fundierungsaxiome, Auswahlaxiome). *J. Roppert*, Wien

Notices d'Histoire des Mathématiques. Von *H. Lebesgue.* (Monographies de L'Enseignement Mathématique: No. 4.) Mit 3 Textabb., 116 S. Genève: Institut de Mathématiques, Université. 1958. sfr. 16.—.

Diese Monographie enthält eine nicht veröffentlichte Studie über das Lebenswerk von *Vieta*, eine Würdigung der mathematischen Leistungen von *Vandermonde*, eine Darstellung des Lebens und der Arbeiten von *Camille Jordan*, eine Notiz über *Baire*, einen Bericht über eine Arbeit von *Ampère*, *Lebesgues* Antrittsrede im Collège de France, wo er insbesondere die Leistungen von *Humbert*, *Jordan*, *Liouville*, *Lacroix*, *Ramus* und *Roberval* würdigt, ferner Auszüge aus seinen Briefen. *Lebesgue* wollte nie als mathematischer Historiker gelten, aber er hatte das Bestreben, bei tragenden Ideen die Verwandtschaft im Denken alter und neuer Forscher sich zu vergegenwärtigen, und gerade durch dieses Bestreben gelang es ihm, besonders Anregendes und Fesselndes zu bieten. Und so liefert diese kleine Schrift nicht nur einen interessanten Einblick in das Lebenswerk der genannten Mathematiker, sondern man wird durch die Art der Darstellung von der so tief veranlagten Persönlichkeit *Lebesgues* stark beeindruckt. Ein besonders schöner Satz, der sich in einem Brief findet, sei hier wiedergegeben: „... la vérité ne brille qu'aux yeux qui l'ont longtemps cherchée; assez longtemps pour avoir mérité de la voir." Hervorgehoben sei noch: die feinsinnige Zusammenstellung dieser kleinen Schrift und insbesondere auch das Vorwort lassen die tiefe Verehrung eines dankbaren Schülers für seinen großen Lehrer deutlich erkennen. *P. Funk*, Wien

Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. Von *J. E. Hofmann.* (Monographies de l'Enseignement Mathématique: No. 3.) 126 S. Genève: Institut de Mathématiques, Université. 1957. sfr. 15.20.

Die vorliegende Studie wurde durch Herrn *Spieß*, Basel, angeregt, der in mühsamer Kleinarbeit alles bisher über *Jakob Bernoulli* Bekannte, insbesondere nur handschriftlich vorliegendes Material, für die von ihm unternommene große *Bernoulli*-Edition vorbereitet hat. Die Studie stützt sich auf dieses Material und sucht so die großartigen Leistungen *Jakob Bernoullis* für die Entwicklung der Infinitesimalmathematik dem Verständnis näher zu bringen. Dem Verfasser gelingt es vor allem auch durch seine so überaus gründliche Kenntnis der Vorgeschichte und Frühgeschichte der Infinitesimalrechnung, einen Einblick in den wissenschaftlichen Werdegang *Bernoullis* zu geben, der zunächst scholastischer Theologe, dann („invito patre sidera adversus") Astronom und schließlich der große, scharfsinnige Mathematiker wurde. Diese Schrift enthält auch eine Darstellung des berühmten Streites mit seinem Bruder *Johann* im Anschluß an die Entstehung der Variationsrechnung. Ganz besonders wertvoll sind für den mathematischen Historiker die überaus reichhaltigen Literaturangaben. *P. Funk*, Wien

Introducing Mathematics. Von *F. F. Helton.* Zweite Auflage. Mit 202 Textabb., XV, 396 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 5.75.

Dieses Buch behandelt ausführlich, wenn man vom Kapitel über quadratische Gleichungen absieht, den Lehrstoff der Mathematik, der an der Unterstufe unserer

Mittelschulen gelehrt wird. Zahlreiche Musterbeispiele und viele Übungsbeispiele bereichern das Buch. *J. Laub*, Wien

Vollständige Anleitung zur Algebra. Von *L. Euler*. Unter Mitwirkung von *J. Niessner* in revidierter Fassung neu herausgegeben von *J. E. Hofmann*. 571 S. Stuttgart: Reclam-Verlag. 1959. DM 18.50.

Das klassische Werk von internationalem Ruf liegt nun in einer revidierten Neuausgabe vor. Das Wiedererscheinen dieses Buches wird insbesondere in den Bibliotheken willkommen sein, da die alten Exemplare schon lange abgenützt und beschädigt sind. *J. E. Hofmann* hat die Neuauflage mit einer biographisch-wissenschaftlichen Einleitung versehen. Er gibt Rechenschaft über die wissenschaftlichen Grundsätze dieser Neuauflage. Das Buch hat in erster Linie historisches Interesse. Es gibt aber auch heute noch einen leicht verständlichen Zugang in die Algebra und die Theorie der diophantischen Gleichungen. Vor allem wird algorithmisches Rechnen betrieben, das *Euler* in vollendeter Meisterschaft handhabte. *N. Hofreiter*, Wien

The Theory of Groups. Von *H. Zassenhaus*. Zweite Auflage. X, 265 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 26.—.

Die erste Auflage erschien 1937 und wurde in dieser Zeitschrift Mh. Math. **46**, 15—16 (1938) ausführlich besprochen. Mit diesem Buch erschien ein sehr bedeutungsvolles Lehrbuch der Gruppentheorie, das die damals neuen Methoden und Ergebnisse einheitlich darstellte. Eine englische Übersetzung erschien 1949. Die zweite Auflage (vorläufig nur in englischer Sprache) unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich durch Zusätze zu einzelnen Kapiteln, die größtenteils im Anhang gebracht werden, insbesondere durch eine Einführung in die Theorie der Gitter. Die Übungsaufgaben wurden bedeutend vermehrt, und das Literaturverzeichnis wurde wesentlich erweitert. Auch die zweite Auflage ist allen in der Algebra einigermaßen vorgebildeten Lesern außerordentlich zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Grundzüge der Algebra. Teil II: Allgemeine Ring- und Körpertheorie. Von *H. Lugowski* und *H. J. Weinert*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 10.) 250 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. DM 11.—.

Band II handelt von algebraischen Strukturen mit zwei aufeinander bezogenen Verknüpfungen, zu denen die Ringe gehören. Je nach der Auswahl der geforderten Eigenschaften unterscheiden wir Schiefringe, kommutative Ringe, Schiefkörper und kommutative Körper. Aus einfachen Ringen werden weitere Ringe konstruiert. Insbesondere erweist sich die Adjunktion von Unbestimmten als wichtiges Hilfsmittel für Ringerweiterungen. Einen breiten Raum nehmen algebraische Strukturen mit Operatorbereichen ein. Verbindung zur Zahlentheorie bringt die Teilbarkeitslehre, die Zerlegung in Primelemente und die Einführung der Ideale. Heute ist die Idealtheorie, die ursprünglich in der algebraischen Zahlentheorie eingeführt wurde, eine selbständige mathematische Disziplin geworden, die in verschiedenen Gebieten Anwendung gefunden hat. Die Darstellung ist vorbildlich klar und gut verständlich, genau so wie im 1. Teil (siehe die Besprechung in Monatsh. f. Math. **62**, 179, 1958).

N. Hofreiter, Wien

Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Von *W. Specht.* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen: Band I: Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil: A. Grundlagen, B. Algebra, Heft 3/II.) Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. 76 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Brosch. DM 19.—.

Aufgabe dieses Artikels ist, die Entwicklung und die Ergebnisse der analytischen Theorie der Polynome zusammenfassend darzustellen. Dazu gehört als Hauptproblem die Nullstellenverteilung eines Polynoms $f(z)$ in der Zahlenebene. Die Bemühungen um dieses Hauptproblem haben zu folgenden Untersuchungen geführt: 1. der Nachweis der Existenz der Nullstellen, worüber der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra Auskunft gibt. Eine weitere Aufgabe ist 2. die Abgrenzung von Gebieten der Zahlenebene, die alle Nullstellen oder allgemeiner eine vorgeschriebene Mindestanzahl von Nullstellen eines Polynoms enthalten. Dazu gehören Schrankensätze, insbesondere die Ermittlung einer oberen Schranke für den absoluten Betrag der Nullstellen. Als Umkehrung zum Problem 2. tritt 3. die Aufgabe, die genaue Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem vorgegebenen Gebiet zu ermitteln. Ein weiteres Problem ist: 4. Aus der Verteilung der Nullstellen vorgegebener Polynome sind Aussagen über die Verteilung der Nullstellen eines anderen Polynoms zu gewinnen, dessen Koeffizienten Funktionen der Koeffizienten der vorgegebenen Polynome sind.

Der Artikel gibt eine klare und zuverlässige Übersicht über die in der analytischen Theorie der Polynome auftretenden Probleme und Ergebnisse.

N. Hofreiter, Wien

Zahlentheorie. Teil II. Von *L. Holzer.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: 14.) V, 127 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 9.—.

Teil I brachte eine Einführung in die elementare und in die algebraische Zahlentheorie (Rezension in Mh. Math. **63**, 193 (1959)). Teil II enthält die Weiterführung der algebraischen Zahlentheorie. Es werden gebracht: Theorie der Einheiten, Körperdifferente, Relativdiskriminante, Relativdifferente, Relativgaloissche Körper, Zerlegung von Idealen, Klassenzahl und Einheitenhauptgeschlecht. Wie im Band I wird auch hier die moderne abstrakte Algebra weitgehend angewandt. Manche Beweise wurden neu gestaltet. Teil I und II geben eine gute Einführung in die algebraische Zahlentheorie und bieten eine solide Grundlage allen jenen, die später Klassenkörpertheorie studieren wollen.

N. Hofreiter, Wien

Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Von *M. Deuring.* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen: Band I: Algebra und Zahlentheorie, 2. Teil: C. Reine Zahlentheorie, Heft 10/II.) Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. 60 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Brosch. DM 15.—.

Das lang erwartete Heft ist endlich erschienen, gab es doch keine moderne Darstellung der Theorie der komplexen Multiplikation. Durch dieses Heft wird die Theorie einem weiten mathematischen Leserkreis bequem zugänglich gemacht, vor allem deshalb auch, weil zu den Sätzen auch die Beweise — wenn auch in knapper Form — gegeben werden. Es ist dem Verfasser, der selbst Bedeutendes zur Theorie beigetragen hat, in meisterhafter Weise gelungen, in engem Rahmen eine moderne aber klare Darstellung zu geben. *E. Hlawka.* Wien

Approximate Methods of Higher Analysis. Von *L. V. Kantorovich* und *V. I. Krylov*. Nach der 3. russ. Auflage ins Englische übersetzt von *C. D. Benster*. Mit 68 Textabb., XV, 681 S. Groningen: P. Noordhoff. 1958.

Ich verweise auf meine ausführliche Besprechung des Buches (in deutscher Übersetzung) in dieser Zeitschrift, **61**, 84 (1957). *N. Hofreiter*, Wien

Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales. Band II. Von *L. Robin*. (Collection Technique et Scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications.) Mit 34 Textabb., VIII, 384 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. Brosch. fr. 5000.—; kart. fr. 5300.—.

Der zweite Band dieses neuen Buches über Kugelfunktionen beginnt mit einer Einführung der zugeordneten Funktionen P_n^m und Q_n^m für beliebige Werte von n und m, ihrer Darstellung mittels hypergeometrischer Funktionen und ihrer Entwicklungen in Potenzreihen nach verschiedenen Variablen. Es folgen mannigfache Beziehungen, die zwischen diesen Funktionen bestehen, sowie zahlreiche Integraldarstellungen. Ferner werden verschiedene Typen von Integralen, in deren Integrand die obigen Funktionen vorkommen, und Beziehungen zu den Besselfunktionen behandelt. Das nächste Kapitel ist den asymptotischen Entwicklungen gewidmet, welche wieder mit großer Ausführlichkeit für alle Bereiche der Variablen und Parameter diskutiert werden, Entwicklungen, die mit den Namen *Laplace*, *Heine*, *Darboux*, *Stieltjes*, *Hille*, *Hobson*, *Barnes* u. a. verbunden sind. Hier finden sich auch interessante Ungleichungen, denen die genannten Funktionen genügen. Der dritte Teil des vorliegenden Bandes ist der Untersuchung der Konvergenz und Summierbarkeit der *Legendre*schen und *Laplace*schen Reihe gewidmet. Sehr gründlich werden die verschiedenen Bedingungen für die Konvergenz und die C_k-Summierbarkeit untersucht, stetige Funktionen mit divergenter Reihe angegeben, die Äquikonvergenzsätze bewiesen, und anderes mehr. Z. B. sei noch auf die Entwicklungen hingewiesen, die nach Funktionen nicht ganzzahliger Ordnung fortschreiten. Alles in allem wird auch dieser zweite Band dazu beitragen, daß das Buch ein guter Ratgeber für jeden ist, der mit Kugelfunktionen arbeitet, und eine schöne Lektüre für den Liebhaber.

K. Prachar, Wien

Statistics — An Introduction. Von *D. A. S. Fraser*. (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) Mit 45 Textabb., IX, 398 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.75.

Der Zweck des Buches ist, den Studierenden eine solide Einführung in die mathematische Statistik zu geben. Da die Statistik auf der Wahrscheinlichkeitstheorie beruht, so werden zunächst die einfachsten Begriffe und Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie gebracht. Dies gelingt bereits durch Betrachtung von ganz einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Dann folgen die grundlegenden Sätze über diskrete und über stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen und als wichtigste Beispiele werden die Binomial-, die Poisson- und die Normalverteilung gebracht. Mittelwerte, Streuungen und Momente von Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschließen die Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Nun kommen Stichproben aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Mittelwerte, Streuungen und andere Charakteristiken von Stichprobenverteilungen und das Gesetz der großen Zahlen. Es folgen Verteilungen von zufälligen Variablen, die durch Transformation, insbesondere durch orthogonale Transformation aus zufälligen Variablen hervorgehen und speziell die χ^2-, die F- und die t-Verteilung.

Dann werden Methoden entwickelt, um die in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen auftretenden Parameter zu schätzen, wozu insbesondere die Maximum-Likelihood-Methode gehört. Noch wichtiger ist die Aufstellung von Konfidenzintervallen, das Prüfen von Hypothesen, wobei der χ^2-Test besonders vorteilhaft ist. Die weiteren Kapitel handeln von der Analyse linearer Modelle, von Regressions- und Kovarianzanalyse, Varianzanalyse, Methoden zur Planung von Versuchen, Stichprobenkontrolle, Sequentialanalyse und nicht parametrischen Methoden. Das Buch enthält zahlreiche numerische Beispiele und Aufgaben, ferner einige Tabellen, was mit Rücksicht auf die zahlreichen Anwendungen der Statistik sehr wünschenswert ist. Die Darstellung ist für Studierende besonders geeignet. Vieles wird originell durchgeführt. Alles in allem ist es ein Lehrbuch, das bestens empfohlen werden kann. *N. Hofreiter*, Wien

Slownik Polsko-Rosyjsko-Angielski Statystyki Matematycznej. I: Statystycznej kontroli jakości produkcji. Herausgegeben vom Mathematischen Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften. (Zastosowania Matematyki.) 48 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. zl. 7.—.

Wer die Vielzahl und Vieldeutigkeit der Bezeichnungen in der mathematischen Statistik kennt, wird sich darüber freuen, daß nun dieses kleine Wörterbuch erschienen ist. Es bringt die Übersetzung von 540 polnischen Bezeichnungen ins Russische und Englische. Ein russischer und englischer Index ermöglicht die Rückübersetzung. Es wurden nur rein statistische Ausdrücke übersetzt, und man findet z. B. nicht das Wort „Stochastische Variable" oder „Stationärer Prozeß" oder „Random Noise".

Es wäre zu wünschen, daß dieses Wörterbuch durch Hinzufügen der deutschen Ausdrücke erweitert würde, da gerade im Deutschen die entsprechenden Bezeichnungen leider noch immer recht wenig einheitlich sind. *K. Prachar*, Wien

Elementary Mathematical Programming. Von *R. W. Metzger*. Mit 133 Textabb., IX, 246 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958.

Ein wichtiger Zweig der Unternehmensforschung ist die Programmierung. Sie besteht, mathematisch betrachtet, in der Aufgabe, das Maximum oder das Minimum einer Funktion in mehreren Variablen zu finden, wenn noch mehrere Nebenbedingungen (meist in Form von Ungleichungen) zu berücksichtigen sind. Das Buch ist für Leser geschrieben, die sehr geringe mathematische Kenntnisse haben und die Methoden der Programmierung kennen lernen wollen. Dementsprechend werden die verschiedenen Methoden an einfachen aber typischen Beispielen dargestellt. Der Autor versucht gar nicht, die Methoden mathematisch zu begründen, da seiner Meinung nach der Leser die Methoden anwenden kann, auch wenn er die Beweise nicht versteht. Das Buch beginnt mit Transport- oder Verteilungsproblemen, bringt dann die Simplexmethode, die die wichtigste Methode der Programmierung ist, und gibt auch einige Approximationsmethoden an. In den späteren Kapiteln wird gezeigt, wie reichhaltig die Menge der Anwendungen ist. Wertvoll für den Leser sind die Zusammenfassungen, in denen die Methoden nochmals kurz und einprägsam dargestellt werden.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie. Von *E. Burger*. 169 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Geb. DM 28.—.

Die im Jahre 1928 durch *v. Neumann* begründete Theorie der Spiele hat in den letzten 15 Jahren eine lebhafte Entwicklung durchgemacht. Das vorliegende Buch ist das erste Lehrbuch der Spieltheorie in deutscher Sprache und gibt eine Einführung in die mathematische Seite, während die verschiedenen Anwendungen als Illustration auftreten. Es ist hier nicht die Rede von reinen Glücksspielen, deren Ausgang nur vom Zufall abhängt; es werden „strategische" Spiele betrachtet, deren Ausgang auch von gewissen Entscheidungen abhängt, die die Spieler im Verlaufe einer Partie des Spieles zu fällen haben. Dazu gehören viele Gesellschaftsspiele, aber auch Konkurrenzprobleme, Interessenkonflikte und dergleichen, wie sie in ökonomischen, soziologischen und strategischen Situationen auftreten. Unter der Strategie eines Spieles für ein bestimmtes Spiel versteht man einen vollständigen Verhaltensplan, der für jede mögliche Situation, in die der Spieler im Verlaufe einer Partie gelangen kann, das Verhalten festlegt. Ausgehend von Beispielen von Gesellschaftsspielen und der Ökonometrie wird eine exakte Definition des Spielbegriffes gegeben. Das eigentliche Anliegen der Theorie der Spiele ist das Problem des rationalen oder optimalen Verhaltens in einem Spiel. Dieses Problem ist allerdings im wesentlichen erst für gewisse Zweipersonenspiele (sogenannte Nullsummenspiele) befriedigend gelöst worden. Gut entwickelt ist die Theorie der Matrixspiele. Unter den Verfahren zur Ermittlung von Wert und optimalen Strategien bei Matrixspielen ist das der linearen Programme besonders vorteilhaft. Als allgemeine praktische Lösungsmethode für lineare Programme wird die Simplexmethode gebracht. Wird den Spielern Koalitionsbildung gestattet, so spricht man von einer kooperativen Theorie der Spiele (Kapitel IV), im Gegensatz zur nicht-kooperativen Theorie (Kapitel II). — An Vorkenntnissen verlangt das Buch nicht viel. Auch ist die Darstellung gut verständlich, so daß Studierende der Mathematik in den höheren Semestern das Buch durcharbeiten können. Da für die Theorie der Spiele weitgehendes Interesse vorhanden ist und die Theorie noch sehr im Fluß ist, muß mit einer Neuauflage in wenigen Jahren gerechnet werden. *N. Hofreiter*, Wien

Elementare Informationstheorie. Vom *H. Zemanek*. Mit 28 Textabb., 120 S. Wien-München: R. Oldenbourg. 1959. Geb. DM 14.20; S. 86.—.

Das vorliegende Buch ist aus einer Vorlesung an der Technischen Hochschule in Wien hervorgegangen. Es stellt sich die Aufgabe, die einfachsten und grundlegenden Begriffe der Informationstheorie mit bescheidensten mathematischen Hilfsmitteln einem weiten Leserkreis zugänglich zu machen. Zahlreiche Beispiele aus den verschiedensten Gebieten erläutern die Grundbegriffe, so daß es dem Verfasser gelungen ist, in dem gesteckten Rahmen eine gute Einführung zu geben. Für Dinge, die weitergehende mathematische Hilfsmittel voraussetzen, muß natürlich weitere Literatur herangezogen werden. *E. Hlawka*, Wien

Arbeiten zur Informationstheorie II. Von *I. M. Gelfand, A. M. Jaglom, A. N. Kolmogoroff, Chiang Tse-Pei, I. P. Zaregradski*. (Mathematische Forschungsberichte: VI.) 77 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Brosch. DM 14,40.

Während der erste Band (siehe Besprechung in dieser Zeitschrift Mh. f. Math. **62**, S. 270) vor allem der Untersuchung der Entropie gewidmet war, steht jetzt im Vordergrund die Berechnung der sogenannten Information. An der Spitze steht die ausführliche Arbeit von *Gelfand* und *Jaglom*, welche in anschaulicher Weise die Theorie entwickelt und an zahlreichen Beispielen erläutert.

Die weiteren zwei Arbeiten, einerseits von *Gelfand, Jaglom* und *Kolmogoroff* und jene von *Chiang Tse-Pei* andererseits, sind der Definition der Information gewidmet. Die letzte Arbeit von *Zaregradski*, auf Anregung von *A. J. Chintschin* verfaßt, liefert eine bedeutende Ergänzung zur Theorie der Entropie und schließt jetzt die Theorie von *Chintschin*, welche im ersten Band behandelt wurde, ab.

Ein hervorragendes Werk, unentbehrlich für jeden, der sich mit der Informationstheorie zu beschäftigen hat! *E. Hlawka*, Wien

Calculateurs Analogiques Répétitifs. Von *R. Tomovic*. (Collection de Monographies de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique.) Mit 94 Textabb., 6 Tab., VIII, 186 S. Paris: Masson et Cie. 1958. fr. 3000.—.

Dieses Buch über Analogrechner ist einerseits für den Laien bestimmt, der gerne einen Einblick in den Aufbau solcher Geräte und die Möglichkeiten ihrer Anwendung erhalten will, andererseits sollen auch dem Fachmann Anregungen für die Konstruktion von Maschinen gegeben werden.

Die drei Hauptabschnitte sind mit Theorie, Konstruktion, Anwendungen überschrieben. Im ersten wird z. B. die Synthese von Schaltungen zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen behandelt, wobei immer nur das Blockschema der Schaltung angegeben wird; ferner die Genauigkeit und Stabilität der einzelnen Schaltungsarten. In dem zweiten Hauptteil findet sich eine Diskussion von Einzelheiten der Schaltungen (also der einzelnen „Blöcke" im genannten Schema), welche auch die Angabe technischer Daten (Anodenspannungen der Röhren, Größen der Widerstände und Kondensatoren usw.) einschließt. Besonders seien hier die Schaltungen zur Ausführung nichtlinearer Operationen genannt und die Methoden zur Erzeugung von verschiedenen Arten von speziellen Funktionen. Im letzten Teil finden sich Beispiele über (gewöhnliche) Differentialgleichungen und Integralgleichungen. Die Behandlung dieser Probleme mit der Maschine wird gründlich besprochen und auch numerische Ergebnisse werden angeführt.

Bei der großen Zahl von Büchern über Rechenautomaten, in denen konstruktive Details aus Bequemlichkeit weggelassen sind und Beispiele oft nur unvollständig wiedergegeben werden, ist es besonders zu begrüßen, daß hier ein Buch vorliegt, welches diesen Dingen besondere Aufmerksamkeit widmet, und dies in klarer und verständlicher Darstellung. *K. Prachar*, Wien

Le Bruit de Fond. Von *P. Grivet* und *Au. Blaquière*, Vorwort von *D. Gabor*. (Cours d'Électronique: Band IV.) Mit 246 Textabb., XI, 495 S. Paris: Masson et Cie. 1958. fr. 6500.—.

Die Theorie der zufälligen Störungen hat sich in letzter Zeit sehr schnell zu einem großen Teilgebiet der Elektronik entwickelt. Zur mathematischen Erfassung solcher Vorgänge werden die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt. Dem Mathematiker und Physiker fehlen zum Verständnis dieser Vorgänge oft gewisse Kenntnisse aus der Hochfrequenztechnik, dem Ingenieur fehlen oft die entsprechenden mathematischen Hilfsmittel. Das vorliegende Buch wird von beiden mit Vorteil gelesen werden. Es geht sehr gründlich auf die experimentelle Seite der Rauschvorgänge ein und gibt stets auch Angaben über die Größe der Spannungen, Frequenzen usw. und die Dimensionierung der Schaltelemente. Andererseits werden jedoch auch die mathematischen Hilfsmittel nicht vernachlässigt, und, was besonders wichtig ist, es wird die Theorie mit dem Experiment verglichen.

Kapitelüberschriften: Die experimentellen Aspekte des Phänomens des „Rauschens" und seine Grundgesetze. Das Gesetz von der Gleichverteilung der Energie und das Rauschen von Widerständen. Der *Schrott-* oder *Schottky*-Effekt in den Elektronenröhren. Übertragung des Rauschens in einem passiven oder aktiven linearen Übertragungssystem. Rauschen und Bandbreite. Das Rauschen in Halbleitern. Die „Struktur" des Rauschens und seine mathematische Darstellung. Einige ausgewählte Probleme im nichtlinearen Bereich. Rauschen und Informationstheorie. Anhang: Kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. —

Als Beispiel für die große Menge des verarbeiteten Materials sei z. B. auf die vielen Schaltungen hingewiesen, die auf ihr Verhalten gegenüber zufälligen Spannungen untersucht werden, wie z. B. Gitter- und Anodenbasisschaltungen verschiedener Röhren, mannigfache Arten von Schwingungserzeugern u. a. m. Die Literaturhinweise sind sehr zahlreich und gründlich. Ein reichhaltiges und schönes Buch über ein neues und interessantes Gebiet. *K. Prachar*, Wien

Darstellende Geometrie. Band I. Von *W. Kramer*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 38.) Mit 221 Textabb., VIII, 188 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 12.50.

Dieses zweibändig geplante Lehrbuch der Darstellenden Geometrie ist für Hoch- und Fachschulen bestimmt. Der vorliegende 1. Band bringt vor allem die Normalprojektion sowie die Kegelschnittlehre, während dem 2. Teilband vornehmlich Axonometrie und Perspektive vorbehalten bleibt. Der Autor, der schon 1924 mit *G. Scheffers* zusammen einen bereits mehrfach aufgelegten zweibändigen Leitfaden der Darstellenden Geometrie für höhere Schulen geschrieben hat, entwickelt auch hier zunächst die Normalprojektion auf eine Bildebene ziemlich ausführlich. Nach Besprechung der Grundaufgaben und ihrer Anwendung auf Dachausmittlungen, Böschungsebenen und Sonnenuhren wird auch noch die Eintafelprojektion von Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel besprochen, sowie Anwendungen auf die Erd- und Himmelskunde. Der zweite Abschnitt ist der Normalprojektion auf mehrere Bildebenen gewidmet sowie der Konstruktion von Polyederdurchdringungen. Im letzten Abschnitt schließlich werden die ebenen Schnitte von Drehkegeln und deren Normalprojektion, ebenso Abwicklungen von Drehkegeln und Drehzylindern besprochen. Dabei wird eine überraschende Fülle von Kegelschnitteigenschaften teils durch Betrachtung räumlicher Konfigurationen, teils durch Anwendung elementarer Rechnungen bewiesen; gelegentlich werden auch Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihren Gleichungen abgelesen.

Das flüssig und leicht verständlich geschriebene Buch ist mit 221 ausgezeichneten Textfiguren geschmückt. Es kann vor allem Anfängern wärmstens empfohlen werden. *H. Brauner*, Wien

Introduction to Algebraic Geometry. Von *S. Lang*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Number 5.) XI, 260 S. New York-London: Interscience Publishers. 1958. $ 7.25.

Der Autor selbst sagt im Vorwort, daß er mit diesem Buch nicht nur eine Einleitung in die algebraische Geometrie überhaupt, sondern auch im besonderen eine Einführung in die „Foundations of algebraic geometry" von *A. Weil* geben wolle. Dadurch ist der Charakter des Buches ziemlich eindeutig festgelegt: es behandelt die Theorie algebraischer Gleichungen über einem allgemeinen

Körper beliebiger Charakteristik, sowie deren Lösungsmannigfaltigkeiten in einem darüber liegenden algebraisch abgeschlossenen Körper universeller Natur (universal domain). Vorausgesetzt wird Kenntnis der abstrakten Algebra und etwas Idealtheorie in Noetherschen Ringen, das letzte aber nur in geringem Ausmaß, denn z. B. wird der Lasker-Noethersche Zerlegungssatz, der u. a. im 2. Kapitel nützlich wäre, nicht verwendet. Wichtigste Hilfsmittel beim Aufbau der Theorie sind Körperbewertungen und der Begriff „linear disjoint" von *A. Weil*, der sich als sehr fruchtbar erwiesen hat. Mit besonderer Sorgfalt werden die jeweiligen Änderungen der Verhältnisse studiert, die sich bei Erweiterungen des Grundkörpers ergeben. Die Untersuchungen konzentrieren sich um die Begriffe: algebraische Mannigfaltigkeit, Korrespondenz, normale Mannigfaltigkeit und einfacher Punkt (nach *Zariski*), Divisoren und lineare Scharen, Differentialformen, Gruppenmannigfaltigkeit, Riemann-Rochscher Satz und Jacobische Mannigfaltigkeit. Die letzten Kapitel dienen zur Vorbereitung auf das Buch über Abelsche Mannigfaltigkeiten, das derselbe Verf. in der gleichen Sammlung (Nr. 7) vor kurzem veröffentlicht hat.

Es ist hervorzuheben und voll anzuerkennen, daß es dem Verf. gelungen ist, eine klare und verständliche Einführung in ein sonst schwer zugängliches Forschungsgebiet zu schreiben; dabei konnten viele Begriffe und Beweise beträchtlich vereinfacht werden. Jedem Kapitel sind Literaturangaben beigefügt, die auf Originalarbeiten und weitergehende Untersuchungen hinweisen. Andererseits aber scheint alles vermieden zu sein, was nicht in den orthodoxen Rahmen paßt; sonst könnte man z. B. annehmen, daß die Theorie der Hilbertfunktion und der Syzygien, gerade weil diese für beliebige Grundkörper gelten, in einer Einführung nicht ganz unerwähnt bleiben dürften. Auch wären gelegentliche konkrete Beispiele wertvoll, um abstrakt eingeführte Begriffe aufzufüllen und das Interesse zu beleben, das sonst für eine sich gegenüber allen Beziehungen und Anwendungen abkapselnde Theorie allmählich erlahmen könnte.

W. Gröbner, Innsbruck

Guide to the Literature of Mathematics and Physics Including Related Works on Engineering Science. Von *N. G. Parke III.* Zweite Auflage. Mit 6 Textabb., XVIII, 436 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 2.49.

Die erste Auflage erschien 1947. Seither sind mehr als 2500 Bücher über Mathematik und Physik erschienen. Daher war eine zweite Auflage notwendig geworden, und nun ist das Buch natürlich viel umfangreicher geworden. Für jeden Wissenschaftler treten oft die Fragen auf: Was ist über ein Spezialgebiet bekannt und wo findet man das Gesuchte? Daher wird jeder gerne zu einem Buch greifen, das wie das vorliegende umfangreiche Auskunft erteilt. Jeder Zweig der Mathematik und der Physik wird ausführlich dargestellt, wobei die angewandte Mathematik besonders betont wird. Der erste Teil des Buches (ca. 75 Seiten) bringt allgemeine Betrachtungen über das Lesen und Studieren von Büchern und über das Aufsuchen der Literatur. Der zweite Teil (ca. 350 Seiten) enthält ein Verzeichnis der Lehrbuchliteratur über Mathematik, Physik und einige Randgebiete. Der ganze Stoff wird in 120 Teilgebiete zerlegt und fast jedes Teilgebiet weiter unterteilt. Jeder kleine Abschnitt beginnt mit einer kurzen Einführung zur besseren Orientierung. Die dann folgenden Zitate werden ausführlich angegeben, also: Autor, Titel des Buches, Verlag, Erscheinungsjahr und Seitenzahl. Den Abschluß bilden ein Autorenverzeichnis (40 S.) und ein Sachverzeichnis (14 S.). Wenn auch trotz der Fülle des Gebotenen Vollständigkeit nicht erreicht wurde, die Anzahl der Druckfehler sehr groß ist, so ist doch

der 2. Teil eine sehr nützliche Hilfe für alle Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Richtigstellung zu Seite 71: Das Zentralblatt für Mathematik erscheint wieder seit 10 Jahren im Springer-Verlag (Berlin). *N. Hofreiter*, Wien

Les Problèmes aux Limites de la Physique Mathématique. Introduction à leur étude générale. Von *H. G. Garnir*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe: Band 23.) Mit 5 Textabb., 234 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1958. Geb. sfr. 29.—.

Der Verfasser behandelt in diesem Buch die allgemeine Dirichlet-Neumannsche Randwertaufgabe für die Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung und ebenso für den metaharmonischen Operator $-\Delta + z$, wobei z weder reell negativ noch 0 ist, Δ der Laplacesche Ausdruck. Zu diesem Problemkreis hat ja der Verfasser Bedeutendes beigetragen. Er behandelt das Problem gleich für den n-dimensionalen Fall in größter Allgemeinheit und Strenge und zwar unter Verwendung der modernsten Methoden der Funktionalanalyse. Daher ist dem eigentlichen Problem eine Theorie des Hilbertschen Raumes vorangestellt. Die Theorie der Distributionen steht natürlich im Mittelpunkt. Die Darstellung ist konzis, aber doch an jeder Stelle klar. Jeder Mathematiker, der sich mit Randwertaufgaben zu beschäftigen hat und die modernen Methoden kennen lernen will, wird dieses Buch studieren müssen. *E. Hlawka*, Wien

Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen. Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) in Düsseldorf am 8. XI. 1957, zusammengestellt von *W. Oppelt*. (Beihefte zur Regelungstechnik.) Mit 121 Textabb., 128 S. München: R. Oldenbourg. 1958. Geb. DM 16,80.

Die Vorträge handeln von mathematischen und gerätetechnischen Problemen, die beim Einsatz von Analogrechnern und von Digitalgeräten bei der Lösung von regelungstechnischen Problemen auftreten. Sie wurden von folgenden Herren gehalten:

1. *E. Bukovics* (Wien): Einsatzmöglichkeiten kleiner elektronischer Ziffern-Rechengeräte zur Lösung von Grundaufgaben der Regelungstechnik. 2. *J. B. Reswick* (Cambridge, USA): A simple graphical method for deconvolution. 3. *A. Leonhard* (Stuttgart): Ein Rechengerät für Polynome. 4. *R. Herschel* (Ulm): Zum Entwurf von Analogrechenschaltungen für regelungstechnische Probleme. 5. *O. Föllinger* und *G. Schneider* (Frankfurt am Main): Vergleich der Berechnung eines Regelvorganges mittels Rechenanlagen verschiedener Typen. 6. *E. Bühler* (Mannheim): Über das mechanische System mit Reibung und seine elektronische Nachbildung. 7. *H. Witsenhausen* (Brüssel): Anwendung von Analogierechenmaschinen auf die Optimierung von unstetigen Regelkreisen mit statistisch schwankenden Eingangsgrößen. *N. Hofreiter*, Wien

Journal of the Association for Computing Machinery. Band 6, Nr. 1. 1959. Herausgegeben von Association for Computing Machinery. Erscheint viermal jährlich (Januar, April, Juli, Oktober). Baltimore: Mt. Royal & Guilford Aves. Einzelheft $ 2.50.

Die Zeitschrift ist bereits gut eingeführt. Sie bringt einschlägige Abhandlungen, die auf hohem Niveau stehen und für angewandte Mathematiker, Ingenieure und Physiker von großem Interesse sind. Außerdem enthält jedes Heft

Buchbesprechungen. In dem vorliegenden Heft möchte ich besonders die Arbeit: "The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices" von *H. H. Goldstine, F. J. Murray* und *J. v. Neumann* hervorheben. *N. Hofreiter*, Wien

Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique. — Proceedings of the International Association for Analog Computation. Publication Trimestrielle. Band I, Nr. 2 (September 1958). Herausgegeben von l'Association Internationale pour le Calcul Analogique. Bruxelles: Presses Académiques Européennes.

Das wissenschaftliche Komitee dieser Zeitschrift besteht aus Professoren aus Belgien, Deutschland, England, Frankreich, Holland, Jugoslawien, Spanien und USA. Die Zeitschrift enthält 1. einige interessante kurze Arbeiten über das Rechnen mit Analogiegeräten und über Beziehungen zu Methoden der praktischen Mathematik, 2. eine Information, und zwar kurze Berichte aus verschiedenen Ländern, 3. eine bibliographische Chronik, das ist eine Angabe von einschlägigen Büchern und Abhandlungen, teilweise mit kurzen Inhaltsangaben, 4. einen Auszug der in 1. erwähnten Arbeiten und 5. Mitteilungen der Association.

N. Hofreiter, Wien

Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt. Von *L. Föppl.* Mit 71 Textabbildungen und 8 Bildtafeln. 174 S. München: R. Oldenbourg. 1959. Geb. DM 20.—.

Der Vorlesungszyklus des berühmten Göttinger Mathematikers *Felix Klein* enthielt auch eine Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt", die den Zweck hatte, den fortgeschrittenen Studierenden die Elementarmathematik von einem höheren Standpunkt aus darzulegen. Den gleichen Zweck verfolgt das vorliegende Werk des em. o. Prof. der technischen Mechanik an der technischen Hochschule München, das seinen Titel dem Kleinschen Werke bewußt nachgebildet hat und das gleichfalls fortgeschrittenen Studierenden eines Ingenieurfaches oder der technischen Physik oder den nach vertiefter Ausbildung strebenden fertigen Ingenieuren und Physikern die elementare Mechanik von einem höheren Standpunkt aus darzulegen versucht. Dieser höhere Standpunkt bringt es mit sich, daß zunächst in einem 1. Abschnitt die geschichtliche Entwicklung der Mechanik von *Archimedes* (287—212) bis zu *Newton* (1642—1726) dargelegt wird, wobei Kurzbiographien und Bilder der großen Meister der Mechanik (*Galilei, Kepler, Huygens, Guericke, Newton, Jacques Bernoulli, Euler* und *Mach*) gebracht werden und der jeweilige Stand der Mechanik bei der Besprechung der Leistungen dieser großen Meister geschildert wird. Der 2. Abschnitt ist gänzlich dem Aufbau der Newtonschen Mechanik gewidmet. Ein 3. und 4. Abschnitt behandelt die Differential- und Integralprinzipe der Mechanik. Der letzte 5. Abschnitt erörtert die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik, die auftreten, wenn die mechanischen Geschwindigkeiten mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden. Dagegen konnte sich der Verf. nicht dazu entschließen, auch die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik darzustellen, die auftreten, wenn das Plancksche Wirkungsquantum nicht mehr gleich Null gesetzt werden kann, da er nach seinen eigenen Worten „hierfür bisher keine für das Buch passende Darstellung dieser neuesten Entwicklung der Mechanik hat finden können". Da aber im 4. Abschnitt das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung seinen Platz gefunden hat, hätte vielleicht das Hamiltonsche Prinzip der variierenden Wirkung mit der daran anschließenden

Hamilton-Jacobischen Integrationstheorie auch einen anschaulichen Zugang zu dieser neuesten Entwicklung eröffnen können. Möglicherweise hätte aber eine Darstellung dieser Gedankengänge den Rahmen des Buches gesprengt.

Wie bei einem Altmeister der Mechanik wie *Ludwig Föppl* nicht anders zu erwarten, ist die Darstellung aller in dem Buch gebrachten Gedankengänge außerordentlich klar und verständlich. Das Ziel des Verf., den nach harmonischer Ausbildung strebenden Technikern und Physikern die Möglichkeit zu geben, sich in der Mechanik gründlich weiterzubilden, ist in so hervorragender Weise erreicht, daß man diesem wahrhaft köstlichen Buche die weiteste Verbreitung wünschen möchte. *Th. Sexl*, Wien

The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Von *J. W. Miles.* (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Mit 49 Textabb., XII, 220 S. Cambridge: At the University Press. 1959. 45/-net.

Die vorliegende Monographie gibt einen Überblick über die Resultate des Verf., welche er bei dem Problem der Anwendung der Potentialtheorie der idealen Flüssigkeiten zur Berechnung der aerodynamischen Kräfte auf Tragflächen und dünne Körper im nichtstationären Überschallgebiet erzielte. In den ersten vier Kapiteln werden zunächst die *Euler*schen Gleichungen linearisiert und auf geeignete Normalformen transformiert und soweit möglich explizite Lösungen der auftretenden Randwertprobleme mit Hilfe von Integraltransformationen gegeben. Tragflächenformen, für welche exakte Lösungen der linearisierten Gleichungen gefunden werden konnten, werden in den Kapiteln 5 bis 8 diskutiert. Allgemeinere Formen müssen mit Hilfe von Näherungsmethoden behandelt werden, was in den Kapiteln 9 bis 12 durchgeführt wird. Die Einschränkungen, welche durch die Linearisierung der Gleichungen bedingt sind, werden in einem letzten 13. Kapitel erörtert. Die vollständige Lösung eines Problems für eine nichtstationäre Strömung enthält natürlich als Spezialfall auch die Lösung des entsprechenden Problems für die stationäre Strömung wie sie sich größtenteils in der, in der gleichen Sammlung erschienenen, Monographie von *G. N. Ward* über die linearisierte Theorie der stationären Überschallströmungen finden. Am Schluß des Buches befindet sich ein Literaturverzeichnis mit ungefähr 300 Zitaten und eine Zusammenstellung der benützten Bezeichnungen. Das klar und anregend geschriebene Buch bildet für alle auf diesem Gebiet arbeitenden Spezialisten ein unentbehrliches Nachschlagewerk. Druck und Ausstattung des Werkes sind mustergiltig. *Th. Sexl*, Wien

Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle. Von *J.-L. Destouches.* (Les Grands Problèmes des Sciences: IX.) VII, 163 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. fr. 4000.—.

In der gleichen Serie wie die vorliegende erschien 1956 eine Monographie des gleichen Verf., in der er auf Arbeiten von *L. de Broglie* fußend eine funktionelle Theorie der Elementarteilchen entwickelte. In dieser Theorie werden einer punktförmigen Singularität, genannt Partikel, physikalische Wellen zugeordnet, also statt der Ψ-Funktion, die nur statistisch mit den Beobachtungsdaten zusammenhängt, objektive Elemente in der Wellenbeschreibung der Teilchen eingeführt. Dabei werden im Gegensatz zur früheren Auffassung nicht gequantelte Bewegungen nicht grundsätzlich ausgeschlossen, vielmehr gerade zur Beschreibung der Übergänge zu den gequantelten Bewegungen herangezogen. Der Grundgedanke dieser Theorie wurde in einem ersten Kapitel axiomatisch begründet und der Zusammenhang mit dem *de Broglie*schen Ansatz

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right) u + i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = Q(u, \nabla),$$

wo $Q(u, \nabla)$ die nichtlinearen Terme repräsentieren soll, erörtert. Dieses Kapitel wird in der vorliegenden Monographie gleichfalls im ersten Kapitel in konzentrierter Form wiederholt. Während aber in der ersten Monographie nur nichtrelativistische Probleme und Teilchen ohne Spin behandelt wurden, findet sich jetzt im Kap. 2 die relativistische Theorie von Teilchen mit Spin ½ (Paulisches Elektron), im Kap. 3 die Theorie des *Dirac*schen Elektrons auf Grund der neuen Gesichtspunkte. Kap. 4 behandelt Teilchen mit dem isotopen Spin ½ mit und ohne Spiegelungsunsymmetrie (handedness, chiralite), Kap. 5 Teilchen mit dem Spin 1 und das Photon. Eine ausführliche Darlegung der nichtlinearen Elektrodynamik mit einer Übersicht über die älteren Theorien von *Mie*, *Born* und *Infeld*, *de Broglie* folgen in einem 6. und die Theorie des Gravitons (Spin 2) und der Gravitation in einem 7. und 8. Kap. Das Hauptproblem aller Erörterungen ist die geeignete Bestimmung der nichtlinearen Terme $Q(u, \nabla)$. Dem Verf. scheint zumindest eine teilweise Bestimmung dieser Terme gelungen zu sein. Infolgedessen glaubt er sich zu der Hoffnung berechtigt, daß die funktionelle Theorie der Elementarteilchen eine geeignete Grundlage für eine Vereinigung der bisher getrennt nebeneinanderlaufenden Theorien der Elementarteilchen von *Broglie* und *Heisenberg* im mikroskopischen und der einheitlichen makroskopischen Feldtheorien von *Einstein* bilden werde. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29