Fünfter Teil.

Zur Goldbachschen Vermutung.

Einleitung.

Im Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach vom Juni 1742 findet sich die Vermutung ausgesprochen, daß jede positive gerade Zahl sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen lasse. Also in moderner Sprache (da man ja 1 nicht mehr zu den Primzahlen rechnet), daß jede gerade Zahl >0 sich als Summe von zwei Zahlen darstellen läßt, deren jede Eins oder Primzahl ist. Man pflegt als Goldbachsche Vermutung die etwas verschärfte Behauptung zu bezeichnen: Jede gerade Zahl >2 läßt sich als Summe von zwei Primzahlen (in unserem Sinne) darstellen; oder, was offenbar ganz dasselbe besagt, jede gerade Zahl >4 läßt sich als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellen.

Ich hatte die Frage, ob diese Vermutung richtig ist, in meinem Vortrag *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion* auf dem letzten internationalen Mathematikerkongreß (in Cambridge 1912) als unangreifbar beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft bezeichnet.

Die Geschichte hat mir teils Recht, teils Unrecht gegeben; ich finde, daß ich ganz Recht gehabt habe.

Hardy und Littlewood knüpfen in der dritten ihrer Abhandlungen *Some problems of 'Partitio numerorum'*, die den Untertitel trägt *On the expression of a number as a sum of primes*, an meine Cambridger Worte an; sie greifen dann das Problem mit den neuen Methoden an, die sie in die sogenannte additive Zahlentheorie mit großem Erfolg eingeführt haben. Ich habe unbedingt Recht gehabt, indem ich das Problem als auf Grund des 1912er Standes der Wissenschaft unangreifbar bezeichnete. Ich habe auch heute noch Recht, indem Hardys und Littlewoods Angriff trotz ihrer neuen Hilfsmittel durch die Tücke des Objekts doch abgeschlagen wurde. In ihrer genannten Abhandlung haben sie allerdings alles bewiesen, was sie in ihrer ausführlichen Einleitung zu beweisen versprachen. Sie haben aber nicht einmal bewiesen, daß man jede ungerade Zahl >7 als Summe von drei ungeraden Primzahlen darstellen kann (was natürlich von vornherein klar wäre, wenn die Goldbachsche Vermutung richtig wäre; $n-3=p_1+p_2$). Sie haben auch nicht bewiesen, daß man alle hinreichend großen ungeraden Zahlen in drei (oder auch nur 100000) ungerade Primzahlen zerlegen kann. Sondern sie haben bewiesen, daß die letztere Tatsache (mit 3) gilt, **wenn** die Riemannsche Vermutung über die Wurzeln der Zetafunktion und die unendlich vielen entsprechenden Vermutungen über die Wurzeln sämtlicher Dirichletscher L-Funktionen richtig sind.

Was ist die Zetafunktion? Was ist die Riemannsche Vermutung? Was sind die Dirichletschen L-Funktionen?

Von diesem Moment an mache ich bis zum Teil 7 dieses Werkes uneingeschränkten Gebrauch von den Elementen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen; zum Überfluß werde ich am Beginn des Kap. 2 ungefähr andeuten, wie weit diese Anforderungen gehen. Es sei s eine komplexe Veränderliche; andauernd werde der reelle Teil von s mit σ bezeichnet, demgemäß $s=\sigma+ti$ gesetzt, wo $\sigma=\Re(s)\gtreqless 0$, $t=\Im(s)\gtreqless 0$. t braucht also nicht ganz zu sein, wie überhaupt hinfort Zahlen nur dann ganz sein müssen, wenn dies besonders gesagt wird. Es sei $u>0$; u^s bedeute die ganze transzendente Funktion $e^{s\log u}$ von s, wo $\log u$ den reellen Logarithmus bezeichnet; da jene Funktion nirgends verschwindet, ist auch $\frac{1}{u^s}$ eine ganze Funktion von s und zwar gleich u^{-s}. Es sei k eine beliebige positive ganze Zahl, χ ein beliebiger Charakter modulo k im Sinne von Teil 2, Kapitel 3, § 2. Dann bedeute $L(s,\chi)$, kurz $L(s)$, diejenige analytische Funktion von s, welche wir für $s>1$ damals in § 3 kennen gelernt haben, definiert durch die Gleichung

$$L(s)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\chi(a)}{a^s}.$$

Wir werden in Kap. 3 leicht zeigen können, daß die Reihe in der ganzen Halbebene $\sigma>1$ konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt. Ferner, daß $L(s)$ über die Gerade $\sigma=1$ fortgesetzt werden kann und in der Halbebene $\sigma>0$ regulär ist, mit Ausnahme des beim Hauptcharakter vorhandenen Poles $s=1$. Man weiß seit vielen Jahrzehnten (aber das wird der Leser nicht kennen lernen, da ich diese Dinge aus dem Hardy-Littlewoodschen Beweis entfernen konnte und auch in Teil 7 nicht brauche, wo die L-Funktionen wieder erscheinen werden), daß bis auf den Pol in $s=1$ bei χ_0 jedes $L(s)$ in der ganzen Ebene regulär ist; daß bis auf gewisse „triviale" unendlich viele Wurzeln in negativen ganzen Zahlen und auf der Achse des Imaginären $\sigma=0$ (über deren Lage man genau Bescheid weiß) alle übrigen, „nicht trivialen" Wurzeln dem Streifen $0\leqq\sigma\leqq 1$ angehören und symmetrisch zur Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ liegen.

Man weiß seit drei Jahrzehnten (Hadamard und de la Vallée Poussin 1896; auch das wird dem Leser erspart bleiben), daß die nicht trivialen Wurzeln ϱ in unendlicher Menge vorhanden sind, aber so dünn liegen, daß $\Sigma\frac{1}{|\varrho|^{1+\varepsilon}}$ für jedes $\varepsilon>0$ konvergiert, und daß sie alle im Streifen $0<\sigma<1$ liegen. Somit gehören sicher der Halbebene $\sigma\geqq\frac{1}{2}$ unendlich viele ϱ an. All dies gilt für jedes einzelne $L(s,\chi)$.

Die Riemannsche Zetafunktion ist der Spezialfall $k=1$ (also $\chi=\chi_0$) der L-Funktionen, also die bis auf den Pol $s=1$ überall reguläre Funktion, welche für $s>1$ durch die Reihe

$$\zeta(s)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^s}$$

definiert ist. Hier sind die trivialen Wurzeln die negativen geraden Zahlen, jede mit der Vielfachheit Eins; alle übrigen Wurzeln gehören dem Streifen $0\leqq\sigma\leqq 1$ an und liegen symmetrisch zur Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ und zur Geraden $t=0$. Soweit war schon Riemann 1859 gekommen. Riemann vermutete nun, daß alle diese „nicht trivialen" Wurzeln von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ liegen. Ich weiß nicht, ob das wahr oder falsch ist.

Hardy und Littlewood haben nun bewiesen:

Wenn keine Wurzel irgendeines $L(s)$ der Halbebene $\sigma>\frac{1}{2}$ angehört (ja bereits, **wenn** *es eine absolute Konstante $\Theta<\frac{3}{4}$ gibt, so daß keine Wurzel irgendeines $L(s)$ der Halbebene $\sigma>\Theta$ angehört), so ist jede hinreichend große ungerade Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen darstellbar.*

Ich setze hierfür einen einfacheren Beweis in den folgenden Kapiteln 1—6 auseinander. Einfacher ist er nur geworden, weil ich die oben genannten und weitere feine Eigenschaften von $L(s)$ entbehren kann. Der Kern, mein Kapitel 6, ist genau die Hardy-Littlewoodsche Beweisführung auf Grund eines einzigen Hilfssatzes (Satz 248), in den die Kap. 1—5 münden und den Hardy und Littlewood auf ihrem Wege zuerst bewiesen hatten.

Ich lege Wert darauf, diese Dinge trotz der unendlich vielen „wenn" im Resultat darzustellen, und zwar jetzt schon, weil sie eine gute Vorbereitung auf Teil 6 (Zerlegung in $k$te Potenzen) sein werden; in jenem Teil 6 werden wir die Hardy-Littlewoodsche Methode zur Behandlung additiver Probleme an einem schwierigeren Beispiel kennen lernen, wo sie allerdings zu einem vollen Ergebnis ohne „wenn" führen wird. (r^k, wo $k>0$ ganz und fest ist, ist eben eine einfachere Funktion von r als die $r$te Primzahl.) Allerdings kann Teil 6 ohne oder vor Teil 5 gelesen werden; das ist von Vorteil für solche Leser, die sich für Primzahlen und Charaktere weniger interessieren als für Zerlegung in $k$te Potenzen.

In Kap. 8—9 dieses fünften Teils beweise ich noch einen Hardy-Littlewoodschen Satz über die Zerlegung in Primzahlen; er enthält von dem Resultat der Kap. 1—7 das, was ich schon ausgesprochen habe; hingegen nicht, was ich gleich nachher als Ergebnis des Kap. 7 nennen werde.

Das Ergebnis der Kap. 8—9 sieht der Goldbachschen Vermutung schon ähnlicher und lautet:

1) ***Wenn** usw., so sind „fast alle" geraden positiven Zahlen als Summe zweier ungerader Primzahlen darstellbar.*

„Fast alle" heißt: Unter den ersten m geraden positiven Zahlen seien $f(m)$ nicht in zwei ungerade Primzahlen zerlegbar; dann ist

$$\lim_{m=\infty} \frac{f(m)}{m} = 0.$$

Kurz: Für höchstens 0% aller positiven geraden Zahlen ist die Goldbachsche Vermutung falsch. Diese höchstens 0% schließen allerdings nicht aus, daß es unendlich viele Ausnahmen gibt.

Genauer wird sogar bewiesen:

2) ***Wenn*** *usw., so gibt es ein absolut konstantes $\vartheta<1$, so daß*

$$\lim_{m=\infty} \frac{f(m)}{m^{\vartheta}} = 0.$$

Daß dieser Satz (nämlich 2), aber noch nicht 1)) den oben genannten Satz über drei Summanden enthält, sei gleich hier begründet, da es nur wenige Zeilen erfordert.

Ist $n>5$ ungerade und nicht Summe dreier ungerader Primzahlen, so ist für alle ungeraden $p<n$ die gerade Zahl $n-p$ nicht Summe zweier ungerader Primzahlen; dies sind $\pi(n)-1$ oder $\pi(n)-2$ Ausnahmezahlen bis n; daher ist (weil es bis n genau $\frac{n-1}{2}$ gerade positive Zahlen gibt)

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) \geqq \pi(n)-2 > \beta_1 \frac{n}{\log n}$$

nach Satz 112, wo β_1 (desgl. $\beta_2, \ldots, \beta_5$ nachher) eine positive absolute Konstante ist. Nach dem genannten Satz 2) ist, **wenn** usw.,

$$f\left(\frac{n-1}{2}\right) < \beta_2 n^{\vartheta},$$

also

$$\beta_1 \frac{n}{\log n} < \beta_2 n^{\vartheta}.$$

Wegen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\beta_2 n^{\vartheta}}{\beta_1 \frac{n}{\log n}} = 0$$

ist also

$$n < \beta_3;$$

d. h. nur endlich viele ungerade $n>0$ sind nicht Summen von drei ungeraden Primzahlen.

Nun will ich aber sagen, was ich in Kap. 7 dieses Teils beweisen werde; ich nannte oben nur den in Kap. 6 bewiesenen Spezialfall des Hauptresultates, welches vollständig lautet:

Wenn *usw., so ist die Anzahl $N(n)$ der Zerlegungen jeder ungeraden ganzen Zahl $n>1$ in drei ungerade Primzahlen von der Gestalt*

(170) $$N(n) = \frac{n^2}{2\log^3 n}\left(\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\cdot\prod_{p/n}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)+\lambda(n)\right),$$

wo

(171) $$\lim_{n=\infty} \lambda(n) = 0.$$

Dies zeigt allerdings, daß für alle großen n

$$N(n) > 0$$

ist, **wenn** usw. (das war der oben genannte Spezialfall). Denn der erste Summand in der Klammer auf der rechten Seite von (170) ist zwar von n abhängig, aber sicher größer als

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\cdot\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right) = \beta_4,$$

und wegen (171) ist für $n>\beta_5$

$$\beta_4 + \lambda(n) > 0.$$