Ueber die Riemann'sche Primzahlfunction *).

Von

Helge von Koch in Stockholm (Djursholm).

Wir bezeichnen mit $F(x)$ die Anzahl aller Primzahlen, welche kleiner sind als eine gegebene positive Zahl x und setzen mit Riemann

$$f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots.$$

Die Riemann'sche Primzahlformel, die bekanntlich durch die Arbeiten der Herren Hadamard und von Mangoldt streng bewiesen worden ist, stellt diese Function durch eine convergente Reihe dar; diese Reihe ist aber weder *absolut* noch *gleichmässig* convergent. Von diesen Nachtheilen kann man sagen, dass der zweite in der Natur der Sache liegt und ihm nicht abgeholfen werden kann, solange man einen Ausdruck fordert, der *exact* die Function darstellen soll**). Man kann sich aber fragen ob es nicht möglich sei, $f(x)$ als die Summe zweier Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auszudrücken, von dem die erste durch eine absolut und gleichmässig convergente Reihe darstellbar sei, die zweite aber eine solche discontinuirliche Function bedeute, die für alle x kleiner bleibt als eine constante Grösse.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine solche Darstellung zu geben. Die Formel, die wir ableiten werden, ist in gewisser Hinsicht der Riemann'schen Formel analog, hat aber nicht nur den Vorzug, die Differenz zwischen $f(x)$ und den Integrallogarithmus $Li(x)$ mit genügender Annäherung durch eine absolut und in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergente Reihe auszudrücken, sondern kann auch dazu benutzt werden, einen Satz über die Grössenordnung der Differenz $f(x) - Li(x)$ zu beweisen.

---

*) Arbeit, vorgetragen bei dem internationalen Mathematikercongress zu Paris 1900.

**) Da nämlich $f(x)$ discontinuirlich ist, so kann diese Function nicht durch eine gleichmässig convergente Reihe dargestellt werden.

Dieser Satz, den ich schon in einer früheren Arbeit bewiesen habe*), kann so ausgesprochen werden:

*Wenn der Satz von Riemann**) über die Nullstellen der durch die Reihe*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

definirten Function $\zeta(s)$ *richtig ist, so kann die Differenz* $f(x) - Li(x)$ *von nicht höherer Ordnung als* $\sqrt{x} \cdot \log x$ *sein.*

I.

Neue Darstellung der Function $f(x)$.

1. Es sei r eine willkürliche reelle Variabele und man setze

$$(1)\quad \psi(x, r) = \sum_{p<x} p^{-r} \log p + \sum_{p^2<x} p^{-2r} \log p + \sum_{p^3<x} p^{-3r} \log p + \cdots,$$

wo die erste Summe über alle Primzahlen $<x$ zu erstrecken ist, die zweite über alle Primzahlen $< x^{\frac{1}{2}}$, die dritte über alle Primzahlen $< x^{\frac{1}{3}}$, u. s. w.

Zwischen die so eingeführte Function $\psi(x, r)$ und die Riemann'sche Function $f(x)$ hat man, wie unmittelbar ersichtlich ist, die Relation

$$(2)\qquad f(x) = \int_0^{\infty} \psi(x, r)\, dr.$$

Um für $f(x)$ eine Darstellung zu erhalten, beginnen wir mit einem Studium dieser Function $\psi(x, r)$.

Die Euler'sche Formel

$$(3)\qquad \sum p^{-s} \log p + \sum p^{-2s} \log p + \cdots = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

wo die Summen über alle Primzahlen zu erstrecken sind, gilt bekanntlich, solange der reelle Bestandtheil von s grösser als 1 ist.

In dieser Gleichung ersetze man s durch $r + \nu s$, unter s eine reelle positive Zahl, unter ν eine positive ganze Zahl verstanden; man multiplicire beide Glieder mit

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s}$$

*) *Sur la distribution des nombres premiers.* Acta mathematica, t. 24.

**) Diesen Satz, welcher aussagt, dass der reelle Theil jeder imaginären Wurzel der Function $\zeta(s)$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, ist es noch nicht gelungen, streng zu beweisen. In einer neuerdings erschienenen Arbeit (Acta mathematica, t. 22, p. 359) versichert Herr Jensen, einen strengen Beweis gefunden zu haben. Dieser Beweis ist aber noch nicht veröffentlicht worden.

und summire alle Gleichungen welche man erhält, indem ν die Reihe der Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots$$

durchläuft.

Es kommt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum^{p} \sum^{\lambda} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s} p^{-\lambda r - \nu \lambda s} \log p = \Psi(x, r, s), \tag{4}$$

wo $\Psi(x, r, s)$ durch die Gleichung

$$\Psi(x, r, s) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s} \frac{\zeta'(r+\nu s)}{\zeta(r+\nu s)} \tag{5}$$

definirt ist; die Summe $\sum^{p}$ ist über alle Primzahlen, die Summe $\sum^{\lambda}$ über alle ganze positive Zahlen zu erstrecken.

Da, wie man leicht findet*), die dreifache Summe in (4) für $r+s>1$ absolut convergirt, so ist man berechtigt, zuerst nach ν, und dann nach p und λ zu summiren.

Bemerkt man, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s} p^{-\lambda r - \nu \lambda s} = p^{-\lambda r} e^{-x^s p^{-\lambda s}}$$

ist, so nimmt (4) die folgende Form an

$$\sum^{p} \sum^{\lambda} p^{-\lambda r} \log p \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right) = \Psi(x, r, s). \tag{6}$$

Die Reihe links ist aber, wie man ohne Schwierigkeit beweist (Vgl. loc. cit. p. 162) für alle reellen Werthe von s, welche grösser sind als $1 + h - r$ (unter h eine beliebige positive Zahl verstanden) gleichmässig convergent.

Um den Werth dieser Reihe für $s = \infty$ zu erhalten, hat man also nur $s = \infty$ in jedem Glied zu setzen.

Es ist aber

$$\lim_{s=\infty} \left(1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \tag{7}$$

je nachdem $x > p^\lambda$ oder $x < p^\lambda$ ist; der Fall $x = p^\lambda$ ist ausgeschlossen, wenn, wie wir im folgenden der Einfachheit halber annehmen wollen, die gegebene Zahl x nicht einer ganzen Zahl gleich ist.

Der Grenzwerth für $s = \infty$ der linken Seite der Gl. (6) ist also, wie unmittelbar einleuchtet, nichts anderes als die oben definirte Function $\psi(x, r)$, und man erhält die Formel

---

*) Siehe die oben cit. Arbeit (Acta math., t. 24, p. 161).

$$\psi(x,r)=\lim_{s=\infty}\Psi(x,r,s), \tag{8}$$

unter $\Psi(x,r,s)$ die oben Gl. (5) definirte Reihe verstanden.

Führt man diesen Ausdruck in die Formel (2) ein, so kommt

$$f(x)=\int_0^\infty \lim_{s=\infty}\Psi(x,r,s)\,dr. \tag{9}$$

Für das folgende ist es wesentlich zu bemerken, dass man, um eine hinreichende Approximation zu erhalten, nicht bis an die Grenze ($s=\infty$) gehen muss. Wir werden in der That finden, dass der Ausdruck

$$\int_0^\infty \Psi(x,r,s)\,dr \tag{10}$$

schon für

$$s\geqq 2x\log x$$

einen Werth annimmt, welcher sich von $f(x)$ nur durch eine Grösse unterscheidet, die kleiner bleibt als eine feste, angebbare Zahl.

Um dies zu beweisen schreiben wir die linke Seite der Gl. (6) in der Form:

$$\sum^p\sum^\lambda p^{-\lambda r}\log p\left(1-e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right)=\Psi(x,r)-\eta_1+\eta_2,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\eta_1=\sum_{p^\lambda<x}p^{-\lambda r}\log p\cdot e^{-x^s p^{-\lambda s}},$$

$$\eta_2=\sum_{p^\lambda>x}p^{-\lambda r}\log p\left(1-e^{-x^s p^{-\lambda s}}\right);$$

die Summe η_1 erstreckt sich über alle Primzahlpotenzen $<x$, η_2 über alle Primzahlpotenzen $>x$.

Ohne die Allgemeinheit des Problems einzuschränken, können und wollen wir annehmen, es sei x von der Form

$$x=n+\frac{1}{2}$$

unter n eine positive ganze Zahl verstanden.

Ist $p^\lambda<x$, so hat man also nothwendig

$$p^\lambda\leqq x-\frac{1}{2};$$

daraus folgt

$$e^{-x^s p^{-\lambda s}}<\left(\frac{p^\lambda}{x}\right)^s\leqq\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s$$

und also

$$\eta_1 < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s \psi(x, r). \tag{11}$$

Ist aber $p^\lambda > x$ so muss nothwendig

$$p^\lambda \geqq x + \frac{1}{2}$$

sein; da aber für $p^\lambda > x$

$$1 - e^{-x^s p^{-\lambda s}} < \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s$$

ist, so erhält man für η_2 die folgende Ungleichung:

$$\eta_2 < x^s \sum_{\nu = x+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^{s+r}}.$$

Die Summe rechts ist aber, wie man sich durch Betrachtung des Integrals

$$\int_{x+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\log x\, dx}{x^{s+r}}$$

leicht überzeugt, kleiner als:

$$\frac{\log\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}} + \frac{1}{(s+r-1)^2}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}} + \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}(s+r-1)}.$$

Dieser Ausdruck ist, sobald

$$s + r - 1 > x + \frac{1}{2}$$

angenommen wird, kleiner als

$$\frac{3 \log\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{s+r}}.$$

Für η_2 ergiebt sich also die Ungleichung

$$\eta_2 < 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \cdot \log\left(x+\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^r}. \tag{12}$$

Aus der Gl. (6), welche wir auch folgendermassen schreiben können:

$$\Psi(x, s, r) = \psi(x, r) - \eta_1 + \eta_2$$

ergiebt sich aber

$$\int_0^\infty \Psi(x, s, r)\, dr = f(x) - \int_0^\infty \eta_1\, dr + \int_0^\infty \eta_2\, dr.$$

Setzt man diese Gleichung in Verbindung mit den Ungleichheiten

$$\int_0^\infty \eta_1 \, dr < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s f(x),$$

$$\int_0^\infty \eta_2 \, dr < 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s,$$

welche sich nach den Formeln (11, 12) ergeben, so findet man, dass $f(x)$ unter der folgenden Form geschrieben werden kann

$$f(x) = \int_0^\infty \Psi(x, s, r) \, dr + \varepsilon(x, s), \tag{13}$$

wo $\varepsilon(x, s)$ eine Function bedeutet, die der Ungleichung

$$|\varepsilon(x, s)| < \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s f(x) + 3\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s \tag{14}$$

genügt (sobald nur $s + r - 1 > x + \frac{1}{2}$ ist).

Da aber

$$f(x) < x,$$

$$\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x}},$$

$$\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}},$$

so sieht man dass für

$$x > 1, \quad s \geqq 2x \log x$$

die folgende Ungleichung besteht:

$$|\varepsilon(x, s)| < 1 + \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}. \tag{15}$$

Nimmt man noch $x > \sqrt{27}$, so wird die Function $\varepsilon(x, s)$ sicher, dem absoluten Betrag nach, kleiner als 2.

Dieses Resultat sprechen wir so aus:

Setzt man in dem Ausdruck:

$$\int_0^\infty \Psi(x, s, r) \, dr \tag{16}$$

für s einen Werth s_0 ein, der die Ungleichheit

$$s_0 \geqq 2x \log x$$

befriedigt, so wird der Unterschied zwischen diesem Ausdruck und der Riemann'schen Function $f(x)$ kleiner als 2, vorausgesetzt, dass $x > \sqrt{27}$ ist.

Wünscht man, dass die Differenz $\varepsilon(x, s)$ zwischen $f(x)$ und (16) mit wachsendem x unendlich klein werde, so braucht man nur

$$s \geqq x^2$$

zu nehmen, wie aus der Ungleichung (14) ersichtlich ist.

2. Um die gefundenen Ausdrücke umzuformen, werden wir uns von der bekannten Darstellung der Function $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ durch eine Partialbruch-Reihe bedienen, die sich aus dem Hadamard'schen Fundamentalsatze unmittelbar ergiebt.

Ist $\varrho = \alpha + i\beta$ eine beliebige imaginäre Wurzel der Function $\zeta(s)$ und bezeichnet man durch $\varrho_0 = \alpha - i\beta$ die zu ϱ conjugirte Wurzel, so kann die fragliche Formel so geschrieben werden:

$$(17) \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} l\pi - \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\varrho_0} \right),$$

wo C die Euler'sche Constante bedeutet und wo die Summation $\sum_{\varrho}$ über alle diejenigen imaginären Wurzeln der Function $\zeta(s)$ zu nehmen ist, deren imaginärer Bestandtheil $\beta > 0$ ist.

Setzt man die sich hieraus für die Function $\frac{\zeta'(r+\nu s)}{\zeta(r+\nu s)}$ ergebenden Ausdrücke in die Formel (5) ein, so erhält man $\Psi(x, s, r)$ ausgedrückt durch eine unendliche Doppelreihe.

Man findet ohne Schwierigkeit*) dass diese Reihe *absolut* convergent ist, dass man also dazu berechtigt ist, zuerst nach den Summationsbuchstaben ν und dann nach n und ϱ zu summiren.

Führen wir, wie in der oben angeführten Arbeit, die durch die Gleichung

$$(14) \qquad P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu s + \alpha} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} x^{\nu s}$$

definirte Function ein, so ergiebt sich hiernach für $\Psi(x, s, r)$ die folgende Darstellung:

*) Vgl. loc. cit. § 4.

$$(19)\quad \Psi(x,s,r) = -\left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}l\pi\right)(1-e^{-x^s}) + P(x,s,r-1)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x,s,r+2n) - \tfrac{1}{2n}(1-e^{-x^s})\right]$$
$$-\sum_{\varrho}[P(x,s,r-\varrho) + P(x,s,r-\varrho_0)].$$

Es ist aber leicht, die Function $P(x, s, \alpha)$ durch ein definites Integral auszudrücken*). Man erhält

$$(20)\qquad P(x,s,\alpha) = x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha-1}(1-e^{-y^s})\,dy.$$

Durch partielle Integration ergeben sich hieraus die Formeln

$$(21)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\int_0^x s y^{\alpha+s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

$$(22)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)}$$
$$-\frac{s^2}{\alpha(s+\alpha)}x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+2s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

$$(23)\qquad P(x,s,\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)} - \frac{s^2 x^{2s} e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)(2s+\alpha)}$$
$$-\frac{s^3}{\alpha(s+\alpha)(2s+\alpha)}x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+3s-1}e^{-y^s}\,dy,$$

die wir soeben benutzen werden.

Für die Function $P(x, s, r-1)$ benutzen wir die Formel (21), für die anderen in der Formel (19) auftretenden $P(x, s, \alpha)$ bedienen wir uns der Formel (23).

Benutzt man die Gleichung (17) so ergiebt sich hieraus:

$$(24)\qquad \Psi(x,s,r) = -\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}(1-e^{-x^s}) - \frac{x^{1-r}}{r-1}\int_0^x s y^{r-1}y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$
$$+A+B+C+D,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(25)\qquad A = s x^s e^{-x^s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)} + \sum_{\varrho}\frac{1}{\varrho(r-\varrho)(s+r-\varrho)}\right\},$$

*) loc. cit. pag. 169.

$$(26)\quad B = s^2 x^{2s} e^{-x^s}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} + \sum_\varrho \frac{1}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\right\},$$

$$(27)\quad C = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{s^3}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} y^{2s-1} e^{-y^s}\,dy,$$

$$(28)\quad D = \sum_\varrho \int_0^x \frac{s^3}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} y^{2s-1} e^{-y^s}\,dy;$$

in diesen Ausdrücken ist die Summation $\sum_\varrho$ über alle imaginären Wurzeln ϱ der Function $\zeta(s)$ zu nehmen.

Bemerkt man aber, dass die Function $1 - e^{-x^s}$ unter der Form

$$1 - e^{-x^s} = \int_0^x s y^{s-1} e^{-y^s}\,dy$$

geschrieben werden kann, so erhält $\Psi(x, s, r)$ die Form:

$$(29)\quad \Psi(x, s, r) = J + A + B + C + D,$$

indem

$$(30)\quad J = \int_0^x \left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{1-r}\frac{1}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\} s y^{s-1} e^{-y^s}\,dy$$

gesetzt ist. Also wird das Integral

$$(31)\quad \int_0^\infty \Psi(x, s, r)\,dr$$

durch eine Summe von fünf Integralen ausgedrückt, die wir jetzt etwas näher studiren müssen.

3. Wir beginnen mit dem Integral $\int_0^\infty J\,dr$. Da

$$\int_0^\infty J\,dr = \int_0^x dy \cdot s y^{s-1} e^{-y^s}\int_0^\infty \left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{1-r}\frac{1}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\} dr$$

und das Integral

$$\int_0^\infty \left\{\frac{z^{1-r}}{1-r} - \frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)}\right\} dr$$

bekanntlich*) nichts anderes ist als

$$Li(z) - \log 2,$$

wo

$$Li(z) = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dz}{\log z} + \int_{1+\varepsilon}^{z}\frac{dz}{\log z}\right] \tag{32}$$

den *Integrallogarithmus* bezeichnet, so hat man also

$$\int_0^\infty J\,dr = \int_0^x \left\{Li\left(\frac{x}{y}\right) - \log 2\right\} s y^{s-1} e^{-y^s}\,dy.$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_0^\infty J\,dr = \int_0^x Li\left(\frac{x}{y}\right) s y^{s-1} e^{-y^s}\,dy - (1 - e^{-x^s})\log 2. \tag{33}$$

Um einen Näherungswerth (für grosse s) zu erhalten, theilen wir das rechts vorkommende Integral in drei Theile:

$$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^x,$$

wo h eine positive Zahl < 1, über die wir später verfügen werden, bedeutet.

Da

$$Li\left(\frac{x}{y}\right) < \frac{x}{y}$$

ist, so hat man:

$$\int_0^{1-h} < x\int_0^{1-h} s y^{s-2} e^{-y^s}\,dy < x\int_0^{1-h} s y^{s-2}\,dy,$$

also

$$\int_0^{1-h} < x\frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1}.$$

Ebenso erhält man

$$\int_{1+h}^x < \frac{x}{1+h}\int_{1+h}^x s y^{s-1} e^{-y^s}\,dy < \frac{x}{1+h} e^{-(1+h)^s},$$

also um so mehr

$$\int_{1+h}^x < x e^{-(1+h)^s} < \frac{x}{(1+h)^s}.$$

*) Siehe z. B. de la Vallée Poussin, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, etc. p. 60.

Für das Integral $\int\limits_{1-h}^{1+h}$ hat man, nach dem ersten Mittelwerthsatze,

$$\int\limits_{1-h}^{1+h} Li\left(\frac{x}{y}\right) sy^{s-1}e^{-y^s}dy = Li(\xi)\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right),$$

wo ξ eine Zahl zwischen $\frac{x}{1-h}$ und $\frac{x}{1+h}$ bedeutet. Da aber

$$|Li(\xi) - Li(x)| = \left|\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dx}{\log x}\right| = \frac{1}{\log \xi_1} \cdot |\xi - x|,$$

wo ξ_1 eine Zahl zwischen ξ und x ist, so ergiebt sich hieraus, dass man setzen kann

$$\int\limits_{1-h}^{1+h} Li\left(\frac{x}{y}\right) sy^{s-1}e^{-y^s}dy = Li(x) + \omega,$$

wo ω der folgenden Ungleichung genügt

$$|\omega| < x(1-h)^s + \frac{h}{1-h}\,\frac{x}{\log\frac{x}{1+h}}.$$

Combinirt man die so erhaltenen Ungleichungen, so kommt

$$(34)\qquad \int\limits_{0}^{x} Li\left(\frac{x}{y}\right) sy^{s-1}e^{-y^s}dy = Li(x) + \eta,$$

wo

$$(35)\quad |\eta| < x\left[\frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1} + \frac{1}{(1+h)^s} + (1-h)^s + \frac{h}{(1-h)\log\frac{1}{1+h}}\right].$$

Verfügt man jetzt derart über die kleine Zahl h dass man setzt

$$1 + h = s^{\frac{1}{s+1}},$$

so findet man nach einer kleinen Rechnung, dass der in (35) vorkommende Klammerausdruck kleiner wird als

$$\frac{K}{s} + \frac{M\log s}{s\log x},$$

wo K und M positive Constanten bedeuten, dass also

$$(36)\qquad |\eta| < x\left(\frac{K}{s} + \frac{M\log s}{s\log x}\right)$$

gesetzt werden kann. Also ist (nach Formel (33))

$$(37)\qquad \left|\int_0^\infty J\,dr - (Li(x) - \log 2)\right| < x\left(\frac{K}{s} + \frac{M\log s}{s\log x}\right) + e^{-x^s}\log 2.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar das folgende Resultat:

Für $s=\infty$ nähert sich das Integral $\int_0^\infty J\,dr$ der Grenze $Li(x) - \log 2$ und für

$$s \geqq 2x\log x$$

ist

$$\left|\int_0^\infty J\,dr - (Li(x) - \log 2)\right| < \frac{N}{\log x},$$

wo N eine Constante bedeutet.

4. Wir betrachten jetzt das Integral

$$\int_0^\infty A\,dr,$$

wo A die durch die Gl. (25) definirte Grösse bedeutet. Da

$$\frac{1}{(r+2n)(s+r+2n)} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r+2n} - \frac{1}{s+r+2n}\right),$$
$$\frac{1}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r-\varrho} - \frac{1}{s+r-\varrho}\right),$$

so findet man durch Anwendung der Formel (17), dass A unter die folgende Form gebracht werden kann:

$$A = x^s e^{-x^s}\left[\frac{\zeta'(r)}{\zeta(r)} + \frac{1}{r-1} - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} + \frac{1}{s+r-1}\right)\right],$$

also

$$A = x^s e^{-x^s}\cdot\frac{d}{dr}\log\frac{(r-1)\zeta(r)}{(s+r-1)\zeta(s+r)}.$$

Da bekanntlich

$$\log[-\zeta(0)] = -\log 2$$

ist, so erhält man also die Gleichung

$$(38)\qquad \int_0^\infty A\,dr = x^s e^{-x^s}\log 2 + \log[(s-1)\zeta(s)],$$

welche lehrt, dass das Integral $\int_0^\infty A\,dr$ für $s=\infty$ sich der Grenze Null nähert und dass, sobald nur $s \geqq 2x\log x$ angenommen wird, dies Integral der Ungleichung genügt

(39) $$\int_0^\infty A\,dr < \frac{K}{x} \cdot x^s e^{-x^2},$$

wo K eine Constante bezeichnet.

Das Integral $\int_0^\infty B\,dr$ kann in ganz ähnlicher Weise berechnet werden. Als Resultat ergiebt sich

$$\int_0^\infty B\,dr = x^{2s} e^{-x^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \log (s-1)\,\zeta(s) - \frac{1}{2} \log (2s-1)\,\zeta(2s) \right\}$$

und man sieht also, dass auch dies Integral für $s = \infty$ unendlich klein wird und dass

(40) $$\int_0^\infty B\,dr < \frac{K}{x} x^{2s} e^{-x^2},$$

sobald $s \geqq 2x \log x$ angenommen wird.

5. Wir wenden uns jetzt zum Integral

$$\int_0^\infty C\,dr,$$

wo C der durch (27) definirte Ausdruck bedeutet. Setzt man zur Abkürzung

$$[x, y, s, r, n] = \frac{s^s}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} y^{2s-1} e^{-y^2},$$

so hat man also

$$\int_0^\infty C\,dr = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \int_0^x [x, y, s, r, n]\,dy\,dr.$$

Da aber im Integrationsintervalle stets $y \leqq x$ ist und da der im Ausdruck $[x, y, s, r, n]$ vorkommende Nenner vom dritten Grade in Bezug auf r ist, so sieht man unmittelbar, dass die drei Operationen $\int_0^\infty$, $\sum_{n=1}^\infty$ und $\int_0^x$ *vertauschbar* sind, dass man also dazu berechtigt ist, das Integral $\int_0^\infty C\,dr$ in der folgenden Form zu schreiben:

(41) $$\int_0^\infty C\,dr = \int_0^x dy \cdot \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\,dr.$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen führen wir eine positive Zahl $h < 1$ ein und setzen

(42) $$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^x.$$

Da

$$\frac{s^3}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} < \frac{s}{2}\,\frac{1}{r+2n},$$

und da das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{r+2n}$$

durch die Substitution

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{r+2n} = t^{2n}$$

in

$$\int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{t^{2n+1}\log t}$$

übergeht, so findet man

(43) $$\int_0^{1-h} dy \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr$$

$$< \frac{1}{2}\int_0^{1-h} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{t^{2n+1}\log t}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1-h} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy \int_{\frac{x}{y}}^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\, t \log t}$$

$$< \frac{1}{2}\,\frac{K}{x\log x}\int_0^{1-h} s y^{3s-1}\, dy$$

$$< \frac{K}{x\log x}(1-h)^{3s},$$

wo K eine Constante bedeutet.

Um eine obere Grenze für das in (42) vorkommende Integral $\int_{1+h}^x$ zu erhalten, bemerken wir, dass man hat

$$[x, y, s, r, n] < s y^{3s-1} e^{-y^s} \frac{s^2}{(r+2n)^3}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dr}{(r+2n)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)^2}$$

also

$$\int_{1+h}^{x} dy \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr$$
$$< \frac{s^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \int_{1+h}^{x} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy.$$

Da aber

$$\int_0^x s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy = 2\left(1 - e^{-x^s} - x^s e^{-x^s}\right) - x^{2s} e^{-x^s} \tag{44}$$

ist und also

$$\int_{1+h}^{x} s y^{3s-1} e^{-y^s}\, dy < 2\left(e^{-(1+h)^s} + (1+h)^s e^{-(1+h)^s}\right) + (1+h)^{2s} e^{-(1+h)^s}$$
$$< 14(1+h)^{-s},$$

so bekommt man

$$\int_{1+h}^{x} dy \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty [x, y, s, r, n]\, dr < K\, \frac{s^2}{(1+h)^s}, \tag{45}$$

unter K eine Constante verstanden.

Um endlich das Integral $\int\limits_{1-h}^{1+h}$ zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\frac{s^2}{(r+2n)(s+r+2n)(2s+r+2n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r+2n} - \frac{2}{s+r+2n} + \frac{1}{2s+r+2n}\right)$$

und dass folglich das fragliche Integral in die Form gebracht werden kann:

$$\frac{1}{2}\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{r+2n},$$

$$\beta = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{s+r+2n},$$

$$\gamma = \int_{1-h}^{1+h} s y^{3s-1} e^{-y^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n} \frac{dr}{2s+r+2n}.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{r+2n}=\int_{\frac{x}{y}}^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)\,t\log t},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{s+r+2n}<\frac{1}{s}\,\frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r+2n}\frac{dr}{2s+r+2n}<\frac{1}{2s}\cdot\frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr$$

und

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^{r}dr=\frac{1}{\log x-\log y}$$

ist, so findet man, nach einer kurzen Rechnung, dass

$$\beta<\frac{K}{s x^2\log x},\quad \gamma<\frac{K}{2s x^2\log x}$$

ist, und dass α unter die Form

$$\alpha=2\cdot\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)\,t\log t}+\varepsilon$$

gebracht werden kann, wo ε eine kleine Zahl bedeutet, die der Ungleichung

$$\varepsilon<K(1-h)^s+\frac{Kh}{x^2\log x}$$

genügt; unter K ist, wie oben, eine positive Constante verstanden.

Vereinigt man den so für $\int\limits_{1-h}^{1+h}$ enthaltenen Ausdruck mit den früher gefundenen Ungleichungen (43) und (45) so erhält man die folgende Darstellung:

$$\int^{\infty}C\,dr=\int_x^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}+\eta, \tag{46}$$

wo

$$|\eta|<K\left\{\frac{(1-h)^{2s}}{x\log x}+\frac{s^2}{(1+h)^s}+\frac{1}{s x^2\log x}+(1-h)^s+\frac{h}{x^2\log x}\right\} \tag{47}$$

ist.

Um den eingeklammerten Ausdruck möglichst klein zu machen, wählen wir h der Gleichung

$$(1-h)^{s+1}=s^3(x^2-1)\log x$$

gemäss, d. h. wir setzen

$$h=\{s^3(x^2-1)\log x\}^{\frac{1}{s+1}}-1.$$

Für diesen Werth ergiebt sich

$$(47') \qquad |\eta| < K_1 \frac{1}{s(x^s-1)\log x} + K_2 \frac{\log s}{s(x^s-1)\log x} + K_3 \frac{\log x}{s(x^s-1)\log x},$$

wo K_1, K_2, K_3 positive Constanten bedeuten.

Hieraus ist ersichtlich, dass das Integral $\int\limits_0^\infty C\,dr$ sich mit wachsendem s der Grenze

$$\int\limits_x^\infty \frac{dx}{(x^s-1)x\log x}$$

nähert und dass schon für $s \geqq 2x \log x$ die Differenz

$$\int\limits_0^\infty C\,dr - \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^s-1)x\log x}$$

kleiner ist als

$$\frac{K}{x^s \log x},$$

unter K eine positive Zahl verstanden.

6. Es erübrigt nur noch das Integral $\int\limits_0^\infty D\,dr$ zu betrachten. Wie früher (beim Studium des Integrals $\int\limits_0^\infty C\,dr$) finden wir auch hier, dass die drei Operationen $\int\limits_0^\infty$, $\sum_\varrho$, $\int\limits_0^x$ vertauschbar sind, dass also, wenn zur Abkürzung

$$(48) \qquad R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2\,dr}{(r-\varrho)\,(s+r-\varrho)\,(2s+r-\varrho)}$$

gesetzt wird, das betreffende Integral unter der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$(49) \qquad \int\limits_0^\infty D\,dr = \sum_\varrho \int\limits_0^\infty s y^{3s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo die Summation $\sum_\varrho$, wie früher, alle imaginäre Wurzeln der Function $\xi(s)$ umfasst.

Schon hier bemerken wir, dass diese Summe *absolut* convergirt für alle positiven Werthe von x und s und dass sie *gleichmässig* convergirt in Bezug auf diese Variabeln in jedem Intervalle

(50) $$0 \leqq x \leqq X, \quad 0 \leqq s \leqq S$$

unter X und S beliebige positive Zahlen verstanden.

7. Vereinigen wir jetzt die für die fünf Integrale

$$\int J\,dr, \int A\,dr, \cdots, \int D\,dr$$

gewonnenen Formeln, so bekommen wir die folgende Darstellung des Integrals (16):

(51) $$\int_0^\infty \Psi(x, s, r)\,dr = Li(x) - \log 2 + \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2-1)x\log x}$$
$$+ \omega(x, s) + \sum_\varrho \int_0^x s y^{s s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo $\omega(x, s)$ eine Function bezeichnet, die den folgenden Bedingungen genügt

(52) $$\lim_{s=\infty} \omega(x, s) = 0$$

und

(53) $$|\omega(x, s)| < \frac{K}{\log x}$$

sobald $s \geqq 2x \log x$, unter K eine positive Constante verstanden.

Diese Formel zusammen mit der früher gewonnenen Formel (13), giebt uns endlich für die Function $f(x)$ die folgende Darstellung:

(54) $$f(x) = Li(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}$$
$$+ \varepsilon(x, s) + \omega(x, s) + \sum_\varrho \int_0^x s y^{s s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

Diese Formel enthält einen willkürlichen Parameter s. Wollte man s in's unendliche wachsen lassen, so würde unsere Formel mit der Riemann'schen Primzahlformel zusammenfallen. In der That, es ist

$$\lim \varepsilon(x, s) = 0,$$
$$\lim \omega(x, s) = 0;$$

überdies ist

$$\lim R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty\ldots}\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{dr}{r-\varrho}$$

und hieraus folgert man leicht, dass

$$\lim_{s=\infty} \int_0^x s y^{s s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int_0^\infty \frac{x^{\varrho-r}\,dr}{r-\varrho};$$

die Function rechts ist aber nichts anderes als die von Riemann mit $-Li(x^{\varrho})$ bezeichnete Function. Wenn man also in jedem Glied der Formel (54) $s = \infty$ setzt, so erhält man einen Ausdruck, der genau mit der Riemann'schen übereinstimmt*).

Durch einen solchen Grenzübergang würden aber zugleich die Vortheile, die die Formel (54) darbietet, verloren gehen. Wie wir sehen werden, beruhen nämlich die Schlüsse, die man aus dieser Formel ziehen kann, wesentlich darauf, dass die Functionen $\varepsilon(x, s)$ und $\omega(x, s)$ schon für $s = 2x \log x$ den Ungleichheiten

$$|\varepsilon(x, s)| < 1 + 3x^{-\frac{2}{s}}, \quad |\omega(x, s)| < \frac{K}{\log x}$$

also auch

$$|\varepsilon(x, s) + \omega(x, s)| < 1 + \frac{A}{\log x} \tag{55}$$

genügen, unter A eine positive Constante verstanden.

Nehmen wir also in der Formel (54)

$$s = 2x \log x \tag{56}$$

und setzen zur Abkürzung

$$T(x, s, \varrho) = \int_0^x s y^{s s-1} e^{-y^s} dy \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2 dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}, \tag{57}$$

so erhalten wir zunächst das folgende

Theorem. *Die Differenz zwischen der Riemann'schen Primzahlfunction* $f(x)$ *und den Ausdruck*

$$Li(x) - \log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)x \log x} + \sum_{\varrho} T(x, 2x \log x, \varrho) \tag{58}$$

ist kleiner als eine gewisse constante Zahl E.

Wir haben dieses Resultat bewiesen unter der Voraussetzung, dass x nicht einer ganzen Zahl gleich ist. Lassen wir diese Einschränkung fallen und bemerken, dass, wenn x einen Werth $x = p^{\lambda}$ nimmt, für welchen der Werth von $f(x)$ sich sprungweise ändert, die Differenz $f(x+0) - f(x-0)$ stets kleiner als 1 ist, so sehen wir dass das obige Theorem ohne alle Einschränkungen gültig bleibt. Betreffend die Constante E, so folgt aus dem obigen, dass sicher

$$E < 3$$

angenommen werden kann, sobald x hinreichend gross ist.

---

*) Es soll bemerkt werden, dass für den hier angedeuteten Uebergang von der Gleichung (54) zur Riemann'schen Formel eine genauere Begründung nothwendig sein würde. Es scheint sogar, als ob man auf diesem Wege einen neuen Beweis dieser Formel *nicht* erhalten könne.

Will man eine noch grössere Annäherung erhalten, was für die asymptotische Frage jedenfalls überflüssig ist, so kann man statt (56) den Werth $s = x^2$ einführen und erhält so das folgende Resultat:

Wenn x fortwährend wächst und nimmer einer ganzen Zahl gleich wird, so nähert sich die Differenz zwischen $f(x)$ und dem Ausdruck

$$Li(x) - \log 2 + \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x \log x} + \sum_\varrho T(x, x^2, \varrho) \tag{59}$$

der Grenze **Null**. *Und für ganzzahlige, hinreichend grosse Werthe von x ist diese Differenz sicher kleiner als $1 + \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet.*

Durch diese Ergebnisse ist das Problem gelöst worden, *eine continuirliche Function zu bilden, die die Riemann'sche Function $f(x)$ mit einer genügenden Annäherung darstellt.*

Da nämlich die Reihe $\sum_\varrho T(x, s, \varrho)$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergirt, so stellen die Reihen

$$\sum_\varrho T(x, 2x \log x, \varrho) \quad \text{und} \quad \sum_\varrho T(x, x^2, \varrho)$$

continuirliche Functionen von x dar und die erhaltenen Ausdrücke (58) oder (59) sind also auch continuirlich.

8. Um die Art der Convergenz der Reihe

$$\sum_\varrho T(x, s, \varrho) \tag{60}$$

näher kennen zu lernen, verfahren wir folgendermassen: Wir wählen nach Belieben eine positive Zahl h und schreiben das Integral (57) oder

$$T(x, s, \varrho) = \int_0^x s y^{2s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

wo

$$R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho} \frac{s^2 dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)},$$

unter der Form

$$T(x, s, \varrho) = T_1(x, s, \varrho) + T_2(x, s, \varrho)$$

wo

$$T_1(x, s, \varrho) = \int_0^{1+h} s y^{2s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy,$$

$$T_2(x, s, \varrho) = \int_{1+h}^x s y^{2s-1} e^{-y^s} R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right) dy.$$

Da der reelle Theil $R\varrho$ von ϱ zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt*), so ist

$$|x^\varrho| < x \quad \text{und} \quad \left|\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho}\right| < x,$$

vorausgesetzt dass y im Intervalle $1+h \cdots x$ liegt. Das Integral T_2 ist also, absolut genommen, kleiner als das Product

$$x \cdot \int_0^\infty \left|\frac{dr}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\right| \cdot \int_{1+h}^{x} s^2 y^{2s-1} e^{-y^s} dy,$$

und also ist, wie leicht ersichtlich,

(61) $$|T_2(x, s, \varrho)| < K x s^2 \frac{1}{|\varrho|^2} \frac{1}{(1+h)^s},$$

wo K eine Constante bezeichnet.

Um eine obere Grenze für $T_1(x, s, \varrho)$ zu finden bemerke man, dass

$$\left|\frac{s^2}{(r-\varrho)(s+r-\varrho)(2s+r-\varrho)}\right| < K \left|\frac{s}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

$$\left|\left(\frac{y}{x}\right)^{r-\varrho}\right| = |x^\varrho| \cdot y^{-R\varrho} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^r,$$

also, da y im Intervalle $0 \cdots 1+h$ liegt:

$$\left|R\left(\frac{x}{y}, s, \varrho\right)\right| < K_1 \cdot \left|\frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right| \cdot \frac{y^{-R\varrho}}{\log x - \log(1+h)},$$

wo K_1 eine Constante bezeichnet. Da das Integral

$$\int_0^{1+h} s y^{2s-R\varrho-1} e^{-y^s} dy < \int_0^1 s y^{2s-2} dy + \int_1^{1+h} s y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$

ist und also, für alle s, kleiner als eine gewisse Constante bleibt, so hat man also

(62) $$|T_1(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \left|\frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

unter H eine Constante verstanden.

Diese Ungleichung, zusammen mit (61) zeigen, dass man schreiben kann

$$|T(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \left|\frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|$$

und also

(63) $$\sum_\varrho |T(x, s, \varrho)| < \mathsf{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \sum_\varrho \left|\frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)}\right|,$$

vorausgesetzt, dass die Constante H hinreichend gross gewählt ist.

---

*) Nach einem bekannten Theorem der Herren de la Vallée Poussin und Hadamard.

Die in dem Ausdrucke (58) vorkommende Reihe

$$\sum_\varrho T(x, 2x \log x, \varrho)$$

convergirt also sicher nicht langsamer als die Reihe

$$(64) \qquad 2\mathrm{H} \cdot \sum_\varrho \left| \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho(2x \log x - \varrho)} \right| .$$

Wären die Wurzeln ϱ der Function $\zeta(s)$ bekannt, so würde unsere Formel dazu dienen können, die Function $f(x)$ mit einer beliebigen Annäherung für ein beliebiges Intervall

$$x_0 < x < x_1$$

zu berechnen, und zwar würde hierfür nur erforderlich sein die N ersten Glieder der Reihe zu berechnen, wo N eine Zahl bedeutet, die nur von den Grenzen x_0 und x_1 des gegebenen Intervalles abhängt. Da aber die Convergenz der Reihe (64) um so langsamer wird, je grössere Werthe die Variabele x annimmt, so ist es wahrscheinlich, dass die Zahl N in's unendliche mit x_1 wächst, dass also die Rechnung um so beschwerlicher wird, je grösser man diese obere Grenze macht.

Für exacte Berechnung der Function $f(x)$ scheint unsere Formel also zu unbequem. Dagegen scheint sie für das Studium der Eigenschaften dieser Function von Interesse zu sein und wir werden sehen dass dieselbe insbesondere sehr nützlich ist bei der Untersuchung der asymptotischen Formel

$$f(x) = Li(x).$$

II.

Anwendung auf eine asymptotische Frage.

9. Um die Formel (54) zu beweisen haben wir uns nur auf solche Eigenschaften der Function $\zeta(s)$ gestützt, welche theils von Riemann selbst, theils von Herrn Hadamard streng bewiesen worden sind. Die fundamentale Behauptung Riemann's, dass der reelle Theil jeder imaginären Wurzel von $\zeta(s)$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, für welche Behauptung es noch nicht gelungen ist, einen einwurfsfreien Beweis zu erhalten*) haben wir also noch nicht gebraucht. Als eine Anwendung der gewonnenen Resultate wollen wir aber jetzt beweisen, dass, wenn die Riemann'sche Behauptung richtig ist, die Differenz

$$f(x) - Li(x)$$

*) Vgl. die Anmerkung S. 442.

für wachsende x nicht von höherer Ordnung unendlich werden kann, als die Function

(65) $$\sqrt{x} \cdot \log x.$$

Da das Integral

$$\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)\, x \log x}$$

für wachsende x gegen Null convergirt, und da nach dem oben bewiesenen die Functionen

$$\varepsilon(x, s), \quad \omega(x, s)$$

für $s \geqq 2x \log x$, absolut genommen, sicher kleiner bleiben als eine constante Grösse, so ergeben die Formeln (54) und (63):

$$|f(x) - Li(x)| < \mathrm{H} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \sum\nolimits^{\varrho} \left| \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \right|$$

für

$$s \geqq 2x \log x.$$

Da der reelle Theil $R\varrho$ von ϱ zwischen 0 und 1 liegt, so sieht man leicht dass für $s > 2$

$$|s - \varrho| > \frac{s}{2} \quad \text{und} \quad |s - \varrho| > |\varrho|$$

ist; wählt man eine positive Grösse $\sigma < 1$, so kann man also schreiben

$$\left| \frac{s}{\varrho(\varrho - s)} \right| = s^\sigma \left| \frac{s^{1-\sigma}}{\varrho(\varrho - s)} \right| < 2s^\sigma \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right|.$$

Nach der Hypothese

$$R\varrho = \frac{1}{2}$$

oder

$$|x^\varrho| = \sqrt{x}$$

ergiebt sich also

$$|f(x) - Li(x)| < 2\mathrm{H} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x} \cdot s^\sigma \cdot \sum\nolimits^{\varrho} \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right|.$$

Da aber nach den Untersuchungen der Herren von Mangoldt und de la Vallée Poussin*)

$$\sum\nolimits^{\varrho} \left| \frac{1}{\varrho^{1+\sigma}} \right| < \frac{\alpha}{\sigma^2}$$

ist, wo α eine Constante bedeutet, so folgt hieraus indem man

---

*) Siehe de la Vallée Poussin, loc. cit. p. 42.

$$s = 2x \log x, \qquad \sigma = \frac{1}{\log x}$$

wählt, dass

$$|f(x) - Li(x)| < \mathrm{K} \cdot \sqrt{x} \cdot \log x$$

ist. Hierdurch ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Dass dasselbe Resultat auch für die Function $F(x)$ gültig ist, welche die Anzahl aller Primzahlen $< x$ angiebt, folgt unmittelbar aus der Thatsache, dass die Differenz $f(x) - F(x)$ von nicht höherer Ordnung als $\sqrt{x}$ ist.