Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe.

Schafheitlin, Paul

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Volume 103 / 1888 / Article

Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe.

(Von Herrn *Paul Schafheitlin.*)

Herr *Pochhammer* hat in einer ausführlichen Abhandlung (dieses Journal, Bd. 102, S. 76–159) die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten durch mehrfache bestimmte Integrale integrirt. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein, das Hauptresultat jener Arbeit in kurzer übersichtlicher Form darzustellen und gleichzeitig den Zusammenhang zwischen jenem Integrale und dem schon früher von Herrn *Goursat* *) ermittelten vor Augen zu führen.

Sei

$$(1.)\qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p v - b_p)\frac{d^p\varphi(v)}{dv^p} = 0, \quad b_0 = 0;$$

$$(2.)\qquad v(v-1)\frac{d\psi(v)}{dv} - (\tau v - \sigma)\psi(v) = 0,$$

wo a_p, b_p, τ, σ von v unabhängige Grössen bedeuten; ist x ebenfalls von v unabhängig, so folgt:

$$(3.)\qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p x v - b_p)\frac{d^p\varphi(vx)}{dv^p} = 0.$$

Nun setze man:

$$(4.)\qquad y(x) = \int_g^h \psi(v)\varphi(vx)dv,$$

wo g und h von x unabhängig sind. Dann ist:

$$(5.)\qquad \begin{cases} x^p\dfrac{d^py}{dx^p} = \displaystyle\int_g^h v^p\psi\frac{d^p\varphi}{dv^p}dv \\ \qquad = \left[v^p\psi\dfrac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}\right]_g^h - \displaystyle\int_g^h\left(p\psi + v\frac{d\psi}{dv}\right)v^{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}dv. \end{cases}$$

*) Annales de l'École Normale, série II, tom. XII, pag. 281.

Wendet man (2.) auf das letzte Integral an, so folgt:

$$(6.)\qquad x^p\frac{d^py}{dx^p} = \left[v^p\psi\frac{d^{p-1}\varphi}{dv^p}\right]_g^h+\int_g^h\frac{(\tau+p)v-(\sigma+p)}{1-v}\psi v^{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}dv.$$

Setzt man in (5.) $p-1$ an Stelle von p und addirt (5.) und (6.), nachdem man dieselben mit zwei unbestimmten Coefficienten $\varkappa_{p-1}$ und λ_p multiplicirt hat, so ergiebt sich:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \varkappa_{p-1}x^{p-1}\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}+\lambda_p x^p\dfrac{d^py}{dx^p} \\ = \lambda_p\left[v^p\psi\dfrac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}\right]_g^h+\displaystyle\int_g^h\frac{\{\lambda_p(\tau+p)-\varkappa_{p-1}\}v-\{\lambda_p(\sigma+p)-\varkappa_{p-1}\}}{1-v}\psi v^{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}dv. \end{cases}$$

Nun bestimme man $\varkappa$ und λ so, dass:

$$\lambda_p(\tau+p)-\varkappa_{p-1} = (\tau-\sigma)xa_{p-1},$$
$$\lambda_p(\sigma+p)-\varkappa_{p-1} = (\tau-\sigma)b_{p-1}.$$

Dann folgt:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \lambda_p = a_{p-1}x-b_{p-1}, \\ \varkappa_{p-1} = (\sigma+p)a_{p-1}x-(\tau+p)b_{p-1}. \end{cases}$$

Summirt man (7.) von $p=1$ bis n, so erhält man:

$$(9.)\qquad \sum_{p=0}^{n}x^{p-1}(\varkappa_p+\lambda_p)\frac{d^py}{dx^p} = \frac{1}{x}\left[v\psi\sum_{p=1}^{n}\lambda_p v^{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi(vx)}{dv^{p-1}}\right]_g^h,$$

denn das Integral in (7.) verschwindet wegen (3.) für jeden Werth von v; es ist in (9.) zu setzen:

$$(10.)\qquad \lambda_0=\varkappa_n=0.$$

Bestimmt man nun g und h derart, dass die rechte Seite in (9.) verschwindet, so genügt y einer Gleichung $n$ten Grades, welche (1.) analog gebildet ist. Man setze:

$$\varkappa_p+\lambda_p = c_px-d_p,$$

so ist:

$$(11.)\qquad \begin{cases} c_p=(\sigma+p+1)a_p+a_{p-1};\quad c_0=(\sigma+1)a_0, \\ d_p=(\tau+p+1)b_p+b_{p-1};\quad d_0=0. \end{cases}$$

Sind a, b, σ, τ gegeben, so werden durch (11.) c und d eindeutig bestimmt; sind umgekehrt c und d gegeben, so lassen sich a, b, σ, τ bestimmen. Um dies zu zeigen, multiplicire man die erste Gleichung (11.) mit $(-1)^p\dfrac{\Pi(\sigma+p)}{\Pi\sigma}$ und addire von 0 bis n, so folgt:

$$(12.)\qquad \sum_{p=0}^{n}(-1)^p(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+p)c_p = 0.$$

Nachdem aus dieser Gleichung $n$ten Grades σ bestimmt ist, ergiebt sich a_s aus der Gleichung:

$$(13.)\qquad \sum_{p=0}^{s}(-1)^p(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+p)c_p = (-1)^s(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+s+1)a_s.$$

Für τ und b_s erhält man die analogen Gleichungen:

$$(14.)\qquad \sum_{p=1}^{n}(-1)^p(\tau+2)(\tau+3)\dots(\tau+p)d_p = 0,$$

$$(15.)\qquad \sum_{p=1}^{s}(-1)^p(\tau+2)(\tau+3)\dots(\tau+p)d_p = (-1)^s(\tau+2)(\tau+3)\dots(\tau+s+1)b_s.$$

Der Zusammenhang zwischen den Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung und denen der neuen:

$$(16.)\qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}(c_p x - d_p)\frac{d^p y}{dx^p} = 0;\quad d_0 = 0,$$

stellt sich sehr einfach dar, wenn man von derjenigen Form von (1.) ausgeht, welche ich in meiner Dissertation *) die Normalform genannt habe; man überzeugt sich leicht, dass dann auch (16.) in der Normalform auftritt.

Sind $k_1, k_2, \dots k_n$ die singulären Punkte der Differentialgleichung, $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für $\mu = 1, 2, \dots n;\ \nu = 1, 2, \dots \mu$ constante Grössen und bezeichnet man mit $\mathfrak{K}_\nu$ die elementare symmetrische Function νten Grades der Grössen k und mit $\mathfrak{S}(\tau, \varepsilon_\mu)$ die elementare symmetrische Function τten Grades der Elemente der μten Gruppe: $\varepsilon_{\mu,1}, \varepsilon_{\mu,2}, \dots \varepsilon_{\mu,\mu}$ und ist:

$$(17.)\qquad \mathfrak{z}(\lambda, \mu) = \sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^\mu}{\nu!(\lambda-\nu)!}\qquad (\lambda \geqq 1);$$

ferner:

$$(18.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\mathfrak{z}(\lambda, \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu, \varepsilon_\varrho) & (\lambda \geqq 1), \\ \mathfrak{B}(\varrho, \varepsilon_\varrho) = \mathfrak{S}(\varrho, \varepsilon_\varrho), \end{cases}$$

so ist:

$$(19.)\qquad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^p y}{dx^p}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\mathfrak{B}(n-p, \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{p-\nu}\right\} = 0$$

die erwähnte Normalform der Differentialgleichungen $n$ter Ordnung.

Aus (17.) folgt sofort:

$$(20.)\qquad \mathfrak{z}(\lambda, \mu+1) = \lambda\mathfrak{z}(\lambda, \mu)+\mathfrak{z}(\lambda-1, \mu)\qquad (\lambda > 1),$$

---

*) Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen. Halle a. S. 1885.

ferner:

$$(21.)\quad \mathfrak{z}(\lambda,\ 1) = 0;\quad \mathfrak{z}(1,\ 1) = 1$$

und hieraus in Verbindung mit (20.):

$$(22.)\quad \mathfrak{z}(\lambda,\mu) = 0 \qquad (\lambda > \mu)$$

und

$$(23.)\quad \mathfrak{z}(\lambda,\ \lambda) = 1.$$

Wegen (22.) darf in (18.) für die untere Grenze der Summe λ gesetzt werden. Schliesslich folgt aus (17.):

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}(-1)^{\lambda-\nu+1}\frac{\nu^{\mu+1}}{\nu!(\lambda-\nu+1)!}\\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\frac{(-1)^{\lambda-\nu+1}}{(\nu-1)!(\lambda-\nu+1)!}\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}(\nu-1)^{\varkappa}\\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}\sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\frac{(-1)^{\lambda-\nu+1}(\nu-1)^{\varkappa}}{(\nu-1)!(\lambda-\nu+1)!}.\end{aligned}$$

Da für $\varkappa = 0$ die innere Summe verschwindet und deren Anfangsglied für jedes andere $\varkappa$, so folgt:

$$\mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) = \sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^{\varkappa}}{\nu!(\lambda-\nu)!}$$

oder

$$(24.)\quad \mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) = \mu!\sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{\mathfrak{z}(\lambda,\ \varkappa)}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}.$$

Setzt man $\varepsilon_{\mu,\nu}+1$ an Stelle von $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für jeden Werth von ν, so ergiebt sich leicht aus der Theorie der algebraischen Gleichungen die Formel:

$$(25.)\quad \mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho+1) = \sum_{\lambda=\mu}^{\varrho}\frac{\lambda!}{\mu!(\lambda-\mu)!}\mathfrak{S}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_\varrho).$$

Vermittelst (20.), (24.) und (25.) beweist man sofort die Richtigkeit der Formel:

$$(26.)\quad \mathfrak{B}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho+1) = \mathfrak{B}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_\varrho)+(\mu+1)\mathfrak{B}(\varrho-\mu-1,\ \varepsilon_\varrho).$$

Um (1.) auf die Normalform der $(n-1)$ten Ordnung zu bringen, muss man setzen:

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-2} = 0;\ k_{n-1} = 1;$$

deswegen treten in (1.) nur die Elemente der letzten und vorletzten Gruppe auf; nennt man dieselben $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_{n-1}$ und $\varrho_1,\ \varrho_2,\ \dots\ \varrho_{n-2}$, so hat man zu setzen:

$$(27.)\quad a_p = \mathfrak{B}(n-p-1,\ \alpha_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n-1}\mathfrak{z}(p,\ \mu)\mathfrak{S}(n-\mu-1,\ \alpha_\nu) \qquad (p \geqq 1),$$

$$(28.)\quad b_p = \mathfrak{B}(n-p-1,\ \varrho_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n-2}\mathfrak{z}(p-1,\ \mu)\mathfrak{S}(n-\mu-2,\ \varrho_\nu) \qquad (p \geqq 2).$$

Aus (27.) folgt in Verbindung mit (11.):

$$c_p = \sum_{\mu=1}^{n-1} \{\mathfrak{z}(p,\mu)+(\sigma+p+1)\mathfrak{z}(p-1,\mu)\}\mathfrak{S}(n-\mu-1,\alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2)$$

und vermöge (20.):

$$c_p = \sum_{\mu=1}^{n-1} \{\mathfrak{z}(p,\mu+1)+(\sigma+1)\mathfrak{z}(p,\mu)\}\mathfrak{S}(n-\mu-1,\alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2)$$

oder wegen (21.):

$$(29.)\quad \begin{cases} c_p = \sum\limits_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}(p,\mu)\mathfrak{S}(n-\mu,\alpha_\nu) \\ +\sum\limits_{\mu=1}^{n-1} \mathfrak{z}(p,\mu)(\sigma+1)\mathfrak{S}(n-\mu-1,\alpha_\nu). \end{cases}$$

Setzt man

$$(30.)\quad \sigma+1 = \alpha_n$$

und bezieht alsdann $\mathfrak{S}$ statt auf $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ auf die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, so folgt nach einer bekannten Eigenschaft der symmetrischen Functionen aus (29.):

$$(31.)\quad c_p = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}(p,\mu)\mathfrak{S}(n-\mu,\alpha_\nu) = \mathfrak{B}(n-p,\alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2).$$

Man überzeugt sich leicht durch (11.) von der Richtigkeit von (31.) auch für $p = 0$ und 1. Setzt man

$$(32.)\quad \tau+2 = \varrho_{n-1},$$

so folgt analog aus (28.):

$$(33.)\quad d_p = \mathfrak{B}(n-p,\varrho_\nu);$$

aus (31.) und (33.) folgt, dass (16.) thatsächlich in der Normalform auftritt.

Es erübrigt noch, die Grenzen g und h zu bestimmen. Wegen (30.) und (32.) folgt aus (2.):

$$\psi(v) = v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1},$$

abgesehen von einer willkürlichen Constanten.

Man überzeugt sich sofort, dass

$$v\psi\sum_{p=1}^{n}\lambda_p v^{p-1}\frac{d^{p-1}\varphi(vx)}{dv^{p-1}}$$

für $v = 0$, 1 oder ∞ verschwindet (für $v = 1$ verschwindet die Summe wegen (3.) identisch), sobald das Integral (4.) selbst einen endlichen Werth besitzt; bei Einführung dieser Grenzen ist somit (4.) eine Lösung von (16.), sobald es überhaupt endlich ist.

Doch übersieht man sofort, dass eine der Grenzen auch eine Function von x sein kann, wenn nur für diese Grenze

$$\varphi(vx),\quad \frac{d\varphi}{dx},\quad \dots\quad \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}$$

verschwindet; dies kann für den Werth

$$(35.)\qquad v = \frac{1}{x}$$

stattfinden. Denn setzt man:

$$(36.)\qquad \varphi(v) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varkappa_\lambda (1-v)^{r+\lambda},$$

so ergiebt sich zur Bestimmung von r aus (1.):

$$(37.)\qquad r(r-1)\dots(r-n+3)(r-n+2+a_{n-2}-b_{n-2}) = 0.$$

Ist $r = 0, 1, \dots n-3$, so genügt $\varphi(vx)$ für $v = \frac{1}{x}$ den obigen Bedingungen nicht. Die letzte Klammer geht vermöge (22.), (27.) und (28.) über in:

$$r-n+2+\mathfrak{S}(1, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1}) - \mathfrak{S}(1, \varrho_1, \dots \varrho_{n-2}) + \mathfrak{z}(n-2, n-1) - \mathfrak{z}(n-3, n-2) = 0$$

oder nach (20.) und (23.):

$$(38.)\qquad r = \varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_{n-2}-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}).$$

Ist nun

$$(39.)\qquad r+1 > n,$$

so ist in (4.) auch die Grenze $\frac{1}{x}$ zulässig, vorausgesetzt, dass für $\varphi(vx)$ die an der Stelle $v = \frac{1}{x}$ mehrdeutige Lösung eingesetzt wird. Damit aber das Integral (4.) alsdann endlich ist, braucht nur die Bedingung

$$(40.)\qquad r+1 > 0$$

erfüllt zu sein; es lässt sich zeigen, dass man in der That sich von (39.) befreien kann.

Differentiirt man (16.), nämlich:

$$(41.)\qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1} \{\mathfrak{B}(n-p,\ \alpha_\nu)x - \mathfrak{B}(n-p,\ \varrho_\nu)\} \frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

so folgt vermöge (26.):

$$(42.)\qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1} \{\mathfrak{B}(n-p,\ \alpha_\nu+1)x - \mathfrak{B}(n-p,\ \varrho_\nu+1)\} \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = 0.$$

Hieraus erkennt man, dass $\frac{dy}{dx}$ eine Lösung derjenigen Differentialgleichung ist, welche aus (41.) dadurch entsteht, dass $\alpha_\nu+1$ und $\varrho_\nu+1$ an die Stelle von α_ν und ϱ_ν getreten sind. Bezeichnet man eine Lösung von (42.) mit $y_1(x)$

und differentiirt (4.), nämlich:

$$(43.)\qquad y(x) = \int_g^{\frac{1}{x}} v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1}\varphi(vx)dv,$$

so erhält man, wenn (39.) erfüllt ist:

$$(44.)\qquad y_1(x) = \int_g^{\frac{1}{x}} v^{\alpha_n}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1}\varphi_1(vx)dv.$$

Für $\alpha'_\nu = \alpha_\nu+1$ und $\varrho'_\nu = \varrho_\nu+1$, die Elemente von φ_1, gilt alsdann die Bedingung:

$$\varrho'_1+\varrho'_2+\cdots+\varrho'_{n-2}-(\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_{n-1})+2 > n$$

oder

$$r'+1 > n-1.$$

Dieses Verfahren lässt sich so oft wiederholen, als das Integral endlich bleibt, und hieraus sieht man, dass für die Grenze $\frac{1}{x}$ nur die Bedingung (40.) nöthig ist.

Demnach können in:

$$(45.)\qquad y(x) = \int_g^{h} v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1}\varphi(vx)dv$$

g und h zwei beliebige der Grössen 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ bedeuten, sobald nur das Integral selbst endlich ist und bei der variablen Grenze $\frac{1}{x}$ die an der Stelle $v = \frac{1}{x}$ mehrdeutige Lösung für $\varphi(vx)$ substituirt wird.

Die an der Stelle $x = 1$ mehrdeutige Lösung ist:

$$(46.)\qquad y(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1}\varphi(vx)dv,$$

wie sich leicht zeigt, wenn man setzt:

$$1-vx = u(1-x).$$

Wendet man (45.) auf sich selbst an, so folgt:

$$(47.)\qquad \left\{\begin{aligned} y(x) &= \int_{g_1}^{h_1}\int_{g_2}^{h_2}\cdots\int_{g_{n-1}}^{h_{n-1}}(1-xv_1v_2\ldots v_{n-1})^{-\alpha_1} \\ &\times \prod_2^n v_{n-p+1}^{\alpha_p-1}(1-v_{n-p+1})^{\varrho_{p-1}-\alpha_p-1}dv_{n-p+1},\end{aligned}\right.$$

wo als Grenzen 0, 1, ∞ für irgend eine Integration zu nehmen sind und ausserdem $\frac{1}{x.v_1 v_2 \dots v_{\nu-1}}$ für h_ν; doch ist zu bemerken, dass, wenn diese variable Grenze bei einer Integration auftritt, die Grenzen sämmtlicher folgenden Integrationen wegen (46.) 1 und die entsprechende variable Grenze sein müssen; dann ist, sobald das Integral endlich ist, (47.) eine Lösung von (41.). Für die Grenzen 0 und 1 ist (47.) schon von Herrn *Goursat* abgeleitet worden, für die anderen Grenzen nur für $n = 3$.

Setzt man in (47.):

$$(48.)\qquad v_{n-1} = \frac{1}{xv_1 v_2 \dots v_{n-2}} \cdot \frac{1}{t_{n-1}},$$

so gelten für t_{n-1} dieselben vier Grenzen wie für v_{n-1}, und man erhält bis auf einen constanten Factor, wenn für t_{n-1} wieder v_{n-1} geschrieben wird:

$$(49.)\qquad \begin{cases} x^{\varrho_1-1} y(x) = \int\int\dots\int (1-xv_1 v_2 \dots v_{n-1})^{\varrho_1-\alpha_2-1} (1-v_{n-1})^{-\alpha_1} v_{n-1}^{\alpha_1-\varrho_1} dv_{n-1} \\ \qquad \times \prod_3^n v_{n-p+1}^{\alpha_p-\varrho_1} (1-v_{n-p+1})^{\varrho_{p-1}-\alpha_p-1} dv_{n-p+1}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(50.)\qquad \begin{cases} \alpha_p - \varrho_1 + 1 = \alpha'_p, \\ \varrho_p - \varrho_1 + 1 = \varrho'_p \ (p > 1); \quad 2 - \varrho_1 = \varrho'_1, \end{cases}$$

so geht das Integral (49.) in (47.) über mit Vertauschung von α_1 und α_2; diese Vertauschung ist unwesentlich, da die Grössen α unter sich und ϱ unter sich vertauscht werden können, ohne dass (41.) geändert wird. Man erkennt somit, dass $y(\alpha_\nu, \varrho_\nu, x)$ und $x^{1-\varrho_1}.y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x)$ Lösungen derselben Differentialgleichung sind. Wegen der Vertauschbarkeit der Elemente ϱ folgt hieraus, dass auch $y(\alpha_\nu, \varrho_\nu, x)$ und $x^{1-\varrho_\lambda} y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x)$ Lösungen derselben Differentialgleichung sind, wenn:

$$(51.)\qquad \begin{cases} \alpha'_\nu = \alpha_\nu - \varrho_\lambda + 1, \\ \varrho'_\nu = \varrho - \varrho_\lambda + 1 \ (\lambda \gtrless \nu); \quad \varrho'_\lambda = 2 - \varrho_\lambda. \end{cases}$$

Diese Eigenschaft der Differentialgleichung (41.) lässt sich auch unabhängig von der Darstellung der Lösungen durch bestimmte Integrale unschwer beweisen.

Setzt man in (51.) $\lambda = n-1$, so ist nach (4.):

$$(52.)\qquad y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x) = \int_g^h v^{\alpha'_{n-1}} (1-v)^{\varrho'_{n-1}-\alpha'_n-1} \varphi(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x)\, dv.$$

Substituirt man in (52.)

$$vx = t,$$

so gehen die Grenzen 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ über in 0, x, ∞, 1 und man erhält:

$$y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x) = x^{1-\varrho'_{n-1}} \int_{g_1}^{h_1} t^{\alpha'_n - 1} (t-x)^{\varrho'_{n-1} - \alpha'_n - 1} \varphi(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, t) dt.$$

Nach der obigen Bemerkung folgt hieraus:

$$(53.) \quad y(\alpha_\nu, \varrho_\nu, x) = \int_{g_1}^{h_1} t^{\alpha_n - \varrho_{n-1}} (t-x)^{-\alpha_n} \varphi(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, t) dt.$$

Dies ist die von Herrn *Pochhammer* *) gegebene Form, aus welcher sich ebenso wie oben ein $(n-1)$-faches Integral ergiebt, dessen zu integrirende Function lautet, wenn für t wieder v gesetzt wird:

$$(v_{n-1} - x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n - \varrho_{n-1}} (v_1 - 1)^{\varrho_1 - \alpha_1 - 1} \prod_2^{n-1} (v_{p-1} - v_p)^{\varrho_p - \alpha_p - 1} v_{p-1}^{\alpha_p - \varrho_{p-1}}.$$

Nimmt man 0, ∞, 1 und x resp. v_{n-1}, v_{n-2}, ... v_2 als Grenzen, so befriedigt das $(n-1)$-fache Integral die Gleichung (47.), sobald es endlich ist und sobald, wenn bei einer Integration die Grenze 1 auftritt, in allen folgenden Integrationen als Grenzen 1 und die variable Grenze gesetzt werden.

---

*) a. a. O. vergl. Formel (83.)—(86.).

Berlin, im December 1887.