

Ueber eine neue Weise bestimmte Integrale in der
analytischen Zahlentheorie zu g...

Pólya, G.

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,
Mathematisch-Physikalische Klasse

Volume 1917 / 1917 / Issue 1 / Article



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Vorgelegt von Herrn Landau in der Sitzung vom 3. März 1917.

1. Ist $f(t)$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar und wird die Summation über alle Primzahlen p erstreckt, die $\leq x$ sind, so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Ich will im folgenden diesen Satz, bezw. zwei allgemeinere und schärfere Sätze beweisen, um dann zu zeigen, wie sich mit deren Hilfe manche zahlentheoretische Grenzwerte in aller Kürze berechnen lassen.

Der Ausgangspunkt meiner Untersuchung war ein Satz von Herrn Landau¹⁾, mit dessen Erörterung ich beginnen will. Herr Landau betrachtet eine Folge q_1, q_2, q_3, \dots , deren Anwachsen in den wesentlichsten Zügen mit dem Anwachsen der Primzahlfolge 2, 3, 5, 7, 11, ... übereinstimmt. Genauer gesprochen, betrachtet er eine nicht abnehmende, divergente Folge von positiven Zahlen

$$0 < q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \dots, \quad \lim_{n=\infty} q_n = \overline{\infty},$$

und die zugeordnete Funktion $\varkappa(x)$, wo $\varkappa(x)$ die Anzahl derjenigen q bedeutet, die $\leq x$ sind. (D. h. für $q_m < q_{m+1}$, $q_m \leq x < q_{m+1}$ ist

1) Landau, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Bulletins de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences) (1911) S. 443—472. Vgl. Théorème VII.

$\kappa(x) = m$). Er setzt die Existenz einer positiven, nicht abnehmenden Funktion $w(x)$ von der Eigenschaft

$$(1) \quad \lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{w(x)} = 1$$

voraus, für welche

$$(2) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\kappa(x) w(x)}{x} = 1$$

ist.

Unter diesen Bedingungen beweist Herr Landau

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\kappa(x)} \sum_{q \leq x} \left(\frac{x}{q} - \left[\frac{x}{q} \right] \right) = 1 - C.$$

$$\left(\sum_{q \leq x} \varphi(q) \text{ bedeutet } \sum_{\nu=1}^{\kappa(x)} \varphi(q_\nu), C \text{ die Eulersche Konstante.} \right)$$

Ich bemerke, daß die Funktion $f(t)$, die für $0 < t \leq 1$ durch

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right]$$

definiert wird (es sei $f(0)$ etwa $= 0$) im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar ist. Denn sie ist beschränkt und ihre Unstetigkeitspunkte haben den Punkt $t = 0$ zum einzigen Häufungspunkte. Es ist übrigens

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right] \right) dt &= \lim_{n=\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right] \right) dt \\ &= \lim_{n=\infty} \left\{ \log n - 1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \dots - (n-1) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n=\infty} \left\{ \log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + 1 \right\} \\ &= 1 - C. \end{aligned}$$

Diese Bemerkung zeigt, daß der zitierte Satz von Herrn Landau¹⁾ als Spezialfall enthalten ist im folgenden

1) Zur Zeit der Abfassung vorliegender Abhandlung war mir die Arbeit von Herrn Landau, Über einige neuere Grenzwertsätze, Rendiconti, Palermo, Bd. XXXIV (1912) leider noch nicht bekannt. Kombiniert man diese letztere mit seiner eben zitierten Arbeit, so erhält man Resultate, die teils mehr, teils weniger besagen, als der Satz I, und die übrigens, wie mir scheint, kürzer zu erhärten sind auf dem Wege, der hier zum Beweise des Satzes I eingeschlagen wird. (Anm. bei der Korrektur, 10. 5. 1917.)

Satz I. Die Funktion $f(t)$ sei im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ eigentlich integrierbar im Sinne von Riemann. Genügt die Folge q_1, q_2, q_3, \dots den vorhingenannten Landauschen Bedingungen, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Der Beweis von Satz I ist überaus einfach. Ich schicke ihm nur die Bemerkung voraus, daß die Zahl 2 in der Bedingung (1) bloß der Einfachheit halber steht. Denn, da $w(x)$ positiv und nicht abnehmend ist, folgt aus (1)

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} = 1,$$

wenn α, β irgend zwei feste positive Zahlen. In der Tat, sei

$$0 < \alpha < \beta < \alpha 2^m,$$

wo m eine geeignet gewählte ganze Zahl, so ist

$$1 \leq \frac{w(\beta x)}{w(\alpha x)} \leq \frac{w(\alpha 2^m x)}{w(\alpha x)} = \frac{w(2\alpha x)}{w(\alpha x)} \frac{w(4\alpha x)}{w(2\alpha x)} \dots \frac{w(2^m \alpha x)}{w(2^{m-1} \alpha x)},$$

und alle m Faktoren rechts streben gegen 1.

2. Ich nenne eine streckenweise konstante, im Intervalle $0 \leq t \leq 1$ definierte Funktion kurz „Treppenfunktion“, wenn sie nur eine endliche Anzahl Unstetigkeitspunkte hat, denen $t = 0$ nicht angehört, und wenn sie auch in ihren Unstetigkeitspunkten von links stetig ist. Sind also t_1, t_2, \dots, t_{m-1} die Unstetigkeitspunkte der Treppenfunktion $\Psi(t)$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1,$$

so ist

$$(4) \quad \Psi(t) = l_i \quad \text{für} \quad t_{i-1} < t \leq t_i,$$

$\Psi(0) = l_1$, wo $l_1, l_2, l_3, \dots, l_m$ gewisse Konstanten sind. Es ist

$$(5) \quad \int_0^1 \Psi(t) dt = \sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1}) l_i.$$

Die Riemannsche Integrabilitätsbedingung läßt sich, die Erklärung von (5) vorausgesetzt, so fassen: Eine Funktion $f(t)$ ist dann und nur dann integrabel im eigentlichen Sinne, wenn zu

jedem $\varepsilon > 0$ ein Paar von Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$ bestimmt werden kann, auf die Weise, daß

$$(6) \quad \psi(t) \leq f(t) \leq \Psi(t),$$

$$(7) \quad \int_0^1 \Psi(t) dt - \int_0^1 \psi(t) dt < \varepsilon.$$

Für die Treppenfunktion (4) ist der Satz I offenbar. Denn die Anzahl der q_v , für welche

$$t_{i-1} < \frac{q_v}{x} \leq t_i, \quad \Psi\left(\frac{q_v}{x}\right) = l_i, \quad xt_{i-1} < q_v \leq xt_i,$$

ist $\kappa(t_i x) - \kappa(t_{i-1} x)$, also

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) &= \frac{w(x)}{x} \sum_{i=1}^m l_i (\kappa(xt_i) - \kappa(xt_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^m l_i \left(\frac{\kappa(xt_i) w(xt_i)}{xt_i} \frac{w(x)}{w(xt_i)} t_i - \frac{\kappa(xt_{i-1}) w(xt_{i-1})}{xt_{i-1}} \frac{w(x)}{w(xt_{i-1})} t_{i-1} \right) \end{aligned}$$

(für $i = 1$ fällt das zweite Glied in der Klammer weg), also nach (2), (3)

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) = \sum_{i=1}^m l_i (t_i - t_{i-1}) = \int_0^1 \Psi(t) dt.$$

Ist $f(t)$ irgend eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so bestimme man die zwei Treppenfunktionen $\psi(t)$ und $\Psi(t)$, die (6), (7) erfüllen. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) &\leq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \Psi\left(\frac{q}{x}\right) \\ &= \int_0^1 \Psi(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) &\geq \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \psi\left(\frac{q}{x}\right) \\ &= \int_0^1 \psi(t) dt \geq \int_0^1 f(t) dt - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, ist Satz I bewiesen.

3. Daß $f(t)$ eigentlich integrierbar sei, ist keine unerläßliche Bedingung. Es ist z. B.

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha},$$

wenn $0 < \alpha < 1$. Ich will dies zugleich mit einem allgemeineren Satze beweisen. —

Aus der Bedingung (1) folgt offenbar, daß $w(x)$ nur sehr langsam anwachsen kann. Ich will zeigen, daß

$$(8) \quad \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x^\alpha} = 0$$

für beliebiges festes $\alpha > 0$. Ich setze

$$f(x) = \begin{cases} w(1) & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{w(x)}{x^\alpha} & x \geq 1. \end{cases}$$

Es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{w(2x)}{2^\alpha w(x)} = \frac{1}{2^\alpha} < 1.$$

Man bestimme zu gegebenem Θ , $\frac{1}{2^\alpha} < \Theta < 1$, eine Zahl $a > 0$ derart, daß für $x > a$

$$\frac{f(x)}{f\left(\frac{x}{2}\right)} < \Theta.$$

Es sei A die obere Schranke von $f(x)$ im Intervalle $0 \leq x \leq a$.

Zu jedem gegebenen $x > a$ gehört eine ganze Zahl N , eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geq \frac{x}{2^N}.$$

N wächst offenbar mit x ins Unendliche. Aus der Ungleichung

$$f(x) = \frac{f(x)f\left(\frac{x}{2}\right)}{f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{4}\right)} \cdots \frac{f\left(\frac{x}{2^{N-1}}\right)}{f\left(\frac{x}{2^N}\right)} f\left(\frac{x}{2^N}\right) \leq \Theta^N A$$

folgt nun die Behauptung (8).

Ich wende mich nun zur Abschätzung der Summe $\sum_{q \leq x} q^{\alpha-1}$. Es seien $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r$ die verschiedenen Werte, die die

ersten $\kappa(x)$ Glieder der Folge $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$ annehmen. Es ist $r_1 = q_1, \kappa(r_i) = \kappa(x)$, und es ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \leq x} q^{\alpha-1} &= r_1^{\alpha-1} \kappa(r_1) + r_2^{\alpha-1} (\kappa(r_2) - \kappa(r_1)) + \dots + r_i^{\alpha-1} (\kappa(r_i) - \kappa(r_{i-1})) \\
 &= \kappa(r_1) (r_1^{\alpha-1} - r_2^{\alpha-1}) + \dots + \kappa(r_{i-1}) (r_{i-1}^{\alpha-1} - r_i^{\alpha-1}) + \kappa(r_i) (r_i^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}) \\
 &\quad + \kappa(x) x^{\alpha-1} \\
 (9) \quad &= -\kappa(r_1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt^{\alpha-1}}{dt} dt - \dots - \kappa(r_i) \int_r^x \frac{dt^{\alpha-1}}{dt} dt + \kappa(x) x^{\alpha-1} \\
 &= (1-\alpha) \int_{q_1}^x \kappa(t) t^{\alpha-2} dt + \kappa(x) x^{\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

Zu jedem gegebenen ε

$$(10) \quad 0 < \varepsilon < 2^\alpha - 1$$

läßt sich ein Wert $a > 0$ so bestimmen, daß für $x > a$

$$\kappa(x) < \frac{x}{w(x)} (1 + \varepsilon), \quad \frac{w(x)}{w\left(\frac{x}{2}\right)} < 1 + \varepsilon.$$

Es ist folglich für $x > a$

$$\begin{aligned}
 \int_{q_1}^x \kappa(t) t^{\alpha-2} dt &< \int_{q_1}^a \kappa(t) t^{\alpha-2} dt + \int_a^x \frac{t}{w(t)} (1 + \varepsilon) t^{\alpha-2} dt \\
 &= A + (1 + \varepsilon) \int_a^x \frac{t^{\alpha-1}}{w(t)} dt,
 \end{aligned}$$

wo der Sinn der Abkürzung A ersichtlich ist. Es sei N die durch die Ungleichungen

$$\frac{x}{2^{N-1}} > a \geq \frac{x}{2^N}$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \int_{q_1}^x \kappa(t) t^{\alpha-2} dt &< A + (1 + \varepsilon) \sum_{\nu=1}^N \int_{\frac{x}{2^\nu}}^{\frac{x}{2^{\nu-1}}} \frac{t^{\alpha-1}}{w(t)} dt \\
 &\leq A + (1 + \varepsilon) \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{w\left(\frac{x}{2^\nu}\right)} \left(\frac{x^\alpha}{2^{(\nu-1)\alpha}} - \frac{x^\alpha}{2^{\nu\alpha}} \right) \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A + (1 + \varepsilon) \frac{1}{\alpha} \frac{x^\alpha \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)} \sum_{\nu=1}^N \frac{w(x) w\left(\frac{x}{2}\right)}{w\left(\frac{x}{2}\right) w\left(\frac{x}{4}\right)} \cdots \frac{w\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right)}{w\left(\frac{x}{2^\nu}\right)} \frac{1}{2^{(\nu-1)\alpha}} \\
 (11) \quad &< A + \frac{1 + \varepsilon}{\alpha} \frac{x^\alpha \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)}{w(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 + \varepsilon)^\nu}{2^{(\nu-1)\alpha}} \\
 &= A + \frac{x^\alpha}{w(x)} \frac{1}{\alpha} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) (1 + \varepsilon)^2}{1 - \frac{1 + \varepsilon}{2^\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Aus (9) und (11)

$$\begin{aligned}
 \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} &= \frac{w(x)}{x^\alpha} \int_{q_1}^x (1 - \alpha) \kappa(t) t^{\alpha-2} dt + \frac{\kappa(x) w(x)}{x} \\
 &< A(1 - \alpha) \frac{w(x)}{x^\alpha} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) (1 + \varepsilon)^2}{1 - \frac{1 + \varepsilon}{2^\alpha}} + \frac{\kappa(x) w(x)}{x}.
 \end{aligned}$$

Aus (2) und (8), und aus der Willkürlichkeit von ε , das bloß (10) genügen muß, folgt

$$(12) \quad \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} \leq 0 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Jetzt bin ich in der Lage den Beweis zu liefern für den

Satz II. Es sei $f(t)$ in jedem abgeschlossenen Teilintervalle vom Intervalle $0 \leq t \leq 1$, das den Punkt $t = 0$ nicht enthält, eigentlich integrabel. Es existiere α , $0 < \alpha < 1$, so beschaffen, daß

$$\lim_{t=0} f(t) t^{1-\alpha} = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ sonst beliebig, nur so gewählt, daß für $0 < t \leq \varepsilon$

$$f(t) < t^{\alpha-1}.$$

Ich definiere zwei eigentlich integrable Funktionen $f^*(t)$ und $\varphi(t)$ durch die Vorschrift

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t > \varepsilon \\ 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \end{cases} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & \text{für } t > \varepsilon \\ 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) &= \sum_{q \leq \varepsilon x} f\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{\varepsilon x < q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \\ &\leq \sum_{q \leq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} - \sum_{q \leq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \sum_{q \leq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right), \\ \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) &\leq \overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \left(\frac{q}{x}\right)^{\alpha-1} \\ &\quad - \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} \varphi\left(\frac{q}{x}\right) + \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f^*\left(\frac{q}{x}\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} - \int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 f^*(t) dt \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha} + \int_\varepsilon^1 f(t) dt, \end{aligned}$$

mit Benutzung des Satzes I und der Ungleichung (12). Daraus folgt weiter

$$\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt,$$

und mit demselben Recht

$$\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} -f\left(\frac{q}{x}\right) = - \lim_{x=\infty} \frac{w(x)}{x} \sum_{q \leq x} f\left(\frac{q}{x}\right) \leq - \int_0^1 f(t) dt,$$

welche beide zusammen den vollen Satz II ergeben.

5. Verstehen wir unter q_1, q_2, q_3, \dots speziell die Folge der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ..., so wird $\varkappa(x) = \pi(x)$, d. h. die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze x und $w(x) = \log x$. Es ist nämlich, nach der einfachsten Fassung des Primzahlsatzes

$$(13) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

Unter den Bedingungen des Satzes II ist also

$$(14) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} f\left(\frac{p}{x}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Von der asymptotischen Primzahltheorie haben wir zum Beweise von (14) nur den Primzahlsatz (13) ohne spezielle Restabschätzung benutzt. Formel (14) gestattet nun eine Anzahl Folgerungen, die man aus dem Primzahlsatze zu ziehen pflegt oder ziehen kann, völlig durchsichtig und mühelos abzuleiten. Es handelt sich immer einfach darum, eine gewöhnliche Integralformel in einen zahlentheoretischen Grenzwertsatz gleichsam zu übersetzen. Ich gebe einige Beispiele und ich beginne mit den einfachsten und geläufigsten.

$$I) \quad \int_0^1 \log t \, dt = -1$$

ergibt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \left(\sum_{p \leq x} \log p - \pi(x) \log x \right) = -1,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \log p = \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

II) Für $a > -1$ ist

$$\int_0^1 t^a \, dt = \frac{1}{a+1},$$

folglich

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x^{a+1}} \sum_{p \leq x} p^a = \frac{1}{a+1}.$$

III) Es ist

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t} \right] \right) dt = 1 - C$$

(vgl. unter 1), das Integral im eigentlichen Sinne genommen. Daraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x} \sum_{p \leq x} \left(\frac{x}{p} - \left[\frac{x}{p} \right] \right) = 1 - C.$$

Dieses Resultat rührt von Herrn de la Vallée-Poussin¹⁾ her und gab Anstoß zu der Untersuchung von Herrn Landau, die ihrerseits die gegenwärtige Untersuchung angeregt hat.

1) de la Vallée-Poussin, Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Bd. 22, Teil 1, S. 84—90.

IV) Ich bezeichne mit $\sigma_a(n)$ die Summe der a -ten Potenzen aller verschiedener Primteiler der ganzen Zahl n . Es ist z. B.

$$\sigma_a(1) = 0, \quad \sigma_a(2) = 2^a, \quad \sigma_a(30) = 2^a + 3^a + 5^a.$$

Die Summe

$$\sigma_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n) = \sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p} \right] p^a$$

läßt sich für $a > 0$ mit Hülfe der Integralformel

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{t} \right] t^a dt = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{a+1} \left(\frac{1}{v^{a+1}} - \frac{1}{(v+1)^{a+1}} \right) = \frac{\zeta(a+1)}{a+1}$$

asymptotisch auswerten. In der Tat, das Integral ist für $a \geq 1$ eigentlich und genügt auch für $0 < a < 1$ den Bedingungen der Formel (14). Diese ergibt also für $a > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_a(1) + \sigma_a(2) + \sigma_a(3) + \cdots + \sigma_a(n)}{n^{a+1} (\log n)^{-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} \sum_{p \leq n} \left[\frac{n}{p} \right] \left(\frac{p}{n} \right)^a \\ &= \frac{\zeta(a+1)}{a+1}. \end{aligned}$$

V) Zuletzt will ich noch die Verteilung der Reste studieren, die entstehen, wenn eine ganze Zahl n durch alle kleineren Primzahlen dividiert wird. Es sei α gegeben, $0 < \alpha < 1$, dann sind zwei Fälle möglich: der Rest der Division von n durch die Primzahl p ist entweder $< \alpha p$ oder er ist $\geq \alpha p$ und $< p$. Im ersteren Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p} \right] < \alpha, \quad \left[\frac{n}{p} \right] > \frac{n}{p} - \alpha > \left[\frac{n}{p} \right] - 1, \quad \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha \right] = 1,$$

im zweiten Falle ist

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p} \right] \geq \alpha, \quad \left[\frac{n}{p} \right] \leq \frac{n}{p} - \alpha < \frac{n}{p}, \quad \left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha \right] = 0.$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der fragliche Rest $< \alpha p$ ausfällt? Sie ist

$$= \frac{1}{\pi(n)} \sum_{p \leq n} \left(\left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha \right] \right),$$

da die Anzahl aller in Frage kommenden Primzahlen $\pi(n)$ ist.

Der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus der Formel

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \left(\left[\frac{1}{t} \right] - \left[\frac{1}{t} - \alpha \right] \right) dt \right) &= 1 - \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+\alpha} + \dots \\ &= C + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

oder auch $= \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt$. Das Integral ist nämlich eigentlich (die

Unstetigkeitspunkte des beschränkten Integranden haben $t = 0$ zur einzigen Häufungsstelle), und daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(n)_p} \sum_{p \leq n} \left(\left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha \right] \right) = \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt.$$

Man kann aber unter q_1, q_2, q_3, \dots auch die Primzahlen einer arithmetischen Progression, oder die Zahlen verstehen, die nur zwei verschiedene Primfaktoren haben u. s. w.: der Satz II, angewandt auf die betrachteten Integrale und einige andere, liefert mühelos eine Fülle von asymptotischen Auswertungen zahlentheoretisch bedeutsamer Ausdrücke.



