I.
Mathematik

Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz.

Von

E. Landau.

Vorgelegt in der Sitzung am 1. August 1930.

Einleitung.

Die Arbeit von Herrn L. Schnirelmann *Ob additiwnich swoistwach tschisel* (*Über additive Eigenschaften von Zahlen*)[1]) enthält einen der größten Fortschritte der Zahlentheorie, die ich erlebt habe. Was ich heute zu sagen habe, bezieht sich nur auf S. 3—9 der Arbeit (und die entsprechenden Teile des Auszugs).

Als Goldbachsche Vermutung ist die Behauptung bekannt: Jede gerade Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen (also jede ganze Zahl > 1 Summe von höchstens drei Primzahlen). Es war bisher (vergl. die Einleitung des fünften Teils *Zur Goldbachschen Vermutung* meiner *Vorlesungen über Zahlentheorie*[2])) noch nicht einmal entschieden, ob es eine Weltkonstante P gibt, so daß jede ganze Zahl > 1 als Summe von höchstens P Primzahlen darstellbar ist. Diese Frage hat Herr Schnirelmann und zwar im bejahenden Sinne gelöst.

Den Beweis des entscheidenden Hilfssatzes (seines Lemma 3) überläßt er allerdings dem Leser als völlig analog dem Beweis von Herrn Brun[3]) für einen anderen Satz (über Primzahlzwillinge). Und Herrn Schnirelmanns restliche 6 Seiten lassen sich auf eine Seite verkürzen, wie Vergleichung der folgenden Darstellung mit dem Original zeigt.

---

1) Iswestija Donskowo Polytechnitscheskowo Instituta (Nowotscherkask), Bd. 14 (1930), S. 3—27 und französischer Auszug auf S. 27—28.

2) Auf S. 184, Z. 1 bitte ich 100 001 statt 100 000 zu lesen.

3) *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach* [Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, 1920, I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse, Bd. 1, No. 3, 36 Seiten].

Ich publiziere diese Darstellung; denn selbst ich hatte mich bisher nie der Mühe unterzogen, Herrn BRUNS Originalarbeit oder die schon etwas vereinfachte Darstellung der Methode bei Herrn RADEMACHER[4]) genau durchzuarbeiten. Aber Herr SIEGEL war so freundlich, mir, mit der BRUNschen Methode, eine Ausarbeitung des Beweises eines Hilfssatzes vorzulegen, der etwas schwächer ist als der SCHNIRELMANNsche, jedoch für den vorliegenden Zweck ausreicht. Nachträglich erkannte ich, daß 1) auch die SCHNIRELMANNsche Größenordnung des Fehlers mit der BRUNschen Methode zu erzielen ist, 2) der SCHNIRELMANNsche Hilfssatz (mit einem Parameter, in dem die Abschätzung gleichmäßig zu gelten hat), auch in abgeschwächter Form, gar nicht nötig ist, da ein (auf dieselbe Art beweisbarer) parameterloser Satz ausreicht.

So ergibt sich der folgende Beweis des SCHNIRELMANNschen Satzes, den ich dem Leser in größter Breite vorlege. Ich beweise sogar (dies allerdings nur im Anhang 1) für einen Leser, der noch nichts aus der Primzahltheorie kennt, die beiden allein nötigen Hilfssätze daraus (sie stammen aus der vor-HADAMARDschen Zeit): den Satz von MERTENS

(1) $$\prod_{p \leqq \xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{\log \xi}\, e^{O(1)}$$

und den noch älteren Satz von TSCHEBYSCHEF

(2) $$\frac{\xi}{\log \xi}=O \sum_{p<\xi} 1.$$

Meine ganze (ich betone ausdrücklich: in allem Wesentlichen auf Herrn SCHNIRELMANN zurückgehende) Arbeit hätte vor 100 Jahren geschrieben werden können und ist auch einem Leser verständlich, der keine Differential- und Integralrechnung (geschweige denn Funktionentheorie komplexer Variabler) kennt, sondern nur Exponentialfunktion und Logarithmus.

Im Titel meiner Arbeit habe ich die GOLDBACHsche Vermutung besonders genannt. In ihrer Richtung hat Herr SCHNIRELMANN noch weit mehr bewiesen, als mein bisheriger Bericht erraten läßt. Es sei $N(\xi)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $<\xi$, die als Summe zweier Primzahlen darstellbar sind. Aus der GOLDBACHschen Vermutung würde

---

4) *Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie* [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd. 3 (1924), S. 12—30].

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{N(\xi)}{\xi} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

folgen. Es schien bisher in unerreichbarer Ferne, auch nur

$$\varliminf_{\xi=\infty} \frac{N(\xi)}{\xi} > 0 \tag{4}$$

zu beweisen. (Unter der Annahme der Richtigkeit unendlich vieler unbewiesener Postulate haben allerdings — das war das Äußerste, was wir wußten — die Herren HARDY und LITTLEWOOD mit einem absolut konstanten $\vartheta < 1$ bewiesen, daß die Anzahl der nicht in der Gestalt $p+p'$ zerlegbaren positiven geraden Zahlen bis ξ nur $O(\xi^{\vartheta})$ ist; hieraus würde allerdings (3), also (4) folgen.) Herr SCHNIRELMANN (vergl. Satz 13 nachher) hat nun (4) bewiesen. Und der Weg von (4) zu seinem Hauptsatz erfordert nur ganz wenige elementare Schlüsse.

Anhang 2 ist für den Beweis der Hauptsätze unerheblich, nimmt aber Stellung zu den drei ersten der vier SCHNIRELMANNschen Hilfssätze.

Im Folgenden bezeichnen kleine lateinische Buchstaben außer e und o durchweg ganze rationale Zahlen, die p Primzahlen, die c positive ganzzahlige Weltkonstanten; eine leere Summe bedeutet 0, ein leeres Produkt 1.

§ 1.

BRUNS algebraische Hilfsmittel.

Satz 1[5]**:** *Es sei $q > 0$. Es sei $S_0 = 1$, $S_i = 0$ für $i > q$, S_i für $1 \leqq i \leqq q$ die i^{te} elementarsymmetrische Funktion von q gegebenen positiven Zahlen. Dann ist*

$$S_i \leqq \frac{S_1}{i} S_{i-1} \text{ für } i > 0 \tag{5}$$

und

$$S_i \leqq \frac{S_1^i}{i!} \text{ für } i \geqq 0. \tag{6}$$

Beweis: 1) (5) ist für $i = 1$ und für $i > q$ klar. Für $1 < i \leqq q$ tritt beim Ausmultiplizieren von S_1 mit S_{i-1} jedes der $\binom{q}{i}$ Glieder von S_i genau i mal auf. (5) ist also bewiesen.

2) (6) ist für $i = 0$ klar und folgt für $i > 0$ aus (5) durch Induktion:

5) Man braucht wohl kaum zu betonen, daß Satz 1 seit langem bekannt ist und daß (6) aus dem polynomischen Satz ohne (5) folgt.

$$S_i \leqq \frac{S_1}{i} S_{i-1} \leqq \frac{S_1}{i} \frac{S_1^{i-1}}{(i-1)!} = \frac{S_1^i}{i!}.$$

Satz 2: *Es sei* $t > 0$,

$$k_0 > k_1 > \cdots > k_t \geqq 0,$$

$$\gamma_s > 0 \textit{ für } 0 < s \leqq k_0,$$

$$\varrho_i^{(m)} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{für } i = 0, \\ \sum\limits_{\substack{s_1 > s_2 > \cdots > s_i > k_m \\ s_j \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \quad (j = 1, \ldots, i)}} \gamma_{s_1} \cdots \gamma_{s_i} & \textit{für } 0 < i \leqq 2t, \end{array} \right\} 0 \leqq m \leqq t$$

($\varrho_i^{(m)}$ bedeutet als leere Summe 0 für $0 \leqq 2m < i \leqq 2t$, da sonst $k_m < k_{\left[\frac{i-1}{2}\right]}$, $m > \frac{i-1}{2}$, $i \leqq 2m$ wäre),

$$\varrho^{(m)} = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \varrho_i^{(m)} \textit{ für } 0 \leqq m \leqq t, \tag{7}$$

$$\sigma_i^{(m)} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{für } i = 0, \\ \sum\limits_{k_{m-1} \geqq s_1 > s_2 > \cdots > s_i > k_m} \gamma_{s_1} \cdots \gamma_{s_i} & \textit{für } i > 0, \end{array} \right\} 1 \leqq m \leqq t$$

($\sigma_i^{(m)}$ bedeutet also als leere Summe 0 für $i > k_{m-1} - k_m$ und ist für $0 < i \leqq k_{m-1} - k_m$ die i^{te} elementarsymmetrische Funktion der γ_s mit $k_m < s \leqq k_{m-1}$, so daß

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \sigma_i^{(m)} = \prod_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) \quad \text{für } 1 \leqq m \leqq t \tag{8}$$

ist).

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{i} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)} = \varrho_i^{(m)} \quad \textit{für } 1 \leqq m \leqq t,\ 0 \leqq i \leqq 2m \tag{9}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho^{(m)} = \varrho^{(m-1)} \prod\limits_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) \\ - \sum\limits_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum\limits_{u = 2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \textit{ für } 1 \leqq m \leqq t. \end{array} \right. \tag{10}$$

Beweis: 1) Für $1 \leqq m \leqq t$, $0 \leqq i \leqq 2m$ ist

$$\sum_{n=0}^{i} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)}$$

$$= \sum_{n=0}^{i} \sum_{\substack{s_1 > s_2 > \cdots > s_n > k_{m-1} \\ s_j \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]}}} \gamma_{s_1} \cdots \gamma_{s_n} \sum_{k_{m-1} \geqq s_{n+1} > \cdots > s_i > k_m} \gamma_{s_{n+1}} \cdots \gamma_{s_i},$$

wo rechts in $\sum_{n=0}^{i}$ für $n=0$ der erste, für $n=i$ der zweite Faktor 1 bedeutet. Im zweiten Faktor ist, wofern der erste von 0 verschieden ist, von selbst auch

$$s_j \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]};$$

denn, wenn der erste Faktor nicht 0 ist, ist

$$n \leqq 2(m-1), \quad m-1 \geqq \left[\frac{n}{2}\right],$$

also für $i \leqq j \leqq n+1$

$$s_j \leqq k_{m-1} \leqq k_{\left[\frac{n}{2}\right]} \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]}.$$

Also ist

$$\sum_{n=0}^{i} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \sum\limits_{\substack{s_1 > s_2 > \cdots > s_i > k_m \\ s_j \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]}}} \gamma_{s_1} \cdots \gamma_{s_i} \end{matrix}\right\} = \varrho_i^{(m)} \text{ für } \left\{\begin{matrix} i = 0, \\ 0 < i \leqq 2m; \end{matrix}\right.$$

denn bei jedem solchen System $s_1, \ldots, s_i$ gehört k_{m-1} genau einem der Intervalle

$$k_{m-1} \geqq s_1, \quad s_n > k_{m-1} \geqq s_{n+1} \text{ mit } 0 < n < i, \quad s_i > k_{m-1}$$

an. (9) ist also bewiesen.

2) Für $1 \leqq m \leqq t$ folgt aus (7), (8) und (9)

$$\varrho^{(m-1)} \prod_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1-\gamma_s) - \varrho^{(m)}$$

$$= \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} - \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \sum_{n=0}^{i} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)}$$

$$= \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} - \sum_{n=0}^{2m} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{i=n}^{2m} (-1)^{i-n} \sigma_{i-n}^{(m)},$$

also (wegen $\varrho_{2m-1}^{(m-1)} = \varrho_{2m}^{(m-1)} = 0$)

$$= \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)},$$

und (10) ist bewiesen.

Satz 3: *Haben $t, k_0, \ldots, k_t$ die Bedeutung aus Satz 2 und ist*

$$0 < \gamma_s < 1 \quad \textit{für } 0 < s \leqq k_0,$$

$$L_m = \prod_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1-\gamma_s) \geqq \frac{4}{5} \quad \textit{für } 1 \leqq m \leqq t,$$

so ist

$$|\varrho^{(t)}| < 2 \prod_{i=1}^{t} L_i .$$

Beweis: Für $1 \leqq m \leqq t$ ist

$$\sigma_1^{(m)} = \sum_{k_m < s \leqq k_{m-1}} \gamma_s < -\log L_m \leqq \log\left(1+\frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4},$$

also nach (5) für $u \geqq 1$

$$\sigma_u^{(m)} \leqq \frac{\sigma_1^{(m)}}{u} \sigma_{u-1}^{(m)} \leqq \sigma_{u-1}^{(m)},$$

$$\frac{1}{4} > \sigma_1^{(m)} \geqq \sigma_2^{(m)} \geqq \cdots \text{ ad inf.},$$

also, da die $\sigma_u^{(m)} \geqq 0$ sind,

$$(11) \quad \left| \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \right| \leqq \sum_{n=0}^{2m-2} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{2m-n}^{(m)}.$$ [6]

Nach (6) ist für $0 \leqq n \leqq 2m-2$

$$(12) \quad \sigma_{2m-n}^{(m)} \leqq \frac{(\sigma_1^{(m)})^{2m-n}}{(2m-n)!}.$$

Nach (6) ist ferner, da $\varrho_1^{(m-1)}$ für $m > 1$ die Summe der γ_s mit $k_0 \geqq s > k_{m-1}$ ist, da ferner $\varrho_n^{(m-1)} = 1$ bei $n = 0$ und bei $0 < n \leqq 2m-2$ entweder 0 oder höchstens gleich der n^{ten} elementarsymmetrischen Funktion der γ_s mit $k_0 \geqq s > k_{m-1}$ ist,

$$(13) \quad \varrho_n^{(m-1)} \leqq \frac{(\varrho_1^{(m-1)})^n}{n!},$$

wo im Falle $m = 1$, $n = 0$ das 0^0 im Zähler die Zahl 1 bedeutet.

Aus (12) und (13) folgt

$$\sum_{n=0}^{2m-2} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{2m-n}^{(m)} \leqq \sum_{n=0}^{2m} \frac{(\varrho_1^{(m-1)})^n}{n!} \frac{(\sigma_1^{(m)})^{2m-n}}{(2m-n)!} = \frac{1}{(2m)!} (\varrho_1^{(m-1)} + \sigma_1^{(m)})^{2m}$$

$$(14) \quad = \frac{1}{(2m)!} \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_1^{(i)} \right)^{2m} < \frac{e^{2m}}{(2m)^{2m}} \left(\frac{m}{4}\right)^{2m} = \left(\frac{e}{8}\right)^{2m} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{4^m}.$$

---

6) Die Monotonie der $\sigma_u^{(m)}$ ist keineswegs für das Gelingen des Beweises wesentlich; sondern ohne sie rechnet man einfach so:

$$\left| \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \right| \leqq \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} \sigma_u^{(m)} \leqq \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} \frac{(\sigma_1^{(m)})^u}{u!}$$

$$\leqq \frac{1}{(2m-n)!} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (\sigma_1^{(m)})^u = \frac{1}{(2m-n)!} \frac{(\sigma_1^{(m)})^{2m-n+1}}{1-\sigma_1^{(m)}} < \frac{1}{(2m-n)!} (\sigma_1^{(m)})^{2m-n},$$

$$\left| \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \right| \leqq \sum_{n=0}^{2m} \varrho_n^{(m-1)} \frac{1}{(2m-n)!} (\sigma_1^{(m)})^{2m-n}$$

usw., und braucht nicht einmal die Formel (5)

Nach (10), (11) und (14) ist

$$|\varrho^{(m)}| < |\varrho^{(m-1)}| L_m + \frac{1}{4^m},$$

$$\frac{|\varrho^{(m)}|}{\prod\limits_{i=1}^{m} L_i} - \frac{|\varrho^{(m-1)}|}{\prod\limits_{i=1}^{m-1} L_i} < \frac{1}{4^m \prod\limits_{i=1}^{m} L_i} \leqq \frac{1}{4^m}\left(\frac{5}{4}\right)^m < \frac{1}{2^m},$$

$$\frac{|\varrho^{(t)}|}{\prod\limits_{i=1}^{t} L_i} = 1 + \sum_{m=1}^{t}\left(\frac{|\varrho^{(m)}|}{\prod\limits_{i=1}^{m} L_i} - \frac{|\varrho^{(m-1)}|}{\prod\limits_{i=1}^{m-1} L_i}\right) < 1 + \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{2^m} < 2,$$

$$|\varrho^{(t)}| < 2 \prod_{i=1}^{t} L_i.$$

§ 2.

BRUNS zahlentheoretische Hilfsmittel.

Definition: *Für gerades $y > 0$, $d > 0$, $a \gtreqless 0$, $k \geqq 0$ bezeichne, wenn $p_1, \ldots, p_k$ (im Falle $k > 0$) verschieden sind und nicht in d aufgehen,*

$$F(d;\, p_1, \ldots, p_k) \quad (\textit{lies } F(d) \textit{ bei } k = 0)$$

die Lösungszahl von

$$0 < z \leqq y, \quad z \equiv a \pmod d, \quad z(z-y) \not\equiv 0 \pmod{p_r} \textit{ für } 1 \leqq r \leqq k.$$

Die Argumente a, y schreiben wir nicht, da y stets fest ist und Verschiedenheit der a, auch bei mehreren F in derselben Formel, nicht stört. Ein Ausdruck

$$q F(d;\, p_1, \ldots, p_k) \quad (\text{wo } q > 0)$$

bedeutet die Summe von q Funktionen $F(d;\, p_1, \ldots, p_k)$ mit demselben y, aber nicht notwendig demselben a.

Nach Definition fällt F nicht, wenn hinter dem Semikolon etwas weggelassen wird. Bei $d = 1$ ist F von a unabhängig.

Es sei $v_r = 2$ *für* $p_r \nmid y$, $v_r = 1$ *für* p_r / y, also jedenfalls v_r die Anzahl der Restklassen mod $d p_r$ mit

$$z \equiv a \pmod d. \quad z(z-y) \equiv 0 \pmod{p_r}.$$

Satz 4:

$$\left| F(d) - \frac{y}{d} \right| \leqq 1.$$

Beweis: Die Kongruenz $z \equiv a \pmod d$ hat in jedem vollständigen Restsystem mod d genau eine Lösung. $F(d)$ ist also entweder $\left[\frac{y}{d}\right]$ oder $\left[\frac{y}{d}\right] + 1$, jedenfalls also $\geqq \frac{y}{d} - 1$ und $\leqq \frac{y}{d} + 1$.

Satz 5:

$$F(d;p_1,\ldots,p_k) = F(d;p_1,\ldots,p_{k-1}) - v_k F(dp_k;p_1,\ldots,p_{k-1})$$
$$\textit{für } k>0.$$

(D. h. jedem a links entsprechen gewisse a', a'' bzw. a', a'', a''' rechts, so daß .... Desgl. in Zukunft.)

Beweis: $F(d;p_1,\ldots,p_k)$ ist die Differenz der Lösungszahl von

$$0<z\leqq y,\ z\equiv a \pmod d,\ z(z-y)\not\equiv 0 \pmod{p_r} \text{ für } 1\leqq r<k$$

minus der Lösungszahl von

$$0<z\leqq y,\quad z\equiv a\pmod d,\quad z(z-y)\not\equiv 0\pmod{p_r} \text{ für } 1\leqq r<k,$$
$$z(z-y)\equiv 0\pmod{p_k}.$$

Satz 6:

$$F(d;p_1,\ldots,p_k) = F(d) - \sum_{r_1=1}^{k} v_{r_1} F(dp_{r_1};p_1,\ldots,p_{r_1-1}).$$

Beweis: Im Falle $k=0$ ist die Behauptung klar. Ist sie für ein $k-1\geqq 0$ bewiesen, so ergibt sie sich für k folgendermaßen. Nach Satz 5 ist

$$\begin{aligned}F(d;p_1,\ldots,p_k) &= F(d;p_1,\ldots,p_{k-1}) - v_k F(dp_k;p_1,\ldots,p_{k-1})\\ &= F(d) - \sum_{r_1=1}^{k-1} v_{r_1}F(dp_{r_1};p_1,\ldots,p_{r_1-1}) - v_k F(dp_k;p_1,\ldots,p_{k-1})\\ &= F(d) - \sum_{r_1=1}^{k} v_{r_1}F(dp_{r_1};p_1,\ldots,p_{r_1-1}).\end{aligned}$$

Satz 7:

$$F(d;p_1,\ldots,p_k) = F(d) - \sum_{1\leqq r_1\leqq k} v_{r_1}F(dp_{r_1})$$
$$+\sum_{1\leqq r_2<r_1\leqq k} v_{r_1}v_{r_2}F(dp_{r_1}p_{r_2};p_1,\ldots,p_{r_2-1}).$$

Beweis: Im Falle $k=0$ ist die Behauptung klar. Im Falle $k=1$ ergibt sie sich aus Satz 5 mit $k=1$. Im Falle $k>1$ ist nach Satz 6

$$\begin{aligned}F(d;p_1,\ldots,p_k) &= F(d) - \sum_{r_1=1}^{k} v_{r_1}F(dp_{r_1};p_1,\ldots,p_{r_1-1})\\ &= F(d) - \sum_{r_1=1}^{k} v_{r_1}\Big(F(dp_{r_1}) - \sum_{r_2=1}^{r_1-1} v_{r_2}F(dp_{r_1}p_{r_2};p_1,\ldots,p_{r_2-1})\Big)\\ &= F(d) - \sum_{1\leqq r_1\leqq k} v_{r_1}F(dp_{r_1}) + \sum_{1\leqq r_2<r_1\leqq k} v_{r_1}v_{r_2}F(dp_{r_1}p_{r_2};p_1,\ldots,p_{r_2-1}).\end{aligned}$$

Satz 8: *Es sei*

$$t>0,\ k = k_0 > k_1 > \cdots > k_{t-1} > k_t \geqq 0.$$

Wenn alle vorkommenden r_j *den Bedingungen*

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_{2t} > 0,\quad r_j \leqq k_{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \text{ für } 1 \leqq j \leqq 2t \tag{15}$$

unterworfen sind, ist

$$F(1; p_1, \ldots, p_k) \leqq F(1) + \sum_{i=1}^{2t-1} (-1)^i \sum_{r_1, \ldots, r_i} v_{r_1} \cdots v_{r_i} F(p_{r_1} \cdots p_{r_i})$$

$$+ \sum_{r_1, \ldots, r_{2t}} v_{r_1} \cdots v_{r_{2t}} F(p_{r_1} \cdots p_{r_{2t}}; p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}\,(r_{2t}-1,\, k_t)}).$$

Beweis: Für $t = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 7 (mit $d = 1$), da dort

$$F(p_{r_1} p_{r_2}; p_1, \ldots, p_{r_2-1}) \leqq F(p_{r_1} p_{r_2}; p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}\,(r_2-1,\, k_1)}).$$

Ist die Behauptung für ein $t > 0$ wahr, so folgt sie für $t+1$ aus Satz 7 wegen

$$F(p_{r_1} \cdots p_{r_{2t}}; p_1, \ldots, p_{\mathrm{Min}\,(r_{2t}-1,\, k_t)})$$

$$= F(p_{r_1} \cdots p_{r_{2t}}) - \sum_{r_{2t+1}} v_{r_{2t+1}} F(p_{r_1} \cdots p_{r_{2t+1}})$$

$$+ \sum_{r_{2t+1},\, r_{2t+2}} v_{r_{2t+1}} v_{r_{2t+2}} F(p_{r_1} \cdots p_{r_{2t+2}}; p_1, \ldots, p_{r_{2t+2}-1})$$

(hierin hat nämlich in der Tat r_{2t+1} über die ganzen Zahlen $\geqq 1$ und $\leqq \mathrm{Min}\,(r_{2t}-1, k_t)$, r_{2t+2} über die Werte $\geqq 1$ und $\leqq r_{2t+1} - 1$ $= \mathrm{Min}\,(r_{2t+1}-1, k_t)$ zu laufen), wo zuletzt hinter dem Semikolon ohne Verkleinerung bei $p_{\mathrm{Min}\,(r_{2t+2}-1,\, k_{t+1})}$ abgebrochen werden kann.

Satz 9: *Wird bei Summation über den Bereich* (15)

$$\tau = 1 + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \ldots, r_i} \frac{v_{r_1}}{p_{r_1}} \cdots \frac{v_{r_i}}{p_{r_i}}$$

gesetzt, so ist

$$F(1; p_1, \ldots, p_k) < y\tau + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2.$$

Beweis: Nach Satz 4 und Satz 8 ist

$$F(1\,;p_1,\ldots,p_k)\leqq F(1)+\sum_{i=1}^{2t}(-1)^i\sum_{r_1,\ldots,r_i}v_{r_1}\cdots v_{r_i}F(p_{r_1}\cdots p_{r_i})$$

$$\leqq y+1+\sum_{i=1}^{2t}\left((-1)^i\sum_{r_1,\ldots,r_i}v_{r_1}\cdots v_{r_i}\frac{y}{p_{r_1}\cdots p_{r_i}}+\sum_{r_1,\ldots,r_i}v_{r_1}\cdots v_{r_i}\right)$$

$$\leqq y\tau+1+\sum_{i=1}^{2t}\sum_{r_1,\ldots,r_i}2^i\leqq y\tau+\sum_{i=0}^{2t}2^i k_0 k_0 k_1 k_1\cdots k_{t-1}k_{t-1}$$

$$< y\tau+2^{2t+1}\prod_{m=0}^{t-1}k_m^2 = y\tau+2\prod_{m=0}^{t-1}(2k_m)^2.$$

§ 3.

Abschluß des Siebverfahrens.

Satz 10: *Bei passendem $c>1$ ist, wenn $p_1,\ldots,p_k$ mit $p_1<p_2<\cdots<p_k$ diejenigen Primzahlen hinter 7 bezeichnen, die $\leqq\sqrt[c]{y}$ sind,*

$$F(1\,;p_1,\ldots,p_k) = O\left(\frac{y}{\log^2 y}\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right).$$

Vorbemerkung: Hieraus folgt nachträglich, daß $c=2$ das Gewünschte leistet; denn bei fallendem c steigt die linke Seite nicht.

Beweis: Nach (1) ist für $\xi>7$

$$\frac{1}{c_1\log\xi}<\prod_{7<p\leqq\xi}\left(1-\frac{1}{p}\right)<\frac{c_1}{\log\xi}, \tag{16}$$

also, wenn p_s die s^{te} Primzahl hinter 7 ist, für $b>0$

$$\prod_{s=1}^{b}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)<\frac{c_1}{\log p_b}<\frac{c_1}{\log(2b)}. \tag{17}$$

Man setze

$$c = 1+270\,c_1^2. \tag{18}$$

Für $y>c_2$ ist ein p mit $7<p\leqq\sqrt[c]{y}$ vorhanden, also $k>0$. Es werde

$$\frac{v_i}{p_i} = \gamma_i \quad \text{für } 1\leqq i\leqq k$$

gesetzt.

Für $1\leqq i\leqq k$ ist

$$1-\gamma_i\geqq 1-\frac{2}{11} = \frac{9}{11}\left(>\frac{4}{5}\right). \tag{19}$$

Es sei k_1 die (somit existierende) kleinste ganze Zahl $\geqq 0$ mit

$$L_1 = \prod_{k_1 < s \leqq k} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5};$$

im Falle $k_1 > 0$ sei k_2 die kleinste ganze Zahl $\geqq 0$ mit

$$L_2 = \prod_{k_2 < s \leqq k_1} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5}$$

usf.

So erhält man (von y abhängige) Zahlen $t > 0$, $k_0, \ldots, k_t$ mit

$$k = k_0 > k_1 > \cdots > k_{t-1} > k_t = 0,$$

$$L_m = \prod_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) \geqq \frac{4}{5} \quad \text{für } 1 \leqq m \leqq t;$$

also sind die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt. Offenbar ist (da bei $\varrho_i^{(t)}$ die Nebenbedingung $s_t > k_t$ nur $s_t > 0$ besagt)

$$\tau = \varrho^{(t)},$$

also nach Satz 3

$$|\tau| < 2 \prod_{i=1}^{t} L_i,$$

folglich nach Satz 9

$$F(1; p_1, \ldots, p_k) < 2y \prod_{i=1}^{t} L_i + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2. \tag{20}$$

Nach Konstruktion der k_m ist für $1 \leqq m \leqq t-1$

$$(1 - \gamma_{k_m}) L_m = \prod_{k_m - 1 < s \leqq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) < \frac{4}{5},$$

also nach (19)

$$L_m < \frac{4}{5} \frac{11}{9} = \frac{44}{45} = 1 - \frac{1}{45} < \left(1 - \frac{1}{135}\right)^3.$$

Für $0 \leqq m \leqq t-1$ ist nach (17),

$$\prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \lambda (= \lambda(y))$$

gesetzt,

$$\log(2k_m) < \frac{c_1}{\prod\limits_{s=1}^{k_m}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)} = \frac{c_1}{\lambda}\prod_{i=1}^{m}\prod_{k_i < s \leqq k_{i-1}}\left(1-\frac{1}{p_s}\right);$$

wegen

$$\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^3 < 1-\frac{3}{p_s}+\frac{3}{p_s^2} < 1-\frac{v_s}{p_s}$$

ist also

$$\log(2k_m) < \frac{c_1}{\lambda}\sqrt[3]{\prod_{i=1}^{m} L_i} \leqq \frac{c_1}{\lambda}\left(1-\frac{1}{135}\right)^m,$$

$$\log\prod_{m=0}^{t-1}(2k_m) < \frac{c_1}{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{135}\right)^m = \frac{135\,c_1}{\lambda},$$

$$2\prod_{m=0}^{t-1}(2k_m)^2 < 2e^{\frac{270\,c_1}{\lambda}};$$

nach (16) ist

$$\frac{1}{\lambda} < c_1 \log\sqrt[c]{y},$$

also wegen (18)

$$(21)\quad 2\prod_{m=0}^{t-1}(2k_m)^2 < 2e^{\frac{270\,c_1^2}{c}\log y} = 2y^{\frac{270\,c_1^2}{1+270\,c_1^2}} = O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right).$$

Andererseits ist

$$\prod_{i=1}^{t} L_i = \prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{v_s}{p_s}\right) \leqq \prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^{v_s} = \frac{\prod\limits_{s=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_s}\right)^2}{\prod\limits_{\substack{p/y\\ 7<p\leqq\sqrt[c]{y}}}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leqq \frac{\lambda^2}{\prod\limits_{p/y}\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \lambda^2\prod_{p/y}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\cdot\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$< \lambda^2\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\cdot\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right) = O\left(\lambda^2\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right).$$

Nach (16) ist

$$\lambda = O\left(\frac{1}{\log\sqrt[c]{y}}\right) = O\left(\frac{1}{\log y}\right),$$

also

$$\prod_{i=1}^{t} L_i = O\left(\frac{1}{\log^2 y} \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right). \tag{22}$$

Aus (20), (21) und (22) folgt schließlich die Behauptung

$$F(1; p_1, \ldots, p_k) = O\left(\frac{y}{\log^2 y} \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right).$$

Satz 11 [7]: *Ist $f(y)$ die Lösungszahl von $y = p + p'$, so ist*

$$f(y) = O\left(\frac{y}{\log^2 y} \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right).$$

Beweis: Für ungerades y ist

$$f(y) \leqq 2.$$

Es sei also $y > 0$ gerade. Die Anzahl der Lösungen mit $p > \sqrt{y}$, $p' > \sqrt{y}$ ist $\leqq F(1; p_1, \ldots, p_k)$, da jedes p_i wegen $p_i \leqq \sqrt{y}$ weder in p noch in $p - y = -p'$ aufgeht. Die Anzahl der Lösungen mit $p \leqq \sqrt{y}$ oder $p' \leqq \sqrt{y}$ ist $\leqq 2\sqrt{y} = O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right)$. Satz 10 gibt also die Behauptung.

Satz 12:

$$\sum_{0<y<x}\left(\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^2 = O(x).$$

Beweis:

$$\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqq \sum_{a/y} \frac{1}{a},$$

also für $x > 0$

$$\sum_{0<y<x}\left(\prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^2 \leqq \sum_{0<y\leqq x} \sum_{\substack{a/y \\ b/y}} \frac{1}{ab}$$

$$= \sum_{a=1}^{x} \sum_{b=1}^{x} \frac{1}{ab}\left[\frac{x}{\{a, b\}}\right],$$

wo $\{a, b\}$ $(\geqq \sqrt{ab})$ das kleinste positive gemeinsame Vielfache von a, b ist. Daher ist

---

7) Dieser längst vermutete Satz ist bisher nirgends bewiesen worden.

$$\sum_{0<y<x} \Big(\prod_{p/y}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big)^2 \leqq x \sum_{a=1}^{x} \sum_{b=1}^{x} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}} = O(x).$$

§ 4.

Der erste SCHNIRELMANNsche Hauptsatz.

Satz 13 (erster SCHNIRELMANNscher Hauptsatz): *Ist* $N(x)$ *die Anzahl der in der Gestalt* $p+p'$ *darstellbaren* $y<x$, *so ist*

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{N(x)}{x} > 0.$$

Beweis: Aus Satz 11 und 12 folgt (wenn $f(y)$ die Lösungszahl von $y = p+p'$ ist)

$$\sum_{y<x} f^2(y) = O \sum_{1<y<x} \frac{y^2}{\log^4 y}\Big(\prod_{p/y}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big)^2$$

$$= O\Big(\frac{x^2}{\log^4 x} \sum_{0<y<x}\Big(\prod_{p/y}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\Big)^2\Big) = O\Big(\frac{x^3}{\log^4 x}\Big).$$

Andererseits ist $\sum_{y<x} f(y)$ die Lösungszahl von $p+p'<x$, also $\Big($da jedes Paar $p<\frac{x}{2}$, $p'<\frac{x}{2}$ Lösung ist$\Big)$ nach (2) für $x>4$

$$\sum_{y<x} f(y) \geqq \Big(\sum_{p<\frac{x}{2}} 1\Big)^2 > \frac{1}{c_3}\frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Nun ist, da in $\sum_{y<x} f(y)$ genau $N(x)$ Glieder von 0 verschieden sind, für $x>4$

$$\frac{1}{c_3^2}\frac{x^4}{\log^4 x} < \big(\sum_{y<x} f(y)\big)^2 \leqq N(x) \sum_{y<x} f^2(y) < N(x)\, c_4 \frac{x^3}{\log^4 x},$$

$$N(x) > \frac{x}{c_5}.$$

Zusatz (SCHNIRELMANN): *Ist eine Menge von Primzahlen* q *gegeben und ist*

$$\frac{\xi}{\log \xi} = O \sum_{q<\xi} 1, \tag{23}$$

so gilt für die Anzahl $N(x)$ *der in der Gestalt* $q+q'$ *darstellbaren* $y<x$ *auch*

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{N(x)}{x} > 0.$$

Beweis: Ist $f(y)$ die Lösungszahl von $y = q + q'$, so gilt die Formel des Satzes 11 a fortiori. Wegen (23) ändert sich nichts am Beweis (abgesehen davon, daß an Stelle von c_3 und c_5 jetzt von der Menge abhängige natürliche Zahlen treten).

§ 5.
SCHNIRELMANNS mengentheoretisches Hilfsmittel.

Satz 14[8]**:** *Gegeben sei eine Menge von Zahlen* $n_1, n_2, \ldots$ ad inf. *mit*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots.$$

Für $h \geqq 1$ *seien* $n_1^{(h)}, n_2^{(h)}, \ldots$ *die wachsend geordneten positiven Zahlen, die in höchstens* h *Summanden* n_i *zerlegbar sind,* $N_h(x)$ *die Anzahl der* $n_i^{(h)} < x$, α_h *die untere Grenze von* $\frac{N_h(x)}{x-1}$ *für* $x > 1$ (also $0 \leqq \alpha_h \leqq 1$). *Es werde* $\alpha_1 = \alpha$ *gesetzt. Dann ist*

$$1 - \alpha_h \leqq (1-\alpha)^h. \tag{24}$$

Beweis: (24) ist für $h = 1$ klar. Es sei (24) für ein $h \geqq 1$ wahr; dann ergibt sich die Richtigkeit für $h+1$ folgendermaßen. Für $x > 1$ ist (da im Intervall $n_i < z < m$ für $m > n_i$ genau $N_h(m - n_i)$ Zahlen $n_i + n_j^{(h)}$ liegen), wenn $N_1(x) = N(x)$ gesetzt wird,

$$N_{h+1}(x) \geqq N(x) + \sum_{i=1}^{N(x)-1} N_h(n_{i+1} - n_i) + N_h(x - n_{N(x)})$$

$$\geqq N(x) + \alpha_h \left\{ \sum_{i=1}^{N(x)-1} (n_{i+1} - n_i - 1) + (x - n_{N(x)} - 1) \right\} = N(x) + \alpha_h(x - 1 - N(x))$$

$$= (1-\alpha_h) N(x) + \alpha_h(x-1) \geqq ((1-\alpha_h)\alpha + \alpha_h)(x-1),$$

$$\alpha_{h+1} \geqq \alpha - \alpha\alpha_h + \alpha_h,$$

$$1 - \alpha_{h+1} \leqq (1-\alpha)(1-\alpha_h) \leqq (1-\alpha)^{h+1}.$$

§ 6.
Der zweite SCHNIRELMANNsche Hauptsatz.

Satz 15 (SCHNIRELMANN)**:** *Jedes* $x > 0$ *ist in höchstens* c_6 *Summanden* $1, p$ *zerlegbar.*

---

8) In dieser (für unseren Zweck unnötig scharfen) Fassung steht dieser Satz nicht bei Herrn SCHNIRELMANN.

Beweis: Ist $N(x)$ die Anzahl der Zahlen $< x$, die $= 1$ oder von der Gestalt $p+p'$ sind, so ist nach Satz 13

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{N(x)}{x-1} > 0,$$

also auch die untere Grenze (Weltkonstante) α von $\frac{N(x)}{x-1}$ für $x > 1$ positiv. Man wähle c_7 mit

$$(1-\alpha)^{c_7} < \frac{1}{2},$$

so daß nach Satz 14

$$\alpha_{c_7} > \frac{1}{2}.$$

Dann ist für $x > 1$ die Anzahl der in höchstens $2c_7$ Summanden $1, p$ zerlegbaren positiven $m < x$ größer als $\frac{x-1}{2}$. Von diesen mehr als $\frac{x-1}{2}$ Zahlen $m < x$ muß also (wenn die m' auch die obige Menge bezeichnen) eine gleich einer der mehr als $\frac{x-1}{2}$ Zahlen $x - m' > 0$ sein. D. h. es ist

$$x = m + m',$$

wo die rechte Seite in höchstens $4c_7 = c_6$ Summanden $1, p$ zerlegbar ist.

Zusatz (Herrn SCHNIRELMANNS Teorema 2): *Ist eine Menge von Primzahlen q im Sinne des Zusatzes zu Satz 13 gegeben, so ist jedes $x > 0$ in Summanden $1, q$ zerlegbar, deren Anzahl eine nur von der Menge abhängige Schranke nicht übersteigt.*

Beweis: Genau wie der des Satzes 15; nur treten an Stelle von α, c_7 und c_6 von der Menge abhängige Zahlen.

Satz 16 (zweiter SCHNIRELMANNscher Hauptsatz): *Jedes $x > 1$ ist als Summe von höchstens c_8 Primzahlen darstellbar.*

Beweis: $x = 2$ ist Primzahl.

Ist $x > 2$, so ist $x - 2$ nach Satz 15 in höchstens c_6 Summanden $1, p$ zerlegbar. Tritt hierbei 1 nicht auf, so ist $x = (x-2)+2$ in höchstens $c_6 + 1$ Summanden p zerlegt. Tritt 1 genau einmal auf, so ist $x = (x-3)+3$ in höchstens c_6 Summanden p zerlegt. Tritt 1 öfter als einmal auf, so vereinige man alle Einsen zu Zweien bzw. zu Zweien und einer Drei, und $x = (x-2)+2$ ist in höchstens c_6 Summanden p zerlegt.

Jedenfalls leistet also $c_8 = c_6 + 1$ das Gewünschte.

Zusatz: *Ist eine Menge von Primzahlen q im Sinne des Zusatzes zu Satz 13 gegeben, so gibt es Zahlen C_1, C_2, die* (wie C_3, C_4 nachher) *nur von der Menge abhängen, so daß jedes $x > C_1$ in höchstens C_2 Summanden q zerlegbar ist.*

Beweis: Sind q_1, q_2 die zwei kleinsten q, so sind bekanntlich z. B. alle $x \geqq q_1 q_2 = C_1$ in Summanden q_1, q_2 zerlegbar. Für $x > C_1$ ist $x - C_1$ nach dem Zusatz zu Satz 15 von der Form $\sum 1 + \sum q$, wo zusammen höchstens C_3 Glieder auftreten. $C_1 + \sum 1$ ist in höchstens C_4 Summanden q zerlegbar, x also in höchstens $C_4 + C_3 = C_2$ Summanden q.

Anhang 1.

Beweis ältester Primzahlsätze.

Satz 17:

$$\prod_{p \leqq x} p \leqq 16^x \textit{ für } x > 0.$$

Beweis: Für $n \geqq 0$ geht jedes p mit $n < p \leqq 2n$ nicht in $n!$ auf, wohl aber in $(2n)!$, also in der ganzen Zahl

$$\frac{(2n)!}{n!\, n!} = \binom{2n}{n} \leqq (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

Daher ist

$$\prod_{n < p \leqq 2n} p \leqq 2^{2n} \leqq 4^{2n},$$

$$\prod_{n < p \leqq 2n+1} p \leqq (2n+1)\, 2^{2n} < 2^{2n+1}\, 2^{2n+1} = 4^{2n+1}.$$

Für $x \geqq 0$ ist also

$$\prod_{\frac{x}{2} < p \leqq x} p \leqq 4^x,$$

folglich für $\xi > 0$

$$\prod_{\frac{\xi}{2} < p \leqq \xi} p \leqq \prod_{\frac{[\xi]}{2} < p \leqq [\xi]} p \leqq 4^{[\xi]} \leqq 4^{\xi},$$

also für $x > 0$

$$\prod_{p \leqq x} p = \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{\frac{x}{2^{n+1}} < p \leqq \frac{x}{2^n}} p \leqq 4^{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2^n}} = 16^x.$$

Satz 18:

$$G(x) = \sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

also

$$\text{(25)} \qquad \log \xi - c_9 < \sum_{p < \xi} \frac{\log p}{p} < \log \xi + c_9 \ \textit{für} \ \xi \geqq 1.$$

Beweis: Für $x > 0$ geht p nach LEGENDRE in $x!$ genau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^n}\right]$ mal auf. Diese Anzahl ist

$$\geqq \left[\frac{x}{p}\right] > \frac{x}{p} - 1$$

und

$$< \frac{x}{p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{p^n} = \frac{x}{p} + \frac{x}{p(p-1)}.$$

Hieraus folgt

$$e^{x \log x - x} = \frac{x^x}{e^x} < x! \leqq \prod_{p \leqq x} p^{\frac{x}{p} + \frac{x}{p(p-1)}} = e^{x\, G(x) + x \sum\limits_{p \leqq x} \frac{\log p}{p(p-1)}} < e^{x\, G(x) + c_{10} x}$$

und

$$e^{x \log x} = x^x \geqq x! \geqq \prod_{p \leqq x} p^{\frac{x}{p} - 1} = e^{x\, G(x)} \left(\prod_{p \leqq x} p\right)^{-1} \geqq e^{x\, G(x)} \cdot 16^{-x},$$

also

$$\log x - 1 - c_{10} < G(x) \leqq \log x + \log 16.$$

Satz 19:

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} = \log \log \xi + O(1),$$

also

$$\prod_{p \leqq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\sum\limits_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} + O(1)} = \frac{1}{\log \xi}\, e^{O(1)}.$$

Beweis: Wird für $n \geqq 1$

$$G(n) - \log n = H(n)$$

gesetzt, so ist

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} = \sum_{2 \leqq n \leqq \xi} \frac{G(n) - G(n-1)}{\log n}$$

$$= \sum_{2 \leqq n \leqq \xi} \frac{\log n - \log(n-1)}{\log n} + \sum_{2 \leqq n \leqq \xi} \frac{H(n) - H(n-1)}{\log n}.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{H(n) - H(n-1)}{\log n}$$

konvergiert, da nach Satz 18

$$\sum_{n=2}^{m} (H(n) - H(n-1)) = H(m) = G(m) - \log m = O(1)$$

ist. Also ist

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{1}{p} = \sum_{2 \leqq n \leqq \xi} \frac{-\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\log n} + O(1) = \sum_{2 \leqq n \leqq \xi} \frac{1}{n \log n} + O(1) = \log \log \xi + O(1).$$

Satz 20:

$$\frac{\xi}{\log \xi} = O \sum_{p < \xi} 1.$$

Beweis: Nach (25) ist für $\xi \geqq e^{3 c_9}$

$$\frac{\log \xi}{e^{-3 c_9} \xi} \sum_{p < \xi} 1 \geqq \frac{\log \xi}{e^{-3 c_9} \xi} \sum_{e^{-3 c_9} \xi \leqq p < \xi} 1 \geqq \sum_{e^{-3 c_9} \xi \leqq p < \xi} \frac{\log p}{p}$$

$$= \sum_{p < \xi} \frac{\log p}{p} - \sum_{p < e^{-3 c_9} \xi} \frac{\log p}{p} > \log \xi - c_9 - \log\left(e^{-3 c_9} \xi\right) - c_9 = c_9.$$

Anhang 2.

Die SCHNIRELMANNschen Hilfssätze.

Satz 21: *Gegeben sei eine Menge von Zahlen* $n_1, n_2, \ldots$ ad inf. *mit*

$$1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots.$$

Es sei $N(x)$ *die Anzahl der* $n_i < x$,

$$\varliminf_{x = \infty} \frac{N(x)}{x} \geqq \alpha > 0.$$

Dann läßt sich jedes $x > 0$ *in höchstens*

$$t = 2\left(\left[\frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-\alpha}}\right] + 1\right)$$

(*das bedeutet* 2 *für* $\alpha = 1$) *Summanden* n_i *und höchstens* B *Summanden* 1 *zerlegen, wo* B (wie B_1 nachher) *nur von der Menge abhängt.*

Vorbemerkung: Herrn SCHNIRELMANNS Beweis seines entsprechenden ersten Lemma ist quantitativ verrechnet, qualitativ richtig. Aber sein Wortlaut mit

$$2\left[\frac{1}{\alpha}\right]$$

statt t ist zufällig richtig. Denn es ist

$$\left[\frac{\log 2}{\log\frac{1}{1-\alpha}}\right]+1 \begin{cases} \leqq \dfrac{\log 2}{-\log(1-\alpha)}+1<\dfrac{\log 2}{\alpha}+1<\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{3}{10\alpha}+1\leqq\dfrac{1}{\alpha} & \text{für } 0<\alpha\leqq\frac{3}{10} \\ \leqq\left[\dfrac{\log 2}{\log\frac{10}{7}}\right]+1=2\leqq\dfrac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{3}{10}<\alpha\leqq\frac{1}{2} \\ =1\leqq\dfrac{1}{\alpha} & \text{für } \frac{1}{2}<\alpha\leqq 1 \end{cases}$$

also

$$\left[\frac{\log 2}{\log\frac{1}{1-\alpha}}\right]+1\leqq\left[\frac{1}{\alpha}\right].$$

Beweis: Man wähle $\delta>0$ mit

$$t = 2\left(\left[\frac{\log 2}{\log\frac{1}{1-(\alpha-\delta)}}\right]+1\right),$$

also

$$(1-(\alpha-\delta))^{\frac{t}{2}}<\frac{1}{2}.$$

Für $x>B_1\,(>0)$ ist

$$N(x)\geqq(\alpha-\delta)(x-1).$$

Bei Hinzufügung der etwa fehlenden natürlichen Zahlen $\leqq B_1$ ist also, wenn $N^*(x)$ sich auf die neue Menge bezieht,

$$N^*(x)\geqq(\alpha-\delta)(x-1) \text{ für } x\geqq 1.$$

Nach dem Beweis des Satzes 15 sind also alle $x>0$ in höchstens t Summanden q, n_i zerlegbar, wo $0<q\leqq B_1$, also in höchstens t Summanden n_i und höchstens $tB_1 = B$ Summanden 1.

Satz 22: *Es sei* $\Phi(i)$ *für* $i>0$ *positiv, wachsend und*

$$\Phi(i) = O(\sqrt{i}). \tag{26}$$

Es sei $0<n_1<n_2<\cdots$ ad inf., $n_i = O(i\,\Phi(i))$. *Es sei* $A(y,x)$ *für* $0<y\leqq x$ *die Lösungszahl von*

$$n_i - n_j = y, \quad n_i \leqq x.$$

Es sei

$$\sum_{y=1}^{x} A^2(y, x) = O\left(\frac{x^3}{\Phi^4(x)}\right). \tag{27}$$

Dann ist, wenn $N(x)$ die Anzahl der in der Gestalt $n_i + n_j$ darstellbaren Zahlen $\leqq x$ ist,

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{N(x)}{x} > 0.$$

Vorbemerkung: Herr SCHNIRELMANN hat bei seinem zweiten Lemma die Relation (27) nur unter den schärferen Annahmen erhalten, daß in (26) o statt O steht und statt (27) sogar gefordert wird

$$\sum_{y=1}^{s} A^2(y, x) < Cs \frac{x^2}{\Phi^4(x)} \quad \text{für } s > 0, \ x > 0,$$

wo C (desgl. $C_1, \ldots, C_5$ nachher) positiv und von x und s frei ist.

Beweis: Bedeutet $M(\xi)$ die Anzahl der $n_i \leqq \xi$, so ist für $x \geqq 2n_1$

$$< n_{M\left(\frac{x}{2}\right)+1} < C_1\left(M\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\Phi\left(M\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) \leqq C_1 \cdot 2M\left(\frac{x}{2}\right)\Phi\left(\frac{x}{2}+1\right) \leqq 2C_1 M\left(\frac{x}{2}\right)\Phi(x),$$

also, wenn $f(m)$ die Lösungszahl von $m = n_i + n_j$ ist,

$$\frac{x^4}{C_2 \Phi^4(x)} < M^4\left(\frac{x}{2}\right) \leqq \left(\sum_{m=1}^{x} f(m)\right)^2 \leqq N(x) \sum_{m=1}^{x} f^2(m).$$

$f^2(m)$ ist die Lösungszahl von $m = n_i + n_j = n_u + n_v$; ist hierin $i = u$, so gibt es $f(m) \leqq \frac{1 + f^2(m)}{2}$ solche Quadrupel; ist $i \gtrless u$, so ist der Beitrag dieser Quadrupel zu $\sum_{m=1}^{x} f^2(m)$ höchstens $2 \sum_{y=1}^{x} A^2(y, x)$; denn in $i > u$, $y = n_i - n_u = n_v - n_j$ ist $1 \leqq y \leqq x$, alle $n_w \leqq x$. Also ist

$$\sum_{m=1}^{x} f^2(m) < \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{x} f^2(m) + C_3 \frac{x^3}{\Phi^4(x)},$$

$$\frac{x^4}{C_2 \Phi^4(x)} < N(x)\left(x + 2C_3 \frac{x^3}{\Phi^4(x)}\right) < C_4 N(x) \frac{x^3}{\Phi^4(x)},$$

$$N(x) > \frac{x}{C_5}.$$

Satz 23: *Bedeuten die n_i des Satzes 22 die Primzahlen und $A(y, x)$ dasselbe wie dort, so ist für $x > 1$, $0 < y \leqq x$*

$$A(y, x) < c_{11} \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p/y} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Vorbemerkung: Bis auf seinen numerischen Faktor, den ich $\left(\text{mit hierbei erlaubter Abänderung von } \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p-2}\right) \text{ in } \prod_{p/y}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)$ durch c_{11} ersetzt habe, ist dies Herrn SCHNIRELMANNS Lemma 3.

Beweis: Für ungerades y mit $0 < y \leqq x$ ist $A(y, x) \leqq 1$. Für gerades y mit $0 < y \leqq x$ ist die Anzahl der Lösungen von $y = p - p'$, $p \leqq x$ mit $p > \sqrt{x}$, $p' > \sqrt{x}$ höchstens $F(1;\, p_1, \ldots, p_k)$, wenn $z \leqq x$ statt $z \leqq y$ in der alten Definition von F geschrieben wird und $p_1, \ldots, p_k$ mit $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ diejenigen Primzahlen hinter 7 bezeichnen, die $\leqq \sqrt{x}$ sind. Denn p_i geht wegen $p_i \leqq \sqrt{x}$ weder in p noch in $p - y = p'$ auf. Die Anzahl der Lösungen mit $p \leqq \sqrt{x}$ oder $p' \leqq \sqrt{x}$ ist $\leqq 2\sqrt{x} = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$. Die Beweismethode des Satzes 10 gibt für $0 < y \leqq x$ bei geradem y

$$F(1;\, p_1, \ldots, p_k) < c_{12} \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p/y} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Damit ist alles bewiesen.

Berichtigung zu S. 259.

Z. 2—3 streiche , wofern der erste von 0 verschieden ist,
Statt Z. 5—6 lies denn für $n+1 \leqq j \leqq i$ ist

$$j \leqq 2m, \quad \left[\frac{j-1}{2}\right] \leqq m - 1,$$

Z. 7 streiche für $i \leqq j \leqq n+1$
Z. 8 streiche $\leqq k_{\left[\frac{n}{2}\right]}$