7.

Zwei besondere Untersuchungen über die Classen-Anzahl und über die Einheiten der aus λ^{ten} Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor zu Breslau.)

Nachdem ich in der vorhergehenden Abhandlung die Classen-Anzahl für die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen angegeben habe, will ich jetzt zunächst folgende Frage vollständig beantworten:

Für welche Werthe der Primzahl λ ist die Classen-Anzahl der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen idealen Zahlen durch λ theilbar; und für welche nicht?

Nach der Gleichung (38.) in der vorhergehenden Abhandlung ist diese Classen-Anzahl:

$$1.\quad H = \frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}\cdot\frac{D}{\Delta},$$

wo die beiden Factoren, aus welchen sie zusammengesetzt ist, nämlich $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ und $\frac{D}{\Delta}$, für sich ganze Zahlen sind; es wird also die Untersuchung, ob H durch λ theilbar sei, oder nicht, für diese beiden Factoren besonders zu führen sein. Ich mache den Anfang mit dem Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, in welchem

$$P = \varphi(\beta)\varphi(\beta^3)\varphi(\beta^5)\;\ldots\;\varphi(\beta^{\lambda-2}),$$

$$\varphi(\beta) = 1+g_1\beta+g_2\beta^2+g_3\beta^3+\;\ldots\;+g_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2} \text{ ist.}$$

Ich multiplicire $\varphi(\beta)$ mit $g\beta-1$, so wird

$$(g\beta-1)\varphi(\beta) = gg_{\lambda-2}-1+(gg_{\lambda-1}-g_1)\beta+(gg_1-g_2)\beta^2+\;\ldots$$
$$+(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})\beta^{\lambda-2},$$

und es sind nun, wie schon in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt, die Coëfficienten aller einzelnen Glieder durch λ theilbar. Setzt man also

$$gg_{k-1}-g_k = \lambda b_k$$

und

$$b_0+b_1\beta+b_2\beta^2+\;\ldots\;+b_{\lambda-2}\beta^{\lambda-2} = \psi(\beta),$$

so erhält man

$$(g\beta-1)\varphi(\beta) = \lambda\psi(\beta),$$

und hieraus, wenn β in β^3, β^5, ... $\beta^{\lambda-2}$ verwandelt und das Product gebildet wird, bei welchem

$$(g\beta-1)(g\beta^3-1)(g\beta^5-1)\dots(g\beta^{\lambda-2}-1) = g^\mu+1$$

ist:

$$(g^\mu+1)P = \lambda^\mu\psi(\beta)\psi(\beta^3)\psi(\beta^5)\dots\psi(\beta^{\lambda-2}).$$

Es ist $g^\mu+1$ (da g eine primitive Wurzel des λ und $\mu=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist) bekanntlich durch λ theilbar; man kann also $g^\mu+1=\lambda G$ setzen, wo G eine ganze Zahl ist. Man weifs auch, dafs nur in besondern Fällen, für einzelne Werthe der primitiven Wurzel g, der Ausdruck $g^\mu+1$ den Factor λ zweimal, oder wohl gar mehrmal enthalten kann: wählt man aber, was immer möglich ist, die primitive Wurzel g so, dafs dies nicht der Fall ist, so ist G nicht durch λ theilbar. Man erhält also

$$2.\quad 2^{\mu-1}G\cdot\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}} = \psi(\beta)\psi(\beta^3)\psi(\beta^5)\dots\psi(\beta^{\lambda-2}).$$

Es kann demnach $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ nur dann durch λ theilbar sein, wenn das Product $\psi(\beta)\psi(\beta^3)\dots\psi(\beta^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist; und umgekehrt, wenn dieses Product durch λ theilbar ist, so ist auch wirklich dieser erste Factor der Classen-Anzahl H durch λ theilbar. Nun ist aber offenbar, wenn man statt der primitiven Wurzel β der Gleichung $\beta^{\lambda-1}=1$, die primitive Congruenzwurzel g der Congruenz $g^{\lambda-1}\equiv 1$, mod. λ, setzt:

$$\psi(\beta)\psi(\beta^3)\dots\psi(\beta^{\lambda-2}) \equiv \psi(g)\psi(g^3)\dots\psi(g^{\lambda-2}),\ \text{mod.}\ \lambda;$$

also wenn irgend einer der ganzzahligen Factoren des Products $\psi(g)\psi(g^3)\dots$ $\dots\psi(g^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist, so mufs auch $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ durch λ theilbar sein; und umgekekrt, wenn keine der ganzzahligen Gröfsen $\psi(g)$, $\psi(g^3)$, ... $\psi(g^{\lambda-2})$ durch λ theilbar ist, so ist auch $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ nicht durch λ theilbar. Es hangt also für diesen ersten Factor der Classen-Anzahl H Alles davon ab, ob die Congruenz

$$3.\quad b_0+b_1g^{2n-1}+b_2g^{2(2n-1)}+\dots+b_{\lambda-2}g^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0,\ \text{mod.}\ \lambda,$$

für irgend einen der Werthe $n=1, 2, \dots \mu$ erfüllt wird; oder für keinen derselben. Dividirt man die Congruenz durch g^{2n-1}, und verwandelt mit Hülfe der Congruenz $g^k\equiv g_k$, mod. λ, die Exponenten 1, 2, 3, ... $\lambda-2$ in Indices, so wird aus dieser Congruenz folgende gleichbedeutende:

$$b_0 g_{\lambda-2}^{2n-1} + b_1 + b_2 g_1^{2n-1} + b_3 g_2^{2n-1} + \dots + b_{\lambda-2} g_{\lambda-3}^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Aus der Definition der Coëfficienten b_k, nämlich

$$\lambda b_k = g g_{k-1} - g_k,$$

folgt nun aber unmittelbar, dafs erstens $b_k = 0$ ist, für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen 0 und $\frac{\lambda}{g}$ liegen; ferner $b_k = 1$ für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen $\frac{\lambda}{g}$ und $\frac{2\lambda}{g}$ liegen, oder allgemein $b_k = s$ für alle Werthe des g_{k-1}, welche zwischen $\frac{s\lambda}{g}$ und $\frac{(s+1)\lambda}{g}$ liegen. Bezeichnet man durch t_s die gröfste in $\frac{s\lambda}{g}$ enthaltene ganze Zahl, so läfst sich, diejenigen Glieder zusammenfassend, für welche die Coëfficienten b_k gleiche Werthe haben, die obige Congruenz folgendermafsen darstellen:

$$4.\quad \begin{cases} +1\left((t_1+1)^{2n-1} + (t_1+2)^{2n-1} + \dots + t_2^{2n-1}\right) \\ +2\left((t_2+1)^{2n-1} + (t_2+2)^{2n-1} + \dots + t_3^{2n-1}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(g-1)\left((t_{g-1}+1)^{2n-1} + (t_{g-1}+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1}\right) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda; \end{cases}$$

welches wieder leicht auf folgende Form gebracht wird:

$$5.\quad \begin{cases} (t_1+1)^{2n-1} + (t_1+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \\ +(t_2+1)^{2n-1} + (t_2+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(t_{g-1}+1)^{2n-1} + (t_{g-1}+2)^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda. \end{cases}$$

Subtrahirt man endlich von jeder einzelnen Zeile dieser Congruenz die Congruenz

$$1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + (\lambda-1)^{2n-2} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

und verändert alle Vorzeichen, so ergiebt sich

$$6.\quad \begin{cases} 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_1^{2n-1} \\ + 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_2^{2n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ + 1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \dots + t_{g-1}^{2n-1} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda. \end{cases}$$

Ich mache jetzt von folgender bekannten ganzen rationalen Function Gebrauch:

$$7.\quad X(x) = \frac{x^{2n}}{\Pi 2n} - \frac{x^{2n-1}}{2\Pi 2n-1 . \Pi 1} + \frac{B_1 x^{2n-2}}{\Pi 2n-2 . \Pi 2} - \dots \frac{(-1)^n B_{n-1} x^2}{\Pi 2 . \Pi 2n-2};$$

in welcher B_1, B_2, ... B_{n-1} die *Bernoulli'schen* Zahlen sind und $\Pi r = 1.2.3 \ldots r$ ist. Diese Function $X(x)$ drückt, wenn x eine ganze Zahl ist, die Summe der Reihe $1^{2n-1} + 2^{2n-1} + 3^{2n-1} + \ldots + (x-1)^{2n-1}$ aus, dividirt durch $\Pi(2n-1)$; also läfst sich mittels derselben die Congruenz (6.) folgendermafsen darstellen:

$$8. \quad X(t_1+1) + X(t_2+1) + \ldots + X(t_{g-1}+1) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Da nun t_s die in $\frac{s\lambda}{g}$ enthaltene gröfste ganze Zahl ist, so kann man

$$t_s = \frac{s\lambda - r_s}{g}$$

setzen, wo r_s positiv und kleiner als g ist. Hierdurch erhält man aus der Congruenz (8.) folgende gleichbedeutende:

$$9. \quad X\left(\frac{\lambda - r_1 + g}{g}\right) + X\left(\frac{2\lambda - r_2 + g}{g}\right) + \ldots + X\left(\frac{(g-1)\lambda - r_{g-1} + g}{g}\right) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Die Zahlen r_1, r_2, ... r_{g-1} fallen, wenn auch in anderer Ordnung, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... $g-1$ zusammen; denn sie liegen alle zwischen 0 und g und sind alle verschieden von einander, weil, wenn $r_k = r_h$ wäre, auch $t_k \equiv t_h$, mod. λ, sein müfste; was unmöglich ist, da t_k und t_h beide kleiner als λ sind. Läfst man nun aus der Congruenz (9.) die Vielfachen des Modul λ weg und setzt statt der Zahlen r_1, r_2, ... r_{g-1} die Zahlen 1, 2, 3, ... $g-1$, so geht diese Congruenz in folgende einfachere über:

$$10. \quad X\left(\frac{1}{g}\right) + X\left(\frac{2}{g}\right) + \ldots + X\left(\frac{g-1}{g}\right) \equiv 0, \text{ mod. } \lambda;$$

welche Congruenz zwar Brüche enthält, die aber, da der Modul λ in keinem der Nenner vorkommt, sogleich auf ganze Zahlen gebracht werden können, und also nicht stören.

Die Function $X(x)$ hat unter andern merkwürdigen Eigenschaften auch die, dafs sie sich in folgende unendliche Reihe entwickeln läfst:

$$11. \quad X(x) = \frac{(-1)^n B_n}{\Pi 2n} - \frac{(-1)^n 2}{(2\pi)^{2n}} \left(\frac{\cos 2x\pi}{1^{2n}} + \frac{\cos 4x\pi}{2^{2n}} + \frac{\cos 6x\pi}{3^{2n}} + \ldots \right),$$

gültig in den Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$. Setzt man in diesem Ausdrucke nach einander $x = 0$, $\frac{1}{g}$, $\frac{2}{g}$, ... $\frac{g-1}{g}$ und addirt (wobei zu bemerken ist, dafs $X(0) = 0$ ist, und dafs im allgemeinen auch die Summe

$$1 + \cos\frac{2k\pi}{g} + \cos\frac{4k\pi}{g} + \ldots + \cos\frac{2(g-1)k\pi}{g}$$

gleich Null und im Falle, dafs k ein Vielfaches von g ist, gleich g wird): so erhält man

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n g B_n}{\Pi 2n}-\frac{(-1)^n 2g}{(2\pi)^{2n}}\left(\frac{1}{g^{2n}}+\frac{1}{(2g)^{2n}}+\frac{1}{(3g)^{2n}}+\ldots \text{ in inf.}\right).$$

Es ist aber bekanntlich

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots \text{ in inf.} = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2\Pi 2n},$$

also wird

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)=\frac{(-1)^n g B_n}{\Pi 2n}-\frac{(-1)^n g B_n}{g^{2n}\Pi 2n},$$

und endlich

$$12.\quad X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)=\frac{(-1)^n(g^{2n}-1)B_n}{g^{2n-1}\Pi 2n}.$$

Die Congruenz also, von deren Erfüllung oder Nichterfüllung es abhangt, ob der erste Factor der Classen-Anzahl, nämlich $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$, durch λ theilbar ist, oder nicht, hat nun folgende Gestalt angenommen:

$$13.\quad \frac{(g^{2n}-1)B_n}{g^{2n-1}\Pi 2n}\equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Der Nenner, als nicht durch den Modul λ theilbar, kann sogleich wegfallen; aufserdem ist aber auch $g^{2n}-1$ nicht durch λ theilbar, für die Werthe $n=1$, $2, 3, \ldots \mu-1$; für diese also geht die Bedingungs-Congruenz einfach in

$$14.\quad B_n \equiv 0, \text{ mod. } \lambda$$

über. Der Fall $n=\mu$ erfordert eine besondere Betrachtung, weil für denselben die Congruenz (13.) die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wegen des in $2^{2\mu}-1$ und ebenfalls im Nenner der μten *Bernoulli*'schen Zahl B_μ enthaltenen Factors λ. Für diesen Fall drücke ich die μte *Bernoulli*'sche Zahl durch die niedrigeren aus, nach der bekannten Formel:

$$B_\mu=\frac{\Pi 2\mu\, B_{\mu-1}}{2^2\Pi 3\,\Pi 2\mu-2}-\frac{\Pi 2\mu\, B_{\mu-2}}{2^4\Pi 5\,\Pi 2\mu-4}+\ldots+\frac{(-1)^\mu}{2^{2\mu}(2\mu+1)}+\frac{(-1)^{\mu+1}}{2^{2\mu}}.$$

In dieser Formel enthält nur das einzige, vorletzte Glied den Factor $2\mu+1=\lambda$ im Nenner; alle übrigen Glieder sind Brüche, in deren Nenner λ als Factor nicht vorkommt. Stellt man sich dieselben alle in einem einzigen Bruche $\frac{M}{N}$ zusammengefafst vor, wo N nicht durch λ theilbar ist, so erhält man

$$B_\mu=\frac{(-1)^\mu}{2^{2\mu}\lambda}+\frac{M}{N}.$$

Setzt man weiter $g^{2\mu}-1=\lambda K$, wo K nicht weiter durch λ theilbar ist, weil wir schon oben uns vorgesetzt haben, g immer so zu wählen, dafs $g^{\mu}+1$, und also auch $g^{2\mu}-1$, den Factor λ nur ein einzigesmal enthalte: so giebt die Gleichung (12.) für den Fall $n=\mu$:

$$X\left(\frac{1}{g}\right)+X\left(\frac{2}{g}\right)+\ldots+X\left(\frac{g-1}{g}\right)=\frac{(-1)^{\mu}K}{g^{2\mu-1}\Pi 2\mu}\left(\frac{(-1)^{\mu}}{2^{2\mu}}+\frac{\lambda M}{N}\right).$$

Die Congruenz-Bedingung (10.) giebt also in diesem Falle

$$\frac{K}{2^{2\mu}g^{2\mu-1}\Pi 2\mu}\equiv 0, \text{ mod. } \lambda;$$

und da nun k nicht durch λ theilbar ist, so findet diese Congruenz nicht Statt. Die obige Congruenzbedingung wird also in dem Falle $n=\mu$ niemals erfüllt und es hangt Alles nur davon ab, ob die Congruenz (14.), nämlich $B_n\equiv 0$, mod. λ, für irgend einen der Werthe $n=1, 2, 3, \ldots \mu-1$ Statt hat, oder nicht.

Wir haben demnach als Resultat folgenden Satz:

Der erste Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ der Classen-Anzahl H ist theilbar durch λ, wenn λ eine solche Primzahl ist, welche als Factor des Zählers einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*'schen Zahlen vorkommt: für alle übrigen Primzahlen λ ist dieser Factor nicht durch λ theilbar.

Es ist jetzt ferner für den zweiten Factor der Classen-Anzahl H, nämlich $\frac{D}{\Delta}$, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen derselbe durch λ theilbar sei, und unter welchen nicht. Hierzu ist glücklicherweise die Kenntnifs der in jedem besonderen Falle nur mit äufserster Mühe zu ermittelnden, in Δ enthaltenen Fundamental-Einheiten nicht nöthig, sondern nur die Definition derselben. Hat man ein System von $\mu-1$ *unabhängigen* Einheiten, welche aber im allgemeinen nicht die Fundamental-Einheiten selbst sind, so erhält man aus ihnen alle Einheiten, indem man dieselben zu Potenzen erhebt, deren Exponenten auch rationale Brüche sein können und solche mit einander multiplicirt. Ein solches System unabhängiger Einheiten ist aber das System

$$e(\alpha),\ e(\alpha^{g}),\ e(\alpha^{g^2})\ \ldots\ e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right),$$

welches in D enthalten ist. Setzt man also

$$15.\quad \begin{cases} \varepsilon_1(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^1}.e(\alpha^{g})^{r_2^1}\ \ldots\ e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^1} \\ \varepsilon_2(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^2}.e(\alpha^{g})^{r_2^2}\ \ldots\ e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{\mu-1}(\alpha) = e(\alpha)^{r_1^{\mu-1}}.e(\alpha^{g})^{r_2^{\mu-1}}\ \ldots\ e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{r_{\mu-1}^{\mu-1}}, \end{cases}$$

wo die gebrochenen Potenz-Exponenten r_h^k mit zwei Indices so zu nehmen sind, dafs $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ wirklich zu ganzen complexen Einheiten werden: so sind diese Einheiten Fundamental-Einheiten, wenn die Determinante der gebrochenen Exponenten, nämlich $\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1}$, den möglich-kleinsten Werth hat, aber nicht gleich Null ist. Es mögen nun wirklich die Exponenten r_h^k dieser Bedingung gemäfs bestimmt sein, so dafs $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$, ... $\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ wirkliche Fundamental-Einheiten sind, so hat man, wenn die Logarithmen genommen werden:

$$16. \quad l\varepsilon_k(\alpha) = r_1^k le(\alpha) + r_2^k le(\alpha^g) + \ldots + r_{\mu-1}^k le(\alpha^{g^{\mu-2}}).$$

Da nun Δ die Determinante der Gröfsen $l\varepsilon_1(\alpha)$, $l\varepsilon_2(\alpha)$, ... $l\varepsilon_{\mu-1}(\alpha)$ und derer, welche durch Verwandlung des α in α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\mu-2}}$ aus denselben entstehen, bezeichnet, und eben so D die Determinante der Gröfsen $le(\alpha)$, $le(\alpha^g)$, ... $le(\alpha^{g^{\mu-2}})$ und derer, welche aus diesen entstehen, indem man α in α^g, α^{g^2}, ... $\alpha^{g^{\mu-2}}$ verwandelt: so hat man nach einem bekannten Satze über Determinanten:

$$\Delta = D . \Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1};$$

also

$$17. \quad \frac{D}{\Delta} = \frac{1}{\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 \ldots r_{\mu-1}^{\mu-1}}.$$

Bringt man nun diejenigen rationalen Brüche r_1^k, r_2^k, ... $r_{\mu-1}^k$, welche als Exponenten in einer und derselben Fundamental-Einheit $\varepsilon_k(\alpha)$ vorkommen, unter einen gemeinschaftlichen, und zwar den möglich-kleinsten Nenner, welcher n_k sein mag: so kann man allgemein

$$r_h^k = \frac{m_h^k}{n_k}$$

setzen, wo m_h^k und n_k ganze Zahlen sind, von der Art, dafs n_k nicht mit allen m_1^k, m_2^k, ... $m_{\mu-1}^k$ einen gemeinschaftlichen Factor hat. Hierdurch wird

$$18. \quad \frac{D}{\Delta} = \frac{n_1 n_2 \ldots n_{\mu-1}}{\Sigma \pm m_1^1 m_2^2 \ldots m_{\mu-1}^{\mu-1}}.$$

Es kann also $\frac{D}{\Delta}$ den Factor λ nur dann enthalten, wenn eine der ganzen Zahlen n_1, n_2, ... $n_{\mu-1}$ durch λ theilbar ist, also nur dann, wenn eine Gleichung von folgender Form Statt hat:

$$19. \quad \varepsilon(\alpha)^n = e(\alpha)^{m_1} . e(\alpha^g)^{m_2} \ldots e(\alpha^{g^{\mu-2}})^{m_{\mu-1}},$$

in welcher n durch λ theilbar ist, aber $m_1, m_2, \ldots m_{\mu-1}$ nicht alle durch λ theilbar sind. Nun ist aber jede λte Potenz einer ganzen complexen Zahl immer einer realen ganzen Zahl congruent, für den Modul λ, also auch $\varepsilon(\alpha)^n \equiv c$, mod. λ, wo c eine reale ganze Zahl bedeutet: also mufs

$$20. \quad e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2}\ldots e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{m_{\mu-1}} \equiv c, \text{ mod. } \lambda,$$

sein, wenn $\frac{D}{\varDelta}$ den Factor λ enthalten soll, und wo $m_1, m_2, \ldots m_{\mu-1}$ nicht alle durch λ theilbar sind. Um nun die Bedingung zu erforschen, unter welcher eine solche Congruenz Statt haben kann, mache ich daraus die Gleichung

$$21. \quad e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2}\ldots e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{m_{\mu-1}} = c+\lambda\varphi(\alpha),$$

in welcher $\varphi(\alpha)$ eine ganze complexe Zahl bedeutet. Eine solche Gleichung unter ganzen complexen Zahlen, welche für jeden Werth des α gilt, der der Gleichung $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\lambda-1}=0$ genügt, zieht nach bekannten Principien immer eine für jeden beliebigen Werth das x geltende nach sich, wenn man α in x verwandelt und ein Glied von der Form $(1+x+x^2+\ldots+x^{\lambda-1})\psi(x)$ hinzufügt. Demgemäfs erhält man hier die für jeden beliebigen Werth der Variabeln x geltende Gleichung

$$22. \quad e(x)^{m_1}.e(x^g)^{m_2}\ldots e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{m_{\mu-1}}$$
$$= c+\lambda\varphi(x)+(1+x+x^2+\ldots+x^{\lambda-1})\psi(x).$$

Ich nehme jetzt auf beiden Seiten die Differentialquotienten der Logarithmen, wobei $\frac{de(x)}{dx}$ durch $e'(x)$ bezeichnet wird, multiplicire mit x und gebe sodann dem x seinen besonderen Werth $x=\alpha$ zurück: so wird

$$23. \quad m_1\frac{\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)}+m_2 g\frac{\alpha^g e'(\alpha^g)}{e(\alpha^g)}+\ldots+m_{\mu-1}g^{\mu-2}\frac{\alpha^{g^{\mu-2}}e'(\alpha^{g^{\mu-2}})}{e(\alpha^{g^{\mu-2}})}$$
$$= \frac{\lambda\alpha\varphi'(\alpha)+(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\ldots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})\psi(\alpha)}{c+\lambda\varphi(\alpha)}.$$

Diese Gleichung enthält nur complexe Einheiten in den Nennern; also wesentlich nur ganze complexe Zahlen. Ich verwandele sie wieder in eine Congruenz für den Modul λ, indem ich die Vielfachen von λ weglasse; dabei bringe ich die complexe Zahl $\psi(\alpha)$ auf die Form $a+(1-\alpha)f(\alpha)$, wo a eine reale ganze Zahl ist, und bemerke, dafs

$$(1-\alpha)(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\ldots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}) = -\lambda,$$

also

$$(\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\ldots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})\psi(\alpha) \equiv (\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+\ldots+(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})a$$

für den Modul λ ist. Endlich bestimme ich noch die ganze Zahl M so, dafs $2cM \equiv a$, mod. λ, und setze der Kürze wegen

$$\frac{2\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} = F(\alpha):$$

so ist

$$24. \quad m_1 F(\alpha) + m_2 g F(\alpha^g) + \ldots + m_{\mu-1} g^{\mu-2} F(\alpha^{g^{\mu-2}})$$
$$\equiv M(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})$$

für den Modul λ. Ich entwickele jetzt die complexe ganze Zahl $F(\alpha)$. Es ist

$$e(x) = \sqrt{\left(\frac{(1-x^g)(1-x^{-g})}{(1-x)(1-x^{-1})}\right)},$$

also

$$\frac{e'(x)}{e(x)} = \frac{x^{-1}(1+x)}{2(1-x)} - \frac{g x^{-1}(1+x^g)}{2(1-x^g)},$$

und daher

$$F(\alpha) = \frac{2\alpha e'(\alpha)}{e(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{g(1+\alpha^g)}{1-\alpha^g}.$$

Aus der schon oben benutzten Gleichung

$$(1-\alpha)(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1}) = -\lambda$$

folgt nun

$$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{-(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \ldots + (\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})}{\lambda},$$

und wenn mit $1+\alpha$ multiplicirt wird,

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{-(\lambda + 2\alpha + 4\alpha^2 + 6\alpha^3 + \ldots + 2(\lambda-1)\alpha^{\lambda-1})}{\lambda};$$

welches, wenn man statt der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \lambda-1$ in den Coëfficienten die mit diesen, wenn auch in anderer Ordnung zusammenfallenden $1, g, g_2, \ldots \ldots g_{\lambda-2}$, und in den Exponenten statt ihrer die Potenzen $1, g, g^2, \ldots g^{\lambda-2}$ setzt, auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{-(\lambda + 2\alpha + 2g_1\alpha^g + 2g_2\alpha^{g^2} + \ldots + 2g_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}})}{\lambda}.$$

Wird noch α in α^g verwandelt und mit g multiplicirt, so ist auch

$$\frac{g(1+\alpha^g)}{1-\alpha^g} = \frac{-(g\lambda + 2g\alpha^g + 2gg_1\alpha^{g^2} + \ldots + 2gg_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-1}})}{\lambda}.$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt, so erhält man

$$F(\alpha) = g - 1 + \frac{2(gg_{\lambda-2}-1)}{\lambda}\alpha + \frac{2(g-g_1)}{\lambda}\alpha^g + \ldots + \frac{2(gg_{\lambda-3}-g_{\lambda-2})}{\lambda}\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Dieselben Coëfficienten sind aber schon in dem ersten Theile unserer Untersuchung vorgekommen, wo wir sie durch b_0, b_1, b_2, ... $b_{\lambda-2}$ bezeichneten. Werden demnach dieselben Zeichen auch hier angewendet, indem allgemein

$$gg_{k-1}-g_k = \lambda b_k$$

gesetzt wird, so ist

25. $$F(\alpha) = g-1+2b_0\alpha+2b_1\alpha^g+2b_2\alpha^{g^2}+ \dots +2b_{\lambda-2}\alpha^{g^{\lambda-2}}.$$

Setzt man noch

$$2b_k+1-g = c_k$$

und bemerkt, dafs $c_{k+\mu} = -c_k$, weil $b_{k+\mu}+b_k = g-1$ ist, so nimmt die Entwicklung des $F(\alpha)$ folgende Form an:

26. $$F(\alpha) = c(\alpha-\alpha^{-1})+c_1(\alpha^g-\alpha^{-g})+ \dots +c_{\mu-1}(\alpha^{g^{\mu-1}}-\alpha^{-g^{\mu-1}}).$$

Werden nun diese Entwicklung und die daraus hervorgehenden von $F(\alpha^g)$, $F(\alpha^{g^2})$, ... $F(\alpha^{g^{\mu-2}})$ in der Congruenz (24.) substituirt, so erhält man aus der Vergleichung der Coëfficienten der einzelnen Glieder folgende μ Congruenzen:

27. $$\begin{cases} m_1 c - m_2 g c_{\mu-1} - m_3 g^2 c_{\mu-2} - \dots - m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_2 \equiv M \\ m_1 c_1 + m_2 g c - m_3 g^2 c_{\mu-1} - \dots - m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_3 \equiv gM \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_1 c_{\mu-1} + m_2 g c_{\mu-2} + m_3 g^2 c_{\mu-3} + \dots + m_{\mu-1} g^{\mu-2} c_1 \equiv g^{\mu-1} M. \end{cases}$$

Um M zu eliminiren, multiplicire ich diese Congruenzen der Reihe nach mit 1, g^{2n-1}, $g^{2(2n-1)}$, ... $g^{(\mu-1)(2n-1)}$ und addire, so ergiebt sich rechterhand

$$1+g^{2n}+g^{4n}+ \dots +g^{2(\mu-1)n} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

für jeden der Werthe $n = 1, 2, 3, \dots \mu-1$. Die Seite rechts dieser Congruenz verschwindet also für alle jene Werthe des n: die links aber zerfällt von selbst in das Product zweier Factoren und es wird

28. $$\begin{aligned} &(m_1+m_2g^{2n}+m_3g^{4n}+ \dots +m_{\mu-1}g^{2(\mu-2)n}) \\ &\times (c+c_1g^{2n-1}+c_2g^{2(2n-1)}+ \dots +c_{\mu-1}g^{(\mu-1)(2n-1)}) \equiv 0; \end{aligned}$$

welches die Bedingung ist, die für alle Werthe $n = 1, 2, 2, \dots \mu-1$ erfüllt werden mufs, damit $\frac{D}{\Delta}$ den Factor λ enthalten könne. Wenn nun der Factor $c+c_1g^{2n-1}+c_2g^{2(2n-1)}+ \dots +c_{\mu-1}g^{(\mu-1)(2n-1)}$ für keinen der Werthe von n durch λ theilbar ist, so mufs der andere Factor für alle Werthe congruent Null sein. Es mufs also folgendes System von Congruenzen Statt haben:

29. $$\left.\begin{cases} m_1+m_2g^2+m_3g^4+ \dots +m_{\mu-1}g^{2(\mu-2)} \equiv 0 \\ m_1+m_2g^4+m_3g^8+ \dots +m_{\mu-1}g^{4(\mu-2)} \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_1+m_2g^{2(\mu-1)}+m_3g^{4(\mu-1)}+ \dots +m_{\mu-1}g^{(\mu-2)(2\mu-2)} \equiv 0 \end{cases}\right\} \text{mod. } \lambda.$$

Die Determinante dieses Systems lineärer Congruenzen ist nicht congruent Null, denn sie ist bekanntlich aus lauter Factoren von der Form $g^{2k}-g^{2h}$ zusammengesetzt, in denen h und k kleiner als $\mu-1$ und von einander verschieden sind: mithin ist keine dieser Congruenzen mit den übrigen identisch, oder schon in denselben enthalten. Diese Congruenzen sind also nicht anders zu erfüllen, als wenn alle die Gröfsen $m_1, m_2, \ldots m_{\mu-1}$ einzeln congruent Null sind, für den Modul λ; welches gegen die Voraussetzung ist. Es mufs also nothwendig der andere Factor der Congruenz (28.) für irgend einen der Werthe $n=1, 2, 3, \ldots \mu-1$ congruent Null sein, wenn $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar sein soll, mithin mufs man

30. $$c+c_1 g^{2n-1}+c_2 g^{2(2n-1)}+\ldots+c_{\mu-1} g^{(\mu-1)(2n-1)} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda,$$

haben. Vermöge der Gleichung $c_{k+\mu}=-c_k$ und der Congruenz $g^{k+\mu}\equiv -g^k$, mod. λ, kann man auch die Anzahl der Glieder verdoppeln, so dafs

$$c+c_1 g^{2n-1}+c_2 g^{2(2n-1)}+\ldots+c_{\lambda-2} g^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0$$

als die Congruenz genommen werden kann, welche nothwendig erfüllt werden mufs, wenn $\frac{D}{\Delta}$ durch λ theilbar sein soll. Wird zu dieser die Congruenz

$$(g-1)(1+g^{2n-1}+g^{2(2n-1)}+\ldots+g^{(\lambda-2)(2n-1)}) \equiv 0$$

addirt und für c_k+g-1 wieder das Zeichen $2b_k$ gesetzt und durch 2 dividirt, so erhält man endlich die Congruenz in der Form

31. $$b_0+b_1 g^{2n-1}+b_2 g^{2(2n-1)}+\ldots+b^{(\lambda-2)(2n-1)} \equiv 0, \text{ mod. } \lambda.$$

Dies ist aber die schon oben vollständig untersuchte Congruenz, welche, wie gezeigt wurde, nur dann Statt hat, wenn λ eine derjenigen Primzahlen ist, die als Factor des Zählers in einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ ***Bernoulli***schen Zahlen vorkommen. Das Resultat dieses zweiten Theils unserer Untersuchung ist also folgendes:

Der zweite Factor $\frac{D}{\Delta}$ der Classen-Anzahl H kann nur dann durch λ theilbar sein, wenn auch der erste Factor $\frac{P}{(2\lambda)^{\mu-1}}$ durch λ theilbar ist.

Der umgekehrte Satz von diesem ist nicht mitbewiesen und findet, wie ich vermuthe, auch gar nicht Statt. Fassen wir nun das Resultat mit dem vorigen zusammen, so haben wir folgenden Lehrsatz:

Die Anzahl aller nichtäquivalenten Classen der aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten idealen complexen Zahlen ist durch λ theilbar, wenn λ eine solche Primzahl ist, welche als Factor im Zähler einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ ***Bernoulli***schen Zahlen vorkommt; dagegen für alle andern Primzahlen λ ist diese Classen-Anzahl nicht durch λ theilbar.

Die zweite Untersuchung, welche ich hier durchführen will, soll die Frage erörtern:

Unter welchen Bedingungen kann eine complexe Einheit einer realen ganzen Zahl congruent sein, für den Modul λ, ohne eine λte Potenz einer andern complexen Einheit zu sein?

Es sei die zu untersuchende Einheit

$$E(\alpha) = \pm\alpha^k e(\alpha)^{\frac{m_1}{n}}.e(\alpha^g)^{\frac{m_2}{n}} \dots e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{\frac{m_{\mu-1}}{n}};$$

welche Form alle möglichen Einheiten umfafst. Die Bedingung $E(\alpha) \equiv c$, mod. λ, wo c eine reale ganze Zahl ist, giebt auch $E(\alpha^{-1}) \equiv c$, also auch $E(\alpha) \equiv E(\alpha^{-1})$; woraus $\alpha^k = \alpha^{-k}$ folgt. Es mufs demnach $\alpha^k = 1$ sein, und wenn zur $n$ten Potenz erhoben wird, so ergiebt sich, da $E(\alpha) \equiv c$ ist:

$$c^n \equiv \pm e(\alpha)^{m_1}.e(\alpha^g)^{m_2} \dots e\left(\alpha^{g^{\mu-2}}\right)^{m_{\mu-1}}, \text{ mod. } \lambda.$$

Diese Congruenz ist aber mit der obigen, bereits vollständig untersuchten Congruenz (20.) vollkommen identisch, und wir wissen, dafs wenn λ eine Primzahl ist, welche in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor nicht vorkommt, eine solche Congruenz nicht bestehen kann, ohne dafs $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ alle durch λ theilbar sind. In diesem Falle ist also $E(\alpha)^n$ gleich einer λten Potenz einer Einheit, und n ist nicht theilbar durch λ, indem der Nenner n nicht mit allen Zählern $m_1, m_2, \dots m_{\mu-1}$ einen gemeinschaftlichen Factor haben soll. Wenn aber $E(\alpha)^n$ gleich einer λten Potenz und n nicht durch λ theilbar sein soll, so folgt leicht, dafs auch $E(\alpha)$ eine λte Potenz sein mufs. Bestimmt man nämlich die beiden Zahlen s und t so, dafs $ns - \lambda t = 1$ ist und erhebt $E(\alpha)^n$ zur $s$ten Potenz, so ist auch $E(\alpha)^{ns} = E(\alpha)^{\lambda t+1} = E(\alpha)^{\lambda t}.E(\alpha)$ gleich einer λten Potenz einer Einheit. Es ist also folgender Lehrsatz bewiesen:

Wenn λ eine Primzahl ist, welche in keiner der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor des Zählers vorkommt, so ist jede aus λten Wurzeln der Einheit gebildete complexe Einheit, welche einer realen ganzen Zahl congruent ist, für den Modul λ, eine λte Potenz einer andern complexen Einheit.

Hiermit ist die aufgestellte Frage genügend beantwortet; denn, zu untersuchen, in wie weit auch die Umkehrung dieses Satzes richtig sei, liegt aufser unserem Zwecke.

Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dafs die aus λten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihren tiefer liegenden Eigenschaften nicht unwesentliche Unterschiede haben, je nachdem λ eine Primzahl ist, welche in dem Zähler einer der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor vorkommt, oder nicht; welche Unterschiede ich auch noch bei andern Untersuchungen über diese complexen Zahlen wahrzunehmen Gelegenheit gehabt habe. Aus den bekannten Zahlenwerthen der ersten *Bernoulli*schen Zahlen habe ich alle Primzahlen bis $\lambda = 43$ in dieser Beziehung geprüft, und gefunden, dafs unter denselben nur eine ist, welche im Zähler der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ *Bernoulli*schen Zahlen als Factor vorkommt, nämlich $\lambda = 37$, da 37 ein Factor des Zählers der 16ten *Bernoulli*schen Zahl ist, während die Primzahlen $\lambda = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43$ diese Eigenschaft nicht haben. Überhaupt scheint in der Reihe aller Primzahlen jene besondere Art ziemlich sparsam vertheilt zu sein, so dafs dieselbe füglich nur als Ausnahme zu behandeln sein möchte.

Breslau, den 18ten Juni 1849.