Math. Z. 162, 145 – 173 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Eine Außenraumaufgabe für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen

Josef Bemelmans

Mathematisches Institut der Universität Bonn, Wegelerstr. 10, D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

Dem Andenken an meinen Vater

§ 1. Einleitung und Überblick über die Ergebnisse

Die Differentialgleichungen von C.L.M.H. Navier und G.G. Stokes

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(x,t) - \mu \Delta \mathbf{v}(x,t) + \nabla p(x,t) + \rho(\mathbf{v}(x,t)\cdot\nabla)\ \mathbf{v}(x,t) &= \mathbf{f}(x,t) \\ \nabla\cdot\mathbf{v}(x,t) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

beschreiben die Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit. Hierbei bezeichnen die zu bestimmenden Funktionen $\mathbf{v}(x,t)$ und $p(x,t)$ die Geschwindigkeit bzw. den Druck für ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt t an der Stelle x befindet. Die Konstanten ρ und μ geben die Dichte und die Zähigkeit der Flüssigkeit an, $\mathbf{f}$ ist die äußere Kraftdichte. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}=(a^1, a^2, a^3)$ und $\mathbf{b}=(b^1, b^2, b^3)$ des $\mathbb{R}^3$ wird stets als $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ geschrieben, und der ∇-Operator wird dabei als Vektor $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ behandelt.

In dem in dieser Arbeit betrachteten speziellen Problem der Umströmung eines endlichen Körpers fordert man als Rand- und Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}(x,t)=0 \qquad \text{für alle } x\in\Sigma \quad \text{und} \quad \text{alle } t\in[0,T], \tag{1.2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{v}(x,t)=\mathbf{U} \qquad \text{für alle } t\in[0,T], \tag{1.3}$$

$$\mathbf{v}(x,0)=\mathbf{v}_0(x) \qquad \text{für alle } x\in\mathscr{E}. \tag{1.4}$$

Dabei bezeichnet Σ die Oberfläche des Körpers Ω, $\mathbf{v}_0$ das Geschwindigkeitsfeld für den Anfangszeitpunkt $t=0$, $\mathscr{E}:=\mathbb{R}^3\setminus(\Omega\cup\Sigma)$ das von der Flüssigkeit eingenommene Gebiet. Für das Problem (1.1) bis (1.4) soll in dieser Arbeit ein bezüglich der Zeit globaler Existenzsatz bewiesen werden, wobei die Forderung, daß $\frac{\rho}{2}\int_{\mathscr{E}} |\mathbf{v}(x,t)-\mathbf{U}|^2\,dx$, die kinetische Energie der Strömung, nicht notwendi-

0025-5874/78/0162/0145/$ 05.80

gerweise endlich ist, den Fortschritt gegenüber bekannten Ergebnissen darstellt. Diese Eigenschaft der Lösung wird sich andererseits als natürlich herausstellen, wie die Theorie der stationären Navier-Stokes-Gleichungen lehrt. Hier studiert man die Randwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla p&=\mathbf{f}\\ \nabla\cdot\mathbf{v}&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{in } \mathscr{E}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{v}|_{\Sigma}=\mathbf{0}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{v}(x)\to\mathbf{U}\qquad \text{für } |x|\to\infty. \tag{1.7}$$

$\nu:=\frac{\mu}{\rho}$ bezeichnet die kinematische Zähigkeit. Existenzsätze für dieses Problem wurden von Leray [18] und Finn [9] bewiesen; einen Überglick über die Beiträge zum stationären Umströmungsproblem bieten die Übersichtsartikel [10] und [11] von Finn sowie der Handbuchartikel [3] von Berker. Hier sind die Beiträge [6]–[10] von Finn von besonderem Interesse, da neben der Existenz der Lösungen auch eine Reihe von Eigenschaften bewiesen werden, die es schließlich ermöglichen, die Lösungen mit dem zu vergleichen, was Erfahrung und Experiment über Strömungen zäher Flüssigkeiten lehren. Charakteristisch für diese Lösungen ist eine Spezifizierung von (1.7), nämlich

$$|\mathbf{v}(x)-\mathbf{U}|<C|x|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{1.8}$$

falls $|x|$ genügend groß ist; hierbei sind C und ε positive Konstanten. Für Lösungen von (1.5), (1.6), (1.8) wurde von Finn bewiesen:

(i) *Nachlauf*

Es gibt ein Teilgebiet von $\mathscr{E}$ in dem die Geschwindigkeit relativ stark von $\mathbf{U}$ abweicht. Dieses Gebiet wird als Nachlauf (engl. „wake“) bezeichnet. Es ist asymptotisch von der Form eines Paraboloids, dessen Achse in die Richtung von $\mathbf{U}$ weist, genauer

$$\begin{aligned} &|\mathbf{v}(x)-\mathbf{U}|<C|x|^{-1}, && |\varphi|<\pi|x|^{-1/2}\\ &|\mathbf{v}(x)-\mathbf{U}|<C|x|^{-1-\sigma}, && |\varphi|<\pi|x|^{-1/2+\sigma/2}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Hierbei ist $\sigma\in[0,1]$ und φ der Winkel zwischen der durch $\mathbf{U}$ gehenden Geraden Z und dem Strahl von einem beliebigen, aber festen $y\in Z$ zu dem variablen Punkt $x\in\mathscr{E}$. Dieses Ergebnis ist bestmöglich, d.h. aus $|\mathbf{v}(x)-\mathbf{U}|=o(|x|^{-1})$ in $\mathscr{E}$ folgt $\mathbf{v}(x)\equiv\mathbf{U}$ für alle $x\in\mathscr{E}$.

(ii) *Asymptotische Entwicklung*

Für große $|x|$ gilt

$$\mathbf{v}(x)=\mathbf{U}+\mathbf{F}_{\Sigma}\cdot\tilde{E}(x,0)+b\nabla\left(\frac{1}{|x|}\right)+o\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \tag{1.10}$$

wobei $\mathbf{F}_\Sigma := \oint_\Sigma T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ die auf den Körper Ω wirkende Kraft und

$$(T\mathbf{v})_{ij} := -p\,\delta_{ij} + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) \tag{1.11}$$

der Spannungstensor ist. $\tilde{E}(x, y)$ ist die Grundlösung der Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

die aus (1.5) durch Linearisierung um $\mathbf{U}$ entstehen.

(iii) *Bremskraft*

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{F}_\Sigma = \int_{\mathscr{E}} |\operatorname{def}\mathbf{v}|^2\,dx \tag{1.13}$$

mit

$$(\operatorname{def}\mathbf{v})_{ij} = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right). \tag{1.14}$$

Die in $\mathbf{U}$-Richtung wirkende Komponente von $\mathbf{F}_\Sigma$, die Bremskraft, ist von Null verschieden. Da $\int_{\mathscr{E}} |\operatorname{def}\mathbf{v}|^2\,dx$ ein Maß darstellt für die Energie, die in Wärme umgewandelt wird, sagt (1.13) auch aus, daß der Strömung im Unendlichen keine Energie hinzugefügt wird.

(iv) *Kinetische Energie*

$$E_{\mathrm{kin}} := \frac{\rho}{2}\int_{\mathscr{E}} |\mathbf{v}(x) - \mathbf{U}|^2\,dx = +\infty. \tag{1.15}$$

Der Vergleich mit (1.10) zeigt, daß $E_{\mathrm{kin}} < \infty$ die Beziehung $\mathbf{F}_\Sigma\cdot\tilde{E}(x, 0) \in L_2(\mathscr{E})$ impliziert. Da aber $\tilde{E}$ nicht quadrat-integrabel ist, bedeutet dies, daß $\mathbf{F}_\Sigma$ verschwindet. Außer in einer Reihe von Spezialfällen (etwa bei einer sich drehenden Kugel) ist aber die auf den Körper wirkende Kraft von Null verschieden.

Diese Lösungen stimmen demnach sehr gut mit der Erfahrung und dem Experiment überein; das gilt insbesondere für die Frage nach der entscheidenden Größe $\mathbf{F}_\Sigma$. Finn nennt diese Lösungen „PR-solutions" (physically reasonable solutions). Aus dieser Diskussion folgt auch, daß ein Existenzsatz für die Anfangswertaufgabe (1.1)–(1.4) zu beweisen ist, und zwar unter der Bedingung, daß $\int_{\mathscr{E}} |\mathbf{v}(x, t) - \mathbf{U}|^2\,dx$ unendlich werden kann. Ein solcher Satz ist aber darüber hinaus auch für die weitere Untersuchung der stationären PR-Lösungen nützlich.

Eine Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen heißt erreichbar, wenn sie der Grenzwert (für $t \to \infty$) einer Funktion $\mathbf{v}(x, t)$ ist, die die folgende Strömung beschreibt: zur Zeit $t=0$ befindet sich der in die ruhende Flüssigkeit eingetauchte Körper in Ruhe; dann wird er innerhalb des Zeitintervalls $(0, t_0)$ auf die Geschwindigkeit $\mathbf{U}$ beschleunigt, und für alle $t \geqq t_0$ wird die (konstante) Geschwindigkeit $\mathbf{U}$ beibehalten. Zu der Frage, ob die PR-Lösung $\mathbf{v}(x)$ zu gegebenen Daten auf Σ und für $|x| \to \infty$ und mit $\mathbf{F}_\Sigma = 0$ erreichbar ist, lieferte Heywood [14] folgendes Resultat: sei $\mathbf{v}(x)$ eine PR-Lösung mit endlicher kinetischer Energie; ferner gelte

$$|\mathbf{v}(x) - \mathbf{U}| \leqq C\,|x|^{-1} \quad \text{mit } C < \frac{\nu}{2}; \tag{1.16}$$

dann ist von allen Lösungen von (1.5), die auf Σ und für $|x| \to \infty$ mit $\mathbf{v}(x)$ übereinstimmen, nur $\mathbf{v}(x)$ erreichbar. Hinreichend für die Erreichbarkeit ist, daß die Ausdrücke

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} |\mathbf{v}(x) - \mathbf{U}| \cdot |x|, \qquad \sup_{x \in \mathscr{E}} |\mathbf{v}(x)|, \qquad \|\mathbf{v} - \mathbf{U}\|_{L_2(\mathscr{E})}, \qquad \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathscr{E})}$$

genügend klein sind. Heywood erhält dieses Ergebnis im Rahmen der Theorie schwacher Lösungen; diese Lösungen liegen in Teilräumen von L_2, so daß sich von daher die Einschränkung an die kinetische Energie der PR-Lösungen, die erreichbar sind, erklärt. So stellt der Existenzsatz dieser Arbeit einen ersten Schritt dar, das Problem der Erreichbarkeit auch für Strömungen mit $\mathbf{F}_\Sigma \neq 0$ zu behandeln[1].

Bei der Lösung von (1.1)–(1.4) wird zuerst das linearisierte Problem behandelt. Analog zum Vorgehen von Finn wird auch bei den instationären Gleichungen um $\mathbf{U}$ linearisiert, so daß man die zeitabhängigen Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

erhält mit den Rand- und Anfangswerten

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_\Sigma(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Sigma,\ t \geqq 0; \ \mathbf{v}(x, t) \to 0,\ |x| \to \infty \quad \text{für alle } t \geqq 0, \tag{1.18}$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathscr{E}. \tag{1.19}$$

Ist nun $\mathbf{v}(x, t)$ und $p(x, t)$ eine Lösung der Aufgabe (1.17)–(1.19),

$$\mathbf{u}(x, \lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{v}(x, t)\, dt, \qquad q(x, \lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(x, t)\, dt$$

die Laplace-Transformierte von $\mathbf{v}$ bzw. p, dann erfüllen $\mathbf{u}$ und q das System

---

[1] Herr Professor G.H. Knightly hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß in seiner neuen Arbeit „Some asymptotic properties of solutions of the Navier-Stokes equations" u.a. die Konvergenzbetrachtungen für $t \to \infty$, die sich beim Problem der Erreichbarkeit der PR-Lösung ergeben, enthalten sind

$$-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla q+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{h}, \qquad \mathbf{h}=\mathbf{v}_0+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{f}\,dt,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{1.20}$$

$$\mathbf{u}(x,\lambda)=\tilde{\mathbf{v}}_\Sigma \text{ auf } \Sigma, \qquad \mathbf{u}(x,\lambda)\to 0, \qquad |x|\to\infty. \tag{1.21}$$

Die Laplace-Transformation führt also das zeitabhängige Problem (1.17)–(1.19) in ein System (1.20) über, das elliptisch im Sinne von Agmon-Douglis-Nirenberg ist. Die Randbedingung (1.21) erfüllt die Complementing Boundary Condition (Lopatinskij-Bedingung). Kennt man nun den Lösungsoperator von (1.20) –(1.21), d.i. die Resolvente A_λ^{-1} des Oseen-Operators A, und erfüllt A_λ^{-1} geeignete Wachstumsbedingungen bez. λ, so ist damit die Existenz des Lösungsoperators e^{-tA} von (1.17)–(1.19) bewiesen. e^{-tA} ist die inverse Laplace-Transformation von A_λ^{-1},

$$e^{-tA}:=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}A_\lambda^{-1}\,d\lambda, \tag{1.22}$$

und heißt die vom Oseen-Operator A erzeugte Halbgruppe. Die Theorie der Halbgruppen spielt bei der Behandlung zeitabhängiger Probleme eine wichtige Rolle. Und durch Sobolevski's Idee, vgl. [23], die regularisierenden Eigenschaften der gebrochenen Potenzen eines Operators auszunützen, konnten auch nichtlineare Probleme mit Halbgruppenmethoden gelöst werden. Bei den Navier-Stokes-Gleichungen arbeiteten als erste Fujita-Kato [12, 13] und Prodi [22] mit diesem Ansatz. Definitions- und Wertebereich der Differentialoperatoren sind jedoch Teilräume von L_2, so daß auch für diese Arbeiten die vorher ausgeführten Einschränkungen für die kinetische Energie der Lösungen gelten. Um dies zu vermeiden, werden Halbgruppen benutzt, die von Wahl [25] eingeführt hat. von Wahl untersuchte Halbgruppen von Operatoren mit Definitions- und Wertebereich in $C^{0+\alpha}$ und gelangte so zu weitreichenden Regularitätsaussagen und a priori-Schranken für Lösungen nichtlinearer parabolischer Gleichungen und Systeme, vgl. z.B. [27] und weitere dort zitierte Arbeiten. Der wesentliche Unterschied zwischen den Halbgruppen in $C^{0+\alpha}$ und den Halbgruppen in L_p, wie sie der Kürze wegen genannt seien, liegt in den Resolventenabschätzungen der sie erzeugenden Operatoren: bezeichne L einen elliptischen Operator zweiter Ordnung, jeweils in $C^{0+\alpha}$ bzw. L_p definiert, dann gilt für dem Betrage nach große λ aus der Resolventenmenge von L

$$|\lambda|\,\|u\|_{L_p}+|\lambda|^{1/2}\,\|u\|_{H_p^1}+\|u\|_{H_p^1}\leqq c\,\|f\|_{L_p}, \tag{1.23}$$

$$|\lambda|^{1-\frac{\alpha}{2}}\,\|u\|_{C^{0+\alpha}}+|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\,\|u\|_{C^{1+\alpha}}+|\lambda|^{-\alpha/2}\,\|u\|_{C^{2+\alpha}}\leqq c\,\|f\|_{C^{0+\alpha}}, \tag{1.24}$$

wenn u Lösung von $(L+\lambda\mathbb{1})u=f$ in einem Gebiet G mit $u|_{\partial G}=0$ ist. Wegen des Faktors $|\lambda|^{-\alpha/2}$ ist (1.24) schwächer als (1.23); daß man aber i.allg. (1.24) nicht verbessern kann, hat von Wahl [25] gezeigt. Es geht aber auch unmittelbar aus dem Beweis von (1.24) für den Oseen-Operator in § 4 hervor.

In § 2 wird zuerst der Fundamentaltensor $E(x,y;\lambda)$, $P(x,y;\lambda)$ für das System (1.20) konstruiert und sein asymptotisches Verhalten für $|x-y|\to\infty$ untersucht.

In §3 wird gezeigt, daß (1.20)−(1,21) für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, die außerhalb einer Parabel mit $\mathbb{R}^-$ als Achse liegen, eindeutig lösbar ist. Die Resolventenabschätzung vom Typ (1.24) ist in §4 ausgeführt. In §5 wird dann das instationäre, nichtlineare Problem (1.1)−(1.4) behandelt. Die in t lokale Existenz einer Lösung kann nachgewiesen werden, wobei ein Existenzsatz von Kielhöfer die entscheidende Rolle spielt. Eine a priori-Schranke, die wesentlich eine Abschätzung von Finn benutzt, führt zu einem globalen Existenzsatz.

Die Resultate dieser Arbeit sind in meiner Dissertation enthalten. Ich habe sie unter Anleitung von Herrn Professor Dr. Stefan Hildebrandt verfaßt, dem ich für seine freundliche Ermunterung und hilfreichen Ratschläge herzlich danke. Herrn Professor Dr. Robert Finn danke ich herzlich für viele Hinweise, die für den Fortgang der Arbeit sehr nützlich waren.

Die Untersuchung wurde gefördert durch den von der Deutschen Forschungsgemeinschaft getragenen Sonderforschungsbereich 72.

§ 2. Hydrodynamische Potentiale

Um die Dirichletsche Randwertaufgabe für das System

$$\left.\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla q+\lambda\mathbf{v}&=\mathbf{h}\\ \nabla\cdot\mathbf{v}&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{in } \mathscr{E} \tag{2.1}$$

mit Hilfe der Integralgleichungsmethode lösen zu können, wird zuerst eine Grundlösung konstruiert. Das Paar $(E_{ij}(x, y; \lambda), P_j(x, y; \lambda))$, $i, j=1, 2, 3$, heißt eine Grundlösung von (2.1), wenn das adjungierte Gleichungssystem für jedes $j=1, 2, 3$ erfüllt wird:

$$-\nu\Delta_y E_{ij}+\frac{\partial P_j}{\partial y^i}-(\mathbf{U}\cdot\nabla_y)E_{ij}+\lambda E_{ij}=\delta_{ij}\delta(y-x), \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y^i}E_{ij}=0. \tag{2.3}$$

Der Index y an den Differentialoperatoren zeigt an, daß die Funktionen E und P nach y differenziert werden sollen. Der von Oseen [21] p. 31 benutzte Ansatz wird hier folgendermaßen modifiziert:

$$E_{ij}(x, y; \lambda):=\left(\delta_{ij}\Delta_y-\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\right)\Phi(x, y; \lambda), \tag{2.4}$$

$$P_j(x, y; \lambda):=\frac{\partial}{\partial y^j}(-\nu\Delta_y-(\mathbf{U}\cdot\nabla_y)+\lambda)\Phi(x, y; \lambda), \tag{2.5}$$

wobei Φ eine reellwertige Funktion bezeichnet, die zu bestimmen ist. (2.3) ist mit diesem Ansatz für beliebiges Φ erfüllt; setzt man (2.4) und (2.5) in (3.2) ein, so folgt

$$-\Delta(\nu\Delta+(\mathbf{U}\cdot\nabla)-\lambda)\Phi=\delta(y-x). \tag{2.6}$$

Mit dem Ansatz

$$-\Delta\Phi =: \Phi_2 \quad \text{und} \quad (\nu\Delta + (\mathbf{U}\cdot\nabla) - \lambda)\,\Phi =: \Phi_1 \tag{2.7}$$

folgen aus (2.6) die Beziehungen

$$-\Delta\Phi_1 = \delta(y-x), \tag{2.8}$$

$$(\nu\Delta + (\mathbf{U}\cdot\nabla) - \lambda)\,\Phi_2 = \delta(y-x). \tag{2.9}$$

Die Grundlösung Φ zur Gleichung vierter Ordnung (2.6) läßt sich nun durch Φ_1 und Φ_2, Grundlösungen zu Gleichungen zweiter Ordnung ausdrücken. Addiert man (2.8) und (2.9), so folgt

$$(\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\Phi - \lambda\Phi = \Phi_1 + \nu\Phi_2. \tag{2.10}$$

Die homogene Gleichung

$$\left(\frac{\mathbf{U}}{U}\cdot\nabla\right)\Phi(\xi) - \frac{\lambda}{U}\,\Phi(\xi) = 0$$

hat als Lösung

$$F(\xi^\perp)\exp\left(\frac{\lambda}{U^2}\,\mathbf{U}\cdot\xi\right),$$

mit einer beliebigen Funktion F, die nur von der Projektion $\xi^\perp$ des Vektors ξ auf die Ebene $\mathbf{U}\cdot\xi = 0$ abhängt. Für die inhomogene Gleichung liefert die Methode der Variation der Konstanten als Lösung

$$\Phi(\xi) = F(\xi^\perp)\,e^{\lambda\mathbf{U}\cdot\xi/U^2} + \int_{S(\xi)} \frac{1}{U}(\Phi_1 + \nu\Phi_2)\,e^{-\lambda\mathbf{U}\cdot\eta/U^2}\,d\eta\cdot e^{\lambda\mathbf{U}\cdot\xi/U^2} \tag{2.11}$$

Hierbei ist die Strecke $S(\xi)$ von $\xi^\perp = \xi - \dfrac{\xi\cdot\mathbf{U}}{U}\,\dfrac{\mathbf{U}}{U}$ nach ξ der Integrationsweg.

Zur Bestimmung von Φ_2 wird in (2.9) der Ausdruck

$$\Phi_2(\eta) = e^{-\mathbf{U}\cdot\eta/2\nu}\,\Phi_3(\eta) \tag{2.12}$$

eingesetzt, so daß für Φ_3 folgt

$$\nu\Delta\Phi_3(\eta) - \left(\lambda + \frac{U^2}{4\nu^2}\right)\Phi_3(\eta) = \delta(\eta).$$

Im Falle dreier Raumdimensionen lautet die Lösung

$$\Phi_3(\eta) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\nu}\left\{\frac{\sqrt{\dfrac{4\lambda}{\nu} + \dfrac{U^2}{\nu^2}}}{4\pi|\eta|}\right\}^{1/2} K_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda}{\nu} + \frac{U^2}{\nu^2}}\,|\eta|\right), \tag{2.13}$$

wobei $K_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ die modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art ist. Setzt man

$$K_{\frac{1}{2}}(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\sigma}}$$

ein, vgl. [19] p. 73, so folgt

$$\Phi_3(\eta)=-\frac{1}{4\pi\nu}\frac{1}{|\eta|}e^{-\sqrt{\lambda^+}}|\eta|, \qquad \lambda^+:=\frac{\lambda}{\nu}+\frac{U^2}{4\nu^2}. \tag{2.14}$$

Setzt man die Ausdrücke (2.11), (2.12) (2.14) zusammen, beachtet, daß $\Phi_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}$ ist, und dreht das Koordinatensystem so, daß $\mathbf{U}$ von der Form $(U, 0, 0)$ ist, dann erhält man für Φ:

$$\Phi(x, y; \lambda)=F(y^2-x^2, y^3-x^3)\,e^{\lambda(y^1-x^1)/U}+\frac{1}{4\pi U}\int\limits_0^{y^1-x^1}(t^2+s^2)^{-1/2} \cdot\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\,e^{-\lambda t/U}\cdot e^{\lambda(y^1-x^1)/U}\,dt \tag{2.15}$$

und $s^2=(y^2-x^2)^2+(y^3-x^3)^2$.

Für $|x-y|\to\infty$ bleibt nun Φ, und ebenso E_{ij}, im allgemeinen nicht mehr beschränkt. Man wählt daher

$$F(y^2-x^2, y^3-x^3) = -\frac{1}{4\pi U}\int\limits_0^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\cdot e^{-\lambda t/U}\,dt \tag{2.16}$$

und erhält

$$\Phi(x, y; \lambda)=-\frac{1}{4\pi U}\int\limits_{y^1-x^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\} \cdot e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda(y^1-x^1)/U}. \tag{2.17}$$

Satz 1. *Die Grundlösung* $E_{ij}(x, y; \lambda)=\left(\delta_{ij}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\right)\Phi(x, y; \lambda)$ *verschwindet für* $|x-y|\to\infty$ *mindestens wie* $|x-y|^{-3}$. *Dabei sind alle Werte* $\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *zugelassen, die außerhalb des von der Parabel*

$$-\frac{U^2}{8\nu^2}+|\alpha|=\frac{2\beta^2}{U^2}, \qquad -\infty\leqq\alpha\leqq-\frac{U^2}{8\nu^2} \tag{2.18}$$

berandeten abgeschlossenen Gebietes P liegen.

Beweis. Nach Kontruktion der Grundlösung ist das Integral

$$\int\limits_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\,e^{\lambda t/U}\cdot dt\,e^{\lambda z^1/U} \tag{2.19}$$

mitsamt seinen Ableitungen für $|z^1|\to\infty$ zu diskutieren. Zunächst werden einige Spezialfälle behandelt.

1. *Der Fall* $\lambda \in \mathbb{R}^+$; $z^1 \to \infty$; $s=0$. Das Integral

$$I(z)=\int_0^{z^1} \frac{1}{t}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}\,t-Ut/2\nu}\}\, e^{-\lambda t/U}\, dt$$

kann explizit ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}I(z)&=\int_0^{z^1} \frac{1-e^{+\left(\sqrt{\lambda^+}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{\nu}\right)t}}{t}\, dt-\int_0^{z^1} \frac{1-e^{-\lambda t/U}}{t}\\ &=E_1\left(\left(\sqrt{\lambda^+}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{U}\right) z^1\right)+\log\left(\sqrt{\lambda^+}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{U}\right) z^1+\gamma\\ &\quad -E_1\left(\frac{\lambda}{U}\, z^1\right)-\log\frac{\lambda}{U}\, z^1-\gamma.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Beziehung

$$\int_0^a \frac{1-e^{-bt}}{t}\, dt=E_1(ab)+\log ab+\gamma, \qquad a, b>0 \tag{2.20}$$

aus [19] p. 345 benutzt; dabei ist E_1 das Exponentialintegral und γ die Euler-Konstante. Mit

$$E_1(a)=e^{-a}\, U(1,1,a), \tag{2.21}$$

vgl. [19] p. 343, und der Abschätzung für die konfluente hypergeometrische Funktion U von Kummer

$$U(1,1a)=O\left(\frac{1}{a^2}\right), \qquad a\to\infty, \tag{2.22}$$

vgl. [19] p. 289, folgt

$$\begin{aligned}F(0,0)=\log\frac{\sqrt{\lambda^+}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{U}}{\frac{\lambda}{U}}&+\lim_{z^1\to\infty}\{e^{-\lambda z^1/U}\, e^{-\sqrt{\lambda^+}\,z^1-Uz^1/2\nu}\\ &\cdot U\left(1,1,\left(\sqrt{\lambda^+}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{U}\right) z^1\right)-e^{-\lambda z^1/U}\, U(1,1,\lambda z^1/U)\}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}&\int_{z^1}^{\infty} \frac{1}{t}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}\,t-Ut/2\nu}\}\, e^{-\lambda t/U}\, dt\\ &\quad=F(0,0)-\log\frac{\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U}{\lambda/U}+O\left(\frac{e^{-\lambda z^1/U}}{(z^1)^2}\right)\end{aligned}$$

2. *Der Fall* $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $z^1 \to +\infty$; $s \in \mathbb{R}$. Für alle t, die größer als eine geeignete, positive Konstante c sind, ist

$$h(t,s) := (t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\, e^{-\lambda t/U} \leqq h(t,0).$$

Dabei hängt c nicht von s ab. Weil $h(t,s)$ nicht negativ ist, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \int_0^\infty h(t,s)\,dt - \int_0^{z^1} h(t,s)\,dt \\ &\leqq \int_{z^1}^\infty h(t,0)\,dt, \end{aligned}$$

wenn nur $z^1 \geqq c$. Dann kann wie in Fall 1 vorgegangen werden.

3. *Der Fall* $\lambda \in \mathbb{R}^+$; $z^1 \to -\infty$; $s=0$. Statt $z^1 \to -\infty$ betrachtet man $-z^1 =: \bar{z}^1 \to +\infty$ und statt (2.19) das Integral

$$\int_0^{z^1} (t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}\}\, e^{\lambda t/U}\,dt\, e^{-\lambda z^1/U}, \tag{2.23}$$

da $F(z^2, z^3)\, e^{\lambda z^1/U}$ exponentiell abklingt, also keinen wesentlichen Beitrag liefert. Schreibt man das Integral in (2.23) als

$$\int_0^{z^1} \frac{1-e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)t}}{t}\,dt - \int_0^{z^1} \frac{1-e^{\lambda t/U}}{t}\,dt$$

so kann man den zweiten Ausdruck sofort angeben; für $a, b > 0$ ist nämlich

$$\int_0^a \frac{1-e^{bt}}{t}\,dt = E^*(a,b) - \log ab - \gamma \tag{2.24}$$

mit dem Exponentialintegral E^*, vgl. [19] p. 345.

In dem ersten Integral hingegen muß man folgende Fallunterscheidung treffen: es gibt ein $\lambda^* = \lambda^*(\nu, U)$, so daß

$$-\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}+\frac{U^2}{4\nu^2}}+\frac{U}{2\nu}+\frac{\lambda}{U} \quad \begin{matrix} <0 & \text{für alle } \lambda<\lambda^* \\ =0 & \text{für alle } \lambda=\lambda^*. \\ >0 & \text{für alle } \lambda>\lambda^* \end{matrix}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{z}^1} \frac{1}{t}\{1-e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)t}\}\,dt \\ &= \begin{cases} E_1((\sqrt{\lambda^+}-U/2\nu-\lambda/U)\,\bar{z}^1 + \log(\sqrt{\lambda^+}-U/2\nu-\lambda/U)\bar{z}^1+\gamma & \text{für alle } \lambda \leqq \lambda^* \\ -E^*(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)\,\bar{z}^1 + \log(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)\,\bar{z}^1+\gamma & \text{für alle } \lambda \geqq \lambda^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Für das Exponentialintegral E^* gilt nach [19] p. 343

$$E^*(a)-\log a-\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{nn!},$$

also

$$\begin{aligned} e^{-a}(E^*(a)-\log a-\gamma) &= e^{-a}\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\\ &\leqq \frac{2}{a}e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Daraus kann man unmittelbar entnehmen:

$$\left|e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_0^{\bar{z}^1}\frac{1-e^{\lambda t/U}}{t}\,dt\right|\leqq\frac{c}{|\bar{z}^1|}\qquad\text{für } \bar{z}^1\to+\infty$$

Für $\lambda\leqq\lambda^*$ ist nach den Abschätzungen aus Fall 1

$$\begin{aligned} &\left|e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_0^{\bar{z}^1}\frac{1}{t}\{1-e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)t}\}\,dt\right|\\ &\quad\leqq c\,e^{-\lambda\bar{z}^1/U}e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)\bar{z}^1}|\bar{z}^1|^{-2}. \end{aligned}$$

Für $\lambda\geqq\lambda^*$ folgt mit (2.24) und (2.25)

$$\begin{aligned} &\left|e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_0^{\bar{z}^1}\frac{1}{t}\{1-e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu+\lambda/U)t}\}\,dt\right|\\ &\quad\leqq c\,e^{-\lambda\bar{z}^1/U}e^{\lambda\bar{z}^1/U}e^{(-\sqrt{\lambda^+}+U/2\nu)\bar{z}^1}\frac{1}{|\bar{z}^1|} \end{aligned}$$

4. *Der Fall* $\lambda\in\mathbb{R}^+$; $z^1\to-\infty$; $s\in\mathbb{R}$. Sei

$$k(t,s):=(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}\}\,e^{\lambda t/U}.$$

Wie in Fall 2 gibt es eine von s unabhängige Konstante c, so daß

$$k(t,s)\leqq k(t,0)\qquad\text{für alle } t\geqq c,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leqq e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_0^{\bar{z}^1}k(t,s)\,dt\\ &\leqq e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_0^{c}k(t,s)\,dt+e^{-\lambda\bar{z}^1/U}\int_c^{\bar{z}^1}k(t,0)\,dt. \end{aligned}$$

Den zweiten Summanden schätzt man wie in Fall 3 ab. Das Integral $\int_0^c k(t,s)\,dt$ ist durch eine nur von c abhängige Konstante beschränkt.

Im allgemeinen Fall betrachtet man $\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$. Dann ist der Realteil

$$R=\left\{\tfrac{1}{2}\left(\left(\left[\frac{\alpha}{\nu}+\frac{U^2}{4\nu^2}\right]^2+\frac{\beta^2}{\nu^2}\right)^{1/2}+\left(\frac{\alpha}{\nu}+\frac{U^2}{4\nu^2}\right)\right)\right\}^{1/2}-\frac{U}{2\nu}$$

von $\left(\frac{\lambda}{\nu}+\frac{U^2}{4\nu^2}\right)^{1/2}-\frac{U}{2\nu}$ sicher positiv, falls $\alpha+i\beta\neq 0$ außerhalb des von der Parabel

$$\frac{U^2}{8\nu^2}+|\alpha|=\frac{2\beta^2}{U^2}, \qquad -\infty\leqq\alpha\leqq-\frac{U^2}{8\nu^2}$$

berandeten Gebietes P liegt. Für diese λ führen die Fälle

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\lambda)\cdot z^1\to+\infty, \tag{2.26}$$

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\lambda)\cdot z^1\to-\infty \tag{2.27}$$

auf die Untersuchung der Integrale (2.19) und (2.23). Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\right|\\
&\quad\leqq|e^{\lambda z^1/U}|\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{-\lambda t/U}|(1+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu})\,dt\\
&\quad=|e^{\lambda z^1/U}|\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{-\lambda t/U}|(1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu})\,dt\\
&\qquad+|e^{\lambda z^1/U}|2\cdot\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{-\lambda t/U}|\,e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\,dt.
\end{aligned}$$

Das erste Integral wird nun wie in Fall 2 behandelt, das zweite liefert wegen $\lambda\notin P$ keinen wesentlichen Beitrag. (2.27) führt mit $\bar z^1:=-z^1$ zu

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{0}^{\bar z^1}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}\}\,e^{\lambda t/U}\,dt\,e^{-\lambda\bar z^1/U}\right|\\
&\quad\leqq\int_{0}^{\varepsilon}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{\lambda t/U}|\,|1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}|\,dt\,|e^{-\lambda\bar z^1/U}|\\
&\qquad+\left\{\int_{\varepsilon}^{\bar z^1}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{\lambda t/U}|\,|1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}|\,dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\varepsilon}^{\bar z^1}(t^2+s^2)^{-1/2}|e^{\lambda t/U}|\,2e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}\,dt\right\}|e^{-\lambda\bar z^1/U}|.
\end{aligned}$$

Hier wurde ε so gewählt, daß $|1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}+Ut/2\nu}|$ für $s=0$ und kleine Werte von t nahe bei 0 bleibt. Das Integral mit den Grenzen 0 und ε ist beschränkt, so daß der erste Summand exponentiell abklingt, wenn $\bar z^1$ gegen $+\infty$ strebt. Das erste Integral mit den Grenzen ε und $\bar z^1$ wird wie in Fall 4 behandelt, das zweite liefert keinen wesentlichen Beitrag. Um nun aus dem asymptotischen Verhalten von Φ auf das von E schließen zu können, genügt es wegen (2.4), die zweiten Ableitungen von Φ abzuschätzen. Daß $|\nabla^{(k)}\Phi|$ um eine Potenz schneller abfällt als $|\nabla^{(k-1)}\Phi|$, sieht man so:

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\Phi(z)=\int\limits_{z^1}^{\infty}-z^2(t^2+s^2)^{-3/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}$$
$$+\int\limits_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}$$
$$\cdot\frac{\sqrt{\lambda^+}\,z^2}{(t^2+s^2)^{1/2}}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\cdot e^{\lambda z^1/U}=:A_1+B_1.$$

Für $\frac{\partial}{\partial z^3}\Phi(z)$ erhält man ebenso zwei Integrale, die sich von A_1 und B_1 nur darin unterscheiden, daß z^2 durch z^3 ersetzt wird. Für die Ableitungen nach z^2 und z^3 liest man die Behauptung aber unmittelbar ab. Für $\frac{\partial}{\partial z^1}\Phi(z)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial z^1}\Phi(z)=\frac{\lambda}{U}\Phi(z)-\frac{1}{|z|}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}|z|-Uz^1/2\nu}\}$$
$$=(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}(-e^{\lambda t/U})\Big|_{z^1}^{\infty}e^{\lambda z^1/U}$$
$$-\int\limits_{z^1}^{\infty}(-e^{-\lambda t/U})\frac{\partial}{\partial t}\{(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\}\,dt$$
$$\cdot\,e^{\lambda z^1/U}-\frac{1}{|z|}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}|z|-Uz^1/2\nu}\}.$$

Der erste und der dritte Summand heben sich gegenseitig auf, so daß auch $\frac{\partial}{\partial z^1}\Phi(z)$ auf Integrale führt, die von der Form A_1 und B_1 sind. Bei der Abschätzung höherer Ableitungen von Φ schließt man ebenso.

Bemerkung zum Beweis. Die Abschätzungen für Φ liefern ferner

$$|\nabla^{(k)}E|\leqq c|x-y|^{-3-k},\qquad |x-y|\to\infty. \tag{2.28}$$

Für die Ableitungen von P_j sind die analogen Behauptungen offensichtlich, denn

$$P_j(x,y;\lambda)=\frac{\partial}{\partial y^j}(-\nu\Delta-(\mathbf{U}\cdot\nabla)+\lambda)\,\Phi(x,y;\lambda)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y^j}\Phi_2\quad\text{und}\quad\Delta\Phi_2=\delta$$
$$=\frac{\partial}{\partial y^j}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}.$$

Ferner lassen die benutzten Formeln für das asymptotische Verhalten der Exponentialintegrale zu, daß in (2.28) auch die Abhängigkeit der Konstanten c von dem Parameter λ angegeben werden kann.

Im Beweis wurde nur der Grenzübergang $|z^1|\to\infty$ bei konstantem z^2 und z^3 durchgeführt. Diese Einschränkung ist gerechtfertigt, da die Fälle $|z^2|\to\infty$ und $|z^3|\to\infty$ wie bei der Abschätzung der Grundlösung $\tilde{E}$ der Oseen-Gleichungen

($\lambda=0$) abgehandelt werden können. Es ergibt sich

$$E(z)=\frac{1}{|z|^2}\,O(\tilde{E}(z)), \tag{2.29}$$

m.a.W. auch $E(z)$ zeigt für $\tilde{E}(z)$ charakteristische Verhalten, allerdings bewirkt der Übergang zu $\lambda \neq 0$ (und $\lambda \notin P$) eine Dämpfung um den Faktor $|z|^{-2}$.

§ 3. Die Resolvente des Oseen-Operators

Für die regulären Funktionenpaare $(\mathbf{v}, p)$ und $(\mathbf{w}, q)$ betrachte man die zueinander adjungierten Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} L\mathbf{v} &:= -\nu\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\nabla p+\lambda\mathbf{v}=\mathbf{f} \\ &\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} M\mathbf{w} &:= -\nu\Delta\mathbf{w}-(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{w}-\nabla q+\lambda\mathbf{w}=\mathbf{g} \\ &\nabla\cdot\mathbf{w}=0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dann gelten die beiden Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} &\int_G \mathbf{v}\cdot M\mathbf{w}\,dx-\frac{\nu}{2}\int_G\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j}+\frac{\partial w^j}{\partial x^i}\right)dx \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\int_G \mathbf{w}\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{w}\,dx \\ &\quad =\lambda\int_G \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,dx+\oint_S \mathbf{v}\cdot T\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}+\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\int_G \mathbf{w}\cdot L\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot M\mathbf{w}\,dx=\oint_S \mathbf{w}\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{v}\cdot T\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma. \tag{3.4}$$

G ist dabei ein beschränktes Gebiet mit einem glatten Rand S. Im Spannungstensor $T\mathbf{v}$ ist p als zu $\mathbf{v}$ gehöriger Druck eingesetzt, bei $T\mathbf{w}$ ist es q. Die Formeln (3.3) und (3.4) gelten auch für Tensoren (C_{ij}, R_j), die (3.2) für jede Komponente erfüllen. Dann folgt wie in der Potentialtheorie harmonischer Funktionen die Darstellungsformel

$$\mathbf{v}(x)=\int_G C\cdot L\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot MC\,dy-\oint_S C\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{v}\cdot TC\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{v}\cdot C)(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma_y, \tag{3.5}$$

wenn $C=C(x-y)$ und $R=R(x-y)$ im Punkt $x=y$ so singulär werden, daß

$$\lim_{r\to 0}\oint_{\partial B_r(0)} (TC)_{ijk}n^k+C_{ij}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma=\delta_{ij} \tag{3.6}$$

bei $r=|x-y|$ gilt. Um nun die Lösung von (3.1) bei $\mathbf{f}=0$ durch ein Randintegral darstellen zu können, in das $\mathbf{v}$, $T\mathbf{v}$ sowie die Grundlösung (E, P) aus § 2 eingehen, benötigt man

Lemma 1. *Für* $|x-y|\to 0$ *gilt*

$$\Phi(x, y; \lambda)=\frac{1}{8\pi\nu}|x-y|+\varphi(x, y; \lambda) \tag{3.7}$$

mit

$$\left(\delta_{ij}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\right)\varphi(x, y; \lambda)=O(1).$$

Beweis. Zuerst wird $z^1:=y^1-x^1\geqq 0$ behandelt. Dann ist mit den Bezeichnungen aus § 2

$$\begin{aligned}
\Phi(z; \lambda)&=\frac{1}{4\pi U}\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2\nu}\}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\\
&=\frac{1}{4\pi U}\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{-1/2}\left\{1-\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\sqrt{\lambda^+})^n(t^2+s^2)^{n/2}\right]\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{U}{2\nu}\right)^n t^n\right]\right\}e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\\
&=\frac{1}{4\pi U}\int_{z^1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{1}{k!}(-\sqrt{\lambda^+})^{n-k}(t^2+s^2)^{\frac{n-k-1}{2}}\\
&\qquad\cdot\left(-\frac{U}{2\nu}\right)^k t^k e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\\
&=:\frac{1}{4\pi U}\int_{z^1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
&a_{10}=-\sqrt{\lambda+}; \qquad a_{11}=(t^2+s^2)^{-1/2}(-U/2\nu)\,t;\\
&a_{20}=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{\lambda^+})^2\cdot(t^2+s^2)^{1/2};\\
&a_{21}=(-\sqrt{\lambda^+})(-U/2\nu)\,t; \qquad a_{22}=\tfrac{1}{2}(t^2+s^2)^{-1}(-U/2\nu)^2\,t^2
\end{aligned}$$

usw. Hieraus liest man ab, daß nur a_{11} einen relevanten Beitrag liefert:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi U}\int_{z^1}^{\infty}(-U/2\nu)\,t(t^2+s^2)^{-1/2}\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\\
&\quad=-\frac{1}{8\pi\nu}\left\{(t^2+s^2)^{1/2}\,e^{-\lambda t/U}\Big|_{z^1}^{\infty}\,e^{\lambda z^1/U}-\int_{z^1}^{\infty}(t^2+s^2)^{1/2}(-U/\lambda)\,e^{-\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\right.\\
&\quad=\frac{1}{8\pi\nu}|z|+o|z|.
\end{aligned}$$

Der Übergang zu negativen Werten von z^1 bietet keine neuen Schwierigkeiten. Man spaltet dazu das Integral auf,

$$\int_{z^1}^{\infty}\dots dt=\int_{z^1}^{0}\dots dt+\int_{0}^{\infty}\dots dt$$

und beachtet, daß sich die Beiträge, die die Integrationsgrenze Null liefert, gegenseitig aufheben.

Bemerkung. Die Grundlösung (E, P) hat in erster Näherung für $x=y$ dasselbe Verhalten wie die Grundlösung der Stokes- und der Oseen-Gleichungen. Jede dieser Grundlösungen ist nämlich von der Form

$$\left(\delta_{ij}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial y^i\,\partial y^j}\right)=\begin{cases}\Phi_s & \text{für die Stokes-Gleichungen}\\ \Phi_0 & \text{für die Oseen-Gleichungen}\\ \Phi & \text{für (2.2), (2.3)}\end{cases}$$

und es gilt

$$\Phi_s=\frac{1}{8\pi\nu}\,|x-y|,$$

$$\Phi_0=\frac{-1}{4\pi\nu U}\int_0^{\frac{U}{2}|x-y|+\frac{U}{2}[x^1-y^1]}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha=\frac{1}{8\pi\nu}\,|x-y|+\cdots.$$

Die Grundlösungen für den Druck sind in allen drei Fällen sogar identisch.

Lemma 2. *Für eine Lösung* $(\mathbf{v}, p)$ *der homogenen Gleichungen* (3.1) *gelten im Außengebiet* $\mathscr{E}$ *die Darstellungsformeln*

$$\mathbf{v}(x)=-\oint_\Sigma E\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{v}\cdot TE\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{v}\cdot E)(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma, \tag{3.9}$$

$$p(x)=-\oint_\Sigma P\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{v}\cdot TP\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{v}\cdot P)(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma. \tag{3.10}$$

Dabei wurde in TP *als zu* P *gehöriger „Druck"* $\mathbf{U}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|x-y|}\right)$ *eingesetzt, und* λ *liegt außerhalb des in Satz* 1 *definierten Gebietes* P.

Beweis. Zuerst betrachtet man ein beschränktes Gebiet G mit Rand S. Für die Grundlösung $(\hat{E}, \hat{P})$ der Stokes-Gleichungen ist

$$(T\hat{E})_{ijk}=\frac{3\pi}{4}\,\frac{(y^i-x^i)(y^j-x^j)(y^k-x^k)}{|x-y|^5}.$$

Nach der Bemerkung zu Lemma 1 gilt diese Beziehung auch für TE bis auf Terme der Ordnung $O(|x-y|^{-1})$. Also ist (3.6) für die Tensoren (E, P) erfüllt.

Den Fall des Außengebietes $\mathscr{E}$ behandelt man wie in Chang-Finn [4], Theoreme 4 und 6. Man geht von der Darstellungsformel (3.9) für das Ringgebiet $B_R(0)\setminus\bar{\Omega}$ aus

$$\mathbf{v}(x)=-\oint_{\Sigma\cup\partial B_R(0)} E\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{v}\cdot TE\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{v}\cdot E)(\mathbf{U}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma$$

und beachtet, daß das Integral über $\partial B_R(0)$ verschwindet. Wegen $|E|\leq c|x-y|^{-3}$, $|\nabla E|\leq c|x-y|^{-4}$, $P\leq c|x-y|^{-2}$ ist nur noch

$$\oint_{\partial B_R(0)} E\cdot T\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\to 0 \qquad \text{für } R\to\infty$$

nachzuweisen. Das folgt aber mit [4] Lemmata 1 und 3, die wegen Satz 1 angewendet werden können.

Man definiert nun die hydrodynamischen Potentiale:

Definition 1. Seien $\psi, \varphi \in C^0(\Sigma, \mathbb{R}^3)$. Dann heißt

$$\mathbf{V}(x) := 2 \oint_\Sigma E(x, y; \lambda) \cdot \psi(y)\, d\sigma_y, \tag{3.11}$$

$$P_V(x) := 2 \oint_\Sigma P(x, y; \lambda) \cdot \psi(y)\, d\sigma_y \tag{3.12}$$

hydrodynamisches Potential der einfachen Belegung mit der Dichte ψ, und

$$\mathbf{W}(x) := 2 \oint_\Sigma \varphi \cdot TE \cdot \mathbf{n} - (\varphi \cdot E)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{3.13}$$

$$P_W(x) := 2 \oint_\Sigma \varphi \cdot TP \cdot \mathbf{n} - (\varphi \cdot P)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma \tag{3.14}$$

heißt *hydrodynamisches Potential der doppelten Belegung* mit der Dichte φ.

Der Kern des Potentials $\mathbf{W}$ wird mit K abgekürzt.

Lemma 3 (Odqvist [20]; Faxén [5]). *Für stetige Belegungsdichten φ und ψ gilt*

(i) $\mathbf{V}$, P_V, $\mathbf{W}$ *und* P_W *sind in* $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ *analytische Funktionen und genügen den homogenen Gleichungen* (3.1).

(ii) $\mathbf{V}$ *ist darüberhinaus im ganzen Raum* $\mathbb{R}^3$ *stetig.*

(iii) $\mathbf{W}$ *und* $(\mathscr{T}\mathbf{V}) := 2\mathbf{n} \cdot \oint_\Sigma \psi \cdot TE - \psi \cdot E \cdot \mathbf{U}\, d\sigma$ *erleiden beim Durchgang durch die Fläche einen Sprung, d.h. für* $x \in \Sigma$ *gilt*

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} W^j(z) = \varphi^j(x) + \oint_\Sigma K_{ij} \varphi^i\, d\sigma,$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \mathscr{E}}} W^j(z) = -\varphi^j(x) + \oint_\Sigma K_{ij} \varphi^i\, d\sigma,$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} (\mathscr{T}\mathbf{V}(z))^j =: (\mathscr{T}^{(i)}\mathbf{V}(x))^j = \psi^j(x) - \oint_\Sigma K_{\bar{ij}}^{-} \psi^i\, d\sigma,$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \mathscr{E}}} (\mathscr{T}\mathbf{V}(z))^j =: (\mathscr{T}^{(a)}\mathbf{V}(x))^j = -\psi^j(x) - \oint_\Sigma K_{\bar{ij}}^{-} \psi^i\, d\sigma.$$

K^- geht aus dem in Definition 1 angegebenen Tensor K hervor, indem $\mathbf{U}$ durch $-\mathbf{U}$ ersetzt wird.

Eine Lösung der homogenen Gleichungen (3.1), die auf Σ vorgeschriebene Dirichlet-Randwerte $\mathbf{v}_\Sigma$ annimmt und im Unendlichen verschwindet, sucht man nun als Potentiale $\mathbf{W}$, P_W der doppelten Belegung. Die Sprungrelationen aus Lemma 3 führen in bekannter Weise zu den Fredholmschen Integralgleichungen

$$\varphi(x) + \mu \oint_\Sigma K \cdot \varphi\, d\sigma = -\mathbf{v}_\Sigma(x), \qquad \mu = -1. \tag{3.15}$$

Das dazu adjungierte Gleichungstripel

$$\psi(x) + \mu \oint K \cdot \psi\, d\sigma = -\gamma_\Sigma(x), \qquad \mu = -1 \tag{3.16}$$

liefert eine Lösung von (3.1) in Ω, wobei auf Σ Randwerte vom Neumann-Typ vorgeschrieben sind.

Lemma 4 (Faxén [5]). *In der Gleichung* (3.15) *ist* $\mu=-1$ *kein Eigenwert, wenn* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\left\{P\cup\left(-\frac{U^2}{8\nu^2},0\right]\right\}$ *ist.*

Beweis. Es wird angenommen, daß (3.15) für $\mathbf{v}_\Sigma\equiv\mathbf{0}$ eine Lösung $\varphi\not\equiv 0$ besitzt; dann hat auch (3.16) für $\gamma_\Sigma\equiv 0$ eine Lösung ψ, die nicht identisch auf Σ verschwindet. Bildet man mit dieser Funktion ψ das hydrodynamische Potential $\mathbf{V}$ der einfachen Schicht, so folgt nach Lemma 3, (iii)

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}^{(i)}\mathbf{V}(x)-\mathscr{T}^{(a)}\mathbf{V}(x)=-2\psi(x),\\&\mathscr{T}^{(i)}\mathbf{V}(x)+\mathscr{T}^{(a)}\mathbf{V}(x)=2\oint_\Sigma K^-\cdot\psi\,d\sigma,\end{aligned}$$

damit also

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^{(i)}\mathbf{V}(x)&=-\psi(x)+\oint_\Sigma K^-\cdot\psi\,d\sigma\\&=-\gamma_\Sigma=0\end{aligned}$$

da ψ ja eine Eigenlösung ist. Die erste Greensche Formel ergibt dann

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)^* dx+\lambda\int_\Omega\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^*\,dx\\&\quad+\oint_\Sigma\mathbf{V}^*\cdot\mathscr{T}^{(i)}\mathbf{V}\,d\sigma=0,\end{aligned}$$

wobei z^* die zu z konjugiert komplexe Größe bezeichnet. Hieraus folgt, daß $\mathbf{V}$ in Ω identisch verschwindet, also auch φ: für $\lambda=0$ hat dies Faxén [5] bewiesen, für die übrigen Werte von λ liest man es unmittelbar ab.
Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden nun zusammengefaßt in

Satz 2. *Sei* $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\left\{P\cup\left[-\frac{U^2}{8\nu^2},0\right)\right\}$. *Dann existiert für das homogene System* (3.1) *ein Greenscher Tensor* $G(x,y;\lambda)$, *dessen Komponenten für* $y\in\Sigma$ *und* $|y|\to\infty$ *verschwinden.*

Insbesondere besitzt (3.1) *für Randwerte* $\mathbf{v}_\Sigma\in C^{2+\alpha}(\Sigma)$ *und für äußere Kraftdichten* $\mathbf{f}\in C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$ *mit* $|x|^\beta\mathbf{f}\in L_2(\mathscr{E})$, $\beta>\frac{1}{2}$, *genau eine Lösung von der Klasse* $C^{2+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$.

Beweis. Nach Lemma 4 existiert ein Tensor $A_{ij}(x,y;\lambda)$, der die homogenen Gleichungen (3.1) in $\mathscr{E}$ löst und für den gilt

$$\begin{aligned}&A_{ij}(x,y;\lambda)=-E_{ij}(x,y;\lambda)\qquad\text{für alle } y\in\Sigma,\\&A_{ij}(x,y;\lambda)\to 0\qquad\text{für } |x|\to\infty.\end{aligned}$$

Dann ist

$$G(x,y;\lambda)\equiv G_{ij}(x,y;\lambda):=E_{ij}(x,y;\lambda)+A_{ij}(x,y;\lambda)$$

der gesuchte Greensche Tensor.

Sien nun $\mathbf{v}_\Sigma$ und $\mathbf{f}$ gegeben. Dann kann man eine Lösung von (3.1) in $\mathscr{E}$ für diese Daten so finden, vgl. Finn [9] p. 369: es sei o.B.d.A. angenommen, daß der Ursprung des Koordinatensystems in Ω liege. Es gibt eine Konstante $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$\oint_\Sigma \mathbf{v}_\Sigma(x) + \gamma_0 \nabla \left(\frac{1}{|x|}\right) d\sigma_x = 0.$$

Nach Finn [8], Lemma 2.1 gibt es ein divergenzfreies Vektorfeld ζ, das in $\bar{\mathscr{E}}$ definiert ist, so daß

$$\zeta(x) = \mathbf{v}_\Sigma(x) + \gamma_0 \nabla \left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{auf } \Sigma$$

$$\zeta(x) = 0 \quad \text{außerhalb einer Umgebung von } \Sigma.$$

Die Existenz dieses Vektorfeldes erlaubt es, sich auf homogene Randwerte zu beschränken. Die Lösung $\mathbf{v}(x)$ von (3.1) sucht man nun in der Form

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{w}(x) + \zeta(x) - \gamma_0 \nabla \left(\frac{1}{|x|}\right),$$

wobei $\mathbf{w}(x)$ die Lösung von (3.1) bei verschwindenden Randwerten und der Inhomogenität

$$\mathbf{f} - \nu \Delta \zeta + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\left(\zeta - \gamma_0 \nabla \left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$$

ist. Es wurde hierbei $\nabla \cdot \gamma_0 \nabla \left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$ ausgenützt.

§ 4. Resolventenabschätzung

Die Existenz der vom Oseen-Operator erzeugten Halbgruppe folgt aus der Resolventenabschätzung

Satz 3. *Sei $v(x)$ eine Lösung des Systems*

$$\left.\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p + \lambda \mathbf{v} &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in } \mathscr{E} \tag{4.1}$$

mit den Randwerten

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(x)|_\Sigma = 0 \\ &\mathbf{v}(x) \to 0 \quad \text{für } |x| \to \infty. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dann gibt es ein $\Lambda_0 > 0$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus P$, $|\lambda| > \Lambda_0$ gilt

$$\begin{aligned} &|\lambda| \, \|\mathbf{v}\|_{C^0(\bar{\mathscr{E}})} + |\lambda|^{1-\frac{\alpha}{2}} \|\mathbf{v}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \\ &\quad + |\lambda|^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{C^1(\bar{\mathscr{E}})} + |\lambda|^{1/2-\alpha/2} \|\mathbf{v}\|_{C^{1+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \\ &\quad + \|\mathbf{v}\|_{C^2(\bar{\mathscr{E}})} + |\lambda|^{-\alpha/2} \|\mathbf{v}\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \leq c \|\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \end{aligned} \tag{4.3}$$

c hängt nicht von λ oder $\mathbf{v}$ ab.

Der Beweis wird in den folgenden vier Lemmata erbracht. Zunächst wird das Verhalten der Grundlösung (E, P) im Aufpunkt noch einmal untersucht, also Lemma 1 für $|\lambda|$ hinreichend groß verschärft. Die folgenden drei Lemmata lehnen sich eng an die Herleitung von Schauder-Schranken für elliptische Systeme mit konstanten Koeffizienten an, wie man sie in den Abhandlungen von Hildebrandt [15] und Agmon-Douglis-Nirenberg [1], [2] findet. (4.3) unterscheidet sich nämlich von derartigen Schranken nur durch die explizite Angabe der Abhängigkeit vom Parameter λ.

Lemma 5. *Für $|x-y|\to 0$ und $|\lambda|>\Lambda_0$ wobei Λ_0 eine genügend große positive Konstante ist, gilt*

$$\Phi(x,y;\lambda)=\frac{1}{8\pi v}|x-y|\,e^{-\lambda^{1/2}|x-y|}+\psi(x,y;\lambda) \tag{4.4}$$

mit $\left(\delta_{ij}\Delta-\dfrac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}\right)\psi(x,y;\lambda)=O(1)$

Beweis. Zuerst wird das Integral

$$\mathscr{J}(a):=\int_a^\infty \frac{1}{t}\{1-e^{-\sqrt{\lambda}t}\}\,e^{-\lambda t}\,dt\,e^{\lambda a}$$

betrachtet. Durch partielle Integration erhält man

$$\mathscr{J}(a)=\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n!}(\sqrt{\lambda})^{n-2}a^{n-1}+\sum_{k=2}^\infty\sum_{n=k}^\infty\frac{(-1)^n}{n(n-k)!}\cdot(\sqrt{\lambda})^{n-2k}a^{n-k}$$

Die erste Summe ist also schon von der gewünschten Form, die Doppelsumme formt man um zu

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{k=2}^\infty\frac{(-1)^{m+k}}{(m+k)m!}(\sqrt{\lambda})^{m-k}a^m=\sum_{m=0}^\infty\frac{(\sqrt{\lambda}a)^m}{m!}\cdot\left\{\sum_{k=2}^\infty\frac{(-1)^{m+k}}{m+k}(\sqrt{\lambda})^{-k}\right\}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=2}^\infty\frac{(-1)^{m+k}}{m+k}(\sqrt{\lambda})^{-k}=(\sqrt{\lambda})^m\sum_{l=2+m}^\infty\frac{(-1)^l}{l}(\sqrt{\lambda})^{-l},$$

also ein Teil der Reihe von $\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

Diese Überlegung liefert auch für das hier vorgelegte Integral die gewünschte Abschätzung. Dazu beginnt man mit

$$\begin{aligned}&\int_{z^1}^\infty(t^2+s^2)^{-1/2}\{1-e^{-\sqrt{\lambda^+}(t^2+s^2)^{1/2}-Ut/2v}\}\,e^{\lambda t/U}\,dt\,e^{\lambda z^1/U}\\&\quad=\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=0}^n\frac{1}{(n-k)!}\frac{1}{k!}(-\sqrt{\lambda^+})^{n-k}|z|^{n-k-1}(z^1)^k\frac{U}{\lambda}\left(-\frac{U}{2v}\right)^k+\sum_{l=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^n\\&\quad\quad\cdot\frac{1}{k!(n-k)!}(\sqrt{\lambda^+})^{n-k}\left(-\frac{U}{2v}\right)^k\left(\frac{U}{\lambda}\right)^l\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)\{|z|^{n-k-1}(z^1)^k\}.\end{aligned}$$

Nun kann man zwar die dreifache Summe nicht mehr wie oben durch elementare Funktionen ausdrücken, doch liest man ab, daß sie dasselbe Verhalten wie der entsprechende Term bei $\mathscr{J}(a)$ zeigt. Man benutzt dazu

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^l \{|z|^{n-k-1}(z^1)^k\} = \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^m (z^1)^k \left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^{l-m} |z|^{n-k-1}$$

und die Rekursionsformel

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^p |z|^q = q z^1 \left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^{p-1} |z|^{q-2} + q(p-1)\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)^p |z|^{q-2}.$$

Da nur große Werte von $|\lambda|$ in Betracht kommen – nur für diesen Fall sind die Resolventenabschätzungen zu liefern –, ist (4.4) für $z^1 > 0$ bewiesen. Der Übergang zu $z^1 < 0$ erfolgt wie in Lemma 1.

Bemerkung. Für die Stokes-Gleichungen läßt sich dieselbe Abschätzung beweisen, vgl. auch die Bemerkung zu Lemma 1.

Lemma 6 (Innere Schranken). *Sei $E(x, y; \lambda)$ Grundlösung für das System* (4.1) *und* $\mathbf{f} \in C^{0+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, *so daß*

$$\mathbf{v}(x) := \int_{\mathbb{R}^3} E(x, y; \lambda) \mathbf{f}(y)\, dy$$

absolut konvergiert. Dann erfüllt $\mathbf{v}(x)$ *die Abschätzung* (4.3), *wobei die dabei auftretenden* C^k- *und* $C^{k+\alpha}$-*Normen über* $\mathbb{R}^3$ *zu bilden sind.*

Beweis. Wegen (2.4) genügt es, statt $\int E(x, y; \lambda)\mathbf{f}(y)\,dy$ das Integral $\int k(x, y; \lambda) f(y)\,dy$ zu behandeln, wobei $k(x, y; \lambda)$ für irgendeine zweite partielle Ableitung von $\Phi(x, y; \lambda)$ steht, und f eine der drei Komponenten von $\mathbf{f}$ bezeichnet. Sei $k(x, y; \lambda)$ der singuläre Kern des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 k(x, y; \lambda) f(y)\, dy$$

und $\operatorname{supp} f \subset\subset B_R(0) =: B$. Wegen Lemma 1 führt das zu

$$\int_B \left\{ \nabla^4 \frac{1}{8\pi\nu} |x-y| + \nabla^4 \varphi(x, y; \lambda) \right\} f(y)\, dy.$$

Der inguläre Anteil $\nabla^4 |x-y|$ hängt nicht von λ ab und es gilt

$$\Big[\int_B \nabla^4 |x-y| f(y)\, dy\Big]_\alpha \leqq c[f]_\alpha$$

nach der Hölder-Korn-Lichtenstein-Ungleichung, wenn nur gezeigt ist, daß

$$\oint_{\partial B_1(x)} w\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) d\sigma_y = 0 \tag{4.5}$$

gilt, wobei man $\nabla^4|x-y|$ als $|x-y|^{-3}\, w\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)$ schreibt. (4.5) folgt aber aus der Tatsache, daß

$$\begin{aligned}\int_{r\leqq|y|\leqq s}\frac{\partial}{\partial y^i}(\nabla^3|y|)\,dy &= \oint_{\partial B_s}(\nabla^3|y|)\,\frac{y^i}{s}\,d\sigma_y-\oint_{\partial B_r}(\nabla^3|y|)\,\frac{y^i}{r}\,d\sigma_y\\ &= \oint_{\partial B_1}(\nabla^3|y|)\,y^i\,d\sigma_y-\oint_{\partial B_1}(\nabla^3|y|)\,y^i\,d\sigma_y=0,\end{aligned}$$

da ja $\nabla^3|y|$ homogen vom Grad -2 ist, und weil

$$0=\int_{r\leqq|y|\leqq s}\frac{\partial}{\partial y^i}\,\nabla^3|y|\,dy=\int_{r\leqq|y|\leqq s}\frac{w\left(\frac{y}{|y|}\right)}{|y|^3}\,dy=\oint_{\partial B_1}w(y)\,d\sigma_y\int_r^s\frac{1}{r^3}\,r^2\,dr.$$

Auf Grund von Lemma 5 ist also noch die Faltung mit dem schwach singulären Kern

$$\lambda\,\frac{e^{-\lambda^{1/2}|x-y|}}{|x-y|}+\lambda^{1/2}\,\frac{e^{-\lambda^{1/2}|x-y|}}{|x-y|^2}+\frac{1-e^{-\lambda^{1/2}|x-y|}}{|x-y|^3}\tag{4.6}$$

zu untersuchen. Hier ist z.B.

$$\begin{aligned}&\left|\int_B\sqrt{\lambda}\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|^2}\,f(y)-\sqrt{\lambda}\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x'-y|}}{|x'-y|^2}\,f(y)\,dy\right|\\ &\leqq\left|\int_B|\lambda|^{3/2}\left\{\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{||\lambda|^{1/2}(x-y)|^2}-\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x'-y|}}{||\lambda^{1/2}(x'-y)|^2}\right\}f(y)\,dy\right|\\ &\leqq c\int_{B^*}\{|\lambda|^{\alpha/2}|x-x'|^\alpha\,||\lambda|^{1/2}x-z|^{-2}\\ &\quad+\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{||\lambda|^{1/2}x-z|^{2+\alpha}}\,|\lambda|^{\alpha/2}\,|x-x'|^\alpha\}\,f(z|\lambda|^{-1/2})\,dz\\ &\leqq c\,|\lambda|^{\alpha/2}\,|x-x'|^\alpha\,\|f\|_{C^0},\end{aligned}$$

da die Hölder-Halbnorm von $e^{-\sqrt{\lambda}x}$ den Wert $|\lambda|^{\alpha/2}$ hat und $\left|\frac{1}{|x|^2}-\frac{1}{|x|^2}\right|\leqq c|x-x'|^\alpha|x|^{-2-\alpha}$ ist. B^* ist die Kugel mit dem Radius $|\lambda|^{1/2}R$. Die übrigen Summanden in (4.6) führen zu Überlegungen derselben Art. Die Behandlung von $\mathbf{v}$ und $\nabla\mathbf{v}$ führt auf schwach singuläre Integrale mit Kernen, die sich wie $e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}|x-y|^{-1}$, $e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}|x-y|^{-2}+\sqrt{\lambda}\,e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}|x-y|^{-1}$ verhalten. Die Potenzen von $|\lambda|$, um die diese Größen sich von den entsprechenden Summanden in (4.6) unterscheiden, sind genau die, die in (4.3) bei der C^0-, $C^{0+\alpha}$-, bzw. C^1-, $C^{1+\alpha}$-Norm von $\mathbf{v}$ auftreten. Für die Schranken bis zum Rand ist der Halbraum $\mathbb{R}^3_+:=\{x\in\mathbb{R}^3: x^3\geqq 0\}$ der „Modellraum". Die (willkürlich) ausgezeichnete Koordinate x^3 wird im folgenden mit t bezeichnet, die beiden übrigen mit ξ; $y\equiv(\eta, s)$. Dann sind Faltungen der Art

$$\int_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} E(\xi-\eta, t-s; \lambda)\, \varphi(\eta)\, d\eta \tag{4.7}$$

zu behandeln, wobei φ eine auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion der Klasse $C^{2+\alpha}$ ist.

In erster Näherung gilt für den Kern von (4.7) wegen Lemma 1

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\xi-\eta, t-s; \lambda) = \frac{w\left(\dfrac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}, \dfrac{t-s}{|t-s|}\right)}{|x-y|^2}$$

mit

$$\oint_{\partial B_1(\xi)} w\left(\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}, 0\right) d\sigma_\eta = 0,$$

vgl. auch Agmon-Douglis-Nirenberg [1] p. 645 (Corollary), [2] p. 61.

Aus Lemma 5 folgt, daß nach Abspaltung des singulären, aber von λ unabhängigen Anteils $w \cdot |x-y|^{-2}$ noch der Kern

$$h(\xi-\eta, t-s; \lambda) = \sqrt{\lambda}\, \frac{t-s}{|t-s|}\, \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|} \tag{4.8}$$

zu behandeln ist.

Lemma 7. *Sei* $\varphi \in C^{0+\alpha}(\mathbb{R}^2)$, *und das Integral*

$$\psi(x) \equiv \psi(\xi, t) := \int_{s=0} h(\xi-\eta, t-s; \lambda)\, \varphi(\eta)\, d\eta$$

mit h wie in (4.8) *definiert sei absolut konvergent. Dann gilt für alle* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

$$\|\psi\|_{C^0(\mathbb{R}^3)} + |\lambda|^{-\alpha/2} \|\psi\|_{C^{0+\alpha}(\mathbb{R}^3)} \leqq c \|\varphi\|_{C^{0+\alpha}(\mathbb{R}^2)},$$

wobei c von λ *und* φ *nicht abhängt.*

Beweis. Der Beweis bietet gegenüber Lemma 6 keine neuen Schwierigkeiten. Mit $x' \equiv (\eta', t')$ wird

$$\int_{s=0} \sqrt{\lambda}\, \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|}\, \varphi(\eta)\, d\eta - \int_{s=0} \sqrt{\lambda}\, \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x'-y|}}{|x'-y|}\, \varphi(\eta)\, d\eta \tag{4.9}$$

wie oben abgeschätzt: die Transformation $\eta \to |\lambda|^{1/2}\eta =: \zeta$ hat, da über $\mathbb{R}^2$ integriert wird, $|\lambda|$ als Funktionaldeterminante.

Wiederum ergibt sich $|\lambda|^{\alpha/2}$, weil die Hölder-Halbnorm von $e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$ in die Konstante eingeht.

Sind die Schauder-Schranken (4.3) für die Faltung einer Funktion f mit der Grundlösung, bzw. ihrer Normalableitung für die Modellräume $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3_+$ bewiesen, so gilt (4.3) auch für die Randwertaufgabe in $\mathscr{E}$, wie in Agmon-Douglis-Nirenberg [1] § 6 ausführlich dargestellt ist. Man hat sich vor der Anwendung dieser Ergebnisse lediglich zweier Sachverhalte zu vergewissern:

einmal benötigt man dür die Lösung eine Darstellung, wie sie in § 3 angegeben ist; ferner ist nachzuweisen, daß der Greensche Tensor G für das Problem (4.1) –(4.2) mit seinen Ableitungen dieselbe Singularität im Aufpunkt besitzt wie die Fundamentallösung E, bzw. deren Ableitungen.

Lemma 8. *Der Greensche Tensor $G(x, y; \lambda)$ zur Randwertaufgabe* (4.1)–(4.2) *verhält sich für kleine Werte von $|x-y|$ wie die Grundlösung E.*

Beweis. Aus der Konstruktion von G_{ij} in Satz 2 geht hervor, daß die Behauptung für den dort definierten Tensor A_{ij} zu zeigen ist. Auf Grund von Lemma 4 ist

$$\begin{aligned} A_{ij}(x, y; \lambda) = \oint_{\Sigma} & \Phi_{kj}(z, y)(T E(x, z; \lambda))_{ikl} n^l \\ & + \Phi_{kj}(z, y) E_{ik}(x, z; \lambda) U^l n^l d\sigma_z; \end{aligned}$$

hierbei ist $\Phi_{kj}(z, y)$ die Belegungsdichte, die man erhält, wenn man die Fredholmsche Resolvente R_{kl} der in Lemma 4 gelösten Integralgleichung (3.15) auf die Randwerte $-E_{ij}$ anwendet. Da auch R_{kl} einer Integralgleichung mit dem Kern K aus Definition 1 genügt, reduzieren sich die Abschätzungen für Φ_{kj}, R_{kl} und A_{ij} darauf, Integrale der Form

$$I(x, x; \lambda) := \oint_{\Sigma} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x'-y|}}{|x'-y|} d\sigma_y$$

zu behandeln. Auch hier ist wie in Lemma 7 nur die dort angegebene Koordinatentransformation auszuführen.

§ 5. Existenzsatz

Auf Grund der Ergebnisse von § 4 kann man die vom Oseen-Operator erzeugte Halbgruppe definieren.

Definition 2. Sei A_{λ}^{-1} die Resolvente der Aufgabe (4.1)–(4.2). Dann heißt für $t>0$ und $\mathbf{f} \in C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$

$$e^{-tA}\mathbf{f} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} A_{\lambda}^{-1} \mathbf{f} \, d\lambda \tag{5.1}$$

die *vom Oseen-Operator erzeugte Halbgruppe.* Γ ist hier wie üblich ein Weg in der Resolventenmenge, so daß mit $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda| \to \infty$ auch $-\operatorname{Re}\lambda$ gegen ∞ strebt.

Lemma 9. *Für $t>0$ und $\mathbf{f} \in C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$ gilt*

$$\|e^{-tA}\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \leqq c e^{-at} t^{-\alpha/2} \|\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \tag{5.2}$$

$$\|A e^{-tA}\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \leqq c e^{-at} t^{-1-\alpha/2} \|\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \tag{5.3}$$

Die Konstanten c und a hängen nicht von $\mathbf{f}$ *oder t ab.*

Der Beweis benutzt nur Definition 2 und die Resolventenabschätzung, vgl. auch von Wahl [25] und Kielhöfer [16].

Die Ungleichung (5.2) zeigt, daß e^{-tA} keine stark stetige Halbgruppe ist. Dies begründet das folgende Vorgehen von Kielhöfer. Wenn man in einem Banach-Raum $\mathscr{X}$ die Gleichung

$$D_t u(t) = -Lu(t) + F(u(t)), \qquad u(0) = u_0 \tag{5.4}$$

mit einem elliptischen Operator L, einer Nichtlinearität F und der Differentiation D_t bez. der Norm von $\mathscr{X}$ lösen will, so geht man zunächst von einer schwächeren Version von (5.4) aus. Angenommen, es existiert eine stetige Halbnorm $|\ |_{\mathscr{X}}$ auf $\mathscr{X}$, so daß

$$\lim_{h \searrow 0} \left| \frac{e^{-hL}u - u}{h} - (-Lu) \right|_{\mathscr{X}} = 0 \qquad \text{für alle } u \in D(L), \tag{5.5}$$

dann ist die Differentialgleichung (5.4) so zu verstehen: gesucht ist eine Funktion $u \in C^0([0, T\ ], \mathscr{X})$ mit $u(0) = u_0$, so daß

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - [-Lu(t) + F(u(t))] \right|_{\mathscr{X}} = 0.$$

Für den hier zu behandelnden Fall $\mathscr{X} = C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$ ist gemäß den weiteren Ausführungen in [16] pp. 138–139 zu zeigen:

Lemma 10. *Sei* $\mathbf{f} \in C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$, $\mathbf{f}|_\Sigma = 0$, $|\mathbf{f}(x)| \leqq \frac{c}{|x|}$ *für* $|x| \to \infty$. *Dann gilt*

$$\lim_{t \searrow 0} |(e^{-tA}\mathbf{f})(x) - \mathbf{f}(x)| = 0. \tag{5.6}$$

Beweis. Die Eigenschaft (5.6) kann für Halbgruppen elliptischer Operatoren im allgemeinen nicht bewiesen werden, und wird daher auch in [16] als Hypothese vorausgesetzt. So wird für die Ganzraumaufgabe und für den Fall, daß man e^{-tL} als Integraloperator mit der Greenschen Funktion des parabolischen Problems als Kern schreiben kann, (5.6) von Kielhöfer bewiesen.

Hier hingegen liefert Definition 2 in Verbindung mit Satz 2

$$(e^{-tB}\mathbf{f})(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} \int_{\mathscr{E}} G(x, y; \lambda)\, \mathbf{f}(y)\, dy\, d\lambda. \tag{5.7}$$

Das Verhalten dieses Integraloperators ist aber für $t \to 0$ bekannt, so daß (5.6) wie in Solonnikov [24] pp. 159–162 folgt.

Definition 3. Für $\gamma > \frac{\alpha}{2}$ heißt

$$A^{-\gamma} := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-tA} t^{\gamma-1}\, dt \tag{5.8}$$

(negative) *gebrochene Potenz des Oseen-Operators.* Weil $A^{-\gamma}$ invertierbar ist, definiert man die (positive) gebrochene Potenz

$$A^\gamma := (A^{-\gamma})^{-1}.$$

Die Einschränkung $\gamma > \frac{\alpha}{2}$ ist wegen (5.2) notwendig. Für Eigenschaften dieser Potenzen sei auf die o.a. Arbeiten verwiesen. Die wichtige Interpolationseigenschaft wird formuliert als

Lemma 11. *Es gilt*

$$\|\mathbf{f}\|_{C^{1+\beta}(\bar{\mathscr{E}})} \leqq c\,\|A^\gamma \mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \tag{5.9}$$

mit

$$1-\frac{\gamma}{2} > \gamma > 1 - \frac{2-2\beta-\alpha^2}{4+2\alpha} \quad \textit{und} \quad 0<\beta<1-\alpha(1+\alpha). \tag{5.10}$$

Der Beweis benutzt eine Idee von Sobolevski [23] p. 57 und ist bei Kielhöfer [16] pp. 145–146 genau ausgeführt.

Lemma 12. *Analog zu* (5.3) *aus Lemma* 9 *gilt*

$$\|A^\gamma e^{-tA}\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})} \leqq c\, e^{-at} t^{-\gamma-\alpha/2}\, \|\mathbf{f}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})}. \tag{5.11}$$

Der Beweis ist bekannt, vgl. von Wahl [25].

Damit ist alles bereitgestellt, um den Existenzsatz für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen zu formulieren.

Satz 4. *Die Anfangswertaufgabe*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in } \mathscr{E} \quad [0,T],$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x) && \text{für alle } x\in\mathscr{E}, \\ &|\mathbf{v}(x,t)-\mathbf{U}| \leqq C|x|^{-1} && \text{für } |x|\to\infty, \\ &\mathbf{v}(x,t) = 0 && \text{für alle } x\in\Sigma, \quad t\in[0,T] \end{aligned}$$

besitzt für hinreichend kleine T genau eine Lösung von der Klasse $C^1((0,T), C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})) \cap C^0((0,T), C^{2+\alpha}(\bar{\mathscr{E}}))$, α nahe bei Null, wenn nur $|x|^\beta \mathbf{f} \in L_2(\mathscr{E})$ mit $\beta > \frac{1}{2}$ und $\mathbf{v}_0 \in D(A^\delta)$ mit einem geeigneten $\delta > 0$ gilt.

Ist ν hinreichend groß, so kann $T=\infty$ zugelassen werden.

Beweis. In der bekannten Weise, vgl. auch Satz 2, formt man die Gleichungen um zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= \mathbf{f} + (u\cdot\nabla)\mathbf{u} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

und transformiert das Problem so, daß die Randwerte homogen sind

$$\begin{aligned} &|\mathbf{u}(x,t)| \leqq c|x|^{-1} && \text{für } |x|\to\infty, \\ &\mathbf{u}(x,t) = 0 && \text{für alle } x\in\Sigma, \quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

Dann wird die lokale Existenzaussage sowie die Regularität der Lösung durch die Arbeiten [16] und [17] von Kielhöfer geliefert. Da die Nichtlinearität

$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ nur von linearem Wachstum im Gradienten ist, sind nämlich die Voraussetzungen in [16] Satz 5.9 erfüllt. Als zweites ist die Abklingbedingung im Unendlichen zu prüfen. Kielhöfer löst das nichtlineare Anfangswertproblem, indem er mittels eines Fixpunktsatzes eine nichtlineare Integralgleichung in einem Banach-Raum $\mathcal{Y}$ löst. $\mathcal{Y}$ ist ein Teilraum von $C^{0+\alpha}$ und besteht aus den Funktionen, die für $|x|\to\infty$ gegen Null streben. Es ist nun zu prüfen, daß man diesen Funktionenraum nicht verläßt, wenn man ein Element in die rechte Seite der Integralgleichung

$$u(t)=e^{-tA}u_0+\int_0^t e^{-\tau A}(f+(u\cdot\nabla)u)(\tau)\,d\tau \tag{5.12}$$

einsetzt. Im hier vorliegenden Fall gilt jedoch noch mehr: einmal fällt $\mathbf{u}$ wie $c\cdot|x|^{-1}$ ab (vgl. dagegen die $C_*^{0+\alpha}$-Räume in [16], in denen die Abklingrate nicht vorgeschrieben ist), zum anderen ist $u(t)$ — was das Verhalten für große $|x|$ betrifft — wieder ein zulässiger Anfangswert, da $e^{-sA}u(t)$ wieder wie $c|x|^{-1}$ abfällt. Beides liefert die fundamentale Abschätzung von Finn: Sei $|\mathbf{u}|\leqq c|x|^{-1}$, dann gilt

$$\int_{\mathscr{E}} G(x,y;0)(\mathbf{u}(y)\cdot\nabla)\mathbf{u}(y)\,dy\leqq c|x|^{-1}. \tag{5.13}$$

Weil nun die Halbgruppe von der Form (5.7) ist, liefert (5.13), daß $e^{-sA}u(t)$ für große $|x|$ wie $c|x|^{-1}$ abfällt. Zwar ist im Vergleich mit (5.13) der Ausdruck, der mit G gefaltet wird, um den Faktor $|y|^2$ schlechter, dies wird jedoch, wie in § 2 ausgeführt, durch die Dämpfung $(\lambda\neq 0)$ genau ausgeglichen.

Weiter ist für die globale Existenz der Lösung zu zeigen, daß $\|A^\delta\mathbf{u}\|_{C^{0+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})}$ a priori beschränkt werden kann. Für eine reguläre Lösung $u(t)$ gilt (5.12), also

$$A^\delta u(t)=A^\delta e^{-tA}u_0+\int_0^t A^\delta e^{-\tau A}f(\tau)\,d\tau+\int_0^t A^\delta e^{-\tau A}((u\cdot\nabla)u)(\tau)\,d\tau.$$

Wegen Lamma 12 ist für die Nichtlinearität nur noch die Abschätzung

$$\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_\alpha\leqq c(1+\|A^\delta\mathbf{u}\|_\alpha) \tag{5.14}$$

zu beweisen. Hier und im folgenden ist die $C^{k+\alpha}(\bar{\mathscr{E}})$-Norm kurz mit $\|\,.\,\|_{k+\alpha}$ bezeichnet.

$$\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_\alpha\leqq\frac{1}{p}\,\|\mathbf{u}\|_\alpha^p+\frac{1}{q}\,\|\nabla\mathbf{u}\|_\alpha^q$$

mit $p^{-1}+q^{-1}=1$. Die Exponenten p und q werden später festgelegt. Mit der Interpolationsformel aus Agmon-Douglis-Nirenberg [1] § 5 folgt

$$\|\nabla\mathbf{u}\|_\alpha^q\leqq 2^q\{c^q\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot q}\,\|\mathbf{u}\|_0^{\left(1-\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right)q}+d^q\,\|\mathbf{u}\|_0^q\},$$

wobei c und d nur vom Gebiet abhängen. Die Interpolationsungleichung gilt für $0<\alpha\leqq\beta$.

Hier wird zusätzlich $\beta<1$ gewählt, um weiter unten Lemma 11 anwenden zu können.

Sei nun $q\in(1,2)$; dann ist

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta}\cdot q=1-\eta \qquad \text{mit } 0<\eta<1,$$

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{u}\|_\alpha^q &\leqq (2c)^q\{(1-\eta)\|\mathbf{u}\|_{1+\beta}(\tfrac{1}{2})^{1/1-\eta} \\ &\quad +\eta\|\mathbf{u}\|_0^{(p-1+\eta)/\eta}(\tfrac{1}{2})^{1/\eta}\}+d^q\|\mathbf{u}\|_0^q \\ &\leqq c(q,\mathscr{E},\eta)\{\|A^\delta\mathbf{u}\|_\alpha+\|\mathbf{u}\|_0^{(p-1+\eta)/\eta}\}\end{aligned}$$

nach Lemma 11. Die dort angegebenen Einschränkungen für α, β und δ sind hier in jedem Fall erfüllt, da α nahe bei Null ist. Analog wird $\|\mathbf{u}\|_\alpha^p$ abgeschätzt:

$$\|\mathbf{u}\|_\alpha^p=\|\mathbf{u}\|_\alpha^{q/q-1}\leqq C\|\mathbf{u}\|_{1+\beta}^{\frac{\alpha}{1+\beta}\cdot\frac{q}{q-1}}\|\mathbf{u}\|_0^{\left(1-\frac{\alpha}{1+\beta}\right)\frac{q}{q-1}}+C\|\mathbf{u}\|_0^{q/q-1}.$$

Nun ist aber $\dfrac{\alpha}{1+\beta}\,\dfrac{q}{q-1}<1$ falls nur $\beta>2\alpha+\eta$; diese Bedingung steht aber der Anwendung von Lemma 11 nicht im Wege.

Die Abschätzung für die C^0-Norm von $\mathbf{u}$ und die Tatsache, daß für große Werte von ν die hier auftretenden Konstanten klein werden, liefert schließlich

$$\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_\alpha<1+\|A^\delta\mathbf{u}\|_\alpha,$$

womit die globale Existenz der Lösung gezeigt ist.

Literatur

1. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates bear the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. Comm. Pure Appl. Math. **12**, 623-727 (1959)
2. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. Comm. Pure Appl. Math. **17**, 35–92 (1964)
3. Berker, R.: Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. In: Handbuch der Physik, Band III/2, pp. 1–384. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963
4. Chang, I.-D., Finn, R.: On the solutions of a class of equations occuring in continuum mechanics, with application to Stokes paradox. Arch. Rational Mech. Anal. **7**, 388–401 (1961)
5. Faxén, H.: Fredholmsche Integralgleichungen zu der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten I. Ark. Mat. Astr. Fys. **21 A**, No. 14 (1928/29)
6. Finn, R.: Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.S. Roumanie (3), **53**, 387–418 (1959)
7. Finn, R.: An energy theorem for viscous fluid motions. Arch. Rational Mech. Anal. **6**, 371–381 (1960)
8. Finn, R.: On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, III. Acta Math. **105**, 197–244 (1961)
9. Finn, R.: On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. Arch. Rational Mech. Anal. **19**, 363–406 (1965)
10. Finn, R.: Stationary solutions of the Navier-Stokes equations. In: Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Proceedings of a Symposium (New York City 1964), pp. 121–153. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **17**. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1965

11. Finn, R.: Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain. Rocky Mountain J. Math. **3**, 107–140 (1973)
12. Fujita, H., Kato, T.: On the nonstationary Navier-Stokes system. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **32**, 243–260 (1962)
13. Fujita, H., Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem, I. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269–315 (1964)
14. Heywood, J.G.: The exterior nonstationary problem for the Navier-Stokes equations. Acta Math. **129**, 11–34 (1972)
15. Hildebrandt, S.: Potentialtheorie. Vorlesungsausarbeitung, Mainz 1966
16. Kielhöfer, H.: Halbgruppen und semilineare Anfangs-Randwertprobleme. Manuscripta Math. **12**, 121–154 (1974)
17. Kielhöfer, H.: Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme. Math. Z. **142**, 131–160 (1975)
18. Leray, J.: Étude de diverses équations intégrables non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. **12**, 1–82 (1933)
19. Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R.P.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 52. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
20. Odqvist, F.K.G.: Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Math. Z. **32**, 329–375 (1930)
21. Oseen, C.W.: Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1927
22. Prodi, G.: Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stationarie. Rend Sem. Mat. Univ. Padova **32**, 374–397 (1962)
23. Sobolevski, P.E.: Equations of parabolic type in a Banach space. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **49**, 1–62 (1966)
24. Solonnikov, V.A.: On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form. Proc. Steklov Inst. Math. **83** (1965)
25. Wahl, W. von: Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **11**, 231–258 (1972)
26. Wahl, W. von: Einige Bemerkungen zu meiner Arbeit „Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen". Manuscripta Math. **11**, 199–201 (1973/74)
27. Wahl, W. von: Über das größtmögliche Wachstum der Nichtlinearität bei semilinearen parabolischen Gleichungen beliebiger Ordnung. J. Functional Analysis (erscheint demnächst)

Eingegangen am 10. März 1978