Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Helsinki, 1978

Approximation des eindimensionalen Stefan-Problems durch finite Elemente

Joachim A. Nitsche

0. Einführung. Die mathematische Formulierung zahlreicher in der Praxis auftretender Probleme führt auf Randwertprobleme — speziell für parabolische Differentialgleichungen — mit dem Charakteristikum, daß der Rand zum Teil nicht von vornherein gegeben ist, sondern von Eigenschaften der Lösung selbst abhängt. Das älteste solche „freie" Randwertproblem geht auf Stefan [1889] zurück. Bei einer Raumdimension lässt es sich so beschreiben: In dem Gebiet — o.B.d.A. sei $s(0)=1$ angenommen —

(1) $$\Omega = \{(y,\tau) | \tau > 0 \wedge 0 < y < s(\tau)\}$$

ist nach einer Funktion U gefragt, welche die Gleichung

(2) $$U_\tau - U_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

erfüllt. Neben der Anfangsbedingung

(3) $$U(y,0) = f(y) \quad \text{für} \quad y \in I = (0,1)$$

ist im einfachsten Fall am linken Rand

(4) $$U_y(0,\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau > 0$$

vorgeschrieben. Längs des freien Randes $y = s(\tau)$ muss einerseits U verschwinden

(5) $$U\big(s(\tau),\tau\big) = 0 \quad \text{für} \quad \tau > 0,$$

andererseits ist die Funktion $s(\tau)$ durch die zusätzliche Bedingung

(6) $$s_\tau + U_y\big(s(\tau),\tau\big) = 0 \quad \text{für} \quad \tau > 0$$

an die Lösung U gekoppelt. Das Schmelzen bzw. Gefrieren eines Eisblocks ist eine der physikalischen Interpretationen.

Freie Randwertprobleme haben in den vergangenen Jahren zunehmendes Interesse gefunden. Der Zusammenhang mit Variationsungleichungen wirkte als zusätzlicher Stimulus. Wir verweisen auf den Übersichsartikel von Magenes [1976], in dem auch der Zusammenhang mit weiteren freien Randwertproblemen dargestellt ist. Hinsichtlich numerischer Methoden zur Approximation der Lösung des Stefan-Problems sei auf die Literatur-Hinweise in Nitsche [1978] verwiesen.

In der letztgenannten Arbeit wurde eine Finite-Element-Methode vorgeschlagen, welche für „reguläre" Lösungen optimale Konvergenz sicherstellt, d.h. ist die Lösung hinreichend regulär, so ist die sich ergebende Konvergenz-Ordnung optimal. Bei dem hier betrachteten Problem ist die Regularität der Lösung nur abhängig von der Regularität der Anfangswerte einerseits und dem Erfülltsein von Kompatibilitätsbedingungen bei $y=0$ und $y=1$ andererseits. In aufsteigender Folge handelt es sich um die Bedingungen (i) $f(1)=0$, (ii) $f'(0)=0$, (iii) $f''(1)=f'^2(1)$ usw.

Selbst bei linearen parabolischen Problemen mit festen Rändern erfordert die Analyse der Konvergenz von Galerkin–Verfahren bei reduzierter Regularität der Anfangswerte und/oder nichterfüllten Kompatibilitätsbedingungen besondere Methoden. Wir verweisen auf die Arbeiten Babuska—Fix [1972], Bramble et al. [1977], Helfrich [1974], Thomee [1974]. Es ergibt sich, daß für positive τ-Werte auch dann optimale Konvergenz vorliegt; die auftretenden Koeffizienten divergieren jedoch gegen unendlich bei $\tau\to 0$.

Gegenstand dieser Note ist ein erster Schritt in der Herleitung derartiger Aussagen für das Stefan-Problem. Da sich dieses auch als nicht-lineares Problem mit festem Rand auffassen lässt — siehe $\#1$ — ist damit auch eine Möglichkeit zur „lokalen" Konvergenz — Analyse von Galerkin-Verfahren nicht-linearer parabolischer Aufgaben aufgezeigt.

1. Schwache Formulierung des Stefan-Problems, Finite-Element-Methode. Durch die Transformation

$$x = s^{-1}(\tau)y \tag{7}$$

wird das Stefan-Problem in ein solches für das Gebiet

$$Q = \{(x, \tau)|0 < x < 1 \wedge \tau > 0\}, \tag{8}$$

d.h. mit festem Rand, übergeführt. Wird zusätzlich anstelle von τ die neue Variable t gemäss

$$d\tau/dt = s^2(\tau),\ \tau(0) = 0 \tag{9}$$

eingeführt — vgl. Friedman [1976] — so genügt die Funktion $u(x, t)=U(y, \tau)$ der Differentialgleichung

$$u_{xx}-u_t = xu_x(1, t)u_x \quad \text{in } Q \tag{10}$$

und den weiteren Bedingungen

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} u_x(0, t) &= 0 \\ u(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad \text{für} \quad t > 0, \qquad u(x, 0) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in I.$$

Der freie Rand ergibt sich aus

$$\text{(12)} \qquad ds/dt = -u_x(1, t)s \quad \text{mit} \quad s(0) = 1.$$

Die Funktion $v = u_x$ liegt im Raum

$$\text{(13)} \qquad \dot{H}_1 = \{w | w \in H_1(I) \wedge w(0) = 0\}.$$

Eine „schwache" Charakterisierung von v ist gegeben durch das

Problem P_v. Gesucht ist v mit $v(\cdot, t) \in \dot{H}_1$ derart, dass

$$\text{(14)} \qquad (\dot{v}, w) + (v', w') = v(1)(xv, w') \quad \text{für} \quad w \in \dot{H}_1 \quad \text{und} \quad t > 0$$

erfüllt ist zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\text{15)} \qquad v(\cdot, 0) = g := f'.$$

Durch einen Punkt bzw. Strich ist dabei die Differentiation nach t bzw. x angezeigt; $(\cdot, \cdot)$ ist das $L_2(I)$-Skalarprodukt mit der Norm $\|\cdot\|$. Weiterhin ist zur Abkürzung $v(1) = v(1, t)$ benützt.

Die Finite-Element-Methode zu P_v bietet sich an: Es sei S_h ein Teilraum von $\dot{H}_1$, wir denken etwa an Splines mit verschwindenden Werten bei $x = 0$. Die Näherung $v_h = v_h(\cdot, t) \in S_h$ wird durch (14) festgelegt, wobei jetzt w nur den Teilraum S_h durchläuft. Hinzu kommt die Anfangsbedingung

$$\text{(16)} \qquad v_h(\cdot, 0) = g_h$$

mit einer geeigneten Approximation $g_h \in S_h$ an g.

2. A priori Abschätzungen. Gemäss unserer Zielsetzung wollen wir den Fall einer reduzierten Regularität diskutieren. Demgemäss machen wir über $g = f'$ (15) nur die Voraussetzung

$$\text{(17)} \qquad g \in L_2(I).$$

Als Approximation g_h (16) wählen wir die L_2-Projektion $g_h = P_h g \in S_h$ definiert durch

$$\text{(18)} \qquad (g_h, \chi) = (g, \chi) \quad \text{für} \quad \chi \in S_h.$$

Es lässt sich zeigen

SATZ 1. *Es existiert ein nur von $\|g\|$ abhängiges $T>0$, so dass v und v_h samt allen Ableitungen nach t für $t\in(0, T]$ in $L_2(I)$ liegen. Dabei gilt:*

$$t^{2k}\{\|\partial_t^k v\|^2+\|\partial_t^k v_h\|^2\} \leqq c, \tag{19}$$

$$\int_0^T t^{2k-1}\{\|\partial_t^k v\|^2+\|\partial_t^k v_h\|^2\}\,dt \leqq c. \tag{20}$$

Hier wie später gibt c Konstanten an, die nur von $\|g\|$ abhängen.

Wir benötigen später Konvergenzeigenschaften der L_2-Projektion. Aus (19), (20) und der Tatsache, daß bis auf Terme niederer Ordnung die Ableitungen $\partial_t^k v$ und $\partial_t^{2k} v$ einander entsprechen, ergibt sich unmittelbar für den Fehler $\varepsilon=\varepsilon_h=v-P_h v$

$$\|\varepsilon\|^2 \leqq c\,\mathrm{Min}\,\{h^{2k}t^{-k} | 0 \leqq k \leqq r\}, \tag{21}$$

$$\int_0^T t^k \|\varepsilon\|^2\,dt \leqq ch^{2k+2} \quad \text{für} \quad 0 \leqq k \leqq r-1. \tag{22}$$

Hierbei ist unterstellt, daß S_h ein Spline-Raum der Ordnung r ist (stückweise Polynome vom Grade $<r$).

In der Supremums-Norm $|\cdot|$ ergibt sich wegen der a priori Abschätzung $|w|^2 \leqq 2\|w\|\,\|w'\|$ für $w\in \mathring{H}_1$ speziell

$$|v|^2+|v_h|^2 \leqq ct^{-1/2}. \tag{23}$$

3. Fehleranalyse. Der Fehler $e=e_h=v-v_h$ genügt der Beziehung

$$(\dot{e}, \chi)+(e', \chi') = v(1)(xe, \chi')+e(1)(xv_h, \chi) \quad \text{für} \quad \chi\in S_h. \tag{24}$$

Die Aufspaltung

$$e = (v-P_h v)-(v_h-P_h v) = \varepsilon-\Phi \tag{25}$$

liefert für den Korrektur-Term $\Phi\in S_h$ die definierende Relation

$$(\dot{\Phi}, \chi)+a(\Phi, \chi) = a(\varepsilon, \chi) \quad \text{für} \quad \chi\in S_h, \tag{26}$$

wobei die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ durch

$$a(w, z) := (w', z')-v(1)(xw, z')-w(1)(xv_h, z') \tag{27}$$

erklärt ist. Die Wahl $\chi=\Phi$ führt auf die Abschätzung

$$\frac{d}{dt}(t\|\Phi\|^2)+t\|\Phi'\|^2 \leqq c\|\Phi\|^2+ct\{\|\varepsilon'\|^2+t^{-1/2}\|\varepsilon\|^2\}. \tag{28}$$

Der Term $\|\Phi\|^2$ rechts läßt sich eliminieren. Dazu führen wir die durch

$$\begin{aligned} -w'' &= \Phi \quad \text{in } I, \\ w(0) &= w'(1) = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

festgelegte Funktion $w=w(\cdot, t)\in \mathring{H}_1$ und die Ritz-Approximation $\varphi=R_h w\in S_h$

ein. Es ergibt sich

$$\|\Phi\|^2 = (\Phi, -w'') = (\Phi', w') = (\Phi', \varphi') \tag{30}$$

$$= a(\Phi, \varphi) + v(1)(x\Phi, \varphi') + \Phi(1)(xv_h, \varphi')$$

und damit weiter

$$\|\Phi\|^2 = -(\dot{\Phi}, \varphi) + a(\varepsilon, \varphi) + v(1)(x\Phi, \varphi') + \Phi(1)(xv_h, \varphi'). \tag{31}$$

Wesentlich ist die Umformung des ersten Gliedes rechts:

$$-(\dot{\Phi}, \varphi) = (\dot{w}'', \varphi') = -(\dot{w}', \varphi') \tag{32}$$

$$= -(\dot{\varphi}', \varphi') = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi'\|^2.$$

Unter Heranziehung des Gronwallschen Lemma folgt aus (28) in Verbindung mit (30) nach einigen Umformungen der

SATZ 2. *Zu* α *mit* $\alpha < 1$ *existieren Konstante* $\varkappa, \gamma$ *und* c *nur abhängig von* α *und* $\|g\|$ *derart, dass gilt*

$$\frac{d}{dt}\{t\|\Phi\|^2 + \varkappa e^{-\gamma t^{1-\alpha}}\|\varphi'\|^2\} + \{t\|\Phi'\|^2 + \|\Phi\|^2\} \tag{33}$$

$$\leq ct^{\alpha}\{\|\varepsilon'\|^2 + t^{-1/2}\|\varepsilon\|^2\}.$$

Unter Ausnützen der Abschätzungen für ε aus #2 lässt sich folgern.

SATZ 3. *Der Fehler* $e = v - v_h$ *der Finite-Element-Methode für das Problem* P_v *genügt für* $\alpha < 1$ *der Abschätzung*

$$\|e\| \leq c_\alpha h^\alpha t^{-1/2} \quad \text{für} \quad t \in (0, T]. \tag{34}$$

Von natürlichem Interesse ist die Approximation an den freien Rand. Indem — vgl. (12) — die Näherung s_h durch

$$\dot{s}_h = -v_h(1, \cdot)s_h, \quad s_h(0) = 1 \tag{35}$$

definiert wird, ergibt sich der

SATZ 4. *Der Fehler* $s - s_h$ *für den freien Rand ist bei* $\alpha < 1$ *durch*

$$|s - s_h| \leq c_\alpha h^\alpha \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \tag{36}$$

beschränkt.

Die Approximation $U_h(y, \tau)$ an die Lösung U des Stefan-Problems ergibt sich durch Integration von v_h bezüglich x und Rücktransformation $(x, t) \to (y, \tau)$ vermöge $y = xs_h(t_h(\tau))$, wobei $t_h(\tau)$ die Umkehrfunktion von $\tau_h(t)$ definiert durch — siehe (9) —

$$\dot{\tau}_h = s_h^2, \quad \tau_h(0) = 0 \tag{37}$$

ist. Die Abweichung $U - U_h$ in der L_2-Norm ist wieder von der Ordnung $h^\alpha t^{-1/2}$, wobei in einer h^α-Umgebung des freien Randes U bzw. U_h geeignet zu extrapolieren ist.

Literatur

1. I. Babuska and G. Fix, *The finite element method for time dependent problems,* Chapter 11 of the survey lectures in The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, A. K. Aziz, ed., Academic Press, New York, 1972, pp. 345—359.

2. J. H. Bramble, A. Schatz, V. Thomee and L. B. Wahlbin, *Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations,* SIAM J. Numer. Anal. **14** (1977), 218—241.

3. A. Friedman, *Analyticity of the free boundary for the Stefan problem,* Arch. Rational Mech. Anal. **61** (1976), 97—125.

4. H.-P. Helfrich, *Fehlerabschätzungen für das Galerkinverfahren zur Lösung von Evolutionsgleichungen,* Manuscripta Math. **13** (1974), 219—235.

5. E. Magenes, *Topics in parabolic equations: some typical free boundary problems. Boundary value problems for linear partial differential equations,* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at Liège, Belgium, Sept. 6—17, 1976 ; H. G. Garnier, ed., Reidel, Dortrecht, 1976, pp. 239—312.

6. J. A. Nitsche, *Finite element approximation to the one-dimensional Stefan problem* Proceedings on Recent Advances in Numerical Analysis (C. de Boor and G. Golub, eds.), Academic Press, New York, 1978, pp. 119—142.

7. J. Stefan, *Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung,* Sitz.-Ber. Wien Akad. Math. Naturw. **98** (1889), 473—484.

8. V. Thomee, *Some convergence results for Galerkin methods for parabolic boundary value problems* Math. Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, C. de Boor, ed., Academic Press, New York, 1974, pp. 55—88.

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
7800 FREIBURG I. BR., FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY