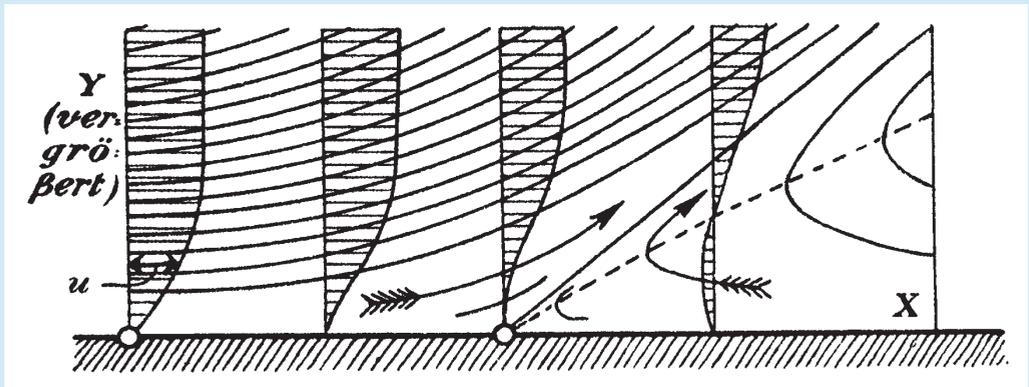


Ludwig Prandtl, Albert Betz

## Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik





Ludwig Prandtl, Albert Betz  
Vier Abhandlungen zur Hydromechanik und Aerodynamik

This work is licensed under the [Creative Commons](#) License 3.0 “by-nd”, allowing you to download, distribute and print the document in a few copies for private or educational use, given that the document stays unchanged and the creator is mentioned. You are not allowed to sell copies of the free version.



Erschienen als Band 3 in der Reihe „Göttinger Klassiker der  
Strömungsmechanik“ im Universitätsverlag Göttingen 2010

---

Ludwig Prandtl, Albert Betz  
Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik

Erschienen als Band 3 in der Reihe „Göttinger Klassiker der  
Strömungsmechanik“ im Universitätsverlag Göttingen 2010

---

Ludwig Prandtl, Albert Betz

Vier Abhandlungen  
zur Hydrodynamik  
und Aerodynamik

Flüssigkeit mit kleiner Reibung;  
Tragflügeltheorie,  
I. und II. Mitteilung;  
Schraubenpropeller mit geringstem  
Energieverlust



Universitätsverlag Göttingen  
2010

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

*Herausgeber der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:*

Prof. Dr. rer.nat. Dr.-Ing.habil. Andreas Dillmann

(Georg-August-Universität Göttingen und  
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

*Schriftleitung der Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“:*

Prof. Dr. rer. nat. Martin Rein

(Georg-August-Universität Göttingen und  
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)

Der vorliegende Band enthält den Nachdruck der „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“, erstmals erschienen 1927 im Selbstverlag des Kaiser Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung.

Dieses Buch ist auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den OPAC der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek (<http://www.sub.uni-goettingen.de>) erreichbar und darf gelesen, heruntergeladen sowie als Privatkopie ausgedruckt werden. Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

Digitalisiert durch das Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ)

Titelabbildung: Ablösung des Flüssigkeitsstroms von der Wand (vgl. Fig. 2, S. 4)

© 2010 Universitätsverlag Göttingen

<http://univerlag.uni-goettingen.de>

ISBN: 978-3-941875-75-3

ISSN: 1863-1088

## Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik

Die Grenzschichttheorie gilt als eine der größten wissenschaftlichen Leistungen Ludwig Prandtls. Seine 1904 auf dem III. Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vorgetragene Arbeit „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung“ kam damals einem wissenschaftlichen Paukenschlag gleich. Das damals revolutionäre Konzept der Aufteilung derartiger Strömungen in eine dünne, wandnahe Reibungsschicht und eine potentialtheoretisch erfassbare reibungsfreie Außenströmung führte die bis dahin eher theoretisch ausgerichtete Hydrodynamik der idealen Flüssigkeit und die empirisch-praktisch ausgerichtete Ingenieurhydraulik auf zwanglose Weise zusammen und ermöglichte dadurch ein fundamentales Verständnis der Strömungsphysik bei großen Reynoldszahlen.

Erst dieses grundlegende Verständnis reibungsbehafteter Strömungen erlaubte in der Folge die Entwicklung theoretischer Modelle für die Auftriebsentstehung, auch wenn die Reibung selbst hierin gar nicht explizit auftritt. Die ab 1909 entstandene, ebenfalls als bahnbrechend zu bewertende Prandtlsche Tragflügeltheorie (Theorie der tragenden Linie) reduziert in geradezu genialer Einfachheit den (geraden) auftriebserzeugenden Flügel auf einen tragenden Wirbelfaden und liefert

dadurch nicht nur die Auftriebsverteilung und den induzierten Widerstand des Flügels, sondern beantwortet auch Optimierungsfragen, beispielsweise nach der widerstandsgünstigsten Flügelgeometrie. Mit seinen beiden 1918 und 1919 in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erschienenen „Mitteilungen“ zur Tragflügeltheorie fasst Prandtl die Elemente dieser Theorie erstmals vollständig zusammen und legt damit den Grundstein für alle weiteren Arbeiten auf diesem Gebiet.

Die an gleicher Stelle erschienene Arbeit „Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust“ von Albert Betz stellt schließlich eine Übertragung der Prandtl'schen Tragflügeltheorie auf den Propeller als System von umlaufenden Tragflügeln dar. In ähnlicher Weise wie Prandtl gelingt ihm dadurch die Beantwortung der Frage nach der optimalen Schubverteilung über die Propellerfläche und die Ableitung von Integralgleichungen, die für einen beliebig geformten Propeller die Berechnung von Schub und Drehmoment erlauben. Ludwig Prandtl gibt schließlich in einem Zusatz zu dieser Arbeit Näherungsformeln hierfür an und zeigt Erweiterungsmöglichkeiten für die Betzsche Theorie auf.

Mit diesen vier Arbeiten wiesen Ludwig Prandtl und Albert Betz den Weg für die erfolgreiche theoretische Behandlung von Tragflügel und Flugzeug und schufen damit die Grundlagen der modernen Aerodynamik. Die in den Folgejahren einsetzende stürmische Entwicklung der Flugtechnik und ihre starke Ausstrahlung auf verwandte Gebiete wie z.B. den Strömungsmaschinenbau wäre ohne diese grundlegenden Arbeiten schlicht undenkbar gewesen.

Göttingen, im Dezember 2010

Andreas Dillmann

Vier Abhandlungen  
zur  
Hydrodynamik und Aerodynamik

(Flüssigkeit mit kleiner Reibung; Tragflügeltheorie,  
I. und II. Mitteilung; Schraubenpropeller  
mit geringstem Energieverlust)

Von

**L. Prandtl und A. Betz**

Neudruck aus den  
Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-  
Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten  
der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Mit einer Literaturübersicht als Anhang.

---

Göttingen 1927

Im Selbstverlag des Kaiser Wilhelm - Instituts für Strömungsforschung.



## Vorwort.

Die hier neu abgedruckten vier Abhandlungen, auf die in der neueren Fachliteratur vielfach Bezug genommen wird, waren bisher für alle Benutzer, die nicht große wissenschaftliche Bibliotheken in ihrer Nähe haben, schwer zugänglich. Von den Sammelbänden, in denen sie sich befinden, ist auch ein Teil schon vergriffen. Wir glauben deshalb den Wünschen der Fachgenossen entgegenzukommen, wenn wir diese Abhandlungen in einem mechanischen Neudruck bequemer zugänglich machen. Dabei konnten verschiedene Druckfehler berichtigt werden; auch ein in der II. Mitteilung der „Tragflügeltheorie“ vorgekommener Denkfehler konnte in einer besonderen Zufügung richtig gestellt werden. In einem Anhang ist eine Übersicht über die neuere Literatur auf dem Gebiete der vier Abhandlungen wiedergegeben.

Göttingen, im Februar 1927.

L. Prandtl.    A. Betz.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung . . . . .	1
L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. Mitteilung . . . . .	9
L. Prandtl, Tragflügeltheorie, II. Mitteilung . . . . .	36
A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust . . . . .	68
Anhang . . . . .	93

## Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.

Von

L. PRANDTL aus Hannover.

(Hierzu eine Figurentafel.)

In der klassischen Hydrodynamik wird vorwiegend die Bewegung der *reibunglosen* Flüssigkeit behandelt. Von der *reibenden Flüssigkeit* besitzt man die Differentialgleichung der Bewegung, deren Ansatz durch physikalische Beobachtungen wohl bestätigt ist. An Lösungen dieser Differentialgleichung hat man außer eindimensionalen Problemen, wie sie u. a. von Lord Rayleigh\*) gegeben wurden, nur solche, bei denen die Trägheit der Flüssigkeit vernachlässigt ist, oder wenigstens keine Rolle spielt. Das zwei- und dreidimensionale Problem mit Berücksichtigung von Reibung *und* Trägheit harret noch der Lösung. Der Grund hierfür liegt wohl in den unangenehmen Eigenschaften der Differentialgleichung. Diese lautet in Gibbsscher Vektorsymbolik\*\*)

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \circ \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla (V + p) = k \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

( $\mathbf{v}$  Geschwindigkeit,  $\rho$  Dichte,  $V$  Kräftefunktion,  $p$  Druck,  $k$  Reibungskonstante); dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung: für inkompressible Flüssigkeiten, die hier allein behandelt werden sollen, wird einfach

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Der Differentialgleichung ist leicht zu entnehmen, daß bei genügend langsamen und auch langsam veränderten Bewegungen der Faktor von  $\rho$  gegenüber den andern Gliedern beliebig klein wird, so daß hier mit genügender Annäherung der Einfluß der Trägheit vernachlässigt werden darf. Umgekehrt wird bei genügend rascher Be-

\*) Proceedings Lond. Math. Soc. 11 S. 57 = Papers I S. 474 f.

\*\*\*)  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$  skalares Produkt,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  Vektorprodukt,  $\nabla$  Hamiltonscher Differentiator  $\left( \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

wegung das in  $v$  quadratische Glied  $v \circ \nabla v$  (Änderung der Geschwindigkeit infolge Ortswechsels) groß genug, um die Reibungswirkung  $k\nabla^2 v$  als ganz nebensächlich erscheinen zu lassen. In den in der Technik in Frage kommenden Fällen von Flüssigkeitsbewegungen trifft letzteres fast immer zu. Es liegt also hier nahe, einfach die Gleichung der reibungslosen Flüssigkeit zu benutzen. Man weiß indessen, daß die bekannten Lösungen dieser Gleichung meist sehr schlecht mit der Erfahrung übereinstimmen; ich erinnere nur an die Dirichletsche Kugel, die sich nach der Theorie widerstandslos bewegen soll.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, systematisch die Bewegungsgesetze einer Flüssigkeit zu durchforschen, deren Reibung als sehr klein angenommen wird. Die Reibung soll so klein sein, daß sie überall vernachlässigt werden darf, wo nicht etwa große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten, oder eine akkumulierende Wirkung der Reibung stattfindet. Dieser Plan hat sich als sehr fruchtbar erwiesen, indem man einerseits auf mathematische Formulierungen kommt, die eine Bewältigung der Probleme ermöglichen, andererseits die Übereinstimmung mit der Beobachtung sehr befriedigend zu werden verspricht. Um eines gleich hier zu erwähnen: wenn man, z. B. bei der stationären Bewegung um eine Kugel herum, von der Bewegung mit Reibung zur Grenze der Reibungslosigkeit übergeht, so erhält man etwas ganz anderes als die Dirichlet-Bewegung. Die Dirichlet-Bewegung ist nur mehr ein Anfangszustand, der alsbald durch die Wirkung einer auch noch so kleinen Reibung gestört wird.

Ich gehe nun zu den Einzelfragen über. Die Kraft auf den Einheitswürfel, welche von der Reibung herrührt, ist

$$\mathbf{K} = k\nabla^2 v; \quad (2)$$

bezeichnet man mit  $w = \frac{1}{2} \text{rot } v$  den Wirbel, so ist nach einer bekannten vektor-analytischen Umformung unter Berücksichtigung, daß  $\text{div } v = 0$  ist:  $\mathbf{K} = -2k \text{rot } w$ . Hieraus ergibt sich ohne weiteres, daß für  $w = 0$  auch  $\mathbf{K} = 0$  wird, d. h. daß auch bei beliebig starker Reibung die wirbelfreie Bewegung eine mögliche Bewegung darstellt; wenn sie trotzdem sich in gewissen Fällen nicht erhält, so liegt das daran, daß sich vom Rande her wirbelnde Flüssigkeit in die wirbelfreie hineinschiebt.

Bei einer beliebigen periodischen oder zyklischen Bewegung kann sich bei längerer Dauer die Wirkung der Reibung, auch wenn sie sehr klein ist, anhäufen.

Man muß daher für den Beharrungszustand verlangen, daß die Arbeit von  $\mathbf{K}$ , also das Linienintegral  $\int \mathbf{K} \circ ds$  längs jeder Stromlinie

bei zyklischen Bewegungen für einen vollen Zyklus gleich Null wird; bei nach dem Orte periodischen Strömungen hat man für die Periode:

$$\int^P \mathbf{K} \circ d\mathbf{s} = (V_2 + p_2) - (V_1 + p_1).$$

Bei zweidimensionalen Bewegungen, bei denen eine Stromfunktion  $\psi^*$ ) existiert, läßt sich hieraus mit Hilfe der Helmholtzschen Wirbelgesetze eine allgemeine Aussage über die Verteilung des Wirbels herleiten. Bei der ebenen Bewegung erhält man\*\*)

$$-\frac{dw}{d\psi} = \frac{(V_2 + p_2) - (V_1 + p_1)}{2k \int^P \mathbf{v} \circ d\mathbf{s}};$$

bei geschlossenen Stromlinien wird dies gleich Null; also ergibt sich hier das einfache Resultat, daß innerhalb eines Gebietes von geschlossenen Stromlinien der Wirbel einen konstanten Wert annimmt.

Bei axialsymmetrischen Bewegungen mit Strömung in Meridianebenen wird für geschlossene Stromlinien der Wirbel proportional dem Radius:  $w = cr$ ; dies ergibt eine Kraft  $K = 4kc$  in Richtung der Achse.

Die bei weitem wichtigste Frage des Problems ist das Verhalten der Flüssigkeit an den Wänden der festen Körper. Den physikalischen Vorgängen in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und festem Körper wird man in genügender Weise gerecht, wenn man annimmt, daß die Flüssigkeit an den Wänden haften, daß also dort die Geschwindigkeit überall gleich Null bzw. gleich der Körpergeschwindigkeit sei. Ist nun die Reibung sehr klein und der Weg der Flüssigkeit längs der Wand nicht allzu lang, so wird schon in nächster Nähe der Wand die Geschwindigkeit ihren normalen Wert haben. In der schmalen Übergangsschicht ergeben dann die schroffen Geschwindigkeitsunterschiede trotz der kleinen Reibungskonstanten merkwürdige Wirkungen.

Man behandelt dieses Problem am besten, indem man in der allgemeinen Differentialgleichung planmäßige Vernachlässigungen vornimmt. Nimmt man  $k$  als klein von der zweiten Ordnung, so wird die Dicke der Übergangsschicht klein von der ersten Ordnung, ebenso die Normalkomponente der Geschwindigkeit. Die Querunterschiede des Druckes

\*) Vgl. Encyklopädie der mathem. Wissensch. IV 14, 7.

\*\*\*) Nach Helmholtz ist der Wirbel eines Teilchens dauernd dessen Länge in der Richtung der Wirbelachse proportional; also ist bei der stationären ebenen Bewegung auf jeder Stromlinie ( $\psi = \text{const.}$ )  $w$  konstant, also  $w = f(\psi)$ ; hiermit wird

$$\int \mathbf{K} \circ d\mathbf{s} = 2k \int \text{rot } w \circ d\mathbf{s} = 2kf'(\psi) \int \text{rot } \psi \circ d\mathbf{s} = 2kf'(\psi) \int \mathbf{v} \circ d\mathbf{s}.$$

können vernachlässigt werden, ebenso eine etwaige Krümmung der Stromlinien. Die Druckverteilung wird unserer Übergangsschicht von der freien Flüssigkeit aufgeprägt.

Für das ebene Problem, das ich bisher allein behandelt habe, erhält man beim stationären Zustand ( $X$ -Richtung tangential,  $Y$ -Richtung normal,  $u$  und  $v$  die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten) die Differentialgleichung

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{dp}{dx} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

dazu kommt noch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ist, wie gewöhnlich,  $\frac{dp}{dx}$  durchaus gegeben, ferner für den Anfangsquerschnitt der Verlauf von  $u$ , so läßt sich jede derartige Aufgabe numerisch bewältigen, indem man durch Quadraturen aus jedem  $u$  das zugehörige  $\frac{\partial u}{\partial x}$  gewinnen kann; damit kann man mit Hilfe eines der bekannten Näherungsverfahren\*) immer wieder um einen Schritt in der  $X$ -Richtung weiterkommen. Eine Schwierigkeit besteht dabei allerdings in verschiedenen am festen Rande auftretenden Singularitäten. Der einfachste Fall der hier behandelten Bewegungszustände ist der, daß das Wasser an einer ebenen dünnen Platte entlang strömt. Hier ist eine Reduktion der Variablen möglich; man kann  $u = f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$  setzen. Durch numerische Auflösung der entstehenden Differentialgleichung kommt man auf eine Formel für den Widerstand

$$R = 1,1 \dots b \sqrt{k \rho l u_0^3}$$

( $b$  Breite,  $l$  Länge der Platte,  $u_0$  Geschwindigkeit des ungestörten Wassers gegenüber der Platte). Den Verlauf von  $u$  gibt Fig. 1.

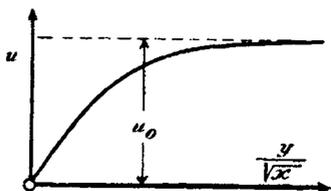


Fig. 1.

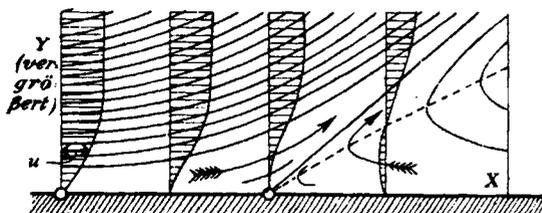


Fig. 2.

Das für die Anwendung wichtigste Ergebnis dieser Untersuchungen ist aber das, daß sich in bestimmten Fällen an einer durch die äußeren Bedingungen vollständig gegebenen Stelle der Flüssigkeitsstrom von der Wand ablöst (vgl. Fig. 2). Es schiebt sich also eine Flüssigkeits-

\*) Vgl. z. B. Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 46 S. 435 (Kutta).

schicht, die durch die Reibung an der Wand in Rotation versetzt ist, in die freie Flüssigkeit hinaus und spielt dort, eine völlige Umgestaltung der Bewegung bewirkend, dieselbe Rolle wie die Helmholtzschen Trennungsschichten. Bei einer Veränderung der Reibungskonstanten  $k$  ändert sich lediglich die Dicke der Wirbelschicht (sie ist der Größe  $\sqrt{\frac{k l}{\rho u}}$  proportional), alles übrige bleibt unverändert; man kann also, wenn man will, zur Grenze  $k = 0$  übergehen und behält immer noch dieselbe Strömungsfigur.

Wie eine nähere Diskussion ergibt, ist die notwendige Bedingung

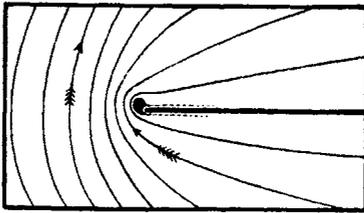


Fig. 3.

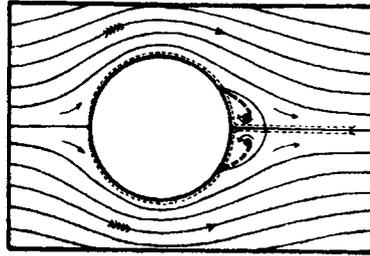


Fig. 5

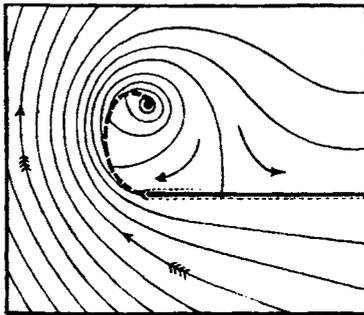


Fig. 4.

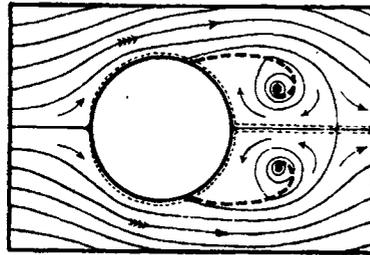


Fig. 6.

für das Ablösen des Strahles die, daß längs der Wand in der Richtung der Strömung eine Drucksteigerung vorhanden ist. Welche Größe diese Drucksteigerung in bestimmten Fällen haben muß, kann erst aus der noch vorzunehmenden numerischen Auswertung des Problems entnommen werden. Als einen plausiblen Grund für das Ablösen der Strömung kann man angeben, daß bei einer Drucksteigerung die freie Flüssigkeit ihre kinetische Energie zum Teil in potentielle umsetzt. Die Übergangsschichten haben aber einen großen Teil ihrer kinetischen Energie eingebüßt; sie besitzen nicht mehr genug, um in das Gebiet

höheren Druckes einzudringen, und werden daher diesem seitlich ausweichen.

Nach dem Vorhergehenden zerfällt also die Behandlung eines bestimmten Strömungsvorganges in zwei miteinander in Wechselwirkung stehende Teile: einerseits hat man die *freie Flüssigkeit*, die als reibungslos nach den Helmholtzschen Wirbelgesetzen behandelt werden kann, andererseits die Übergangsschichten an den festen Grenzen, deren Bewegung durch die freie Flüssigkeit geregelt wird, die aber ihrerseits durch die Aussendung von Wirbelschichten der freien Bewegung das charakteristische Gepräge geben.

Ich habe versucht, in ein paar Fällen den Vorgang durch Zeichnen der Stromlinien näher zu verfolgen; die Ergebnisse machen indes auf quantitative Richtigkeit keinen Anspruch. Soweit die Bewegung wirbelfrei ist, benutzt man mit Vorteil beim Zeichnen den Umstand, daß die

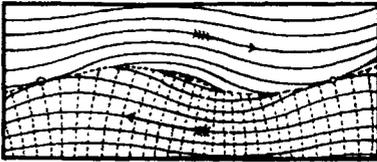


Fig. 7.

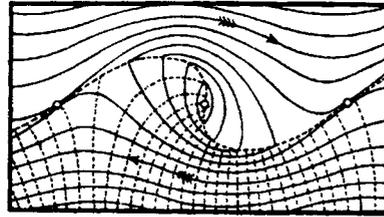


Fig. 8.

Stromlinien mit den Linien konstanten Geschwindigkeitspotentials ein quadratisches Kurvennetz bilden.

Fig. 3 und 4 zeigen den Beginn der Bewegung um eine in die Strömung hineinragende Wand in zwei Stadien. Die wirbelfreie Anfangsbewegung wird durch eine von der Kante des Hindernisses ausgehende und sich spiralig aufwickelnde Trennungsschicht (gestrichelt) rasch umgestaltet; der Wirbel rückt immer weiter ab und läßt hinter der zum Schluß stationären Trennungsschicht ruhendes Wasser zurück.

Wie sich der analoge Vorgang bei einem Kreiszyylinder abspielt, ist aus Fig. 5 und 6 zu ersehen; die von der Reibung in Rotation versetzten Flüssigkeitsschichten sind wieder durch Strichelung kenntlich gemacht. Die Trennungsflächen erstrecken sich auch hier im Beharrungszustande ins Unendliche. All diese Trennungsflächen sind bekanntlich labil; ist eine kleine sinusförmige Störung vorhanden, so entstehen Bewegungen, wie sie in Fig. 7 und 8 dargestellt sind. Man sieht, wie sich durch das Ineinandergreifen der Flüssigkeitsströme deutlich gesonderte Wirbel ausbilden. Die Wirbelschicht wird im Innern

dieser Wirbel aufgerollt, wie in Fig. 9 angedeutet ist. Die Linien dieser Figur sind keine Stromlinien, sondern solche, wie sie etwa durch Beigabe von gefärbter Flüssigkeit erhalten würden.

Ich will nun noch kurz von Versuchen berichten, die ich zum Vergleich mit der Theorie unternommen habe. Der Versuchsapparat (in Fig. 10 in Aufriß und Grundriß dargestellt) besteht aus einer  $1\frac{1}{2}$  m langen Wanne mit einem Zwischenboden. Das Wasser wird durch ein Schaufelrad in Umlauf versetzt und tritt, durch einen Leit-



Fig. 9.

apparat *a* und vier Siebe *b* geordnet und beruhigt, ziemlich wirbelfrei in den Oberlauf ein; bei *c* wird das zu untersuchende Objekt eingesetzt. Im Wasser ist ein aus feinen glänzenden Blättchen bestehendes Mineral (Eisenglimmer) suspendiert; dadurch treten

alle einigermaßen deformierten Stellen des Wassers, also besonders alle Wirbel durch einen eigentümlichen Glanz hervor, der durch die Orientierung der dort befindlichen Blättchen hervorgerufen wird.

Die auf der Tafel zusammengestellten Photogramme sind auf diese Weise erhalten. Bei allen geht die Strömung von links nach rechts. Nr. 1—4 behandelt die Bewegung an einer in die Strömung hineinragenden Wand. Man erkennt die

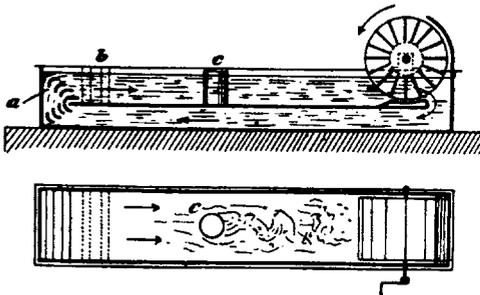


Fig. 10.

Trennungsfläche, die von der Kante ausgeht; sie ist in 1. noch sehr klein, in 2. bereits mit starken Störungen überdeckt, in 3. reicht der Wirbel über das ganze Bild, 4. zeigt den „Beharrungszustand“; man bemerkt auch oberhalb der Wand eine Störung; da in der Ecke infolge der Stauung des

Wasserstroms ein höherer Druck herrscht, löst sich (vergl. S. 5) mit der Zeit auch hier der Flüssigkeitsstrom von der Wand ab. Die verschiedenen im „wirbelfreien“ Teil der Strömung sichtbaren Streifen (besonders in Nr. 1 und 2) rühren davon her, daß beim Beginn der Bewegung die Flüssigkeit nicht völlig ruhig war. Nr. 5 und 6 gibt die Strömung um ein kreisförmig gebogenes Hindernis, oder, wenn man will, durch einen stetig verengten und wieder erweiterten Kanal. Nr. 5 zeigt ein Stadium kurz nach Beginn der Bewegung. Die eine Trennungsfläche ist zu einer Spirale aufgewunden, die andere langgestreckt und in sehr regel-

mäßige Wirbel zerfallen. Auf der konvexen Seite nahe am rechten Ende bemerkt man den Beginn einer sich ablösenden Strömung; Nr. 6 zeigt den Beharrungszustand, bei dem sich die Strömung ungefähr in engstem Querschnitt ablöst.

Nr. 7—10 zeigt die Strömung um ein kreiszylindrisches Hindernis (einen Pfahl). Nr. 7 zeigt den Beginn der Ablösung, 8 und 9 weitere Stadien; zwischen den beiden Wirbeln ist ein Strich sichtbar, dieser besteht aus Wasser, das vor Beginn der Ablösung der Übergangsschicht angehört hatte. Nr. 10 zeigt den Beharrungszustand. Der Schweif von wirbelndem Wasser hinter dem Zylinder pendelt hin und her, daher die unsymmetrische Augenblicksgestalt. Der Zylinder enthält einen längs einer Erzeugenden verlaufenden Spalt; stellt man diesen so, wie in Nr. 11 und 12 und saugt mit einem Schlauch Wasser aus dem Zylinderinnern ab, so kann man die Übergangsschicht einer Seite abfangen. Wenn sie fehlt, muß auch ihre Wirkung, die Ablösung, ausbleiben. In Nr. 11, das zeitlich Nr. 9 entspricht, sieht man nur einen Wirbel und den Strich. In Nr. 12 (Beharrungszustand) schließt sich, obwohl, wie man sieht, nur ein verschwindender Teil des Wassers ins Innere des Zylinders tritt, die Strömung bis zum Schlitz eng an die Wand des Zylinders an; dafür hat sich aber jetzt an der ebenen Außenwand der Wanne eine Trennungsfläche gebildet (eine erste Andeutung dieser Erscheinung ist bereits in 11 zu sehen). Da in der sich erweiternden Durchflußöffnung die Geschwindigkeit abnehmen muß und daher der Druck steigt\*), sind die Bedingungen für ein Ablösen der Strömung von der Wand gegeben, so daß auch diese auffallende Erscheinung in der vorgetragenen Theorie ihre Begründung erhält.

---

\*) Es ist  $\frac{1}{2} \rho v^2 + V + p = \text{const.}$  auf jeder Stromlinie.

## Tragflügeltheorie.

### I. Mitteilung.

Von

**L. Prandtl.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Juli 1918.

Abgeschlossen am 13. Dezember 1918.

Vorbemerkung. Die Anfänge der im Nachstehenden dargelegten Theorie gehen auf das Jahr 1910 zurück. Die erste Mitteilung darüber erfolgte in einer Vorlesung „Aeromechanik und Luftschiffahrt“ im W.-S. 1910/11. Weitere Mitteilungen sind enthalten in einem Vortrag auf der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaft zu Göttingen am 3. bis 5. November 1911<sup>1)</sup>, und in dem Artikel „Flüssigkeitsbewegung“ im „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“<sup>2)</sup>. Anwendungen und selbständige Erweiterungen meiner theoretischen Ansätze sind in Arbeiten von O. Föppl<sup>3)</sup>, A. Betz<sup>4)</sup> und C. Wieselsberger<sup>5)</sup> enthalten. Auf die demnächst erscheinende Dissertation von M. Munk<sup>6)</sup>, die eine

---

1) „Ergebnisse und Ziele der Göttinger Modellversuchsanstalt“, Verhandlungen dieser Versammlung (Oldenbourg, München u. Berlin 1912) S. 19, abgedruckt in der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Jahrg. 3 (1912) S. 33.

2) Auch als Sonderdruck unter dem Titel „Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung“ erschienen (Gustav Fischer, Jena 1913). Vergl. dort S. 112 und 133, hier S. 12 u. 33.

3) „Auftrieb und Widerstand eines Höhensteuers, das hinter der Tragfläche angeordnet ist“. Zeitschr. f. Flugt. u. M. 2 (1911) S. 182.

4) „Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen“, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 5 (1914) S. 253. Vergl. hierzu auch: „Auftrieb und Widerstand einer Tragfläche in der Nähe einer horizontalen Ebene“ und „Auftrieb und Widerstand eines Doppeldeckers“, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 3 (1912) S. 217 und 4 (1913) S. 1.

5) Beitrag zur Erklärung des Winkelfluges einiger Zugvögel, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 5 (1914) S. 225.

6) „Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges“, Göttingen 1918. [Erscheint 1919].

wichtige Erweiterung des Anwendungsbereiches der Theorie bedeutet, sei hier besonders hingewiesen.

Die folgende Darstellung entspricht nicht dem geschichtlichen Werdegang der Ideen, vielmehr ist gerade die hier gewählte Art der Begründung der Theorie in Abschnitt 4 bis 8 der zuletzt entstandene Teil. Der älteste Stand der Theorie ist in einer Anmerkung zu Nr. 13 angedeutet.

Die neuere Entwicklung ist in verschiedenen Beiträgen meiner Mitarbeiter in einer bisher geheimen Zeitschrift der Flugzeugmeisterei und in einem — ebenfalls aus Zensurgründen noch ungedruckten — Vortrag von mir auf der Hamburger Tagung der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (April 1918) enthalten. Eine Darstellung der wichtigsten bis dahin vorhandenen Lehren findet sich auch in dem Buch von Dr. R. Grammel, „Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges“<sup>1)</sup>, eine gemeinverständliche Darlegung in einem Aufsatz von A. Betz in den „Naturwissenschaften“<sup>2)</sup>.

### A. Allgemeine Grundlegung.

1. Das ebene Problem des Tragflügels in einer reibungslosen Flüssigkeit ist bereits seit längerer Zeit für einige Klassen von einfachen Querschnittsformen gelöst<sup>3)</sup>. Die Ergebnisse stimmen innerhalb des Bereiches der kleinen Anstellwinkel qualitativ mit der Erfahrung überein. Wenn man durch künstliche Mittel (z. B. seitliche Wände) das ebene Problem wirklich nachzuahmen sucht, so ist die Uebereinstimmung auch quantitativ so gut, als man es in Hinsicht auf die vernachlässigte Reibung nur verlangen kann<sup>4)</sup>.

1) Vieweg, Braunschweig 1917. Vergl. dort S. 114 u. f.

2) „Einführung in die Theorie der Flugzeugtragflügel“, Naturwissenschaften 1918, Heft 38 u. 39.

3) Die ersten Lösungen stammen von W. M. Kutta, vergl. „Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten“. Illustr. aeronaut. Mitteilungen 1902 S. 133; ausführlicher dargelegt in den Sitzungsber. der Bayr. Akad. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, 1910, 2. Abh. und 1911 S. 65. — Die Literatur über diesen Gegenstand ist bearbeitet in dem oben erwähnten Buch von R. Grammel und in dem von Drzewiecki ins Französische übersetzten Buch von N. Joukowski, „Aérodynamique“, Gauthier Villars, Paris 1916 (vergl. etwa auch: Joukowski, „Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger“, Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1 (1910) S. 281). — Auf die seither erschienenen Aufsätze von v. Mises, „Zur Theorie des Tragflächenauftriebes“ und von Th. v. Kármán und E. Trefftz, „Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte“, Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 8 (1917) S. 157 und 9 (1918) S. 111 sei ebenfalls hingewiesen.

4) Vergl. A. Betz, „Untersuchung einer Joukowski'schen Tragfläche“, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 6 (1915) S. 173.

Die Erzeugung des Auftriebes ist dabei an das Vorhandensein einer Zirkulation der Strömung um die Tragfläche herum geknüpft<sup>1)</sup>. Es ist für einen Abschnitt von der Länge  $l$  des unendlich lang zu denkenden Flügels, wenn die Geschwindigkeit des Flügels relativ zu den unendlich entfernten Teilen der Flüssigkeit  $= V$ , die Zirkulation (Linienintegral der Geschwindigkeit) um den Flügel herum  $= \Gamma$  und die Dichte des Mediums  $= \rho$  ist, der Auftrieb

$$A = \rho V l \Gamma$$

(„Kutta-Joukowski'sche Formel“). Joukowski hat einen sehr anschaulichen Beweis dafür gegeben, in dem er den Impulssatz für stationäre Flüssigkeitsbewegungen auf eine den Flügel in größerem Abstände umschließende Kreiszyylinderfläche anwandte. Es zeigt sich dabei, daß die Hälfte des Auftriebes durch den Unterschied der ein- und ausströmenden Bewegungsgröße, die andere Hälfte durch Druckunterschiede an der „Kontrollfläche“ hervorgebracht wird. Daß mit der Erzeugung von Auftrieb eine Zirkulation notwendig verknüpft sein muß, davon kann man sich auch durch Betrachtung der Verhältnisse am Flügel selbst überzeugen. Der Auftrieb entsteht in der Weise, daß unter dem Flügel Ueberdruck und über ihm Unterdruck geschaffen wird. Nach dem Bernoullischen Satz muß also unten die Geschwindigkeit relativ zum Flügel vermindert, oben vermehrt werden, d. h., zu der Translationsgeschwindigkeit  $V$  muß oben eine Zusatzgeschwindigkeit nach hinten, unten eine Zusatzgeschwindigkeit nach vorne hinzukommen. Dies bedeutet aber ein Zirkulieren der Zusatzströmung um den Flügel.

2. Diese ganze Betrachtungsweise ist eng mit dem Umstande verknüpft, daß es sich hier um eine Potentialbewegung handelt. Sie ist, da das mehrdeutige Potential einen zweifach zusammenhängenden Raum erfordert, und die Zirkulation einer mehrdeutigen Potentialbewegung sich ohne zirkulatorische Kräfte zeitlich nicht ändern kann, auf den unendlich langen Flügel und auf die stationäre Bewegung beschränkt. Will man jedoch eine nichtstationäre Bewegung oder aber das räumliche Problem des „endlich langen

---

1) Dies ist anscheinend zuerst von Lanchester „Aerial flight“ Bd. I (Aerodynamics, Constable, London 1907, deutsch von C. u. A. Runge, Teubner, Leipzig 1909, § 90 und §§ 121 u. f.; nach Angabe des Verfassers 1894 vorgetragen), unabhängig von ihm von Kutta (1902) und Joukowski (1905) gefunden worden, vgl. die oben angeführte Kutta'sche Abhandlung und das Joukowski'sche Buch, S. XII. Die quantitative Beziehung stammt von Kutta und von Joukowski und ist von diesen offenbar unabhängig gefunden worden.

Tragflügels behandeln“, so kommt man ohne Wirbel in der Flüssigkeit nicht mehr aus. Betrachtet man z. B. den Beginn der Bewegung eines unendlich langen Flügels aus der Ruhe heraus, so ist sicher die Zirkulation zu Anfang gleich Null; da aber nach einem bekannten Satz in einer reibungslosen Flüssigkeit bei Abwesenheit zirkulatorischer Kräfte die Zirkulation auf jeder geschlossenen „flüssigen Linie“ zeitlich unveränderlich ist, muß beim Entstehen der Zirkulation um den Flügel ein Wirbel von gleicher, aber entgegengesetzter Zirkulation in der Flüssigkeit auftreten, damit der Satz für eine flüssige Linie gelten kann, die so gelegt ist, daß sie das bis dahin vom Flügel bestrichene Flüssigkeitsgebiet umschlingt, ohne es zu durchsetzen. Beim endlichen Flügel müssen auch schon bei der stationären Bewegung Wirbel in der Flüssigkeit vorhanden sein, denn nach dem Stokes'schen Satze kann sich die Zirkulation auf einer geschlossenen Linie bei deren Verschiebung nur dadurch ändern, daß Wirbellinien geschnitten werden. Bedenkt man aber, daß überall, wo Auftrieb ist, auch Zirkulation sein muß, so findet man, daß eine den Flügel umschlingende Linie, wenn sie über ein Flügelende herübergestreift wird, notwendig Wirbel schneiden muß, denn wenn sie den Flügel verlassen hat, so muß auch ihre Zirkulation verschwunden sein<sup>1)</sup>.

3. Daß in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel gebildet werden, scheint zunächst im Widerspruch mit den Sätzen von Lagrange und Helmholtz zu stehen. Man muß jedoch bei allen Anwendungen der Hydrodynamik, die sich auf Wechselwirkungen zwischen der Flüssigkeit und festen Körpern beziehen, die Reibungslosigkeit durch einen Grenzübergang von einer sehr kleinen inneren Reibung aus entstanden denken<sup>2)</sup>. In der Flüssigkeit mit kleiner Reibung ergibt sich eine „Grenzschicht“, in der der Uebergang von der Körpergeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der freien Strömung stattfindet. Diese Schicht, in der die Rotation von Null verschieden ist, verläßt den Körper, wenn die Bewegung hinreichend lang andauert<sup>3)</sup>, und tritt damit als freie Wirbelschicht in

---

1) Dies ist bei Lanchester ausführlich auseinandergesetzt: Aerial flight Bd. I § 125—127. Bei Lanchester finden sich, wie ich nachträglich feststellte, mancherlei Anschauungen, die den im Folgenden vorgetragenen sehr verwandt sind. Jedoch fehlt bei ihm die quantitative Durcharbeitung, die für den Erfolg entscheidend war.

2) Vergl. meinen Vortrag auf dem III. Intern. Math. Kongreß zu Heidelberg: „Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung“. Verhandl. d. Kongr. Leipzig 1905 (Teubner) S. 484.

3) Der zurückgelegte Weg muß hierzu mindestens von der Größenordnung des Krümmungsradius sein. An scharfen Kanten beginnt sonach der Vorgang sofort.

das Innere der Flüssigkeit ein. Löst sich die Grenzschicht bereits vor dem Hinterende des Körpers ab, was bei stumpfen Körperformen die Regel ist, dann bleibt hinter ihr ein Wirbelraum oder ein „Totwasser“ zurück, und es entsteht ein beträchtlicher Widerstand. In besonderen Fällen, nämlich bei schlanken, nach hinten zu mehr oder minder scharf zulaufenden Formen, kann jedoch erfahrungsgemäß die Grenzschicht bis zum hinteren Ende des Körpers haften bleiben<sup>1)</sup> und verläßt ihn erst an dem geometrischen Ort, an dem sich die Strömung wieder zusammenschließt. Dieser geometrische Ort ist manchmal ein Punkt (z. B. bei achsensymmetrisch angeströmten Umdrehungskörpern), häufiger jedoch eine Linie („Zusammenflußlinie“). Im letzteren Fall treten die Grenzschichten der beiden Seiten zu einer Wirbelschicht vereint in die freie Flüssigkeit hinaus. Die Geschwindigkeiten beiderseits der Wirbelschicht können übereinstimmen. In diesem Fall, der z. B. bei der stationären ebenen Flügelströmung zutrifft, verschwindet, da die Grenzschichten beim Uebergang zu unendlich kleiner Reibung unendlich dünn werden, in der Grenze jede Spur der Wirbelschichten, und es bleibt eine Potentialbewegung übrig. Im allgemeinen jedoch sind die Geschwindigkeiten zu beiden Seiten der Wirbelschicht verschieden und bleiben es auch beim Grenzübergang zur Reibungslosigkeit. Es ist also das Bestehen einer flächenhaften Wirbelschicht (eine „Trennungsschicht“ im Sinne von Helmholtz) hinter dem Körper in einer reibungslosen Flüssigkeit sehr wohl möglich; sie entspringt dann immer an einer Zusammenflußlinie.

Die Körperformen, bei denen die Strömung sich hinter dem Körper ohne Totwasserbildung wieder zusammenschließt, ergeben einen sehr kleinen Widerstand in der Bewegungsrichtung und sind deshalb von großer praktischer Bedeutung für alle Fälle, bei denen es sich um Erreichung großer Geschwindigkeiten in einem widerstehenden Medium handelt. Sie haben unser besonderes Interesse auch deshalb, weil die Abwesenheit eines Totwassers oder eines räumlich ausgedehnten Wirbelgebietes eine mathematische Analyse der Strömungsvorgänge zuläßt. Die Uebereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit denen der Versuche ist in solchen Fällen häufig überraschend gut<sup>2)</sup>.

1) Nach den bisherigen Erfahrungen kommt dies nur bei turbulenten Grenzschichten, also über der „kritischen Geschwindigkeit“ vor, vergl. meine Abhandlung „Ueber den Widerstand von Kugeln“, Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1914, S. 177.

2) Vergl. hierzu etwa die Göttinger Dissertation von G. Fuhrmann († 1914):

4. Die praktisch verwendeten — d. h. durch die Erfahrung als gut erkannten — Flügelformen weisen sämtlich eine mehr oder minder scharfe Hinterkante auf, was nach den Bemerkungen der vorigen Nummer dahin zu verstehen ist, daß es bei der Formgebung der Flügel darauf ankommt, ein Totwasser möglichst zu ver-

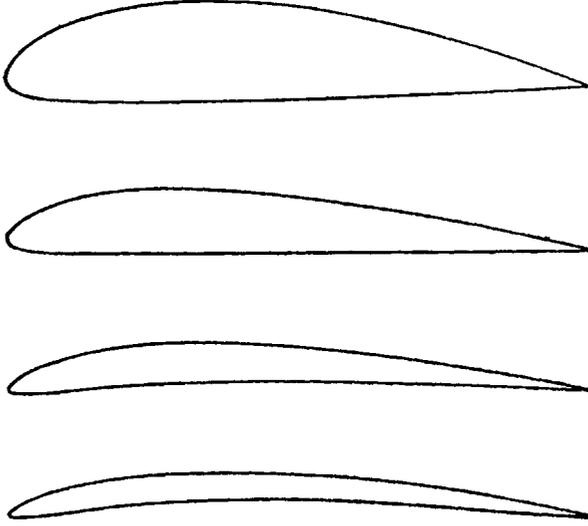


Fig. 1. Zur Zeit gebräuchliche Flügelprofile.

meiden. Für die theoretischen Betrachtungen wollen wir deshalb immer annehmen, daß die Hinterkante des Flügels scharf ist.

Von der wirbelfreien Umströmung einer scharfen, in die Flüssigkeit einspringenden Kante weiß man, daß die Geschwindigkeit an der Kante unendlich groß wird. In Wirklichkeit treten nun — wenn von unstetigen Geschwindigkeitsänderungen abgesehen wird — solche unendlich große Geschwindigkeiten niemals auf. Das Endlichbleiben der Geschwindigkeit hängt mit der Ausbildung einer Wirbelschicht ursächlich zusammen. Damit die Geschwindigkeit endlich bleibt, darf nämlich keine Grenzstromlinie einen in die Flüssigkeit einspringenden Winkel mehr bilden; wie man leicht sieht (vergl. Fig. 2 und 3), ist dies nur in der Weise möglich, daß ein Zusammenfluß der Strömungen von beiden Seiten der Kante, oder — im Grenzfall — ein Totwasser entsteht. Wenn man diesen Grenzfall auch als „Zusammenfluß“ gelten lassen will, so kann man sagen, daß scharfe Kanten immer Zusammen-

flußlinien sind, es sei denn, daß die Geschwindigkeit an der Kante auch ohne Zusammenfluß endlich bleibt (dieser Spezialfall tritt z. B. dann ein, wenn die Strömung der Kante parallel verläuft; für die Flügelhinterkante trifft dies nie zu, diese ist also immer eine Zusammenflußlinie).

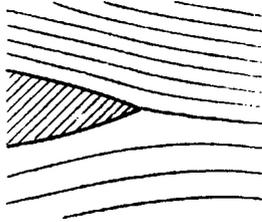


Fig. 2.

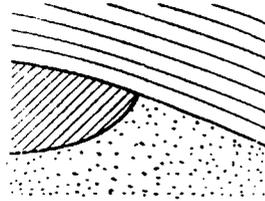


Fig. 3.

Nach den Helmholtz'schen Sätzen ist die einmal vorhandene Wirbelstärke eines wirbelnden Flüssigkeitselementes zeitlich unveränderlich; die Bedingung, daß an der Kante die Geschwindigkeit jederzeit endlich bleiben muß, kann deshalb nur in der Weise erfüllt werden, daß die Wirbelstärken in dem jeweils neu zu bildenden Streifen der Wirbelschicht den hierfür notwendigen Wert annehmen. Diese Endlichkeitsbedingung ist auch, soweit es sich um die Bewegung eines Flügels von glatten Formen mit einer endlichen und höchstens stetig veränderlichen Geschwindigkeit handelt, erfüllbar und reicht ersichtlich zur Bestimmung der Wirbelstärken in der Wirbelschicht aus. Bei unstetigen Formen oder Bewegungen sind jedoch in der reibungslosen Flüssigkeit unendliche Geschwindigkeiten an der scharfen Kante trotz Wirbelschicht nicht ganz vermeidbar. Hier wird man die Bedingung, durch die die Wirbelstärken definiert werden, so festsetzen können, daß durch ihre Erfüllung das Unendlichwerden von Geschwindigkeiten so weit als möglich eingeschränkt wird.

Gemäß den vorstehenden Darlegungen wollen wir feststellen, daß die klassische Hydrodynamik der reibungslosen Flüssigkeit durch die folgenden Axiome und Sätze ergänzt werden muß, damit sie als Grenzfall der unendlich kleinen Reibung gelten kann:

**Axiom I.** An Zusammenflußlinien (Linien, längs deren zwei vorher durch den Körper getrennte Strömungen zusammentreffen) können Wirbelschichten entspringen.

**Axiom II.** An ausspringenden scharfen Kanten der Körper treten unendliche Geschwindigkeiten nicht, oder doch in möglichst beschränktem Umfange auf.

Satz 1: Auspringende Kanten der Körper sind bei quer zu ihnen verlaufender Strömung stets Zusammenflußlinien (und daher in der Regel Ursprung von Wirbelflächen).

Satz 2: Die Wirbelstärken in dem jeweils neu gebildeten Streifen der Wirbelschicht nehmen denjenigen Wert an, durch den die Geschwindigkeit an der Kante endlich wird, bzw. durch den das Unendlichwerden von Geschwindigkeiten möglichst eingeschränkt wird.

5. Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten, die ein vorliegendes Wirbelsystem hervorbringt, entstehen durch die Anwesenheit von festen Körpern in der Flüssigkeit große Schwierigkeiten, wenn man sich nicht auf besonders einfache Fälle<sup>1)</sup> beschränken will. Man kann diese Schwierigkeiten umgehen, wenn man die festen Körper durch gedachte Wirbelverteilungen ersetzt, durch deren Wirkung die Strömung außerhalb der Körper dieselbe bleibt, wie bei Anwesenheit der Körper. Dadurch, daß man den von den Körpern eingenommenen Raum zu einem Teile der Flüssigkeit selbst macht, wird diese schlicht zusammenhängend, und es können jetzt die bekannten für die unendlich ausgedehnte Flüssigkeit gültigen Beziehungen zwischen Wirbelfeld und Geschwindigkeitsfeld angewandt werden. Mathematisch wäre damit allerdings nichts gewonnen, wenn es sich um Körper von genau vorgeschriebener Form handelte, da man die zugehörige Wirbelverteilung erst zu finden hätte, und dieses auf genau dasselbe mathematische Problem führen würde, wie die ursprüngliche Aufgabe. In sehr vielen Fällen genügt es jedoch, eine Wirbelverteilung „passend anzunehmen“ und die zugehörige Körperform hinterher zu berechnen. Praktisch reicht man dabei vielfach mit Annäherungen aus. Durch planmäßige Vereinfachung des Ansatzes, die je nach der Art der Aufgabe verschieden weit gehen kann, wird eine Beweglichkeit der Methoden erreicht, die sich gegenüber der zwar strengen, aber auch starren Methode der exakten Theorie als großer Vorzug erweist.

Die an Stelle der festen Körper eingeführten Wirbel gehorchen nicht dem Helmholtz'schen Satz über die Bewegung der Wirbel, sondern ihr Platz ist ihnen angewiesen durch die Bedingung, die sich aus ihrer Aufgabe, den Körper zu ersetzen, ergeben. In allen übrigen Beziehungen sind sie wie wirkliche Flüssigkeitswirbel zu

1) Vergl. hierzu L. Föppl, „Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder“, Sitzungsber. der Bayr. Akad. d. Wiss. Math.-phys. Klasse 1913. S. 1, ferner Max Lagally „Ueber die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit, ebenda 1914, S. 377.

behandeln. Zum Unterschied von solchen „freien Wirbeln“ mögen sie im folgenden „gebundene Wirbel“ heißen.

Damit zu dem Wirbelsystem ein Geschwindigkeitsfeld existiert, muß natürlich die Integrabilitätsbedingung — Divergenz des gesamten Wirbelsystems gleich Null — erfüllt sein.

Die Frage, wie das System der gebundenen Wirbel für einen ruhenden festen Körper in einer gegebenen stationären Flüssigkeitsbewegung aussieht, wird in einer Anmerkung zum nächsten Abschnitt beantwortet werden.

Die Euler'schen Gleichungen können formal beibehalten werden, wenn man diejenigen Kräfte, die eigentlich der feste Körper aufnimmt, durch ein in der Flüssigkeit bestehendes besonderes Kräftesystem aufgenommen denkt. Die Kontinuität wird durch die Hinzunahme der Wirbel nicht gestört, die Kontinuitätsbedingung braucht daher nicht geändert zu werden. Die Grenzbedingung, daß am festen Körper die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeit und des festen Körpers übereinstimmen müssen, liefert im Zusammenhang mit den Angaben über die Bewegungsverhältnisse des festen Körpers den Weg zur Berechnung der Form des Körpers; hierbei ist die Bedingung wohl zu beachten, daß die gebundenen Wirbel in den Grenzen des festen Körpers eingeschlossen bleiben müssen.

## B. Allgemeine Theorie der stationären Bewegung.

6. Im folgenden seien zunächst für den einfachsten und wichtigsten Fall, die stationäre Bewegung einer unendlich ausgedehnten, homogenen und volumbeständigen<sup>1)</sup> Flüssigkeit gegen irgend ein ruhendes Flügelsystem, die grundlegenden Gleichungen abgeleitet. Die ankommende Flüssigkeit habe im Unendlichen die Geschwindigkeit  $V$ , ihr Druck sei dort  $p_0$  (die Schwerkraft möge außer Acht bleiben). Dann besteht auf jeder Stromlinie, die aus dem Unendlichen kommt (Geschwindigkeit  $v$ , Druck  $p$ ), die Bernoulli'sche Gleichung

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho V^2}{2} = p_0 + q \quad (1)$$

1) Die Kompressibilität der Luft darf, solange die Geschwindigkeit klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit ist, in erster Annäherung vernachlässigt werden. Die hierdurch entstehenden Fehler sind von der Größenordnung  $V^2/c^2$  ( $c$  = Schallgeschwindigkeit).

2) Die Druckgröße  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  wird „Staudruck“ genannt; der Druck  $p_0 + q$  herrscht an den Punkten, wo  $v = 0$  ist. Solche Punkte heißen „Staupunkte“,

Da nun nach unserer Voraussetzung jeder Flügel ohne Bildung eines Totwassers umströmt wird, hinter ihm also nur eine Wirbelfläche zurückbleibt, füllen die aus dem Unendlichen kommenden Stromlinien den ganzen Raum außerhalb der Flügel lückenlos aus, es gilt also Gleichung (1) an jedem Raumpunkt außerhalb der festen Körper.

Für die Entwicklung der allgemeinen Sätze ist es nun angenehm, die Wirbel, sowohl die gebundenen wie auch die freien, räumlich verteilt anzunehmen. Der Uebergang zur flächenhaften Verteilung läßt sich dann immer hinterher leicht vornehmen. Die räumliche Verteilung kann man dadurch entstanden denken, daß statt einzelner weniger Flügel ein räumlich verteiltes System von unendlich vielen infinitesimalen Flügeln vorhanden sei. Gleichung (1) bleibt auch für ein solches Flügelsystem noch richtig, wenn wir voraussetzen, daß die aus dem Unendlichen kommenden Stromlinien den durchströmten Raum lückenlos erfüllen. Dies trifft zu, wenn die infinitesimalen Flügel so dünn angenommen werden, daß der Anteil des Flügellinern am Gesamtvolumen in der Grenze verschwindet.

Die an Stelle der Flügel auftretenden Ersatzkräfte werden jetzt Volumenkräfte und mögen für die Volumeneinheit die Größe  $\mathbf{k}$  besitzen. Dann lautet die Euler'sche Gleichung:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^1 + \nabla p = \mathbf{k}. \quad (2)$$

Nun ist nach einer bekannten Regel

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v};$$

beachtet man ferner, daß wegen Gl. (1)  $\text{grad} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p \right) = 0$  ist, so ergibt sich die Beziehung:

$$\mathbf{k} = \rho \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}. \quad (3)$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes setzt sich aus den gebundenen und den freien Wirbeln zusammen:

$$\text{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4)$$

Die Kräfte  $\mathbf{k}$  stehen in ursächlichem Zusammenhang mit den gebundenen Wirbeln  $\boldsymbol{\gamma}$ , während es gerade das Kennzeichen der freien Wirbel  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ist, daß ihre Bewegung ohne Einwirkung von äußeren

---

1) Gibbs'sche Symbolik: Vektoren werden durch Fettdruck gekennzeichnet;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  skalares Produkt,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  Vektorprodukt;  $\mathbf{a} \mathbf{b}$  Dyade (Affinor). — Für die Vektoren  $\boldsymbol{\gamma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  standen nur halbfette Zeichen zur Verfügung.

Kräften auf die Flüssigkeit verläuft. Die Gleichung (3) zerfällt somit in die folgenden zwei:

$$\rho(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v}) = \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v} = 0. \quad (5a)$$

Die erstere ist das Analogon des Kutta-Joukowski'schen Satzes für das Volumenelement; aus ihr folgt, daß die Kräfte  $\mathbf{k}$  überall senkrecht zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  stehen. Die zweite sagt aus, daß im freien Wirbelgebiet überall  $\boldsymbol{\varepsilon} \parallel \mathbf{v}$  ist, was sich auch so aussprechen läßt, daß die freien Wirbellinien unter den hier vorausgesetzten Bedingungen identisch sind mit Stromlinien. Diese Beziehung ist für die späteren Entwicklungen von größter Wichtigkeit.

Von  $\boldsymbol{\gamma}$  ist nur die zu  $\mathbf{v}$  senkrechte Komponente durch Gl. (5) definiert; bei der zu  $\mathbf{v}$  parallelen Komponente ist es innerhalb der Körper praktisch gleichgültig, ob man sie zu den gebundenen oder zu den freien Wirbeln rechnet.

Anmerkung: Auf Grund der vorstehenden Beziehungen läßt sich die oben gestellte Frage nach dem Wirbelsystem, das einen festen Körper in einer stationären Strömung ohne Totwasser zu ersetzen geeignet ist, beantworten. Es ergibt sich folgende Lösung: „Man denke sich das Innere des Körpers durch ruhende Flüssigkeit von dem Druck  $p_0 + q$ , wie er im Staupunkt herrscht, ersetzt; dadurch tritt an die Stelle der Körperoberfläche eine Wirbelschicht mit einem Geschwindigkeitssprung von dem Betrage  $v^1$ ) Diese Wirbelschicht ist das gesuchte gebundene Wirbelsystem“. Diese Behauptung ist dadurch zu beweisen, daß gezeigt wird, daß das angegebene System die Gleichungen (1) und (2) befriedigt. Für diesen Beweis sei angenommen, daß die Wirbelschicht eine endliche aber kleine Ausdehnung in der Richtung der Flächennormalen habe. Es ist dann, wenn kleine Größen von der Ordnung des Verhältnisses Schichtdicke : Krümmungsradius vernachlässigt werden:

$$\boldsymbol{\gamma} = |\text{rot } \mathbf{v}| = \frac{\partial v}{\partial n},$$

also wegen Gl. (5)

$$\mathbf{k} = \rho \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v} = -n \rho v \frac{\partial v}{\partial n}$$

1) Zu der Möglichkeit, feste Grenzen durch freie Wirbelschichten in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit zu ersetzen, vergleiche man auch die Abhandlung von M. Lagally „Zur Theorie der Wirbelschichten“, Sitzungsber. der Bayr. Ak. d. Wiss. Math.-phys. Klasse, Jahrg. 1915. S. 79.

( $\mathbf{n}$  = Einheitsvektor in der Richtung der äußeren Normale). Da  $|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|$  hier gegen  $v \frac{\partial v}{\partial n}$  vernachlässigt werden darf, ergibt die Euler'sche Gleichung (2)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho v \frac{\partial v}{\partial n}$$

oder integriert:

$$p - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v^2).$$

Setzt man unserer Behauptung entsprechend  $v_1 = 0$  und  $p_1 = p_0 + q$ , so ergibt sich

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + q$$

entsprechend Gleichung (1)!

7. Wegen der bekannten vektoranalytischen Identität  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  ist mit (4)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\gamma} + \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (6)$$

Faßt man eine Stromröhre ins Auge, die das von den gebundenen Wirbeln erfüllte Gebiet, den „tragenden Raum“ durchsetzt, so läßt sich, da die Stromröhre mit der Wirbelröhre identisch ist, der „Fluß“ der freien Wirbel in ihr,  $E = \iint \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{F}$ , berechnen, wenn das Feld der gebundenen Wirbel gegeben ist. Da vor dem Eintritt der Stromröhre in den tragenden Raum der Wirbelfuß gleich Null ist, ist in dem Querschnitt  $F$  an der Stelle  $s$  der Stromröhre der Fluß gleich der Gesamtergiebigkeit aller von der Stelle  $s$  stromaufwärts gelegenen „Quellen“  $\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}$ ; wegen (6) hat man also

$$E = - \int_{-\infty}^s \int \int^F \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma} d\tau. \quad (7)$$

Der Wirbelfuß kann also nur in solchen Stromröhren von Null verschieden sein, die den tragenden Raum durchsetzt haben.

Für ein tragendes System, daß sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig in ruhender Luft bewegt, läßt sich dieses Ergebnis auch so aussprechen: „Das System der freien Wirbel besteht aus denjenigen Luftteilchen, über die der tragende Raum hinweggegangen ist, und zwar gehören zu einer Wirbellinie jeweils diejenigen Luftteilchen, die durch ein und denselben Punkt des tragenden Raumes hindurchgegangen sind.“

Da im allgemeinen die vom tragenden System erzeugten Ge-

schwindigkeiten klein sind gegenüber der Bewegungsgeschwindigkeit des Systems, gibt diese Aussage bereits ein recht anschauliches Bild von dem Wirbelsystem. Die Quellen und Senken der Verteilung  $\gamma$  befinden sich zumeist in der Gegend der Flügelenden, es sind also die hauptsächlichsten Wirbel hinter den Flügelenden zu erwarten.

8. Die gesamte Luftkraft<sup>1)</sup> in einem tragenden Raum  $R$  ergibt sich nach (5) zu

$$\mathbf{K} = \iiint^R \mathbf{k} d\tau = \varrho \iiint^R (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v}) d\tau. \quad (8)$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  besteht dabei aus zwei Bestandteilen, der Geschwindigkeit im Unendlichen  $\mathbf{V}$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$ , die von dem Wirbelfelde  $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$  herrührt und mittelst der Biot-Savart'schen Formel berechnet wird. Es ist also

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}^* = \mathbf{V} + \iiint \frac{(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} d\tau, \quad (9)$$

wo  $\mathbf{r}$  den Fahrstrahl vom Sitz des Wirbels bis zum Aufpunkt bedeutet, für den  $\mathbf{v}^*$  gerechnet werden soll. Die Integration ist auf den gesamten von Wirbeln erfüllten Raum zu erstrecken.

Die Gesamtkraft in einem tragenden Raum  $R$  wird demnach

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \varrho \left( \iiint^R \boldsymbol{\gamma} d\tau \right) \times \mathbf{V} \\ &+ \varrho \iiint^R \iiint \frac{\boldsymbol{\gamma} \times ((\boldsymbol{\gamma}' + \boldsymbol{\varepsilon}') \times \mathbf{r})}{4\pi r^3} d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (10)$$

wobei sich die ungestrichenen Größen auf die Integration der Gleichung (8) im Raum  $R$ , die gestrichenen dagegen auf die Integration der Gleichung (9) im gesamten von Wirbeln erfüllten Raumgebiet beziehen. Der Vektor  $\mathbf{r}$  ist von dem gestrichenen nach dem ungestrichenen Raumelement hin gerichtet.

Für den Fall, daß die gebundenen Wirbel im ganzen Raum zu ein und derselben Richtung parallel sind, läßt sich Formel (10) für die Gesamtkraft aller tragenden Wirbel noch vereinfachen. Es ist nämlich hier das Integral

$$\iiint \iiint \iiint \frac{\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma}' \times \mathbf{r})}{4\pi r^3} d\tau d\tau' = 0, \quad (11)$$

1) Diese ist in den folgenden Darlegungen immer zu verstehen als die von dem Flügel oder Flügelsystem auf die Luft ausgeübte Kraft. In der Flugtechnik pflegt man die ihr entgegengesetzt gleiche Kraft, die durch die Luftbewegung am Flügel hervorgerufen wird, zu betrachten.

da je zwei Beträge, die durch Vertauschung von  $\gamma$  und  $\gamma'$  auseinander entstehen, wegen des dabei eintretenden Vorzeichenwechsels von  $r$  einander gegenseitig aufheben. Es braucht also in diesem Falle nur das der freien Wirbel  $\epsilon$  berücksichtigt werden<sup>1)</sup>. Diese Beziehung gilt natürlich nicht mehr, wenn der Integrationsraum  $R$  nur einen Teil des gesamten tragenden Raumes umfaßt, da jetzt die Integrationsgebiete der  $d\tau$  und  $d\tau'$  verschieden sind, und deshalb die Vertauschung nicht bei allen Paaren von Raumelementen möglich ist.

9. Zur Vereinfachung der Überlegungen ist es zweckmäßig, einen „tragenden Faden“ zu betrachten, d. h. ein Raumgebilde von dem kleinen Querschnitt  $F$ , dessen Längserstreckung dem Verlaufe der Wirbellinien des Feldes  $\gamma$  folgt. Es ist also in Formel (8)  $d\tau = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  zu setzen, wobei anzumerken ist, daß  $d\mathbf{s} \parallel \gamma$  ist, weswegen eine Vertauschung der Faktoren  $d\mathbf{s}$  und  $\gamma$  in den vektoriellen Produkten erlaubt ist. Man kann deshalb schreiben:

$$\mathbf{K} = \rho \iiint \gamma \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \rho \iiint d\mathbf{s} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} \cdot \gamma.$$

Ersetzt man  $\mathbf{v}$  innerhalb eines jeden Querschnittes  $F$  durch seinen dortigen Mittelwert  $\bar{\mathbf{v}}$ , so kann auch geschrieben werden:

$$\mathbf{k} = \rho \int d\mathbf{s} \times \left( \bar{\mathbf{v}} \cdot \int \int^F d\mathbf{F} \cdot \gamma \right) = \rho \int d\mathbf{s} \times \bar{\mathbf{v}} \cdot \Gamma. \quad (12)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des Kutta-Joukowski'schen Satzes für den tragenden Faden. Die Berechnung von  $\bar{\mathbf{v}}$  hat mit Hilfe der Gleichung (9) zu erfolgen.

Im Falle von isolierten tragenden Fäden entsteht hierbei dadurch eine Schwierigkeit, daß die Geschwindigkeiten in ein und demselben Querschnitt  $F$  untereinander sehr große Unterschiede aufweisen, die gegen Unendlich gehen, wenn  $F$  gegen Null geht. Bei einem einzelnen geraden tragenden Faden oder bei mehreren unter sich parallelen geraden Fäden genügt es, nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten, das Feld der freien Wirbel  $\epsilon$  zu berechnen, wobei diese Schwierigkeit nicht auftritt. Ist diese Vereinfachung aber nicht anwendbar, dann kann man die Berechnung von  $\mathbf{v}$  da-

1) Diese Beziehung stammt von meinem Mitarbeiter, Herrn M. Munk, und ist in seiner Dissertation „Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges“ enthalten. — Unter dem „Feld der freien Wirbel  $\epsilon$ “ ist hier dasjenige Geschwindigkeitsfeld verstanden, das aus der Verteilung  $\epsilon$  mittels der Biot-Savart'schen Formel folgt. Da die Verteilung  $\epsilon$  für sich allein nicht quellenfrei ist, ist der Wirbel dieses Feldes auch außerhalb der Verteilung  $\epsilon$  von Null verschieden.

durch erleichtern, daß man zu dem gegebenen Wirbelfaden der  $\gamma$  einen unendlich langen geradlinigen Wirbelfaden von konstanter Stärke addiert und wieder subtrahiert, dessen Wirbelverteilung  $\gamma'$  in dem Element  $F \cdot ds$  mit der des gegebenen Wirbelfadens an der Stelle  $s$ ,  $\gamma_s$ , übereinstimmt. Es ist jetzt, wenn  $\mathbf{v}'$  die von dem unendlich langen Wirbelfaden herrührende Geschwindigkeit ist, die Kraft in dem Element  $F \cdot ds$

$$d\mathbf{K} = \int \int^F \gamma_s \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}^* - \mathbf{v}' + \mathbf{v}') dF \cdot ds;$$

$\mathbf{v}^* - \mathbf{v}'$  ist nun im Querschnitt  $F$  weniger stark veränderlich als  $\mathbf{v}^*$ , weil die örtlichen Einflüsse, die die großen Unterschiede in den Werten von  $\mathbf{v}^*$  hervorgebracht hatten, beseitigt sind, denn in dem Querschnitt, für den  $\bar{\mathbf{v}}$  zu berechnen ist, heben sich  $\gamma$  und  $-\gamma'$  auf; das noch verbleibende Integral

$$\int \int^F \gamma_s \times \mathbf{v}' \cdot dF \cdot ds$$

ist aber nach einer der Gl. (11) völlig analogen Betrachtung gleich Null. Es bleibt also das Ergebnis, daß für die Berechnung von  $\mathbf{K}$  an Stelle von  $\mathbf{v}^*$  auch  $\mathbf{v}^* - \mathbf{v}'$  eingeführt werden darf, bzw. daß in Gl. (12)  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{V} + (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}')$  gesetzt werden darf. Im übrigen verbleibt bei gekrümmten tragenden Fäden die aus der Theorie der Wirbelringe bekannte Schwierigkeit bestehen, daß  $\bar{\mathbf{v}}$  logarithmisch unendlich wird, wenn  $F$  bei endlichem  $\Gamma$  gegen Null geht.

10. Die Bildung eines Wirbelsystems hinter den Tragflächen hat zur Folge, daß bei der Bewegung der Flügel kinetische Energie in der Flüssigkeit zurückbleibt. Dieser kinetischen Energie entspricht eine Arbeitsleistung der Kräfte  $\mathbf{k}$  oder, anders ausgedrückt, ein bei der Flügelbewegung zu überwindender Widerstand. Nach Gl. (3) steht die Kraft  $\mathbf{k}$  senkrecht auf der Richtung von  $\mathbf{v}$ , es ist also die Arbeitsleistung an der Volumeneinheit in dem Bezugssystem, in dem der Flügel ruht,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  gleich Null. Setzt man  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}^*$ , so wird demnach

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^*.$$

In dem Bezugssystem, in dem die ungestörte Flüssigkeit ruht, bedeutet der linke Ausdruck, aufgefaßt als Produkt der Geschwindigkeit  $\mathbf{V}$  mit der in ihre Richtung fallenden Komponente der Kraft  $\mathbf{k}$ , die Arbeitsleistung eines Widerstandes, der rechte Ausdruck dagegen, aufgefaßt als das Produkt der Kraft  $\mathbf{k}$  mit der in ihre Richtung fallenden Komponente der von dem Kräftesystem er-

zeugten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$ , bedeutet die von dem Flügel zur Erzeugung der Wirbelbewegung an die Flüssigkeit abgegebene Arbeitsleistung.

Unter Berücksichtigung von Gl. (5) ist die Arbeitsleistung an der Volumeneinheit gleich

$$\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}^*$$

(wegen  $\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^* = 0!$ ), also ist die gesamte Arbeitsleistung ( $W = \text{Widerstand}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = W \cdot V &= \iint \int \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}^* d\tau = \\ &= \iiint \int \int \int \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V} \cdot \frac{(\boldsymbol{\gamma}' + \boldsymbol{\varepsilon}') \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (13)$$

In dem Sonderfall, daß alle tragenden Wirbel parallel sind, gilt wieder die gleiche Überlegung, die zu Gl. (11) geführt hat, es ist also auch hier ausreichend, die von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  herrührenden Beiträge zu  $\mathbf{v}$  bei der Widerstandsberechnung zu berücksichtigen:

$$W \cdot V = \iiint \int \int \int \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V} \cdot \frac{\boldsymbol{\varepsilon}' \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} d\tau d\tau'. \quad (13a)$$

### C. Notwendige Vereinfachungen.

11. Die strenge Behandlung der im Vorstehenden dargelegten Ansätze bietet bei dem heutigen Stande der Mathematik noch unübersteigliche Hindernisse. Man ist deshalb gezwungen, Näherungsverfahren einzuschlagen. In dieser Richtung war der Gedanke sehr fruchtbar, nach denjenigen Beziehungen zu fragen, die sich im Falle sehr kleiner Luftkräfte ergeben. In diesem Fall erhält man offenbar eine „Näherung erster Ordnung“, wenn bei allen vorkommenden Größen jeweils nur das Glied niedrigster Ordnung beibehalten wird. Dadurch erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen den Kräften und den Zusatzgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}^*$ , wodurch die Superposition anwendbar wird, und sich alle Vorteile der linearen Theorien einstellen. Es steht natürlich nichts im Wege, die lineare Theorie mittelst der Methode der schrittweisen Annäherung nachträglich zu verfeinern; jedoch zeigt die Anwendung der Theorie auf die praktischen Aufgaben, daß bereits die lineare Theorie für die meisten Fälle ausreicht.

Bei dieser ersten Näherung werden die durch das Wirbelsystem erzeugten Zusatzgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}^*$  als überall klein gegen die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung  $\mathbf{V}$  an-

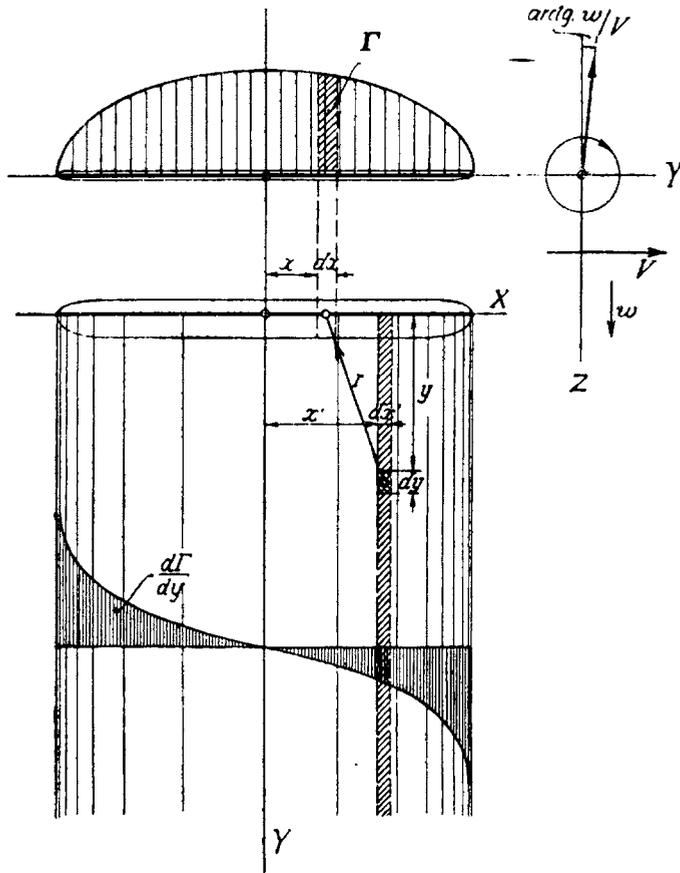
gesehen, sodaß  $v^*$ , wo es als Summand neben  $V$  vorkommt, vernachlässigt werden darf. Die freien Wirbellinien, die nach dem unter Nr. 6 Gesagten Stromlinien sind, gehen durch Vernachlässigung von  $v^*$  in Gerade über, die von der Hinterkante des Flügels parallel mit der Bewegungsrichtung nach hinten verlaufen. Man überzeugt sich leicht, daß man einen relativen Fehler von der Ordnung der kleinen Größe  $v^*/V$  begeht, wenn man für die Berechnung von  $v^*$  am Ort des Tragflügels diese Geraden an Stelle der Stromlinien als Sitz der Wirbel annimmt. Die Berechnung von  $v^*$  wird hierdurch außerordentlich vereinfacht.

Bei der Ermittlung der Größe der Gesamtkraft  $K$  nach Gl. (10) kommt das zweite Glied als klein gegenüber dem ersten in Wegfall; bei der Berechnung des Widerstandes in der Bewegungsrichtung,  $W$ , der von zweiter Ordnung klein ist, wenn die Gesamtkraft klein von erster Ordnung, ist dagegen gerade dieses Glied ausschlaggebend.

12. Eine weitere Vereinfachung besteht darin, daß man von der genauen räumlichen Verteilung der tragenden Wirbel absieht. In den meisten Fällen wird man sich damit begnügen, an Stelle der in der Anmerkung zu Nr. 6 beschriebenen Wirbelfläche für jeden Flügel einen einzigen tragenden Wirbelfaden anzunehmen, der durch die Schwerpunkte der Wirbelverteilungen der einzelnen Querschnitte hindurchgezogen ist, und dessen Wirbelstärke in jedem Querschnitt gleich der dortigen Gesamtzirkulation ist. Da die in der Praxis verwendeten Flügel meist ziemlich langgestreckt sind, reicht diese Annäherung für viele Zwecke vollständig aus. Die Querabmessungen des tragenden Fadens sind für die meisten Aufgaben ohne Belang; man spricht deshalb von „tragenden Linien“<sup>1)</sup>.

Für den einfachsten Fall, nämlich für eine einzige gerade tragende Linie senkrecht zur Richtung von  $V$  (für den „geraden Eindecker“) seien im folgenden die Hauptformeln zusammengestellt. Das Koordinatensystem sei folgendermaßen festgelegt (vergl. Fig. 4): die tragende Linie sei die  $X$ -Achse, die  $Y$ -Achse zeige

1) Wie eine nähere Betrachtung zeigt, reicht das Bild der tragenden Linie nicht mehr aus für solche Flügel, bei denen die  $Y$  Koordinate der Flügelmittellinie veränderlich ist (Flügel in der Flugrichtung gekrümmt oder auch nur schräg liegend). In diesem Fall muß die Verteilung des Auftriebes nach der Tiefe Berücksichtigung finden, da in die Formel für  $w$  Faktoren von der Größenordnung  $\ln b/t$  eingehen ( $b$  = Spannweite,  $t$  = Flügeltiefe), die bei  $t = 0$  unendliche Werte liefern würden.

Fig. 4<sup>1)</sup>.

in der Richtung von  $V$  nach hinten, die  $Z$ -Achse nach unten. Einer Zirkulation der Strömung, die von  $Y$  nach  $Z$  dreht, entspricht dann ein Auftrieb, der am Flügel nach oben, an der Flüssigkeit nach unten gerichtet ist (also die Hauptkomponente der Kräfte  $\mathbf{k}$  in der Richtung der positiven  $Z$ -Achse!).

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^*$  habe die drei Komponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  in der Richtung der  $X$ -,  $Y$ - und  $Z$ -Achse. An Stelle von  $\gamma d\tau$  in Gl. (9) und (10) tritt das Wirbellinien-Element  $\Gamma dx$ , an Stelle von  $\varepsilon d\tau$  das Wirbelflächen-Element  $-\frac{d\Gamma}{dx} dx dy$ . Der Flügel reiche von  $x = a$  bis  $x = b$ . Die Geschwindigkeitskomponenten am Ort der tragenden Linie werden hiermit

$$u = 0 \quad v = 0,$$

1) Statt  $\frac{d\Gamma}{dy}$  in Fig. 4 ist  $\frac{d\Gamma}{dx}$  zu lesen.

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x'=a}^{x'=b} \int_{y=0}^{y=\infty} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{(x-x') dx' dy}{((x-x')^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{d\Gamma}{dx'} \cdot \frac{dx'}{x-x'}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

In dem letzteren Integral, dessen Integrand durch Unendlich läuft, ist der „Hauptwert“ ( $\lim_{\varepsilon=0} (\int_a^{x'-\varepsilon} + \int_{x'+\varepsilon}^b)$ ) zu nehmen, wovon man sich überzeugen kann, wenn man zunächst in dem Doppelintegral die untere Grenze  $y = y_1$  setzt und in dem damit erhaltenen einfachen Integral zur Grenze  $y_1 = 0$  übergeht.

Der Auftrieb, d. i. die  $Z$ -Komponente von  $\mathbf{K}$ , ergibt sich gemäß Gl. (12) zu

$$A = \rho V \int_a^b \Gamma dx, \quad (15)$$

der Widerstand (die  $Y$ -Komponente von  $\mathbf{K}$ ) gemäß Gl. (13) oder (13a) zu

$$W = \rho \int_a^b \Gamma w dx = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \int_a^b \Gamma(x) \frac{d\Gamma}{dx'} \cdot \frac{dx dx'}{x-x'}. \quad (16)$$

Da es sich bei diesen Formeln um eine Näherung erster Ordnung handelt, sind sie nur zulässig, wenn  $w$  wirklich überall am Ort der tragenden Linie klein gegen  $V$  bleibt. Dieses ist nicht mehr der Fall, wenn  $\Gamma$  am Flügelende einen von Null verschiedenen Wert hat, denn in diesem Falle würde vom Flügelende ein Wirbelfaden von endlicher Stärke abgehen müssen, der eine umgekehrt proportional mit dem Abstände vom Flügelende wachsende Geschwindigkeit  $w$  ergäbe. Ein derartiges Anwachsen der Geschwindigkeit kann aber, wenn der Anstellwinkel am Flügelende in der Größenordnung der sonstigen Anstellwinkel bleibt, in Wirklichkeit nicht vorkommen. Wir stellen daher fest, daß an den Enden der tragenden Linie  $\Gamma = 0$  sein muß.

Anmerkung. Nimmt man an, daß der Auftrieb über den größten Teil des Tragflügels in gleicher Stärke verteilt ist, seine Abnahme auf Null sich also auf kurze Stücke an den Flügelenden beschränkt, so sind alle abgehenden Wirbel auf einen schmalen Bereich an den Flügelenden zusammengedrängt und können daher angenähert je durch einen einzelnen Wirbelfaden ersetzt werden. Auf dieses Schema, bei dem der Flügel durch drei in nebenste-

hender Art zusammengefügte geradlinige Wirbelfadenstücke von gleicher Wirbelstärke ersetzt ist, gehen alle unsere älteren Untersuchungen zurück. Dieses Schema ist immer zulässig, wenn es sich um das Studium eines Einflusses handelt, den der Flügel in einiger Entfernung von dem Wirbelsystem hervorruft. Es ist mit Erfolg bei der Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung benachbarter Flügel verwendet worden (Fußn. 3—5 S. 1). Bei der Selbstbeeinflussung des Flügels muß es nach Obigem versagen<sup>1)</sup>.

#### D. Anwendungen auf den Eindecker.

13. Die wichtigsten Aufgaben, die sich auf Grund der vorstehenden Ansätze lösen lassen, sind die folgenden drei:

1) Gegeben sei die Verteilung des Auftriebes über die Spannweite, ferner  $\rho$  und  $V$ ; gesucht ist die Flügelgestalt, die diese Auftriebsverteilung hervorbringt, außerdem der Widerstand.

2) Gegeben sei die Flügelgestalt, gesucht die Auftriebsverteilung und der Widerstand.

3) Gegeben ist der Gesamtauftrieb und die Flügelspannweite, außerdem  $\rho$  und  $V$ ; gesucht ist diejenige Verteilung des Auftriebes über die Spannweite, bei der der Widerstand ein Minimum wird.

Über die letztere Aufgabe wird noch zu sprechen sein; bezüglich der ersteren beiden sei hier noch folgendes bemerkt: Bei der ersten Aufgabe lassen sich die Größen  $w(x)$  und  $W$  durch reine Quadraturen ermitteln; mit der Kenntnis von  $w$  läßt sich auch die Frage nach der Flügelgestalt, allerdings nicht in eindeutiger Weise, beantworten. Wenn die Gestalt des Flügelprofils und dessen aerodynamische Eigenschaften gegeben sind, dann kann zu einer gegebenen Flügeltiefe der Anstellwinkel und umgekehrt zu einem gegebenen Anstellwinkel die Flügeltiefe berechnet werden. Die Durchführung dieser Aufgabe hat die folgende Annahme zur Voraussetzung, die mindestens in dem Falle eines sehr langgestreckten Flügels unmittelbar einleuchtet: ein Flügelement, das

---

1) Ein unvollkommener Versuch, die Schwächung des Auftriebes durch die Randwirbel bei gegebenem Anstellwinkel zu berechnen, hat zu der bei sehr länglichen Flügeln immerhin brauchbaren Formel im Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft 1910/11 (Springer, Berlin 1911) S. 87 geführt, die allerdings — wegen der nicht näher bekannten Zustände an den Flügelenden — noch eine empirische Konstante enthält.

unter dem Winkel  $\arctg w/v$  zur Wagerechten angeströmt wird, muß unter dem Winkel

$$\alpha = \arctg w/V + \alpha' \quad (17)$$

angestellt werden, um denselben Auftrieb zu ergeben, wie ein gleiches Element eines unendlich breiten Tragflügels von konstantem Profil, der unter dem Winkel  $\alpha'$  angestellt und wagerecht angeströmt wird. Die Abhängigkeit zwischen dem „wirksamen Anstellwinkel“  $\alpha'$  und dem zugehörigen Auftrieb kann aus Rechnungen nach Art der Kutta'schen oder aus entsprechenden Versuchen entnommen werden.

Ist  $t$  die „Flügeltiefe“, d. h. die Abmessung des Flügels in der Richtung von  $V$ , so kann  $\Gamma = Vt \cdot f(\alpha')$  gesetzt werden. Für praktische Zwecke reicht es immer aus,  $f(\alpha')$  als lineare Funktion von  $\alpha'$  anzusetzen:  $f(\alpha') = c_1 \alpha' + c_2$  (nach den Kutta'schen Rechnungen erhält man für flache kreisbogenförmig gewölbte Flügel, wenn  $\beta$  den Zentriwinkel des Kreisbogens bedeutet,

$$f(\alpha') = \pi \alpha' + \frac{\pi}{4} \beta;$$

nach v. Mises<sup>1)</sup> hat die untere Grenze von  $c_1$ , die bei den gebräuchlichen Flügelprofilen auch nicht viel überschritten wird, den Wert  $\pi$ ).

Die zweite Aufgabe ist die Umkehrung der ersten. Sie ist im allgemeinen viel schwieriger zu behandeln als diese, da sie nicht auf Quadraturen, sondern auf eine Integralgleichung führt. Schreibt man  $w/V$  statt  $\arctg w/V$ , so führt unser Ansatz

$$w/V + \alpha' = \alpha(x) = \text{gegebene Funktion von } x$$

unter Berücksichtigung von Gl. (14) zu der Gleichung:

$$\frac{1}{4\pi V} \int_b^a \frac{d\Gamma}{dx'} \cdot \frac{dx'}{x-x'} + \frac{\Gamma}{c_1 V t(x)} - \frac{c_2}{c_1} = \alpha(x). \quad (18)$$

Im folgenden seien zwei Beispiele für die Durchführung dieser Aufgaben des Näheren ausgeführt.

14. Bei einem unendlich langen Tragflügel sei der Auftrieb eine periodische Funktion des Ortes. Durch eine Fourier-Zerlegung gelangt man hier zu einzelnen Gliedern von der Form  $\Gamma = \bar{\Gamma} \cos \mu x$ . Die zugehörige Geschwindigkeit  $w$  wird gemäß

$$\text{Gl. (14)} \quad w = \frac{\mu \bar{\Gamma}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \mu x' dx'}{x' - x};$$

1) v. Mises, „Zur Theorie des Tragflächenauftriebs“, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 8 (1917) S. 157.

mit  $\mu(x' - x) = u$  wird

$$\frac{4\pi w}{\mu \bar{\Gamma}} = \sin \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u du}{u} + \cos \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u du}{u}.$$

Das erstere dieser beiden Integrale ist  $= 0$ , das zweite  $= \pi^1$ ), so daß also

$$w = \frac{\mu \bar{\Gamma}}{4} \cdot \cos \mu x = \frac{\mu \Gamma}{4}$$

wird. Es werde nun  $\Gamma = V t c_1 \alpha'$  gesetzt, was ohne weiteres zulässig ist, wenn man die Anstellwinkel von derjenigen Richtung zum Profil aus rechnet, in der man das Profil anblasen muß, um den Auftrieb Null zu erhalten; dann ist der von dieser Richtung aus gerechnete Anstellwinkel

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{V} = \frac{\Gamma}{V} \left( \frac{1}{c_1 t} + \frac{\mu}{4} \right) = \alpha' \left( 1 + \frac{c_1}{4} \mu t \right).$$

Führt man die Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{\mu}$  ein, so wird

$$\alpha/\alpha' = 1 + \frac{\pi c_1 t}{2\lambda}; \quad (19)$$

da nach v. Mises<sup>2)</sup>  $c_1$  immer ungefähr  $= \pi$  wird, ergibt sich die Näherungsformel

$$\alpha/\alpha' \cong 1 + 5t/\lambda.$$

Der Widerstand für die Länge  $l$ , die eine ganze Anzahl von Halbperioden betragen mag, wird gemäß Gl. (16)

$$W = \frac{\bar{\Gamma}^2 \mu}{4} \int_0^l \cos^2 \mu x dx = \frac{\rho l \bar{\Gamma}^2 \mu}{8}. \quad (20)$$

Handelt es sich um eine beliebige periodische Auftriebsverteilung, so ergeben in dem Ausdruck für den Widerstand die gemischten Glieder in der Fourier-Entwicklung für die Periode den Wert Null; der Widerstand erhält damit den Wert

$$W = \frac{\rho l}{8} \sum \mu \bar{\Gamma}^2. \quad (20a)$$

Die zweite Aufgabe ist bei diesem Beispiel nicht schwieriger

1) Vergl. etwa Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 19.

2) s. Note 1 auf vorhergehender Seite.

zu lösen als die erste. Man braucht nur den als Funktion von  $x$  gegebenen Anstellwinkel  $\alpha$  in eine Fourier-Reihe zu zerlegen und zu jedem Glied den zugehörigen Wert von  $\alpha'$  bzw. von  $\Gamma$  zu ermitteln und diese Werte wieder zusammensetzen. Es mag darauf hingewiesen werden, daß nach dem oben angegebenen Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\alpha'$  bei abnehmender Wellenlänge bzw. zunehmender Flächentiefe der Betrag der Auftriebsschwankung immer mehr gegen den Betrag der Winkelschwankung zurückbleibt. Dieses Verhalten findet darin seine Begründung, daß bei kurzwelligen Schwankungen des Anstellwinkels der Ausgleich der Strömung nach der Seite immer stärkeren Anteil erhält. Irgendwelche Unstetigkeiten im Verlauf des Anstellwinkels spiegeln sich daher in der Auftriebsverteilung nur sehr abgeschwächt wieder.

15. Wichtiger als dieses Beispiel ist das folgende, das sich auf den endlichen Flügel (Eindecker) bezieht. Es hat lange Zeit Schwierigkeiten gemacht, geeignete Funktionen für die Auftriebsverteilung zu finden, bei denen nicht an den Flügelenden praktisch unwahrscheinliche Singularitäten auftreten. Die Lösung brachte dann (November 1913) der Ansatz:

$$\Gamma = \sqrt{1 - \xi^2} (\Gamma_0 + \Gamma_1 \xi^2 + \Gamma_2 \xi^4 + \dots)$$

mit  $\xi = x : b/2$ , wo  $b$  die Spannweite ist. Für die Behandlung der hier entstehenden Integrale mag zunächst angemerkt werden, daß<sup>1)</sup>

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta^{2n+1} d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}(\eta - \xi)} = \pi \sum_{m=0}^{m=n} p_{n-m} \xi^{2m}$$

und

$$\int_{-1}^{+1} \xi^{2n} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = \pi q_n$$

ist, worin  $p_n = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n - 1}{2 \cdot 4 \dots 2n}$  und  $q_n = p_n / 2n + 2$  ist, also

$$\begin{array}{ll} p_0 = 1 & q_0 = \frac{1}{2} \\ p_1 = \frac{1}{2} & q_1 = \frac{1}{8} \\ p_2 = \frac{3}{8} & q_2 = \frac{1}{16} \\ p_3 = \frac{5}{16} & q_3 = \frac{5}{128} \end{array}$$

Hiermit erhält man gemäß Gl. (14) bis (16)

1) Die Form der Darstellung stammt von A. Betz (1917).

$$A = \frac{\pi}{2} \rho b V \sum g_n \Gamma_n \quad (21)$$

ferner, mit  $p_{-1} = 0$ ,

$$w = \frac{1}{2b} \sum^n \left\{ \Gamma_n \sum_{m=0}^{m=n} \xi^{2m} ((2n+1)p_{n-m} - 2np_{n-m-1}) \right\} \quad (22)$$

$$W = \frac{\pi \rho}{4} \sum_i \sum_k \left\{ \Gamma_i \Gamma_k \sum_{m=0}^{m=k} g_{i+m} ((2k+1)p_{k-m} - 2kp_{k-m-1}) \right\}. \quad (23)$$

Die Ausrechnung der Zahlwerte für die ersten Glieder der Reihenentwicklungen ergibt:

$$A = \frac{\pi}{4} \rho b V (\Gamma_0 + \frac{1}{4} \Gamma_1 + \frac{1}{8} \Gamma_2 + \dots) \quad (21 a)$$

$$w = \frac{1}{2b} \left\{ \Gamma_0 + \Gamma_1 (3\xi^2 - \frac{1}{2}) + \Gamma_2 (5\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{8}) + \dots \right\} \quad (22 a)$$

$$W = \frac{\pi \rho}{4} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_0^2 + \frac{1}{4} \Gamma_0 \Gamma_1 + \frac{1}{8} \Gamma_0 \Gamma_2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \Gamma_1^2 + \frac{1}{8} \frac{1}{4} \Gamma_1 \Gamma_2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{1}{8} \Gamma_2^2 + \dots \right\} \quad (23 a)$$

Mit Hilfe dieses Ansatzes konnte die Frage nach derjenigen Auftriebsverteilung, die für gegebenen Gesamtauftrieb den kleinsten Widerstand liefert, in Angriff genommen werden. Die Ausrechnung<sup>1)</sup> ergab das sehr bemerkenswerte Resultat, daß das Minimum dann eintritt, wenn alle  $\Gamma_n$  mit Ausnahme von  $\Gamma_0$  gleich Null sind, also der Auftrieb nach einer halben Ellipse über die Spannweite verteilt ist. Dies Ergebnis hängt damit zusammen, daß die Zahlenkoeffizienten der Glieder  $\Gamma_0 \Gamma_n$  in der Formel für den Widerstand mit denen der Glieder  $\Gamma_n$  in der Formel für den Auftrieb übereinstimmen, während der Faktor von  $\Gamma_0^2$  die Hälfte des Faktors von  $\Gamma_0$  ist. Die Geschwindigkeit  $w$  ergibt sich für diese Lösung als über die Spannweite konstant! Eliminiert man  $\Gamma_0$  aus den Gleichungen, so wird

$$w = \frac{2A}{\pi \rho V b^2} \quad (24)$$

$$W = \frac{w}{V} \cdot A = \frac{2A^2}{\pi \rho V^2 b^2}. \quad (25)$$

1) Von E. Pohlhausen Ende 1913 durchgeführt.

2) Erste Veröffentlichung in einem Aufsatz von Betz, Zeitschr. f. Flugt. u. M. 5 (1914) S. 239.

Die Form eines Tragflügels dieser Art ergibt sich, wenn festgesetzt wird, daß die Profilform und der wirksame Anstellwinkel  $\alpha'$  konstant sein soll, als durch zwei Halbellipsen begrenzt, vergl. Fig. 5; da  $w$  konstant ist, wird auch der geometrische Anstellwinkel  $\alpha$  über die ganze Spannweite konstant.

Für derartige Tragflügel läßt sich nun, wie man sieht, an Hand der obigen Formeln die Abhängigkeit der Luftkräfte vom Seitenverhältnis studieren. Die dimensionslose Größe  $c_a = \frac{A}{qF}$ , wo  $F$  der

Flächeninhalt des Flügels und  $q = \frac{1}{2} \rho V^2$  der Staudruck ist, ist nach unseren bisherigen Annahmen (vergl. Nr. 13) bei gegebener Profilform eine reine Funktion des wirksamen Anstellwinkels  $\alpha'$  (nämlich  $c_a = 2f(\alpha')$ ); der zugehörige geometrische Anstellwinkel ergibt sich aus der Beziehung

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{V} = \alpha' + \frac{c_a F}{\pi b^2}. \quad (26)$$

Über den Widerstand in einer wirklichen Flüssigkeit, wie er sich aus den Versuchen ergibt, wird die Annahme gemacht, daß er aus zwei Teilen besteht, nämlich aus dem hier betrachteten Widerstand und einem aus Luftreibung und schädlicher Wirbelbildung bestehenden Widerstand, der bei gegebener Profilform nur von  $\alpha'$  abhängt (Für diese beiden Anteile des Widerstandes haben sich die Namen „induzierter Widerstand“ und „Profilwiderstand“ eingebürgert. Der erstere Name soll darauf hinweisen, daß dieser Widerstand durch die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Tragflügelteile zustande kommt, der letztere, daß es sich um eine Eigenschaft des „Profils“ handelt). Wird  $W = W_i + W_o$  geschrieben und werden die dimensionslosen Größen

$$c_w = \frac{W}{qF}, \quad c_{w_i} = \frac{W_i}{qF} \quad \text{und} \quad c_{w_o} = \frac{W_o}{qF}$$

eingeführt, so wird unter Berücksichtigung von Gl. (25)

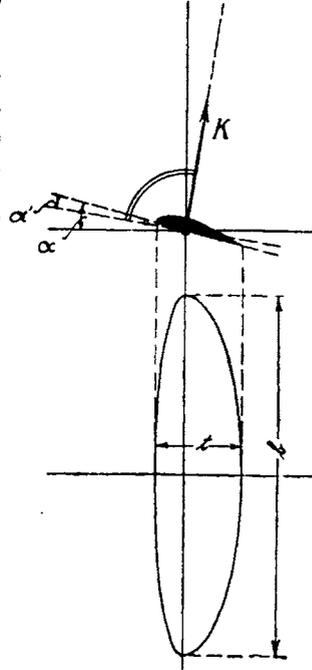


Fig. 5.

$$c_{w_i} = c_a \cdot \frac{w}{V} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}$$

und damit also

$$c_w = \frac{c_a^2 F'}{\pi b^2} + c_{w_0}(\alpha'). \quad (27)$$

Man kann also, wenn man  $\alpha'$  oder, was praktisch auf dasselbe hinauskommt,  $c_a$  als unabhängige Veränderliche nimmt, von einem Fall auf irgendeinen anderen Fall mit anderem Seitenverhältnis umrechnen; denn es gilt für je zwei entsprechende Zustände, für die  $c_{a_1} = c_{a_2}$  ist,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{c_a}{\pi} \left( \frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2} \right) \quad (26 a)$$

$$c_{w_1} - c_{w_2} = \frac{c_a^2}{\pi} \left( \frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2} \right). \quad (27 a)$$

Es ist das Verdienst meiner Mitarbeiter A. Betz und M. Munk <sup>1)</sup>, nachgewiesen zu haben, daß diese Formeln mit gutem Erfolg auch auf Tragflügel von anderem als elliptischem Umriß angewendet werden dürfen. In der Tat zeigt sich, daß sie eine für die praktischen Bedürfnisse ausreichende Darstellung der Abhängigkeit der Luftkräfte vom Seitenverhältnis ergeben und gestatten, aus den mit einem Seitenverhältnis gemachten Beobachtungen auf irgendwelche Anwendungsfälle mit anderem Seitenverhältnis umzurechnen. Daß die Formeln auch bei anderen Umrissen einigermaßen stimmen, dürfte seine Begründung darin haben, daß die Auftriebsverteilung auch z. B. im Falle eines rechteckig umrandeten Flügels nicht allzu stark von der elliptischen abweicht <sup>2)</sup>. Beim Widerstand, für den die Formeln genauer stimmen als beim Anstellwinkel, liegt eine Erklärung auch darin, daß der Widerstand der elliptischen Verteilung ein Minimum ist und die Veränderlichkeit einer Größe in der Nachbarschaft des Minimums nur gering ist <sup>3)</sup>.

1) s. die Literaturangabe im Anhang, S. 95.

2) Die Durchrechnung von Beispielen zeigt, daß der in den Gleichungen (21) und (22) zum Ausdruck kommende Mechanismus bei verhältnismäßig geringen Änderungen der Auftriebsverteilung sehr erhebliche Änderungen in der Verteilung der Geschwindigkeit  $w$  liefert, oder anders ausgedrückt, daß bei Abweichung der Flügelgestalt von der Abb. 5 die dabei auftretende Vertikalgeschwindigkeit  $w$  eine ausgleichende Wirkung von der Art hat, daß die Änderung der Auftriebsverteilung erheblich hinter derjenigen Änderung zurückbleibt, die auf elementarem Wege aus der Änderung der Flügelgestalt gefolgert werden würde. Für kleine Seitenverhältnisse  $b/t$  gilt dies in höherem Maße wie für große.

3) Eine Nachrechnung der in Teddington (Technical Report of the Adv.

Der soeben geschilderte Erfolg der Theorie veranlaßte uns, auch für zusammengesetzte Flügelsysteme entsprechende Beziehungen zu suchen. Über die Ergebnisse dieser Untersuchungen, sowie über andere Aufgaben und Fragen der Tragflügeltheorie soll in einer zweiten Mitteilung berichtet werden.

---

Comm. f. Aeron. 1912/13. London 1914 S. 97 u. f.) auf Grund von Druckverteilungsmessungen ermittelten Auftriebsverteilung für einen rechteckigen Flügel vom Seitenverhältnis 6 : 1 nach Formel (21) und (23) ergab gegenüber der Ellipse einen um rd. 3 % größeren Widerstand.

---

## Tragflügeltheorie.

### II. Mitteilung.

Von

**L. Prandtl.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Februar 1919.

#### A. Mehrdeckertheorie.

1. Als Vorarbeit für die Durchbildung der Theorie des Mehrdeckers auf der Grundlage der in der ersten Mitteilung gegebenen Ansätze für die Flügeltheorie der ersten Ordnung sei zunächst die Aufgabe behandelt, von der Störungsgeschwindigkeit, die von einer „tragenden Linie“ mit gegebener Antriebsverteilung herührt, an einem Aufpunkt  $A$  die Komponente nach einer gegebenen Richtung zu ermitteln (in den Anwendungen wird es sich hauptsächlich um die Richtung senkrecht zu einer anderen den Aufpunkt enthaltenden tragenden Linie und senkrecht zur Flugrichtung handeln).

Die Aufgabe werde zunächst auf Grund der in Nr. 12 der I. Mitteilung angegebenen Beziehungen für den Fall gelöst, daß sowohl die tragende Linie wie auch der Aufpunkt und die vorgegebene Richtung in ein und derselben Ebene senkrecht zur Flugrichtung (einer „Querebene“) enthalten seien. Dann ist die Wirkung der Querwirbel gleich Null, und die Längswirbel ergeben für die Geschwindigkeitskomponente in der  $Z$ -Richtung (vergl. Abb. 1)

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{d\Gamma}{ds} \frac{\sin \beta}{a} ds. \quad (28)$$

Da an den Flügelenden  $\Gamma = 0$  ist, läßt sich durch partielle Integration hierfür schreiben:

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \Gamma \frac{d}{ds} \left( \frac{\sin \beta}{a} \right) ds.$$

Wählt man den Aufpunkt zum Koordinatenursprung und die vorgegebene Richtung zur  $Z$ -Achse, so wird  $\sin \beta/a = x/a^2$ , ferner

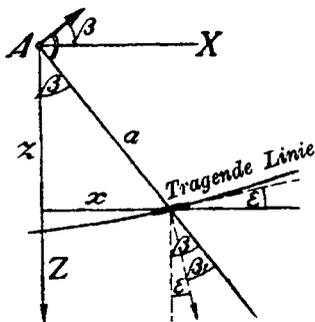


Abb. 1.

$\frac{d}{ds} = \cos \epsilon \frac{\partial}{\partial x} - \sin \epsilon \frac{\partial}{\partial z}$ ; hiermit ergibt sich nach kurzer Rechnung  $\frac{d}{ds} \left( \frac{\sin \beta}{a} \right) = \frac{1}{a^2} \cos (2\beta - \epsilon)$  und also

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^l \frac{\Gamma \cos (2\beta - \epsilon)}{a^2} ds. \quad (29)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich sofort der Widerstand anschreiben, der dadurch entsteht, daß ein Flügel 1 unter dem Einfluß der Störung steht, die von einem in derselben „Querebene“ befindlichen Flügel 2 ausgeht. Die Störungsgeschwindigkeit senkrecht zu einem Element des Flügels 1 heiße  $w_{12}$ ; der Widerstand wird dann gemäß den Darlegungen in Nr. 12 der I. Mitteilung:

$$W_{12} = \rho \int \Gamma_1 ds_1 \cdot w_{12}$$

oder wenn  $w_{12}$  nach Gl. (29) eingesetzt wird, wobei gemäß Abb. 1  $\beta_1$  anstelle von  $\beta - \epsilon$ , ferner  $\beta_2$  anstelle von  $\beta$  geschrieben wird:

$$W_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \cos (\beta_1 + \beta_2)}{a^2} ds_1 ds_2. \quad (30)$$

Das Doppelintegral ist in den Größen von Flügel 1 und 2 vollständig symmetrisch gebaut; wir schließen daraus, daß der Widerstand, der am Flügel 2 durch die Gegenwart des Flügels 1 entsteht, von derselben Größe sein muß, wie der hier berechnete, daß also

$$W_{11} = W_{21}$$

ist. Diese Gegenseitigkeitsbeziehung ist für die Folge von großer Wichtigkeit. Sie ist von meinem Mitarbeiter Dr. M. Munk auf einem andern Wege gefunden worden. Da es offenbar nicht darauf ankommt, daß die zusammengefaßten tragenden Elemente jeweils zu einem einzigen Flügel gehören, läßt sich der Satz auch so aussprechen:

„Greift man aus einem tragenden System, dessen Elemente sämtlich in einer „Querebene“ enthalten sind, zwei Gruppen beliebig heraus, so ist derjenige Widerstandsanteil, den die Gruppe 1 durch das Geschwindigkeitsfeld der Gruppe 2 erfährt, ebenso groß, wie derjenige von Gruppe 2 im Feld von Gruppe 1“.

Anmerkungen: 1) Der gegenseitige Widerstand zweier untereinander befindlichen Flügel ist positiv, der von zwei nebeneinander befindlichen Flügeln dagegen negativ; durch erstere Anordnung wird also der Gesamtwiderstand gegenüber dem Zustand weit voneinander entfernter Flügel vermehrt, durch letztere vermindert.

2) Die bei der Ableitung von Gl. (29) benutzte partielle Integration läßt eine anschauliche Deutung zu: die Geschwindigkeit  $w$  erscheint hierin aufgebaut aus den Beiträgen von lauter infinitesimalen Flügeln von der Länge  $ds$  und der Zirkulation  $\Gamma$ . Der Integrand von Gl. (29) stimmt in der Tat, wie man schon aus der Ableitung entnehmen kann, überein mit der Geschwindigkeit, die von zwei im Abstände  $ds$  befindlichen Wirbellinien von entgegengesetzt gleicher Wirbelstärke  $= \Gamma$  hervorgebracht wird. Das Doppelintegral in Gl. (30) darf in diesem Sinn aufgefaßt werden als die Summe der Wirkungen der Wirbelschweife aller tragenden Elemente  $ds$ , auf alle tragenden Elemente  $ds_1$ .

3) Die Gleichungen (29) und (30) verlieren ihre Anwendbarkeit, wenn der Wert  $a = 0$  vorkommt, da sie in diesem Fall die Form  $\infty - \infty$  annehmen. Sie sind deshalb auch ungeeignet zur Berechnung der Geschwindigkeit  $w_n$  auf dem Flügel selbst und zu der des Eigenwiderstandes eines Flügels. Für diese Größen steht jedoch die auch sonst verwendbare Gl. (28) zur Verfügung, wobei hier von dem Integral der Hauptwert zu nehmen ist. Grundsätzlich ist allerdings auch eine Ermittlung mit Gl. (29) und (30) auf dem Wege denkbar, daß die gegenseitige Einwirkung von zwei sehr benachbarten Flügeln gleicher Art berechnet und im Endresultat zum Grenzfall des Zusammenfallens der beiden Flügel übergegangen wird. Aus einer entsprechenden Überlegung folgt u. a., daß

die Beziehung  $W_{12} = W_{21}$  auch für den Grenzfall zweier räumlich zusammenfallender, im übrigen aber beliebiger tragender Systeme gilt. Hiervon wird in Nr. 5 Gebrauch gemacht werden.

2. Zur Untersuchung des allgemeinen Falls werde zunächst das Feld berechnet, das ein tragendes Element von der Länge  $ds$  mitsamt dem abgehenden Wirbelpaar in irgendeinem Raumpunkt hervorbringt. Der Koordinatenursprung werde in das tragende Element gelegt, die Richtung des Elements werde zur X-Achse gemacht; dann ist zunächst die von einem einzigen abgehenden Wirbel erzeugte Geschwindigkeit, mit  $a^2 = x^2 + z^2$ ,  $r^2 = a^2 + y^2$  und  $r'^2 = a^2 + (y - y')^2$ :

$$\frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dy' \sin \varphi}{r'^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dy' \cdot a}{r'^2} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left(1 + \frac{y}{r}\right),$$

also ihre Komponenten:

$$u = \frac{\Gamma z}{4\pi a^2} \left(1 + \frac{y}{r}\right); \quad v = 0; \quad w = -\frac{\Gamma x}{4\pi a^2} \left(1 + \frac{y}{r}\right).$$

Das abgehende Wirbelpaar gibt:

$$du_1 = -\frac{\partial u}{\partial x} ds; \quad dv_1 = 0; \quad dw_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} ds.$$

Hierzu kommt noch die Wirkung des Querwirbels:

$$du_2 = 0; \quad dv_2 = -\frac{\Gamma ds}{4\pi} \frac{z}{r^2}; \quad dw_2 = \frac{\Gamma ds}{4\pi} \frac{y}{r^2}.$$

Nach einer kurzen Zwischenrechnung ergibt sich, wenn die aus Abb. 2 ersichtlichen Winkel eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\Gamma ds}{4\pi} \left\{ (1 + \sin \alpha) \frac{\sin 2\beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin 2\beta}{2r^2} \right\} \\ dv &= -\frac{\Gamma ds}{4\pi} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r^2} \\ dw &= \frac{\Gamma ds}{4\pi} \left\{ (1 + \sin \alpha) \frac{\cos 2\beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cos^2 \beta}{r^2} \right\} \end{aligned} \right\} (31)$$

Zur Berechnung des Anstellwinkels und des Widerstandes braucht man die Geschwindigkeitskomponente  $w_n$  senkrecht zur Flugrichtung und senkrecht zur Richtung des beeinflussten tragenden Elementes. Ist dieses (1 in Abb. 3) gegen die X-Achse unter dem Winkel  $\epsilon$  geneigt, so ist

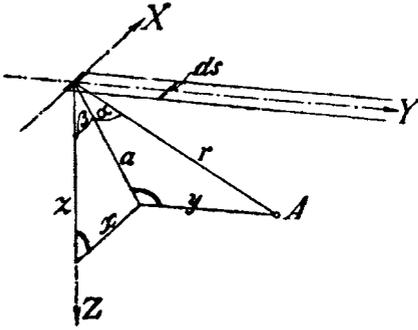


Abb. 2.

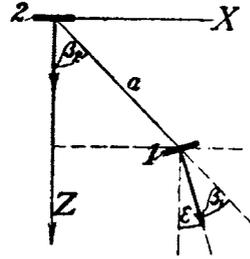


Abb. 3.

$$\begin{aligned}
 dw_n &= dw \cos \varepsilon + du \sin \varepsilon \\
 &= \frac{\Gamma ds}{4\pi} \left\{ (1 + \sin \alpha) \frac{\cos (2\beta - \varepsilon)}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cos \beta \cos (\beta - \varepsilon)}{r^2} \right\}. \quad (31a)
 \end{aligned}$$

Der Widerstand, der an einem tragenden Element 1 durch das Feld des tragenden Elementes 2 entsteht, ist nun

$$d^2 W_{12} = \varrho \Gamma_1 ds_1 \cdot dw_n.$$

Die Ausrechnung ergibt, wenn wieder  $\beta_1$  für  $\beta - \varepsilon$  und  $\beta_2$  für  $\beta$  eingeführt wird,

$$d^2 W_{12} = \frac{\varrho \Gamma_1 ds_1 \cdot \Gamma_2 ds_2}{4\pi} \left\{ (1 + \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{a^2} + \frac{\sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} \right\}. \quad (32)$$

Der Widerstand, den das Element 1 an dem Element 2 verursacht, wird, wie leicht ersichtlich, erhalten, wenn für  $\alpha$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ ,  $\alpha - \pi$ ,  $\beta_1 + \pi$  und  $\beta_2 + \pi$  gesetzt wird. Hiermit wird

$$d^2 W_{21} = \frac{\varrho \Gamma_2 ds_2 \cdot \Gamma_1 ds_1}{4\pi} \left\{ (1 - \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{a^2} - \frac{\sin \alpha \cos \beta_2 \cos \beta_1}{r^2} \right\}. \quad (32a)$$

Die beiden Widerstandsanteile sind also nur dann gleich, wenn beide Elemente in derselben Querebene liegen. Sehr bemerkenswert ist, daß die Summe  $d^2 W_{12} + d^2 W_{21}$  auch im allgemeinen Fall unabhängig von  $\alpha$  ist. Durch Integration über zwei Gruppen von tragenden Elementen ergibt sich demnach die Summe der beiden gegenseitigen Widerstände zu

$$W_{12} + W_{21} = \frac{\varrho}{2\pi} \iint \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 ds_1 ds_2 \cdot \cos (\beta_1 + \beta_2)}{a^2}, \quad (33)$$

also unabhängig von  $\alpha$ , d. h. von den  $y$ -Werten der einzelnen tragenden Elemente. Diese Summe bleibt daher ungeändert, wenn die beiden tragenden Gruppen in der Flugrichtung gegeneinander

verschoben werden. Da der Gesamtwiderstand eines tragenden Systems außer solchen gegenseitigen Widerständen noch die Eigenwiderstände enthält, die von einer Verschiebung des zugehörigen Flügels in der Flugrichtung natürlich ebenfalls unabhängig sind, läßt sich der Satz aussprechen:

„Der Gesamtwiderstand eines beliebigen Tragwerks<sup>1)</sup> bleibt ungeändert, wenn die tragenden Elemente, ohne ihre Auftriebskräfte zu ändern, in der Flugrichtung gegeneinander verschoben werden (oder wenn, wie man sagt, ihre „Staffelung“ geändert wird)“.

Dieser Satz ist ebenfalls von Munk gefunden und in seiner Göttinger Dissertation<sup>2)</sup> auf andere Art bewiesen worden. Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei betont, daß die Anstellwinkel der einzelnen tragenden Elemente bei der Verschiebung entsprechend den Änderungen der normalen Geschwindigkeitskomponenten  $w_n$  so zu ändern sind, daß die wirksamen Anstellwinkel (vergl. Nr. 13) und daher auch die Auftriebskräfte unverändert bleiben.

Der innere Grund für die Unabhängigkeit des Gesamtwiderstandes von der Staffelung ist der, daß die Widerstandsarbeit gleich der in der Wirbelbewegung hinter dem Tragwerk zurückgelassenen kinetischen Energie ist; es kommt also nur auf dieses Wirbelsystem selbst an, nicht auf die genaueren Umstände, unter denen es erzeugt worden ist.

Die tragenden Elemente sind bisher immer senkrecht zur Flugrichtung angenommen worden. Eine tragende Linie, die schräg zur Flugrichtung verläuft, kann für die Berechnung von gegenseitigen Widerständen, wenn der Wert  $a = 0$  ausgeschlossen bleibt, unbedenklich durch eine aus Elementen der hier betrachteten Art zusammengesetzte Treppenlinie ersetzt werden. Für die Berechnung des Eigenwiderstandes von solchen Flügeln bestehen die in Fußnote S. 17 der I. Mitteilung bereits erwähnten Schwierigkeiten, die eine Durchführung der Integration in endlichen Ausdrücken nur zulassen, wenn von dem Bilde der tragenden Linie abgegangen und die Verteilung des Auftriebes nach der Tiefe berücksichtigt wird. Nach der vorangegangenen Überlegung über die Wirbel-

---

1) Mit dem Wort „Tragwerk“ werde im folgenden die allgemeinste Form eines tragenden Flügelsystems bezeichnet, im Gegensatz zu den speziellen Formen des Eindeckers, Zweideckers usw.

2) Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Göttingen, 1918; z. Z. im Druck.

energie ist es jedoch ersichtlich, daß nicht nur die in diesem Abschnitt abgeleiteten Sätze auch für derartige Flügel gelten, sondern auch deren Eigenwiderstand mit dem der ihnen entsprechenden ganz in der Querebene liegenden tragenden Linie übereinstimmen.

3. Für ein Flügelsystem, bei dem die relative Verteilung des Auftriebs innerhalb jedes einzelnen Flügels festgelegt ist, ergibt sich durch Anwendung von Gl. (16) und (33) der Gesamtwiderstand als eine (definite) quadratische Form der Flügelauftriebe  $A_1, A_2 \dots A_n$ . Man kann daher nach Ermittlung der Koeffizienten der Form leicht die Aufgabe lösen, bei gegebenem Gesamtauftrieb  $\sum A_i$  bis  $A_n$  so zu bestimmen, daß der Gesamtwiderstand ein Minimum wird. Die Koeffizienten für Tragwerke, die aus geraden Eindeckern bestehen, deren Mittelpunkte sämtlich in einer die Flugrichtung enthaltenden Lotebene liegen, habe ich unter der Annahme berechnen lassen, daß der Auftrieb über jeden einzelnen Flügel nach einer halben Ellipse verteilt ist, und habe die praktischen Folgerungen aus diesen Ergebnissen in einem Aufsatz in den „Technischen Berichten der Flugzeugmeisterei“ gezogen<sup>1)</sup>. Hier mag aus den Ergebnissen das Folgende kurz erwähnt werden: Der gegenseitige Widerstand von zwei Flügeln mit den Spannweiten  $b_1$  und  $b_2$  und dem senkrecht zur Flugrichtung gemessenen Abstand  $h$  kann geschrieben werden

$$W_{12} = W_{21} = \frac{\sigma A_1 A_2}{\pi q b_1 b_2}, \quad (34)$$

wobei der Zahlenfaktor  $\sigma$  eine Funktion von  $h / \frac{b_1 + b_2}{2}$  und  $\mu = b_2/b_1$  ist. Die Ausrechnung ergab folgende Tabelle:

Tabelle 1. Werte von  $\sigma$ .

$2h/(b_1 + b_2) = 0$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	
$b_2/b_1 = 1,0$	1,000	0,780	0,655	0,561	0,485	0,370	0,290	0,230
0,8	0,800	0,690	0,600	0,523	0,459	0,355	0,282	0,225
0,6	0,600	0,540	0,485	0,437	0,394	0,315	0,255	0,210

Für den wichtigsten Fall,  $b_1 = b_2$ , kann folgende Näherungsformel für  $\sigma$  angewandt werden:

1) „Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern“. T. B. Bd. III, S. 309.

$$\sigma = \frac{1 - 0,66 h/b}{1,055 + 3,7 h/b}. \quad (35)$$

Als Beispiel mögen die Ergebnisse für einen Doppeldecker mit den Flügelspannweiten  $b_1$  und  $b_2$  ( $\leq b_1$ ) und der Höhe  $h$  näher angegeben werden. Der induzierte Widerstand wird

$$W = \frac{1}{\pi q b_1^2} (A_1^2 + 2\sigma\mu A_1 A_2 + \mu^2 A_2^2) \quad (36)$$

dieser wird ein Minimum für

$$A_2 : A_1 = (\mu - \sigma) : \left( \frac{1}{\mu} - \sigma \right);$$

der Wert dieses Minimums ergibt sich zu

$$W_{\text{min.}} = \frac{(A_1 + A_2)^2}{\pi q b_1^2} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{1 - 2\sigma\mu + \mu^2}. \quad (37)$$

Der erste Faktor dieser Formel ist der Widerstand eines Eindeckers von der Spannweite  $b_1$  mit dem Auftrieb  $A_1 + A_2$ . Da für  $h > 0$  immer  $\sigma < \mu$  ist, wird der zweite Faktor immer kleiner als 1.

Wird die größere Spannweite  $b_1$  vorgeschrieben, die kleinere aber freigelassen, so ergibt sich der kleinste Widerstand für  $b_2 = b_1$  und  $A_2 = A_1$ . Der zweite Faktor von Gl. (37) wird hier  $\frac{1}{2}(1 + \sigma)$ .

Das Verhältnis des induzierten Widerstandes eines Tragwerks zu dem des Eindeckers mit gleicher Spannweite und gleichem Gesamtauftrieb werde allgemein mit  $\alpha$  bezeichnet. Dann besteht für ein Tragwerk, sobald der zugehörige Zahlwert von  $\alpha$  bekannt ist, die Möglichkeit der Umrechnung von einem Eindecker, für den Versuchsergebnisse vorliegen mögen, in derselben Weise, wie dies in Nr. 15 der I. Mitteilung für die Umrechnung von Eindeckern untereinander dargetan ist. Gleiches gilt auch von Flügelsystemen untereinander. Für den Widerstand von zwei Tragwerken gilt also bei gleichem  $c_a$  entsprechend Gl. (27 a):

$$c_{w_1} - c_{w_2} = \frac{c_a^2}{\pi} \left( \frac{\alpha_1 F_1}{b_1^2} - \frac{\alpha_2 F_2}{b_2^2} \right) 1). \quad (38)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß entweder, was in der Regel zutrifft, die Widerstandsziffer  $c_{w_0}$  des Profilwiderstandes sich mit dem An-

---

1) Dieser Gedanke stammt von Munk, vergl. dessen Abhandlung: „Beitrag zur Aerodynamik der Flugzeugtragorgane, Techn. Berichte der Flugzeugmeisterei Bd. II, S. 137.

stellwinkel nicht stark ändert, oder aber, daß die Flächenbelastung aller Flügel dieselbe ist.

4. Bei der Aufgabe, für eine gegebene Auftriebsverteilung eines Mehrdeckers die zugehörige Flügelform zu berechnen, tritt bei den üblichen Maßverhältnissen (Abstand zweier Flügel von der Größenordnung der Flügeltiefe) ein Einfluß sehr fühlbar auf, der bisher noch nicht erwähnt worden ist, der „Krümmungseinfluß“: Die Stromlinien erfahren am Ort eines Flügels durch die Einwirkung der anderen Flügel eine Krümmung. Man darf auf Grund des Superpositionsprinzips, das innerhalb der Theorie der ersten Ordnung als gültig erkannt ist, annehmen, daß ein in der gekrümmten Strömung stehender Flügel dann dieselben Kräfte liefert, wie ein in gerader Strömung stehender, wenn seine eigene Wölbung um den Betrag der Stromlinienkrümmung größer ist als die des Vergleichsflügels. Eine erste Näherung ergibt sich, wenn die Krümmung der Stromlinien für die Mitte der Tiefe unter der Annahme berechnet wird, daß die übrigen Tragflügel durch tragende Linien ersetzt werden dürfen. An einem Aufpunkt  $A$ , an dem die zum Flügel und zur Flugrichtung senkrechte Geschwindigkeitskomponente, die von den übrigen Flügeln herrührt,  $= w_n$  ist, ist die Krümmung der Stromlinie genähert  $\frac{1}{R} = \frac{1}{V} \frac{\partial w_n}{\partial y}$ . In dieser

Weise ist der Krümmungseinfluß in der Arbeit von Betz über die gegenseitige Beeinflussung der Tragflügel eines Doppeldeckers<sup>1)</sup> berücksichtigt worden. Genauere Werte wird man erhalten, wenn einerseits bei den beeinflussenden Flügeln auf die Verteilung des Auftriebes nach der Tiefe Rücksicht genommen wird, andererseits auch bei dem beeinflussten Flügel statt der Krümmung an einer Stelle in der Mitte der Tiefe der Verlauf von  $w_n$  über die ganze Tiefe passend bewertet wird. Derartige Untersuchungen sind zur Zeit in Vorbereitung.

### B. Tragwerke kleinsten Widerstandes.

5. Die Bedingungen, unter denen für ein Tragwerk von gegebener Form der Flügelmittellinien ein gegebener Gesamtauftrieb mit einem Minimum von induziertem Widerstand verknüpft ist, hat mein Mitarbeiter M. Munk in seiner bereits erwähnten verdienstvollen Dissertation in voller Allgemeinheit angegeben. Die

---

1) vergl. Fußnote 4, S. 1 der I. Mitteilung.

im folgenden mitgeteilte Ableitung, die unter Benutzung der Ergebnisse der Abschnitte 1 und 2 auf kürzestem Wege zum Ziel kommt, unterscheidet sich allerdings formal stark von der Munk-schen Ableitung, die auf der Anwendung der Mittel der klassischen Variationsrechnung beruht.

Für das uns vorgegebene Tragwerk dürfen wir, da der Gesamt-widerstand dadurch nicht geändert wird, das durch Verschiebung aller tragenden Elemente in eine Querebene entstandene „ungestaffelte Tragwerk“ setzen, für das die Gegenseitigkeitsbeziehung  $W_{12} = W_{21}$  besteht. Wir wenden diese Beziehung in der Art an, daß das Tragwerk als Ganzes die eine Gruppe von tragenden Elementen bildet, während die andere Gruppe die ihm überlagerte Variation ist. Diese Einteilung ist zulässig, da der Satz  $W_{12} = W_{21}$  nach der Bemerkung am Ende von Anmerkung 3) zu Nr. 1 auch für räumlich zusammenfallende Tragwerke gilt.

Wird der Auftriebsverteilung eine über eine kurze Strecke  $ds$  verteilte zusätzliche Luftkraft  $\delta N$  normal zu der gegebenen Richtung des Flügelements überlagert, und ist die von dem Tragwerk herrührende Störungsgeschwindigkeit normal zum Flügelement  $= w_n$ , dann ist der Widerstand  $W_{21}$ , den die Geschwindigkeit  $w_n$  an der überlagerten Luftkraft hervorbringt,  $= \delta N \cdot w_n / V$ , der gesamte gegenseitige Widerstand also doppelt so groß.

Zur Erfüllung der Nebenbedingung, daß die Variation des Auftriebes gleich Null ist, seien zwei Zusatzkräfte  $\delta N_1$  und  $\delta N_2$  auf zwei tragenden Elementen  $ds_1$  und  $ds_2$  angenommen, die mit der X-Achse die Winkel  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  bilden. Dann ist wegen des Verschwindens der ersten Variation des Widerstandes

$$\delta N_1 \cdot w_{n_1} + \delta N_2 \cdot w_{n_2} = 0;$$

die Nebenbedingung ergibt

$$\delta N_1 \cos \varepsilon_1 + \delta N_2 \cos \varepsilon_2 = 0.$$

Beides ist nur verträglich, wenn

$$w_{n_1} : w_{n_2} = \cos \varepsilon_1 : \cos \varepsilon_2$$

oder allgemein für alle tragenden Elemente des ungestaffelten Tragwerks

$$w_n = w_0 \cos \varepsilon \quad (39)$$

ist. Sind alle tragenden Elemente parallel, dann ist  $\cos \varepsilon = 1$  und daher  $w_n = w = \text{const.}$  für alle tragenden Stellen<sup>1)</sup>.

1) Für den geraden Eindecker war dieses Ergebnis durch eine Sonderbetrachtung bereits früher (in Nr. 15 der I. Mitteilung) gewonnen worden.

Im allgemeinen Fall von beliebig im Raum verteilten tragenden Elementen führt nach dem Früheren diejenige Auftriebsverteilung zum Widerstandsminimum, die an dem entsprechenden ungestaffelten Tragwerk der Bedingung (39) genügt. Daß es sich hier immer um ein echtes Minimum handelt, ist daraus zu entnehmen, daß die „zweite Variation“ den Eigenwiderstand der zusätzlichen Luftkräfte darstellt, also wesentlich positiv ist.

6. Für die Lösung der Aufgabe, die Auftriebsverteilung zu finden, die zum Widerstandsminimum führt, ergibt sich nach Munk ein Weg durch die folgende Betrachtung: Die Geschwindigkeit, die von einem abgehenden Wirbel in der Querebene durch seinen Anfangspunkt hervorgerufen wird, ist gerade die Hälfte derjenigen, die ein nach beiden Seiten unendlich langer Wirbelfaden von gleicher Stärke hervorbringen würde. Bei einem ungestaffelten Tragwerk stimmt daher das Feld der  $u$  und  $w$  in der Querebene bis auf einen Faktor 2 überein mit demjenigen eines Systems von nach beiden Seiten unendlich langen Wirbeln, das in Anordnung und Stärke dem der abgehenden Wirbel des Tragwerks entspricht. Dieses Feld ist aber eine ebene Strömung, die quellenfrei und außerhalb der durch die tragenden Stellen gezogenen Parallelen zur Flugrichtung auch wirbelfrei ist. Die in der vorigen Nummer abgeleitete Bedingung für das Eintreten des Widerstandsminimums bedeutet für diese ebene Strömung nichts anderes, als die Grenzbedingung für eine aus den Wirbelflächen gebildete starre Zylinderschale, die sich mit der Geschwindigkeit  $2w_0$  in der Richtung des gegebenen Auftriebs bewegt<sup>1)</sup>; die Flüssigkeit ist dabei im Unendlichen in Ruhe.

Die Behandlung von Beispielen ist dadurch zurückgeführt auf eine bekannte Aufgabe des ebenen Problems der Hydrodynamik. Die Wirbelstärke in der Wirbelfläche (d. h. der Geschwindigkeitsprung) für die der Geschwindigkeit  $2w_0$  entsprechende Bewegung ist nach Früherem  $= \frac{d\Gamma}{ds}$ ; hieraus ergibt sich durch Integration  $\Gamma$  (das an der Flügelspitze  $= 0$  ist) gleich dem Potentialsprung  $[\Phi]$ <sup>2)</sup>. Die Normalkraft auf die Längeneinheit des Flügels  $N$  ist  $\rho \Gamma V$ ; somit ist der Auftrieb

$$A = \int N \cos \varepsilon ds = \int N dx = \rho V \int [\Phi] dx; \quad (40)$$

1) Entsprechend den früheren Festsetzungen werden die Flügelkräfte hier immer in der Richtung gerechnet, in der sie auf die Flüssigkeit wirken.

2) Eckige Klammern als Differenzzeichen!

eine etwaige Seitenkraft ist

$$S = \int N \sin \varepsilon ds = - \int N dz = - \rho V \int [\Phi] dz^1). \quad (40a)$$

Man kann die Strömung in eine stationäre verwandeln, indem man der Flüssigkeit eine der Geschwindigkeit des starren Gebildes entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit erteilt, durch die das starre Gebilde zur Ruhe gebracht wird, und im Unendlichen die Geschwindigkeit  $-2w_0$  entsteht. Die Gleichung (40) wird hierdurch nicht geändert. —

Für mehrfach zusammenhängende tragende Gebilde erhält man bei diesem letzteren Bilde in dem abgeschlossenen Inneren ruhende Flüssigkeit. Der Potentialsprung wird dadurch, daß für das Potential im Innern ein beliebiger konstanter Wert angenommen werden kann, unbestimmt. Dem entspricht in unserer Anwendung die Tatsache, daß bei einem ringförmig geschlossenen Tragwerk eine konstante Normalkraft  $N$ , die ja auch keine, von Null verschiedene Resultante ergibt, keinen Widerstand hervorruft und daher auch zu einer bestehenden Verteilung von Auftrieb willkürlich hinzugefügt werden darf, ohne den Widerstand zu ändern. Man kann auch das Innere des Ringes durch tragende Linien, die von einem Punkt der Berandung zu einem anderen führen, in Felder teilen und in jedem Feld ein anderes Potential annehmen. Die durch die jetzt vorhandenen Potentialsprünge definierten Normalkräfte ändern den Widerstand ebenfalls nicht. Der innere Grund dieses Verhaltens ist der, daß von den inneren Flügeln, bei denen auf der ganzen Länge die Normalkraft, also auch  $\Gamma$  konstant ist, keine Wirbel abgehen.

Für die praktische Rechnung wird man die Geschwindigkeit im Unendlichen (nach der zweiten Auffassung), die  $= 2w_0$  ist, auf 1 normieren, d. h. man berechnet statt  $\Phi$  das reduzierte Potential  $\varphi = \Phi/2w_0$ , das die Dimension einer Länge hat.  $\int[\varphi]dx$  ist also eine Fläche, die im folgenden  $F'$  heißen möge. Hiermit wird

$$A = \rho V \cdot 2w_0 F',$$

also

$$w_0 = A/2\rho VF'; \quad (41)$$

---

1) Setzt man  $dx + iz = d\xi$ ,  $\Phi + i\Psi = Z$  und beachtet, daß der Sprung der Stromfunktion  $\Psi$  aus Gründen der Kontinuität  $= 0$  ist, so kann man auch schreiben  $A - iS = \rho V \int^{\circ} Z d\xi$ , wobei der Integrationsweg das starre Gebilde — oder anders gesprochen, das Tragwerk — von außen umschlingt. Für das Integral kann auch das Residuum im Unendlichen genommen werden.

andererseits ist

$$W = \int \frac{w_n}{V} N ds = \frac{w_0}{V} \int \cos \varepsilon \cdot N ds = \frac{w_0}{V} A$$

(gemäß Gl. 39 und 40); also mit (41)

$$W = A^2/2 \rho V^3 F' = A^2/4 q F'. \quad (42)$$

Werden wieder die dimensionslosen Größen  $c_a = A/q F'$  und  $c_{w_i} = W/q F'$  eingeführt, so wird

$$c_{w_i} = c_a^2 F/4 F'. \quad (43)$$

7. Das Tragwerk erteilt, während es seine Bahn entlang bewegt wird, einer Luftpartie nach der anderen die, wie wir annehmen, kleinen Geschwindigkeiten, die wir als das Ergebnis der abgehenden Wirbel kennen gelernt haben. Gemäß der vorangegangenen Überlegung — oder auch gemäß den Gleichungen (31) mit  $\sin \alpha = 1$  — sind diese hinreichend weit hinter dem Tragwerk, wenn wir von den bis dahin eingetretenen Deformationen der Wirbelfläche im Sinne der Theorie der I. Ordnung absehen,  $= 2u$  bzw.  $2w$ , wobei gemäß unserer bisherigen Bezeichnung  $u$  und  $w$  die Geschwindigkeiten beim ungestaffelten Tragwerk in der Querebene sind. Statt diese Geschwindigkeiten in zeitlicher Reihenfolge immer neuen Luftpartien zu erteilen, kann man sich vorstellen, daß sie durch einen Stoß auf der ganzen Bahn des Tragwerks gleichzeitig erzeugt werden. Zur Ausführung dieses Stoßes bedarf man eines festen zylindrischen Gebildes von der Gestalt des vom Tragwerk überstrichenen geometrischen Ortes. Für den Fall, daß es sich um ein Tragwerk kleinsten Widerstandes handelt, ist dieses Gebilde starr, andernfalls wird es bei dem Stoß eine Formänderungsbewegung ausführen. Man kann nun leicht von dem Stoßvorgang auf den Vorgang am Tragwerk umrechnen und

wird dabei wieder auf Gl. (40) geführt. Die Stoßdrücke  $\int_0^\tau p d\tau$

( $p =$  Flüssigkeitsdruck,  $\tau =$  Stoßdauer), die nach einem bekannten Satz der Hydrodynamik  $= \rho \Phi$  sind, wo  $\Phi$  das Strömungspotential ist, ergeben nämlich durch den Drucksprung  $[p]$  an den festen Flächen eine Stoßkraft normal zur Fläche, die für die Flächeneinheit  $= \int_0^\tau [p] dt = \rho [\Phi]$  ist. Diese entspricht der Wirkung

der Normalkraft  $N$  für die Zeit, in der das Tragwerk die Längen-

einheit zurücklegt, es ist somit  $N/V = \rho [\Phi]$  in Übereinstimmung mit dem Früheren.

Für die Fläche  $F'$  läßt sich noch eine einfache mechanische Bedeutung angeben. Schreibt man die Geschwindigkeit des zylindrischen Gebildes nach dem Stoß, also die Geschwindigkeit der Wirbelfläche weit hinter dem Tragwerk,  $2w_0 = w_1$ , dann ist nach Gl. (41) und (42)

$$A = \rho F' V w_1$$

und 
$$W \cdot V = A w_0 = \rho F' V \frac{w_1^2}{2}.$$

$\rho F' V$  ist die sekundlich durch den Querschnitt  $F'$  hindurchtretende Luftmasse. Die Gleichungen zeigen, daß man den Auftrieb und die Widerstandsarbeit richtig erhält, wenn man annimmt, daß die Luft innerhalb des Querschnittes  $F'$  die Abwärtsgeschwindigkeit  $w_1$  erhalten hat, außerhalb aber unabgelenkt bleibt.

8. Der vergleichenden Beurteilung von verschiedenen Tragwerkformen dient die nachfolgende Betrachtung:

Zunächst gilt der Satz: „Bei unverändertem Gesamtauftrieb wird durch Hinzufügen von Tragwerkteilen das Minimum des induzierten Widerstandes verkleinert, durch Wegnahme von Tragwerkteilen dagegen vergrößert. In Ausnahmefällen kann es unverändert bleiben“. Der Beweis ergibt sich durch folgende Überlegung: das Weglassen eines Tragwerkteiles ist gleichbedeutend damit, daß für das vollständige Tragwerk eine Auftriebsverteilung gewählt wird, bei der die Auftriebsdichte in dem fortzulassenden Teil Null ist. Diese Verteilung wird im allgemeinen von der Minimalverteilung des vollständigen Tragwerks abweichen, ihr Widerstand also größer sein als der Minimalwiderstand des vollständigen Tragwerks. Nur in dem Ausnahmefall, daß eine zum Widerstandsminimum führende Auftriebsverteilung mit Auftrieb Null in den wegzulassenden Teilen möglich ist, bleibt der Widerstand unverändert.

Nach dem in Nr. 6 über mehrfach zusammenhängende Tragwerke Gesagten dürfen im Innern von ringförmigen Tragwerken Flügel, die von einem Randpunkt zu einem anderen verlaufen, nach Belieben eingefügt werden, ohne daß der Minimalwiderstand geändert wird. Durch solche Zufügungen und nachheriges Fortlassen des Überflüssigen kann man aber aus einem ringförmigen Tragwerk alle beliebigen Tragwerke herstellen, die ganz in seinem Innern liegen, oder wenigstens seine Grenzen nirgends überschreiten. Der induzierte Widerstand kann bei dieser Umwandlung nie abnehmen,

im allgemeinen wird er beim Fortlassen der in Wegfall kommenden Teile zunehmen. Hieraus entnimmt man den für Abschätzungen wertvollen Satz: „Ein ringförmiges Tragwerk besitzt von allen Tragwerken, die seine Grenzen nirgends überschreiten, den kleinsten Minimalwert des induzierten Widerstandes“.

9. Die Fläche  $F'$  läßt sich nach den aus der Hydrodynamik bekannten Methoden für eine Reihe von Tragwerksformen berechnen. Für den geraden Eindecker von der Spannweite  $b$ , entsprechend der Strömung um eine ebene Platte, ergibt sich  $F'$  gleich der Kreisfläche mit  $b$  als Durchmesser:  $F' = \frac{\pi}{4} b^2$ . Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (42) ergibt sich die früher gewonnene Beziehung (25). Weiter konnte  $F'$  für ein Tragwerk mit einem lotrechten Kreis als Mittellinie leicht berechnet werden. Ist der Durchmesser  $= b$ , so wird hier  $F' = \frac{\pi}{2} b^2$ .

Die Ermittlung von  $F'$  für einige verwickeltere Fälle, bei denen elliptische Integrale auftreten, hat Herr R. Grammel auf meine Veranlassung durchgeführt. Im folgenden mögen die Ergebnisse ohne Beweis kurz angegeben werden. Dabei bedeuten  $K$  und  $E$  die Normalintegrale erster und zweiter Gattung zum Modul  $k$ ,  $K$  und  $E$  die zugehörigen vollständigen Normalintegrale;  $K'$   $E'$ ,  $K'$  und  $E'$  sind die entsprechenden Integrale zum Modul  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ .

1) Für einen aus zwei geraden Eindeckern von gleicher Spannweite zusammengesetzten Doppeldecker ergibt sich folgende Rechenvorschrift: für einen Modul  $k$ , der nahe an Null angenommen wird, ermittle man die Hilfsgrößen

$$\varepsilon^2 = E'/K'; \quad t = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{1 - k^2}} \quad \text{und} \quad 1/\delta = E'(t) - \varepsilon^2 K'(t);$$

dann ergibt sich das Verhältnis der Höhe zur Spannweite des Doppeldeckers zu

$$h/b = \delta \pi / 2 K'$$

und die Fläche  $F'$  zu

$$F' = \frac{\pi}{4} b^2 \delta^2 (1 + k^2 - 2\varepsilon^2).$$

2) Für ein rechteckförmiges ringartig geschlossenes Tragwerk (das also aus einem Doppeldecker durch Einfügen von abschließenden Seitenwänden entsteht, und das nach dem in Nr. 8 Gesagten einen kleineren induzierten Widerstand hat als alle in seinem Rahmen eingeschlossenen Mehrdecker) fand Grammel die Beziehungen

$$h/b = \frac{E - k'^2 K}{E' - k'^2 K'} \text{ und}$$

$$F' = \frac{\pi b^3 k'^2}{4(E' - k'^2 K')^2}.$$

3) Für einen Eindecker von der Spannweite  $b$  mit einem Spalt von der Breite  $d$  in der Mitte wird zunächst zu der vom Mittelpunkt aus gerechneten Abszisse  $x$  die Hilfsvariable

$$t = \sqrt{\frac{b^2 - 4x^2}{b^2 - d^2}} \text{ gebildet, dann mit } k = \sqrt{1 - (d/b)^2}$$

$$\Phi = \frac{b}{2} \left( \frac{E}{K} K(t) - E(t) \right)$$

berechnet, worauf  $F'$  durch Quadratur aus

$$F' = 4 \int_{d/2}^{b/2} \Phi \, dx$$

ermittelt werden kann.

Die Durchführung der Zahlenrechnung für diese drei Fälle, die ich Herrn K. Pohlhausen verdanke, hat die folgenden nicht uninteressanten Zahlenwerte ergeben. Es ist überall das Verhältnis  $\kappa$  des Widerstandes der untersuchten Anordnung zu dem Widerstand des Eindeckers von gleicher Spannweite angegeben:

Tabelle 2. Werte von  $\kappa = \frac{\pi}{4} b^3 : F'$ .

$h/b = 0$	0,05	0,10	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	
Doppel- decker	1,000	0,890	0,825	0,776	0,739	0,684	0,645	0,615
Rechteck	1,000	0,865	0,787	0,728	0,680	0,601	0,545	0,500

Der Doppeldecker ist also bei gleicher Spannweite und gleichem Auftrieb dem Eindecker, das Rechteck beiden überlegen, wie das allgemeine Gesetz es verlangt. Für den praktischen Gebrauch dienen folgende Näherungsformeln: für den Doppeldecker:

$$\kappa \approx \frac{1 + 1,63 h/b}{1,027 + 3,84 h/b} \tag{44}$$

für das Rechteck

$$\kappa \approx \frac{1 + 0,45 h/b}{1,045 + 2,8 h/b} \quad (45)$$

Bei dem Tragflügel mit Spalt liegt der Vergleich mit demjenigen Eindecker nahe, der durch Schließen des Spaltes unter Zusammenschieben der beiden Teile entsteht, der also die Spannweite  $b - d$  hat. Über das Verhältnis des Widerstandes mit Spalt zu dem ohne Spalt gibt die Tabelle 3 Auskunft.

Tabelle 3. Werte von  $\kappa = \frac{\pi}{4} (b - d)^2 : F^2$ .

$d/b = 0,000$	0,001	0,01	0,0316	0,1	0,25	0,5	1,0
$\kappa = 1,000$	1,312	1,480	1,612	1,763	1,896	1,975	2,000

Diese Werte werden durch die Formel angenähert:

$$1/\kappa = 1 - \frac{1}{2 \sqrt{1 + 0,35 (\log b/d)^2}} \quad (46)$$

### C. Einfluss von Wänden und von freien Grenzen.

10. Das Studium des Einflusses einer seitlichen Begrenzung des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes auf einen darin befindlichen Tragflügel ist vor allem von Bedeutung für die Beurteilung von Versuchsergebnissen, die im künstlichen Luftstrom gewonnen sind. Die Versuchsanstalten verwenden teils Kanäle mit festen Wänden, teils freie Luftstrahlen, die mit angenähert zylindrischer Begrenzung den sie umgebenden Luftraum durchströmen. Es entsteht so die Aufgabe, das Verhalten eines Tragflügels oder Tragwerks bei festen oder freien Grenzen parallel der Richtung von  $V$  zu untersuchen.

Bei festen Wänden ist die exakte Bedingung das Verschwinden der Normalkomponente  $w_n$  der Geschwindigkeit an den festen Wänden, bei freien Grenzen dagegen die Unveränderlichkeit des Druckes auf diesen. Die letztere Bedingung kann im Bereich der Theorie der I. Ordnung wie folgt umgeformt werden: Nach dem Bernoulli'schen Satz ist an den freien Grenzen

$$(V + v)^2 + u^2 + w^2 = \text{const.} = V^2$$

oder

$$2Vv + u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

innerhalb der I. Ordnung gilt also  $v = 0$  auf den freien Grenzen, oder auch  $v = 0$  auf demjenigen Zylinder parallel zur  $Y$ -Achse<sup>1)</sup>, der bei Abwesenheit der Störung durch den Tragflügel die Strahlgrenze darstellen würde.

Die beiden Aufgaben lassen sich in der Weise lösen, daß zunächst der Tragflügel mit dem aus den früheren Abschnitten bekannten Geschwindigkeitsfeld für die unendlich ausgedehnte Flüssigkeit betrachtet wird, und nun (im Innern singularitätenfreie) Potentialströmungen zugefügt werden, bei denen an den Grenzen  $w_n$  bzw.  $v$  entgegengesetzt gleiche Werte haben, wie die Flügelströmung. Die Geschwindigkeitskomponenten, die von der Zusatzströmung am Flügel verursacht werden, ändern dort den Anstellwinkel und den Widerstand in gleicher Weise, wie dies früher von den Störungsgeschwindigkeiten dargelegt worden ist, die von andern Flügeln herkommen.

Für den freien Strahl, der uns wegen der Göttinger Versuchsanlage besonders nahe liegt, ergibt sich bei beliebiger Form des Strahlquerschnittes das Folgende: Die Randwerte der  $Y$ -Komponente der Flügelströmung auf der zylindrisch angenommenen Strahl-oberfläche seien  $\bar{v}$ ; die  $Y$ -Geschwindigkeit der zusätzlichen Potentialbewegung auf dem Strahlrand ist daher  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\bar{v}$ ; das Potential wird also längs jeder Erzeugenden des Strahlrandes integrierbar: es ist

$$\bar{\Phi}(y) = - \int_{-\infty}^y \bar{v} dy.$$

(Die untere Grenze des Integrals ergibt sich daraus, daß hinreichend weit stromaufwärts das zusätzliche Feld verschwinden muß). Das zusätzliche Feld im Innern des Strahles ergibt sich hieraus durch Lösung der „ersten Randwertaufgabe“.

Soweit es sich lediglich um die Berechnung des Gesamtwiderstandes handelt, genügt es wieder, den Zustand weit hinter dem Tragwerk, also für  $y = \infty$  zu kennen. Die Randwerte

$$\bar{\Phi}_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v} dy$$

---

1) Das Koordinatensystem möge entsprechend dem bisher gebrauchten so gelegt sein, daß die  $Y$ -Achse mit der Richtung des ankommenden Luftstrahles übereinstimmt und die  $Z$ -Achse parallel zum resultierenden Auftrieb ist.

sind, wie leicht zu sehen, unabhängig von etwaiger Staffelung der tragenden Elemente, aus deren Wirkungen sich  $\bar{v}$  additiv zusammensetzt. Diese vereinfachte Aufgabe führt also wieder auf ein ebenes Problem, nämlich auf die Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes  $u, w$  für die Randwerte  $\bar{\Phi}_1$  des Potentials.

Für ein ungestaffeltes Tragwerk ist  $v$ , und daher auch  $\bar{v}$ , eine gerade Funktion von  $y$ , damit wird  $-\int_0^y \bar{v} dy$  eine ungerade Funktion von  $y$ . Das zusätzliche Randpotential wird damit

$$\bar{\Phi} = -\int_{-\infty}^0 \bar{v} dy - \int_0^y \bar{v} dy = \bar{\Phi}_0 + \bar{\Phi}', \text{ wo } \bar{\Phi}' \text{ ungerade.}$$

Entsprechendes gilt für das Potential im Innern; die Geschwindigkeiten  $u$  und  $w$  zerlegen sich dadurch in einen von  $y$  unabhängigen Teil  $u_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$ ,  $w_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$  und in einen Teil  $u' = \frac{\partial \Phi'}{\partial x}$ ,  $w' = \frac{\partial \Phi'}{\partial z}$ , der in  $y$  ungerade ist. In der Querebene des Tragwerks verschwinden die ungeraden Teile, und es bleibt somit wieder das ebene Problem übrig. Wie leicht zu sehen, ist genau entsprechend dem Früheren  $\Phi_1 = 2\Phi_0$  und  $u_1 = 2u_0$ ,  $w_1 = 2w_0$ .

Wegen  $\bar{v} = 0$  am Rande für die fertige Strömung ist dort überall  $\Phi = \text{const.}$ , also setzen die Stromlinien der zu der Parallelbewegung mit der Geschwindigkeit  $V$  hinzukommenden Strömung senkrecht auf der Strahloberfläche auf. Bei der Betrachtungsweise von Nr. 7, die hier ebenfalls anwendbar ist, findet man aus der Forderung, daß der Druck auf der Strahloberfläche während des Stoßvorganges sich nicht ändert, wegen  $\Phi = \int_0^x p dt$  wieder

$\Phi = \text{const.}$  für die Strahloberfläche.

Die Bedingungen für den Kanal lassen sich ebenso durchführen. Nur wird man hier wegen  $w_n = 0$  auf die „zweite Randwertaufgabe“ geführt.  $u$  und  $w$  bestehen auch hier aus einer ebenen Strömung plus einem in  $y$  ungeraden Anteil, wenn das Tragwerk ungestaffelt ist.

Für die Ermittlung der ebenen Strömung  $u, w$  läßt sich mit Vorteil die Methode der Spiegelbilder einwenden. Bei einem Strahl oder Kanal von Kreisquerschnitt hat man dabei in bekannter Weise zu jedem abgehenden Wirbel einen ebenso starken von gleichem (bezw. entgegengesetztem) Vorzeichen in dem Punkte hinzuzunehmen, der dem anderen nach reziproken Radien entspricht. Einem Streifen des abgehenden Wirbelbandes von der Stärke

$\frac{d\Gamma}{ds} ds$  entspricht somit ein gleich starker vom Betrage  $\frac{d\Gamma'}{ds'} \cdot ds'$ .

Durch Integration zwischen je zwei entsprechenden Punkten ergibt sich hieraus, daß für die gespiegelten tragenden Wirbel  $\Gamma = \mp \Gamma'$  ist (Minuszeichen für den Strahl, Pluszeichen für den Kanal).

11. Die zahlenmäßigen Verhältnisse für den Kreisstrahl habe ich für den einfachsten Fall, einen geraden Eindecker in der Mitte des Strahles, näher untersucht und zwar unter der Annahme, daß der Antrieb nach einer halben Ellipse verteilt ist. Ist  $b$  die Spannweite des Eindeckers und  $D$  der Strahldurchmesser, so wird die von den Strahlgrenzen verursachte Störungsgeschwindigkeit  $w'$  in der Entfernung  $x$  aus der Mitte, mit der Abkürzung  $\xi = 2x b/D^2$

$$w' = \frac{A}{4\pi R^2 \rho V} \left( 1 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{5}{8} \xi^4 + \frac{35}{128} \xi^6 + \dots \right) \quad (48)$$

Hierdurch ergibt sich ein Zusatzwiderstand

$$W' = \frac{A^2}{4\pi k^2 \rho V^2} \left( 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{D}\right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{b}{D}\right)^6 + \dots \right) \quad (49)$$

Eine Vergleichsrechnung mit rechteckiger Auftriebsverteilung ergab das erste Glied in der Widerstandsformel identisch mit dem obigen; der Schluß liegt nahe, daß dies auch bei irgend einem anderen Tragwerk der Fall ist. Wenn man sich auf dieses erste Glied beschränkt, was praktisch in den meisten Fällen ausreicht, so läßt sich der gesamte induzierte Widerstand unter Einführung des Querschnitts  $F_0$  des Luftstromes schreiben:

$$W = \frac{A^2}{4q} \left( \frac{1}{F'} + \frac{1}{2F_0} \right)^2. \quad (50)$$

Bei einem Kanal von Kreisquerschnitt erhält man die gleichen Störungsbeiträge, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Das erste Glied der Reihe bringt eine recht merkbare Korrektur, bei  $b/D = 1/2$  z. B. wird sie bereits  $1/8$  des induzierten Widerstandes. Der vollständige Ausdruck liefert anstelle von 0,125 bei der elliptischen Verteilung 0,1262 und bei der Rechteckverteilung 0,127.

12. Der durch den Kreisstrahl hindurchgesteckte Flügel hat ebenfalls ein gewisses praktisches Interesse, da er eine besonders

1) Der Faktor 2 bei  $F_0$  läßt sich so deuten, daß der Strahl nur die Hälfte des Auftriebes als Impuls durch Ablenkung von der ursprünglichen Richtung aufnimmt, da die andere Hälfte — einer einfachen Rechnung zufolge — durch den Impuls des zum Flügel gehörigen Wirbelsystems aufgenommen wird.

bequeme Versuchsanordnung ergibt. Man kann seine Theorie erhalten, wenn man beachtet, daß da, wo der Flügel durch die Strahloberfläche hindurchtritt, wegen der Druckgleichheit über und unter dem Flügel der Auftrieb Null werden muß. Für eine Reihenentwicklung ist hier die Funktion  $\frac{R^2 - x^2}{R^2 + x^2}$  und ihre ungeraden Potenzen geeignet, da die Reihe für  $x = \pm R$  verschwindet und außerdem der Bedingung für den Kreisstrahl  $f(R^2/x) = -f(x)$  genügt. Die ziemlich umständliche Durchrechnung für die zwei ersten Glieder, der sich Herr K. Pohlhausen in dankenswerter Weise unterzog, ergibt für

$$\Gamma = VR \left\{ c_1 \frac{R^2 - x^2}{R^2 + x^2} + c_2 \left( \frac{R^2 - x^2}{R^2 + x^2} \right)^3 \right\}$$

$$A = \rho V^2 R^2 \left\{ c_1 (\pi - 2) + c_2 \left( \frac{3}{2} \pi - 4 \right) \right\} \quad (51)$$

$$w = R^2 V \frac{R^2 - x^2}{(R^2 + x^2)^2} \left\{ \frac{c_1}{2} + \frac{3}{4} c_2 \frac{R^4 - 6R^2 x^2 + x^4}{(R^2 + x^2)^2} \right\} \quad (52)$$

$$W = \frac{\pi}{8} \rho V^3 R^2 \left\{ c_1^2 + \frac{3}{2} c_1 c_2 + \frac{3}{4} c_2^2 \right\}. \quad (53)$$

Das Minimum von  $W$  bei gegebenem  $A$  wird erhalten für

$$c_1 = 1,213 A/\rho V^2 R^2 \text{ und } c_2 = -0,541 A/\rho V^2 R^2$$

und wird

$$W_{\min.} = 0,277 A^2/\rho V^2 R^2 = 1,74 A^2/4q F_0. \quad (54)$$

Dieses ist das 1,74fache des Widerstandes eines Eindeckers von der Spannweite  $2R$  in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit (die einfache Näherungsformel (50) gibt das 1,5fache, was für diesen extremen Fall immerhin noch recht annehmbar ist).

13. Bei Tragwerken von solcher Tiefenentwicklung, daß es nicht mehr erlaubt ist, die Veränderlichkeit der Störungsgeschwindigkeit mit der Tiefe zu vernachlässigen, muß der Wölbungseinfluß beachtet werden. Ein Fall, für den dieser ermittelt worden ist, der aber auch sonst praktische Bedeutung hat, mag hier noch kurz behandelt werden. Um das ebene Problem im Versuch angenähert zu verwirklichen, haben wir einen Tragflügel seitlich durch zwei parallele Wände abgeschlossen, die den Strahl in seiner ganzen Höhe auf eine größere Strecke begleiten. Die Ober- und Unterseite des Strahles war dabei frei. Die Bewegung ist eine ebene Strömung mit zwei freien Grenzen über und unter dem Flügel. Dieser befand sich in der Strahlmitte. Durch unendlich

oft wiederholte Spiegelung an der oberen und unteren Grenze ergibt sich hier eine unendliche Reihe senkrecht übereinander befindlicher gleicher und gleichsinniger tragender Wirbel von der Stärke  $\Gamma$  in Abständen gleich der Strahlhöhe  $h$ . Die Zusatzgeschwindigkeit im Unendlichen hinter dem Tragflügel wird

$$w_1 = 2w_0 = A/\rho V l h = A/\rho V F_0, \quad (55)$$

der Widerstand also

$$W = A \cdot w_0/V = A^2 2\rho V^3 F_0 = A^2 4q F_0. \quad (56)$$

Zur Ermittlung des Wölbungseinflusses werde die Geschwindigkeit  $w$  für die Strahlmittellinie ( $\parallel V$ ) berechnet. Es wird durch die Wirkung der gespiegelten Wirbel für  $z = 0$

$$w = w_0 = \frac{\Gamma y}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 h^2 + y^2}; \quad (57)$$

für kleine  $y$  ist demnach

$$w - w_0 \approx \frac{\Gamma y}{\pi h^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6} \frac{\Gamma y}{h^2},$$

also die Krümmung

$$1/R = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w}{V} \right) = \frac{\pi \Gamma}{6 V h^2} = \frac{\pi A}{6 \rho V^2 l h^2} = \frac{\pi c_a t}{12 h^2}. \quad (58)$$

Um diesen praktisch allerdings meist geringen Betrag<sup>1)</sup> muß die Wölbung des Versuchsflügels größer sein als die des unendlich langen Flügels in unbegrenzter Flüssigkeit, dessen Eigenschaften ermittelt werden sollen.

Beim ebenen Probleme im Kanal erhält man mit unendlich vielen gespiegelten Wirbeln von abwechselnden Vorzeichen  $w_1 = 0$ , also keinen induzierten Widerstand, ferner entsprechend

$$w = \frac{\Gamma y}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{-1^n}{n^2 h^2 + y^2} \quad (59)$$

für  $z = 0$ , was eine Wölbungskorrektur von entgegengesetztem Sinn und vom halben Betrage wie beim Strahl ergibt.

---

1) Für zahlenmäßige Abschätzungen sei bemerkt, daß die stugtechnisch interessierenden Werte von  $c_a$  zwischen 0,2 und 1,2 liegen.

#### D. Die Zustände in grossem Abstand vom Flügel.

14. Für die Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes eines Tragwerks in großer Entfernung von diesem genügt es, wenn die Umgebung des Wirbelschweifes zunächst außer Acht bleiben darf, die Formeln (31) unter der Näherungsannahme zu integrieren, daß die Fahrstrahlen vom Aufpunkt nach den einzelnen tragenden Elementen parallel sind. Sind die Auftriebsrichtungen der einzelnen tragenden Elemente um Winkel  $\varepsilon$  gegen die  $Z$ -Achse geneigt (vgl. Fig. 3), so ist überall anstelle von  $\beta$  zu setzen  $\beta - \varepsilon$  und ferner zu beachten, daß die in Gl. (31) angegebenen Beträge nach ihrem tragenden Element orientiert sind. Die Integration ergibt, wenn man das neue Koordinatensystem so wählt, daß die Seitenkraft  $S = \int \Gamma ds \sin \varepsilon$  verschwindet, Formeln, die sich von den Gl. (31) nur dadurch unterscheiden, daß  $\int \Gamma ds \cos \varepsilon = \int \Gamma dx = A/\rho V$  anstelle von  $\Gamma ds$  tritt.

Der Druck in großer Entfernung vom Tragwerk wird — abgesehen von dem Gebiete des Wirbelschweifes —  $p = p_0 - \rho V v$ , da die Quadrate der Störungsgeschwindigkeiten hier vernachlässigt werden dürfen, also gemäß Gl. (31)

$$p - p_0 = \frac{\rho V}{4\pi} \int \Gamma dx \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{r^3} = \frac{Az}{4\pi r^3}. \quad (60)$$

Unter dem Tragwerk herrscht Überdruck, über ihm Unterdruck.

Das Integral des Druckunterschieds über eine unendlich ausgedehnte Ebene senkrecht zur  $Z$ -Achse (wagerechte Ebene) wird unabhängig vom Abstand der Ebene  $= \pm \frac{1}{2} A$ , je nachdem die Ebene unter oder über dem Tragwerk liegt. Zwei Ebenen dieser Art, die das Tragwerk zwischen sich schließen, nehmen also zusammen den ganzen Auftrieb in Form von Druck auf. Dies gilt so für ein nach allen Richtungen unendlich ausgedehntes Luftmeer. Ist in endlicher Entfernung ein wagerechter Erdboden vorhanden, dann muß, um der Grenzbedingung dort zu genügen, ein „gespiegeltes Tragwerk“ im Bildpunkt des wirklichen angenommen werden. Dieses erzeugt in jeder wagerechten Ebene über dem Boden einen Überdruck mit einer Resultierenden, die gleichfalls  $\frac{1}{2} A$  ist. Mit dem Druckfeld des wirklichen Tragwerks zusammen liefert demnach jede Ebene zwischen dem Tragwerk und dem Erdboden, also auch dieser selbst, den Betrag  $A$ , jede Ebene über dem Tragwerk dagegen, wo die Überdruckwirkung des gespiegelten Tragwerks die Unterdruckwirkung des wirklichen im Gesamtbetrag aufhebt, den Betrag Null.

15. Von den Zuständen im Wirbelschweif, die mit dem Widerstand in Beziehung stehen, soll später die Rede sein. Was den Auftrieb betrifft, so interessiert noch die Rolle des in der Flüssigkeit vorhandenen Impulses. Dieser ist durchaus nicht eindeutig bestimmbar, sondern, wie schon das Verhalten der Druckresultierenden andeutete, von den Verhältnissen im Unendlichen abhängig. Umgibt man das in einem allseitig unbegrenzten Medium befindliche Tragwerk mit einer parallelepipedischen Kontrollfläche, so ergibt die Anwendung des Impulssatzes für stationäre Bewegung<sup>1)</sup>, wenn man zuerst die Grenzflächen senkrecht zur  $Y$ - und  $Z$ -Achse und dann erst die senkrecht zur  $X$ -Achse ins Unendliche rückt, einen Impuls gleich dem Auftrieb, der aus dem Wirbelschweif stammt; geht man zuerst in der  $X$ - und  $Z$ -Achse, dann erst in der  $Y$ -Achse ins Unendliche, so liefert der Wirbelschweif nichts, dafür aber der tragende Wirbel einen Impuls  $= A$ ; wenn endlich zuerst in der  $X$ - und  $Y$ -Achse ins Unendliche gegangen wird, und erst alsdann in der  $Z$ -Achse, so wird der Impuls Null und es ergeben sich nur Druckkräfte mit der Resultante  $A$ . In anderen Fällen wird Druck und Impuls zusammen erhalten. Von der Art des Grenzüberganges unabhängig wird das Ergebnis im Falle eines Bodens in endlicher Entfernung und in dem Fall, daß der Flug in einer allseitig unendlich ausgedehnten Flüssigkeit erst eine endliche Wegstrecke hindurch andauert. Im ersteren Fall ergibt sich ein Bodendruck  $= A$  und kein Impuls, im zweiten Fall nur Impuls im Betrage  $A$ .

Dieses letztere Ergebnis ist am besten mittelst eines bekannten Satzes über die Bewegungsgröße, die zu einer geschlossenen Wirbellinie von der Stärke  $\Gamma$  gehört, einzusehen. Diese Bewegungsgröße ist, wenn  $\mathbf{F}$  die als Vektor genommene von der Wirbellinie berandete Fläche ist, für eine nach allen Seiten unendlich ausgedehnte Flüssigkeit  $= \rho \Gamma \mathbf{F}$ . Wenn der Flug mitten in einer allseitig unbegrenzten Flüssigkeit begonnen worden ist, so ist der

---

1) Vgl. etwa meinen Artikel „Flüssigkeitsbewegung“ im „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“, S. 112. — Die dort (S. 114) gemachte Bemerkung, daß der Auftrieb von der Luft zunächst in Form von Impuls aufgenommen und erst später, wenn die abwärts bewegten Luftmassen den Boden erreichen, in Form von Druck auf diesen übertragen wird, war irrig. Der Irrtum hing mit der oben dargelegten Mehrdeutigkeit des Impulses zusammen, die mir damals noch nicht bekannt war. — Analoge Betrachtungen für die Hubschraube zeigen übrigens, daß auch hier der Auftrieb momentan — oder wenn die Kompressibilität berücksichtigt wird, mit Schallgeschwindigkeit — als Druck auf den Boden übertragen wird.

Wirbelschweif jedes Flügels hinten durch einen „Anfahrwirbel“, vorne aber durch den „tragenden Wirbel“ geschlossen. Dies gilt auch von jeder einzelnen Wirbellinie von der Stärke  $d\Gamma$ . Ist  $l$  der Abstand der beiden zusammengehörigen Wirbellinien — oder falls dieser Schwankungen unterworfen ist, der Mittelwert dieses Abstandes —, so hat man, da der Flügel in der Sekunde um die Strecke  $V$  vorrückt, einen sekundlichen Zuwachs an Bewegungsgröße von  $\rho V \int l d\Gamma$  (das Integral genommen über die Wirbelfäden eines Vorzeichens), der gleich dem Auftrieb des Flügels zu setzen ist. Es muß also im Wirbelschweif überall das  $\int l d\Gamma$  konstant und gleich dem über den Tragflügel genommenen Integral  $\int \Gamma dx$  sein.

16. Für die Beurteilung der Zustände im Wirbelschweif weit ab vom Tragwerk darf die Eigenbewegung der Wirbellinien, die für die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes am Tragwerk selbst vernachlässigt wurde, nicht mehr unbeachtet bleiben. Diese Bewegung besteht einerseits in einem Aufrollen des oder der Wirbelbänder von den Flügelspitzen aus und — bei Mehrdeckern — in einem seilartigen Umeinanderschlingen der durch das Aufrollen erzeugten Wirbelstränge, andererseits in einer gemeinsamen fortschreitenden Bewegung des ganzen Wirbelsystems senkrecht zu seiner Längserstreckung. Die Wirbelstärke wird durch weitere Andauer der Aufrollbewegung in jedem kleinen Volumteil immer mehr vergleichmäßigt und strebt einer stetigen räumlichen Wirbelverteilung als Grenzwert zu. Die gesamte Wirbelstärke der einen Seite stimmt in normalen Fällen mit der Zirkulation in der Mitte des Tragwerks überein. Der in Nr. 6 der I. Mitteilung abgeleitete Satz, daß für die Bewegung relativ zu dem Tragwerk in dem Wirbelsystem die Bernoulli'sche Gleichung mit einer universellen Konstanten gilt und daß deshalb die Wirbellinien mit den Stromlinien relativ zum Tragwerk identisch sind, bleibt auch für diesen Grenzstand in Kraft.

Im Fall des Eindeckers erhält man zwei gerade Wirbelfäden, bei denen allerdings, wenn nicht eben die Auftriebsdichte über den größten Teil des Flügels konstant ist, auch außerhalb der eigentlichen Wirbelkerne schwache Rotation vorhanden ist. Nimmt man zur Vereinfachung an, daß alle Rotation in zwei Wirbelkernen von kleinem Durchmesser vereinigt ist, so erhält man außerhalb der Wirbelkerne eine ebene Bewegung. Innerhalb der Wirbelkerne ist wegen der schraubenförmigen Gestalt der Wirbellinien

auch eine axiale Komponente  $v'$  in der Richtung von dem Flügel weg vorhanden<sup>1)</sup>.

Für die nachfolgende Betrachtung über den Widerstand interessiert der mit dieser Bewegung verknüpfte Unterdruck. Für einen Punkt außerhalb der Wirbelkerne, der von den Wirbelachsen die Entfernungen  $r_1$  und  $r_2$  aufweist, ist dieser, wie eine leichte Rechnung lehrt, durch die Gleichung gegeben:

$$p_0 - p = \frac{\rho(u^2 + w^2)}{2} = \frac{\rho \Gamma_0^2}{8\pi^2} \cdot \frac{l^2}{r_1^2 r_2^2} \quad (61)$$

wobei  $l$  den Abstand der beiden Wirbelfäden und  $\Gamma_0$  deren Zirkulation bedeutet. Für das Innere der Wirbelkerne wird, wenn der Einfachheit halber die übliche Annahme gemacht wird, daß die Rotation im Innern jedes Wirbelkernes konstant ist, der Unterdruck  $= \rho u'^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right)$ , wobei  $r'$  der Kernradius und  $u' = \Gamma_0 / 2\pi r'$  die Umfangsgeschwindigkeit im Radius  $r'$  ist. Der Steigungswinkel der schraubenförmigen Wirbellinien auf der Mantelfläche der Kurve ist gegeben durch  $\operatorname{tg} \alpha = V / u'$ , die lineare Steigung der Schraubenlinien ist daher

$$H = 2\pi r' V / u' = 4\pi^2 r'^2 V / \Gamma_0 \quad (62)$$

Die Axialgeschwindigkeit  $v'$  ergibt sich aus der Schraubengestalt der Wirbellinien oder auch aus der Bernoulli'schen Gleichung genähert zu

$$v' = \frac{u'^2}{V} \left(1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right) \quad (63)$$

Das ganze Wirbelsystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$w' = \Gamma_0 / 2\pi l \quad (64)$$

abwärts.

Bei einem Doppeldecker ergeben sich vier Wirbelfäden, die zu zweien je als Rechtsschraube (rechts) und Linksschraube (links) verschlungen sind. Wird angenommen, daß die Entfernung der zwei Wirbel einer Schraube gleich der Doppeldeckerhöhe  $h$  ist, und daß beide die gleiche Stärke  $\Gamma_1$  haben, so ergibt sich die Geschwindigkeit, mit der die beiden Wirbel umeinander umlaufen, angenähert zu  $u_1 = \Gamma_1 / 2\pi h$ . Damit wird die Schraubensteigung

1) Die Komponente der Gesamtgeschwindigkeit ist demnach  $V + v + v'$ , wo  $v$  die der Gl. (31) entsprechende Komponente ist. Diese ist in der Gegend der  $y$ -Achse sehr klein und nimmt überdies mit der Entfernung vom Tragwerk beliebig ab, kann deshalb hier außer Acht bleiben.

2) Vergl. die Berichtigung S. 66.

$$H = 2\pi \frac{h}{2} \cdot V / u_1 = 2\pi^2 h^3 V / \Gamma_1. \quad (62a)$$

Die Geschwindigkeit  $v'$  ist in der Mitte der Schraube genähert

$$v' = \frac{2\Gamma_1}{2\pi h/2} \cdot \frac{u_1}{V} = \frac{\Gamma_1^2}{\pi^2 h^2 V}. \quad (63a)$$

17. Der Widerstand hängt nach Früherem eng mit der kinetischen Energie des Wirbelsystems zusammen. Diese bleibt unter der Voraussetzung der Reibungslosigkeit bei der Umformung des Wirbelsystems unverändert. Ihr Betrag für die Längeneinheit, der mit dem des Widerstandes übereinstimmt, ist — unter Vernachlässigung des von höherer Ordnung kleinen  $v'$  —

$$W = \frac{\rho}{2} \iint (u^2 + w^2) dF. \quad (65)$$

In einem Schnitt, der senkrecht zur Achse des Wirbelsystems geführt wird, finden sich die in voriger Nummer beschriebenen Unterdrücke, die als Resultante eine Saugkraft ergeben. Diese stimmt nun mit dem obigen Wert für den Widerstand nicht überein, sondern ist größer als dieser<sup>1)</sup>. Diese Differenz wird durch den Impuls der Geschwindigkeit  $v'$  ausgeglichen, der der Saugkraft entgegenwirkt. Um dies klar zu stellen, wenden wir den Impulssatz für die stationäre Bewegung auf die Komponenten parallel der Achse des Wirbelsystems an und benützen hierfür eine Kontrollfläche, die aus einer Ebene senkrecht zu dem Wirbelsystem weitab vom Flügel und einer zu ihr parallelen Fläche weit vor dem Flügel besteht, mit einem im übrigen beliebigen Abschluß nach den Seiten und nach oben und unten, von dem nur angenommen wird, daß er sehr weit vom Flügel abliegt. Dann ist für ein Flächenelement  $dF$  der hinteren Kontrollebene die Saugkraft  $= (p_0 - p) dF$  und der longitudinale Impuls  $= dm(V - (V + v')) = -\rho(V + v') dF \cdot v'$ . Die Bernoulli'sche Gleichung liefert:

$$p_0 - p = \rho V v' + \frac{\rho}{2} (v'^2 + u^2 + w^2).$$

Die Gesamtwirkung von Saugkraft und Impuls auf dem Flächenelement  $dF$  ergibt demnach

$$dW = dF \cdot \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2 - v'^2). \quad (66)$$

1) Beim Eindecker z. B. beträgt die Differenz  $= \frac{\rho \Gamma_0^2}{4\pi} = \text{rd } 1/5$  des Widerstandes.

2) Zu derselben Formel wird man geführt, wenn man die Energie des se-

Streng genommen muß noch berücksichtigt werden, daß wegen der Abwärtsbewegung des Wirbelsystems mit der Geschwindigkeit  $w'$  die Achse des Wirbelsystems gegen die Flugrichtung um einen Winkel  $\delta$  nach unten geneigt ist, für den gilt:  $\sin \delta = w'/V$  (wobei  $w'$  senkrecht zur Wirbelachse gemessen ist). Man findet bei einer genaueren Betrachtung, daß die Resultante der aus der obigen Überlegung folgenden Kraft in die Richtung der Achse des Wirbelsystems fällt, also ebenfalls unter dem Winkel  $\delta$  geneigt ist. Der Widerstand ist dann die Projektion dieser Kraft auf die Y-Achse, so daß also die Beziehung zwischen dem Widerstand und den Zustandsgrößen im Wirbelschweif in strenger Form lautet:

$$W = \frac{\rho}{2} \cos \delta \iint (u^2 + w^2 - v'^2) dF^1. \quad (67)$$

Andererseits ergibt sich aus derselben Betrachtung der endgültige Wert des Auftriebes zu

$$A = \rho V \int \Gamma dx - W \operatorname{tg} \delta. \quad (68)$$

Das Korrektionsglied  $W \operatorname{tg} \delta$  ist übrigens, wenn  $A$  von der I. Ordnung klein ist, von der III. Ordnung, kann also praktisch immer außer acht bleiben.

18. Die Gleichung (65) erlaubt in einfachen Fällen, die Größe der Wirbelkerne abzuschätzen, zu denen sich das Wirbelband des Flügels zusammenrollt. Für den Eindecker kann unter der Annahme, daß die Wirbel sämtlich in zwei Kernen von gleichförmig verteilter Rotation enthalten sind, das Integral von Gl. (64) entsprechend den Angaben von Nr. 16 ausgewertet werden. Es liefert

$$W = \frac{\rho \Gamma_0^2}{2\pi} \left( \ln \frac{l}{r'} + \frac{1}{4} \right). \quad (69)$$

Nimmt man am Tragflügel elliptische Auftriebsverteilung an, so wird andererseits  $W = 2A^2/\pi \rho V^2 b^2$ ; die Zirkulation eines Wirbelstranges ergibt sich gleich der Zirkulation in der Mitte des Tragflügels  $\Gamma_0 = \frac{4}{\pi} \frac{A}{\rho V b}$ ; hiermit wird

kundlich neu gebildeten Stückes des Wirbelschweifes betrachtet. Dieser besteht aus der kinetischen Energie:  $dF(V + v') \cdot \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2 + v'^2)$  und aus der Arbeitsleistung des Druckes  $dF(p - p_0)v'$ , was unter Benutzung der Bernoulli'schen Gleichung wieder den obigen Ausdruck gibt.

1) Dies ist auch energetisch einzusehen, da das sekundlich neugebildete Stück des Wirbelschweifes nicht die Länge  $V$ , sondern wegen seiner Eigenbewegung nur  $V \cos \delta$  hat.

$$\ln \frac{l}{r'} = \frac{1}{4} (\pi^2 - 1) = 2,215, \text{ also } l/r' = 9,16.$$

Die am Schluß von Nr. 15 angeführte Beziehung liefert hier  $l = \frac{\pi}{4} b$ , so daß unter der Voraussetzung der obigen Annahmen sämtliche Abmessungen des Wirbelsystems bekannt sind. Die Steigung der Stromlinien im Kern wird gemäß Gl. (62), wenn  $c_a$  und  $b$  anstelle von  $\Gamma_0$ ,  $l$  und  $r'$  eingeführt werden:

$$H = 0,455 b^3 / c_a F. \quad (70)$$

Die Geschwindigkeit in der Ebene des Wirbelpaares wird außerhalb der Wirbelkerne

$$w = 2 \Gamma_0 l / \pi (l^2 - 4x^2), \quad (71)$$

innerhalb der Kerne nach unserer Annahme eine lineare Funktion. Im Gegensatz zu der Geschwindigkeit ohne Aufrollen des Wirbelbandes  $w_1 = 2w_0 = 4A/\pi \rho V b^2$  wird demnach die Geschwindigkeit in der Mitte des Wirbelpaares

$$w_2 = 4w' = 2\Gamma_0/\pi l = 8w_1/\pi^2. \quad (72)$$

Fig. 4 gibt ein Bild der beiden Geschwindigkeitsverteilungen auf

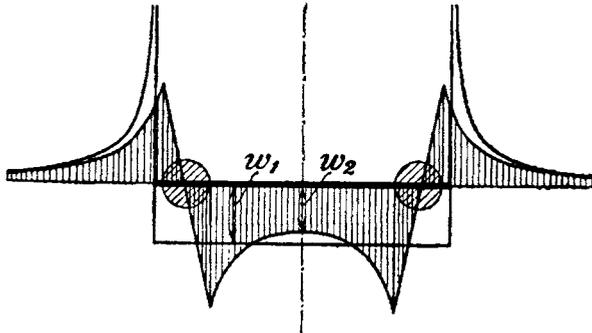


Fig. 4.

den Parallelen zur X-Achse, wobei noch erwähnt werden mag, daß für das nicht aufgerollte Wirbelband außerhalb des Tragflügels  $w'_1 = -w_1 \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 - (l/2)^2}} - 1 \right)$  ist.

Die Entfernung vom Flügel, in welcher sich das Aufrollen der Hauptsache nach vollzieht, ist umso größer, je kleiner die Geschwindigkeit  $w_1$  ist; denn sie ist offenbar von der Größenordnung  $\frac{1}{2} lV/w_1$ . Die genauere Aufklärung des Aufrollvorgangs hat —

wegen der Verschiedenheit von  $w_1$  und  $w_2$  — eine gewisse Bedeutung für die Berechnung der Zustände an einem verhältnismäßig weit hinter dem Tragflügel befindlichen Höhenleitwerk (Steuerfläche).

---

Die in den beiden Mitteilungen dargelegte Flügeltheorie ist nach verschiedenen Richtungen hin der Ergänzung und Erweiterung fähig. Einerseits läßt sich durch Übergang von der tragenden Linie zur tragenden Fläche eine Verfeinerung gewinnen, die nicht nur die Einfüsse der Profilgestalt auf den Auftrieb und das Moment zu untersuchen gestattet, sondern auch den bei Doppeldeckern usw. sehr bemerkbaren Wölbungseinfluß besser als bisher zu berechnen erlaubt; ferner lassen sich auch die Verhältnisse bei schräggestellten und in der Flugrichtung gekrümmten Flügeln mit solchen Ansätzen klären. Eine genäherte Ermittlung der Wirkungen der zeitlichen Änderung des Auftriebs, z. B. beim Flügelschlag, ist mit ihnen ebenfalls möglich. Andererseits lassen sich die Ansätze der Flügeltheorie auch auf den Kurvenflug, sowie auf die Vorgänge an Luftschrauben übertragen, wobei im Hintergrunde noch die Anwendung auf Gebläseräder und Turbinen steht. Neben den obengenannten Problemen harren auch auf den in den beiden Mitteilungen behandelten Gebieten noch zahlreiche Aufgaben der Durchführung.

Mit der Bearbeitung verschiedener dieser Aufgaben ist bereits begonnen worden. Über ihre Ergebnisse hoffe ich später an dieser Stelle zu berichten. Im übrigen liegt es mir fern, mit den obigen Bemerkungen das ganze Arbeitsgebiet für Göttingen reservieren zu wollen; im Gegenteil werde ich die Mitarbeit der Fachgenossen jederzeit gerne begrüßen. Nur würde in diesem Fall zur Vermeidung von Doppelarbeit eine vorherige gegenseitige Bezugnahme zweckmäßig sein.

---

**Zusammenfassung.** I. Mitteilung: Die Hydrodynamik der reibungslosen Flüssigkeit wird durch Hinzufügung von Sätzen über die Entstehung von Wirbeln am festen Körper ergänzt, und eine Tragflügeltheorie entwickelt, bei der die Flügel durch geeignete Wirbelgebilde ersetzt werden. Es wird eine „Theorie der I. Ordnung“ aufgestellt, in der unter Annahme kleiner Störungsgeschwindigkeiten bei jeder Zustandsgröße nur die jeweils niedrigste Ordnung berücksichtigt wird. Durch diese Theorie werden die Zusammenhänge zwischen der Verteilung des Auftriebes über die

Spannweite und dem Anstellwinkel und dem Widerstande aufgeklärt; im besondern werden die auf den geraden Eindecker bezüglichen Formeln aufgestellt.

II. Mitteilung: Die Theorie der I. Ordnung wird auf beliebige Flügelsysteme („Tragwerke“) erweitert, und u. a. ein neuer Beweis des Munk'schen Satzes gebracht, daß auf den Gesamtwiderstand eines Tragwerks eine Änderung der „Staffelung“ ohne Einfluß bleibt, wenn die Auftriebsverteilung der einzelnen Teile dabei ungeändert bleibt. Die Ergebnisse der Munk'schen Dissertation über die Tragwerke kleinsten Widerstandes werden auf anderem Wege hergeleitet und durch eigene Betrachtungen ergänzt. Die bei den Kanälen und freien Luftstrahlen der Versuchsanstalten durch die Begrenzung des Luftstromes auftretenden Fehlereinflüsse werden dargelegt und berechnet. Die Zustände in großer Entfernung vom Tragwerk und im Wirbelschweif werden erörtert und ihr Zusammenhang mit dem Auftrieb und dem Widerstand klargelegt. — Ein Ausblick auf die weiteren Aufgaben der Theorie wird angefügt.

### Berichtigung (1927).

Bei der Ableitung von Formel (61) S. 61 ist übersehen worden, daß das Geschwindigkeitsfeld  $u, w$  wegen der Abwärtsbewegung des ganzen Wirbelgebildes mit der Geschwindigkeit  $w' = \Gamma_0/2\pi l$  in dem Bezugssystem, relativ zu dem die Luft im Unendlichen ruht, nicht stationär ist; das Geschwindigkeitsfeld ist stationär für ein mit der Geschwindigkeit  $w'$  abwärts bewegtes Bezugssystem. Auf der rechten Seite von Gl. (61) muß daher hinzugefügt werden:

$$- \varrho w w' = \frac{\varrho \Gamma^2}{4\pi^2 l} \left( \frac{\frac{l}{2} + x}{r_1^2} + \frac{\frac{l}{2} - x}{r_2^2} \right) \quad (61a)$$

Gl. (65) bzw. die genauere Gl. (67) bleibt aber trotzdem richtig, wie sich nach dem Energiesatz erwarten läßt, und wie sich aus einer sorgfältigen Anwendung des Impulssatzes auch ergibt. Beachtet man, daß die Wirbelachsen unter dem Winkel  $\delta$  abwärts

geneigt sind, so sind die Geschwindigkeiten  $w$  und  $w'$ , so wie sie bisher gerechnet wurden, senkrecht zu den Wirbelachsen anzunehmen, nicht senkrecht zur Flugrichtung, wie das bisher der Einfachheit halber vorausgesetzt worden war. Für die Anwendung des Impulsatzes werden die Verhältnisse jetzt am einfachsten, wenn man eine Kontrollebene betrachtet, die die Wirbelachsen senkrecht schneidet. Das Zusatzglied von Gl. (61a), das die Saugkraft gegenüber der bisherigen Rechnung zu verkleinern scheint, liefert jetzt einen Beitrag, der  $= A \cdot \sin \delta$  gefunden wird, und gibt mit dem Impuls parallel der Kontrollebene, der  $= A \cdot \cos \delta$  wird, zusammen gerade das volle  $A$  senkrecht zur Flugrichtung. Der übrigbleibende Beitrag parallel den Wirbelachsen ist dann wie bisher der Widerstand parallel den Wirbelachsen gemäß Gl. (69). Es braucht deshalb an dem Text von S. 63 u. 64 nichts geändert zu werden.

## Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust.

Von

**Albert Betz.**

Mit einem Zusatz von **L. Prandtl.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. März 1919 durch L. Prandtl.

Wenn man mit einem Tragflügel eines Flugzeuges Auftrieb (senkrecht zur Bewegungsrichtung) erzeugen will, so ist dies nur unter gleichzeitiger Entstehung von Widerstand (entgegengesetzt der Bewegungsrichtung) zu erreichen<sup>1)</sup>. Dieser rührt daher, daß zur Erzeugung des Auftriebes der Luft eine nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit erteilt werden muß, deren kinetische Energie durch Arbeitsleistung, also durch Überwindung eines Widerstandes aufgebracht werden muß. Die Größe dieses Widerstandes hängt außer von Auftrieb, Spannweite, Fahrgeschwindigkeit und Luftdichte auch von der Verteilung des Auftriebes über die Spannweite ab. Nach einem Satz von Munk<sup>2)</sup> ist sie unter Beibehaltung der übrigen maßgebenden Größen dann ein Minimum, wenn die der Luft erteilte Vertikalgeschwindigkeit an den von der Tragfläche durchlaufenen Stellen konstant ist<sup>3)</sup>.

Die Strömung hinter einer Tragfläche mit günstigster Auftriebsverteilung ist demnach so, wie wenn der von der Tragfläche durchlaufene Raum zu einem festen Körper (Brett) erstarrt

---

1) Vergl. Prandtl, Tragflügeltheorie I. Mitt., Abschn. 10. Göttinger Nachrichten 1918, S. 451.

2) Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissertation Göttingen 1919.

3) Vergl. Prandtl, Tragflügeltheorie II. Mitt., Abschn. 5. Göttinger Nachrichten 1919, S. 107.

wäre, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach abwärts bewegt.

Bei einem Schraubenpropeller, der dazu dient, ein Drehmoment in Schub umzusetzen, liegen nun sehr verwandte Verhältnisse vor. Zur Erzeugung des Schubes muß Flüssigkeit axial nach hinten beschleunigt werden (Schraubenstrahl) und durch Ausübung des Drehmomentes wird ihr auch eine Drehbewegung erteilt. Es muß deshalb bei der Umsetzung von Drehmoment in Schub außer der Schubarbeit auch noch die kinetische Energie der Flüssigkeit im Schraubenstrahl von der Antriebsmaschine aufgebracht werden. Diese nicht nutzbar zu verwertende Arbeit drückt sich in einem maximalen theoretischen Wirkungsgrad aus, der von den Größen: Schub, Schraubendurchmesser, Fahr- und Drehgeschwindigkeit und Dichte der Flüssigkeit abhängt. Sieht man von der Drehenergie ab, die meist unbedeutend ist, so wird das Maximum des Wirkungsgrades erreicht, wenn die Axialgeschwindigkeit über den ganzen Strahlquerschnitt konstant ist (gewöhnliche Schraubenstrahltheorie). Um dies zu erreichen, muß der Schub über die ganze Schraubenumkreisfläche gleichmäßig verteilt sein, was aber wiederum eine gleichmäßige Verteilung der Schraubenflügel oder mit anderen Worten unendlich viele Schraubenflügel voraussetzt.

Bei wirklichen Schrauben ist nur eine endliche Anzahl von Flügeln möglich und deshalb der Schub auf diese Stellen konzentriert. Bei der geringen Flügelbreite kann man sich den Schub eines Schraubenflügels auf eine Linie konzentriert denken (entsprechend der tragenden Linie, welche den Flügel eines Flugzeuges in der Theorie ersetzt<sup>1)</sup> Will man aber die endliche Flügelbreite berücksichtigen, so kann man verhältnismäßig leicht von den unendlich schmalen Flügeln dazu übergehen, indem man durch Integration eine Schar von Linien zu einem Körper zusammenfaßt. Wenn man so den Schub auf einzelne Linien konzentriert und außerdem die Drehenergie des Strahles in Betracht zieht, so erhält man wesentlich weniger einfache Verhältnisse. Immerhin gibt es auch hierbei eine verhältnismäßig einfache Darstellung für jene hinter einer Schraube erzeugte Bewegung, welche den geringsten Energieverlust, also den größten Wirkungsgrad bei gegebenen äußeren Bedingungen mit sich bringt:

Die Strömung hinter einer Schraube mit geringstem Energieverlust ist so, wie wenn die von jedem Schraubenflügel durchlaufene Bahn (Schrauben-

---

1) Vergl. Prandtl, Tragflügeltheorie I, 12, a. a. O.

fläche) erstarrt wäre und sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach hinten verschiebt oder sich mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um die Schraubenachse dreht<sup>1)</sup>.

Der Satz wurde zunächst als Analogie zu dem entsprechenden oben für die Tragfläche angeführten aufgestellt und hatte eine gewisse Wahrscheinlichkeit für sich. Der Beweis für seine Richtigkeit soll im folgenden gebracht werden<sup>2)</sup>. Der Satz gilt für beliebig geformte Schrauben. Im Interesse einer leichteren Verständlichkeit der Beweisführung soll jedoch zunächst vorausgesetzt werden, daß die Schraubenflügel geradlinig von der Achse nach außen hin verlaufen, also je mit einem Radius zusammenfallen. Nachträglich wird dann der Beweis auch auf beliebige krummlinige Flügel ausgedehnt werden.

Wie bei der Tragfläche sind auch bei der Schraube die auf einen Flügel ausgeübten Kräfte pro Längeneinheit (abgesehen von reinen Widerstandskräften) gleich dem Produkt  $\Gamma \cdot c \cdot \rho$  aus der Zirkulation  $\Gamma$  um das Flügelprofil, der Geschwindigkeit  $c$  desselben und der Flüssigkeitsdichte  $\rho$  und sind senkrecht zur Geschwindigkeit  $c$  gerichtet<sup>3)</sup>. Von der Hinterkante eines Flügels gehen

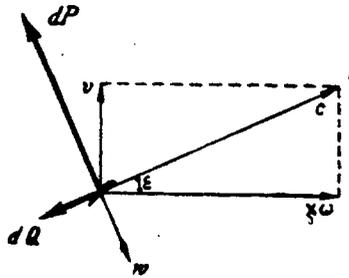
1) Da man eine Schraubenfläche in sich selbst verschieben kann und dies offenbar keinen Einfluß auf die Flüssigkeitsbewegung hat, so kann man diese Bewegung der Schraubenfläche, die sich aus einer Drehung um die Achse und einer Verschiebung in axialer Richtung zusammensetzt, jeder anderen Bewegung der Fläche überlagern. Dadurch kann man eine reine Axialbewegung in eine reine Drehbewegung überführen und umgekehrt, ohne daß dadurch an der Strömung der umgebenden Flüssigkeit etwas geändert wird. Es ist deshalb auch gleichgültig, ob man eine axiale Verschiebung der Schraubenfläche, oder eine Drehung um die Achse betrachtet.

2) Ebenso wie bei den entsprechenden Problemen der Tragflügeltheorie werden auch hier die von den Flügeln verursachten Störungsgeschwindigkeiten als klein gegenüber der Eigengeschwindigkeit der Flügel vorausgesetzt. Der Beweis gilt also streng nur für Schrauben mit kleinem Schub (bzw. kleinem Belastungsgrad  $\frac{S}{\rho F v^3}$ , wo  $S$  = Schub,  $\rho$  = Luftdichte,  $F = \frac{D^2 \pi}{4}$  = Schraubenkreisfläche,  $v$  = Fahrgeschwindigkeit). Während bei Tragflügeln diese Voraussetzung stets mit hinreichender praktischer Genauigkeit zutrifft, kommen bei Schraubenpropellern, insbesondere für Schiffe, ziemlich hohe Belastungsgrade vor, so daß hierbei schon merkliche Abweichungen von der hier gegebenen Theorie zu erwarten sind. Weiter bleiben hier ebenso wie bei der Tragflügeltheorie die Reibungsverluste unberücksichtigt, sie sind im übrigen auch praktisch nur von geringer Bedeutung gegenüber den theoretisch erfaßbaren Verlusten.

3) Vergl. Prandtl, Tragflügeltheorie I, 6, a. a. O.

Wirbel aus, pro Längeneinheit so viele, daß ihre Zirkulation  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$  ist ( $x =$  Abstand von der Schraubenachse). Sie verlaufen im wesentlichen in der vom Flügel zurückgelegten Bahn (wenn man von ihrer geringen Eigenbewegung absieht<sup>1)</sup>), also in Schraubelinien. In ihrer Gesamtheit bilden sie eine Schraubenfläche. Ihr Geschwindigkeitsfeld ist die durch die Bewegung des Flügels verursachte Strömung.

Hat ein Teil eines Flügels (im Abstand  $x$  von der Achse) die Geschwindigkeit  $c = \sqrt{v^2 + (x\omega)^2}$  (Fig. 1;  $v =$  Fahrgeschwindigkeit,  $\omega =$  Winkelgeschwindigkeit der Schraube), so würde bei ruhender Flüssigkeit die Relativgeschwindigkeit derselben gegen das Flügelprofil die Größe und Richtung  $-c$  haben. Diese erzeugt an dem Flügелеlement, dessen Länge  $dx$  sein möge, in Verbindung mit der dort herrschenden Zirkulation  $\Gamma$  eine Kraft  $dP = \rho \cdot \Gamma \cdot c \cdot dx$ , die senkrecht zur Geschwindigkeit  $c$  und zum Radius  $x$  steht (Fig. 1).



Figur 1.

Tritt nun infolge des Wirbelfeldes noch eine Störungsgeschwindigkeit  $w$  hinzu, die in dem betrachteten Punkte senkrecht zur Bewegungsrichtung  $c$  und zum Radius (Flügel), also senkrecht zu der vom Flügel durchlaufenen Schraubenfläche steht, so ergibt dies eine Kraft  $dQ = \rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot dx$ , die entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung  $c$  liegt. Zur Überwindung dieser Kraft  $dQ$  muß bei der Geschwindigkeit  $c$  eine sekundliche Arbeit  $c \cdot dQ$  geleistet werden. Eine Störungsgeschwindigkeit, welche in die Schraubenfläche fällt, würde eine Kraft senkrecht zu  $c$  mit sich bringen, welche also keine zusätzliche Arbeit verursacht; wir brauchen deshalb bei der Beurteilung der Energieverhältnisse auch nur die Störungsgeschwindigkeit, welche senkrecht zur Schraubenfläche steht, in Betracht zu ziehen.

1) s. Anm. 2 voriger Seite

Wenn für gegebene Werte von Schub  $S$ , Durchmesser  $2R$ , Geschwindigkeit  $v$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Flüssigkeitsdichte  $\rho$  bei einer bestimmten Verteilung der Zirkulation längs der Flügel (längs  $x$ ) der zusätzliche Energieverbrauch  $\int c \cdot dQ$  ein Minimum sein soll, so muß jede kleine Änderung in der Verteilung, welche den gleichen Schub ergibt, in erster Näherung den Energieverbrauch unverändert lassen ( $\delta \int c \cdot dQ = 0$  für  $S = \text{konst.}$ ).

Nach Einführen des Wertes für  $dQ$  lautet die Minimumbedingung:

$$\delta \sum_1^n \int_0^R \rho \cdot \Gamma \cdot \omega \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon} \cdot dx = 0^1), \quad (1)$$

wobei noch  $c = \frac{v}{\sin \varepsilon}$  gesetzt ist, mit  $\text{tg } \varepsilon = \frac{v}{x\omega}$  ( $\varepsilon =$  Steigungswinkel der Schraube).

Von der Kraft  $dP$ , welche durch die ungestörte Geschwindigkeit  $c$  am Flügелеlement mit der Zirkulation  $\Gamma$  erzeugt wird, dient die in die Achsrichtung fallende Komponente (Fig. 1)

$$dP \cdot \frac{x\omega}{c} = \rho \cdot \Gamma \cdot x \cdot \omega \cdot dx$$

zur Schuberzeugung. Die Anteile, welche von den Störungsgeschwindigkeiten bzw. den damit verbundenen Zusatzkräften herrühren, kommen dagegen als kleine Größen zweiter Ordnung nicht in Betracht (vergl. Anm. 2, S. 3). Die Nebenbedingung, daß der Schub konstant sein soll, nimmt demnach die Form an

$$S = \sum_1^n \int_0^R \rho \cdot \Gamma \cdot x \cdot \omega \cdot dx = \text{konst.}^1). \quad (2)$$

Vermehren wir an der Stelle  $x_i$  (zwischen  $x_i$  und  $x_i + dx$ ) den Wert  $\Gamma$  um den Betrag  $\frac{\Delta}{x_i}$  und vermindern ihn an der Stelle  $x_k$  (zwischen  $x_k$  und  $x_k + dx$ ; die Strecke  $dx$  soll in beiden Fällen dieselbe sein) um den Betrag  $\frac{\Delta}{x_k}$ , so wird dadurch der Schub nicht geändert, da er an der einen Stelle um  $\Delta \cdot \rho \cdot \omega \cdot dx$  vermehrt, an der anderen aber um den gleichen Betrag vermindert wird.

---

1) Das  $\sum_1^n$ -Zeichen soll andeuten, daß die Integration bei sämtlichen Flügeln (es mögen  $n$  Flügel sein) auszuführen und die Summe dieser  $n$  Integrale zu bilden ist.

Soll auch der Wert des Energieintegrals  $\sum_1^n \int_0^R \rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon} dx$

unverändert bleiben, so müssen sich die durch die Änderung von  $\Gamma$  erzielten Zusatzgrößen der Energie gegenseitig aufheben.

Wir müssen nun zunächst untersuchen, wie groß die Änderung der Verlustenergie ist, wenn wir an irgend einer Stelle längs einer Strecke  $dx$  eine Zirkulation  $d\Gamma$  hinzufügen. Diese Änderung zerfällt in zwei Teile. Einmal wird die Verlustenergie dadurch verändert, daß an der Stelle, wo  $d\Gamma$  hinzugefügt wurde, bereits eine Störungsgeschwindigkeit herrscht, welche zusammen mit dem hinzugefügten Zirkulationselement eine Widerstand bildende Kraft erzeugt; andererseits wird aber durch das neue Zirkulationselement und die von seinen Enden ausgehenden beiden Schraubenwirbel auch die Störungsgeschwindigkeit an allen übrigen Stellen geändert und damit auch die Verlustarbeit, welche an den übrigen mit Zirkulation versehenen Flügelteilen auftritt.

Wir können die Energieverhältnisse aber auch noch von einem anderen Standpunkte aus betrachten. Die gesamte beim Arbeiten der Schraube verlorene Energie ist hinter der Schraube in Form von kinetischer Energie vorhanden, welche in dem von den Schraubenwirbeln herrührenden Strömungsfeld steckt<sup>1)</sup>. Wir können deshalb die sekundliche Verlustarbeit anstatt an der Stelle, wo sie entsteht (an den Zirkulation führenden Flügelteilen) auch weit hinter der Schraube dadurch bestimmen, daß wir die kinetische Energie zwischen zwei im Abstand  $v$  voneinander befindlichen Ebenen senkrecht zur Schraubenachse ermitteln. Da nämlich der Schraubenstrahl infolge der Fortbewegung der Schraube in jeder Sekunde um den Betrag  $v$  länger wird, wird die Energie desselben um den zwischen den beiden erwähnten Ebenen befindlichen Betrag größer. Befinden sich diese Ebenen in großer Entfernung von der Schraube, so hängt die Geschwindigkeitsverteilung nur von der Stärke und Anordnung der von den Flügelhinterkanten ausgehenden schraubenförmigen Wirbel ab, da deren Anfang (die Schraubenflügel) wegen der großen Entfernung keinen Einfluß mehr hat. Es ist daher auch gleichgültig, an welcher Stelle der einzelnen Schraubenwirbel deren Anfang liegt, wenn er nur weit genug von den Kontrollebenen weg ist. Die Verlustenergie bleibt daher auch unverändert, wenn wir das kleine hinzugefügte Zirkulationselement  $d\Gamma \cdot dx$  längs der von seinen End-

1) Von Reibungsverlusten ist, wie bereits erwähnt, abgesehen. Vergl. Fußnote 2, S. 70.

punkten ausgehenden Schraubenwirbel, d. i. längs seiner Bahn, verschieben. Bei einer Verschiebung nach hinten wird aber die Verteilung der Verlustenergie auf die Entstehungsstellen geändert. Die von den nicht verschobenen Teilen der Flügel herrührende Störungsgeschwindigkeit ist hinter dem Propeller größer, da sich die Schraubenwirbel von dort aus nach vorn und nach hinten erstrecken, während sie in der Flügelebene selbst nur nach einer Seite hin vorhanden sind; umgekehrt nimmt vor dem Propeller der Störungseinfluß rasch mit der Entfernung ab. Es wird daher bei der Verschiebung nach hinten der Anteil größer, welcher durch Zusammenwirken der von den Flügeln herrührenden Störungsgeschwindigkeit mit dem zusätzlichen Zirkulationselement entsteht, während die Störung, welche dieses Zirkulationselement mit seinen Wirbeln an den Flügeln verursacht, mit zunehmender Entfernung immer kleiner wird und damit auch die dadurch verursachte Verlustarbeit. Wenn wir das zusätzliche Element genügend weit nach hinten verschieben, so verschwindet der letztere Anteil vollständig, und die ganze durch das Hinzufügen des Elementes verursachte Verluständerung ist durch das Zusammenwirken der vom ganzen Propeller herrührenden Störungsgeschwindigkeit mit dem Zirkulationselement gegeben. Bezeichnen wir mit  $w'$  die Komponente der Störungsgeschwindigkeit, welche an der Stelle des verschobenen Zirkulationselementes (also weit hinter der Schraube) senkrecht zu diesem und zu seiner Bahn, also senkrecht zu der von ihm beschriebenen Schraubenfläche steht, so ist, wie wir weiter oben sahen, die dadurch entstehende sekundliche Verlustarbeit  $\rho \cdot d\Gamma \cdot w' \cdot c \cdot dx$ , und dies ist, wie wir eben zeigten die ganze durch das Hinzufügen von  $d\Gamma$  verursachte Mehrarbeit.

Nun können wir auf unsere Minimumsbetrachtung zurückkommen. Darnach durfte sich die Verlustenergie nicht ändern, wenn wir an der einen Stelle der Flügel im Abstand  $x_i$  von der Achse längs einer Strecke  $dx$  Zirkulation von der Stärke  $\frac{\Delta}{x_i}$  hinzufügten und an einer anderen Stelle im Abstand  $x_k$  von der Achse längs einer ebenso großen Strecke Zirkulation von der Stärke  $\frac{\Delta}{x_k}$  wegnahmen. Die durch das Hinzufügen und Wegnehmen dieser Zirkulation verursachte Energieänderung läßt sich nach dem oben Auseinandergesetzten durch folgenden Ausdruck angeben, wobei wieder  $c = \frac{v}{\sin \varepsilon}$  gesetzt ist ( $\varepsilon =$  Steigungswinkel

der Schraubenfläche in dem betreffenden Radius; die Indices  $i$  und  $k$  geben an, daß die betreffenden Werte an den Stellen  $x$  und  $x_k$  gemeint sind):

$$\rho \cdot \frac{d}{x_i} \cdot w'_i \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon_i} dx - \rho \cdot \frac{d}{x_k} \cdot w'_k \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon_k} dx = 0,$$

daraus ergibt sich

$$\frac{w'_i}{x_i \omega} \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon_i} = \frac{w'_k}{x_k \omega} \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon_k} = \text{Konst.} = C^1)$$

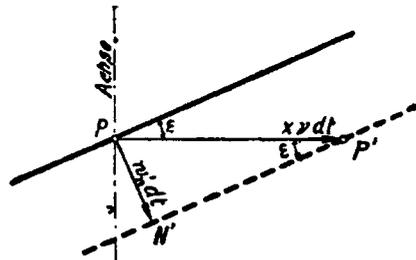
oder

$$\frac{w'}{x \omega} = C \cdot \sin \varepsilon. \quad (3)$$

Diese Bedingung wird aber durch Drehen einer starren Schraubenfläche vom Radius  $R$  und der Steigung  $H = 2\pi \frac{v}{\omega}$  (Bahn des Flügels) gleichfalls erzeugt. Durch Drehung einer solchen Fläche mit der Winkelgeschwindigkeit  $\nu$  wird nämlich ein im Abstand  $x$  von der Achse befindliches Flüssigkeitsteilchen, abgesehen von seitlichen Verschiebungen, normal zur Schraubenfläche mit der Geschwindigkeit

$$w'_n = x \cdot \nu \cdot \sin \varepsilon \quad (4)$$

verschoben, wie man sofort aus Fig. 2 ablesen kann, die einen Schnitt durch die Schraubenfläche senkrecht zum Radius in zwei



Figur 2.

um die Zeit  $dt$  auseinanderliegenden Zeitpunkten darstellt. Dies ist aber, wenn  $\nu = C \cdot \omega$  gewählt wird, gerade der Wert von  $w'$  der Minimumsbedingung. Da außerdem die Richtung von  $w'_n$  mit der von  $w'$  übereinstimmt, und im übrigen beide Bewegungen Potentialbewegungen sind, so ist damit gezeigt, daß die beiden Vor-

1) Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist eingeführt, um die Konstante  $C$  dimensionslos zu machen.

gänge, hervorgerufen einerseits durch den Schraubenpropeller von günstigstem Wirkungsgrad, andererseits durch die sich drehende Schraubenfläche identisch sind.

Wir hatten bisher der größeren Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Propellerflügel mit Radien zusammenfallen. Der Beweis läßt sich aber mit ganz geringen Änderungen auch für beliebig geformte Flügel führen, nur werden dabei die Verhältnisse etwas weniger übersichtlich. Wir betrachten wieder an irgend einer Stelle der Flügel im Abstand  $x$  von der Achse längs einer Strecke  $dl$  ein Zirkulationselement  $\Gamma$ , wobei nun  $dl$  mit dem Radius einen Winkel bilden möge. Wir können diese Strecke  $dl$  in die drei Komponenten zerlegen,  $dx$  in Richtung des Radius,  $dy$  in Richtung der Bahngeschwindigkeit  $c$  und  $d\epsilon$  in Richtung senkrecht dazu. Das Zirkulationselement von der Länge  $dl$  läßt sich dann durch drei Elemente von der gleichen Stärke längs der drei Strecken  $dx$ ,  $dy$  und  $d\epsilon$  ersetzen. Für den Schub liefert nur das Element  $dx$  einen Beitrag, da die anderen beiden Zirkulationskomponenten mit der Geschwindigkeit  $c$  zusammen nur Kräfte in radialer Richtung ergeben. Dieser Beitrag ergibt sich demnach genau wie bei geradlinigen Flächen zu:

$$dS = \rho \cdot \Gamma \cdot x \cdot \omega \cdot dx.$$

Zur Verlustarbeit tragen nur die beiden senkrecht zu  $c$  liegenden Elemente  $dx$  und  $d\epsilon$  bei, da das in die Bewegungsrichtung  $c$  fallende Element  $dy$  nur eine Kraft senkrecht dazu ergibt, welche mit  $c$  zusammen keine Arbeit liefert. Wir fassen diese beiden Elemente  $dx$  und  $d\epsilon$  zweckmäßig zu einem besonderen Element  $ds$  zusammen, welches also die Projektion von  $dl$  auf die zur Bewegungsrichtung  $c$  senkrechte Ebene ist. Mit diesem Element zusammen liefert eine Störungsgeschwindigkeit  $w$ , die senkrecht zur Bewegungsrichtung und zum Element  $ds$ , also senkrecht zu der bei der Bewegung beschriebenen Schraubenfläche<sup>1)</sup> steht, eine Verlustarbeit  $\rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot c \cdot ds$ . Störungsgeschwindigkeiten, die in diese Schraubenfläche fallen, ergeben nur Kräfte senkrecht zu  $c$ , also keine Verlustarbeit. Der Winkel, den  $ds$  mit dem Radius, also mit  $dx$  bildet, ist derselbe wie der, den die von  $ds$  bzw.  $dl$  beschriebene Schraubenfläche<sup>1)</sup> mit dem Radius bildet. Wir wollen ihn mit  $j$  bezeichnen. Dann ist  $ds = \frac{dx}{\cos j}$  und unsere Mini-

---

1) Die Strecken  $dl$  und  $ds$  beschreiben bei der Bewegung dieselbe Schraubenfläche.

mumsbedingung nimmt jetzt die Form an (wobei wieder  $c = \frac{v}{\sin \varepsilon}$  eingeführt ist):

$$\delta \sum_1^n \int_0^R \rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{1}{\cos j} \cdot dx = 0 \quad (5)$$

mit der Nebenbedingung

$$S = \sum_1^n \int_0^R \rho \cdot \Gamma \cdot x \cdot \omega \cdot dx = \text{konst.} \quad (6)$$

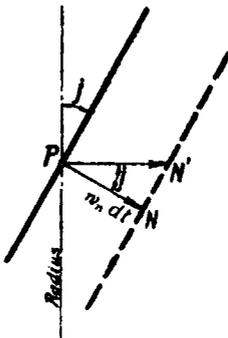
Die Nebenbedingung hat sich gegenüber dem früheren einfacheren Problem überhaupt nicht geändert und in der Variationsgleichung ist nur der Faktor  $\frac{1}{\cos j}$  hinzugekommen, der bei radial stehenden Flügeln 1 ist.

Der weitere Gedankengang ist genau der gleiche wie vorher. Wir fügen an einer Stelle  $x$  wieder eine zusätzliche Zirkulation im Betrag  $\frac{\Delta}{x}$  hinzu, verschieben sie so weit nach hinten, bis die ganze durch das Element hervorgerufene Verlustenergie an dem Element selbst entsteht und gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\rho \cdot \frac{\Delta}{x} \cdot w' \cdot c \cdot ds = \rho \cdot \frac{\Delta}{x} \cdot w' \cdot \frac{v}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{1}{\cos j} \cdot dx,$$

wobei  $w'$  wieder die weit hinter dem Propeller senkrecht zur Schraubenfläche herrschende Störungsgeschwindigkeit auf der durch den Punkt  $x$  gehenden Schraubenlinie ist. In gleicher Weise wie vorher finden wir nun für  $w'$  die Bedingung:

$$\frac{w'}{x\omega} = C \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos j. \quad (7)$$



Figur 3.

Dies ist aber auch wieder gerade die Geschwindigkeit, welche man durch Drehen der von den Schraubenflügeln beschriebenen Schraubenflächen erhält, wie man aus Fig. 3 ersehen kann. Dort sind wieder zwei aufeinander folgende Lagen der Schraubenfläche gezeichnet und zwar in einem Schnitt senkrecht zur Bewegungsrichtung  $c$ , der den Radius enthält. In ihm ist die Normale  $PN$  zur Schraubenfläche und der Winkel  $j$  in wahrer Größe vorhanden. Daraus ist ohne weiteres zu ersehen, daß  $PN = PN' \cos j$

ist ( $PN'$  soll senkrecht zum Radius sein) und aus der Figur 2, welche einen Schnitt senkrecht zum Radius darstellt, ist, wie bereits früher geschehen, abzulesen, daß  $PN' = x \cdot \nu \cdot \sin \epsilon \cdot dt$  ist, wobei wieder  $\nu$  die Winkelgeschwindigkeit des Systems,  $x\nu dt = PP'$  also die Verschiebung des Punktes  $P$  in der Zeit  $dt$  ausdrückt. Die Normalgeschwindigkeit  $w_n = \frac{PN}{dt}$  ergibt sich demnach zu:

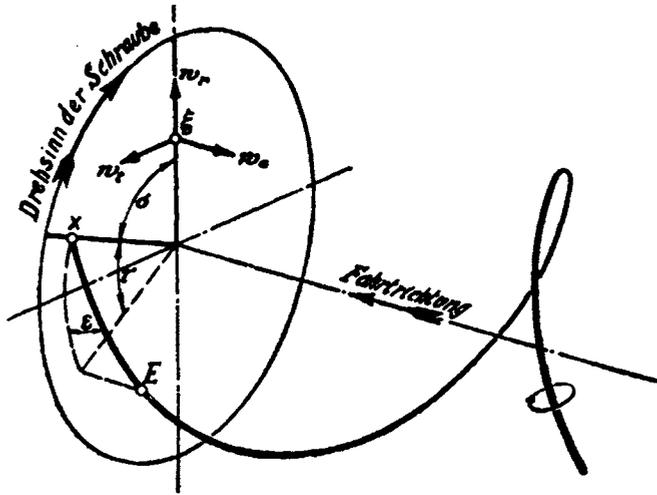
$$w_n = x\nu \sin \epsilon \cos j, \quad (8)$$

was wieder mit der Geschwindigkeit der Minimumsaufgabe nach Größe und Richtung übereinstimmt, wenn  $\nu = C\omega$  gesetzt wird.

Damit ist der am Anfang dieser Untersuchung aufgestellte Satz über die mit geringstem Verlust verknüpfte Strömung hinter einer Schraube auch für beliebig geformte Flügel bewiesen. Die gegebene Beweisführung ist im wesentlichen auf physikalischer Anschauung aufgebaut; es dürfte vielleicht von Interesse sein, zu zeigen, wie man den Beweis auch auf mehr formalem Wege führen kann, zumal da hierbei durch die aufgestellten mathematischen Beziehungen teilweise ein tiefer gehender Einblick in die Vorgänge in der Schraube gewährt wird. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, sollen nur Schrauben mit geradlinigen radial stehenden Flügeln, die außerdem in einer Ebene liegen, in Betracht gezogen werden. Die Beweisführung für allgemeinere Formen bietet hierbei ebenfalls keine Schwierigkeit, sie würde aber merklich umständlicher ausfallen.

Betrachten wir zunächst die Geschwindigkeit, welche ein von einem Punkte  $x$  ausgehender Schraubenwirbel von der Stärke  $\Gamma(x)$  an einer Stelle  $\xi$  erzeugt. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie sei mit  $\epsilon(x)$  bezeichnet ( $\operatorname{tg} \epsilon(x) = \frac{v}{x\omega}$ ). Der Winkel, den die beiden Radien bilden, auf denen die Punkte  $x$  und  $\xi$  liegen, sei  $\sigma$  (Fig. 4). Man kann diese Geschwindigkeit dadurch ermitteln, daß man den Einfluß eines Elementes  $E$  (Fig. 4) des Schraubenwirbels auf den Punkt  $\xi$  mittelst des Biot-Savart'schen Gesetzes <sup>1)</sup> angibt und daraus durch Integration über die Länge des Wirbels (von  $\tau = 0$  bis  $\tau = \infty$ ;  $\tau$  ist der Winkel, den die beiden durch  $E$  und  $x$  gehenden Ebenen einschließen, welche sich längs der Schraubenachse schneiden) den Einfluß des ganzen Wirbels findet.

1) Die Gesetze des Geschwindigkeitsfeldes eines Wirbels sind dieselben wie die des magnetischen Feldes eines elektrischen Stromes.



Figur 4.

Dabei ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß dieses Integral sich nicht in geschlossener Form auswerten läßt; es wird deshalb im folgenden immer in der Form eines unausgewerteten Integralausdruckes verwandt werden.

Zerlegt man die Geschwindigkeit, die der vom Punkte  $x$  ausgehende Schraubenwirbel an der Stelle  $\xi$  erzeugt, in die drei Komponenten  $w_a$  in axialer,  $w_t$  in tangentialer und  $w_r$  in radialer Richtung, so sind diese drei Geschwindigkeitskomponenten gegeben durch die Ausdrücke:

$$w_a = \frac{\Gamma(x)}{4\pi} \cdot x \cdot \int_0^\infty N^{-\frac{3}{2}} [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] d\tau \quad (9)$$

$$w_t = \frac{\Gamma(x)}{4\pi} \cdot \frac{v}{\omega} \cdot \int_0^\infty N^{-\frac{3}{2}} [\xi - x \cos(\tau + \sigma) - x\tau \sin(\tau + \sigma)] d\tau \quad (10)$$

$$w_r = \frac{\Gamma(x)}{4\pi} \cdot \frac{v}{\omega} \cdot \int_0^\infty N^{-\frac{3}{2}} [x \sin(\tau + \sigma) - x \cdot \tau \cdot \cos(\tau + \sigma)] d\tau \quad (11)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos(\tau + \sigma) + \frac{v^2}{\omega^2} \tau^2 = N \quad (12)$$

( $\sqrt{N}$  ist der Abstand des Elementes  $E$  vom Punkte  $\xi$ ).

Für unsere Betrachtungen brauchen wir nur die Komponente, welche im Punkte  $\xi$  senkrecht zur Schraubenfläche steht, die vom

Flügel, dem der Punkt  $\xi$  angehört, durchlaufen wird. Hierzu liefert  $w$ , gar keinen Beitrag;  $w_a$  und  $w_t$  liefern die Beiträge

$$w_a \cdot \frac{\xi \omega}{c(\xi)} \quad \text{und} \quad -w_t \cdot \frac{v}{c(\xi)}$$

(dabei ist  $c(\xi) = \sqrt{v^2 + (\xi \omega)^2}$ , vergl. Fig. 1). Herrscht an der Stelle  $\xi$  die Zirkulation  $\Gamma(\xi)$ , so verursacht der Wirbel die schädliche Arbeit pro Längeneinheit

$$\begin{aligned} & \varrho \cdot \Gamma(\xi) \left\{ w_a \cdot \frac{\xi \omega}{c(\xi)} - w_t \cdot \frac{v}{c(\xi)} \right\} \cdot c(\xi) \\ &= \varrho \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \int_0^\infty N^{-\frac{3}{2}} \left\{ [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] \cdot x \cdot \xi \cdot \omega \right. \\ & \quad \left. + [x \cos(\tau + \sigma) - \xi + x\tau \sin(\tau + \sigma)] \frac{v^2}{\omega} \right\} d\tau \\ &= \varrho \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \Psi(x, \xi, \sigma). \end{aligned} \quad (13)$$

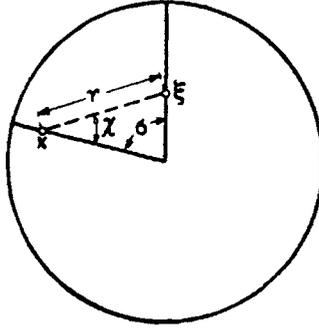
Denken wir uns nun einen Propeller von der Art, daß nur an der Stelle zwischen  $x$  und  $x + dx$  die Zirkulation  $\Gamma(x)$  und an der Stelle zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  die Zirkulation  $\Gamma(\xi)$  herrscht, so gehen einerseits an den Stellen  $x$  und  $x + dx$  Schraubenwirbel von entgegengesetztem Drehsinn mit der Zirkulation  $-\Gamma(x)$  bzw.  $+\Gamma(x)$  aus; andererseits gehen entsprechende Wirbel mit der Zirkulation  $-\Gamma(\xi)$  und  $+\Gamma(\xi)$  von den Stellen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  aus. Der schädliche Einfluß, den die beiden bei  $x$  und  $x + dx$  abgehenden Wirbel an der Stelle  $\xi$  verursachen, ist nach obiger Formel (13) gegeben durch

$$\varrho \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Psi(x, \xi, \sigma)}{\partial x} \cdot dx \cdot d\xi. \quad (14)$$

(Die Differentiation nach  $x$  rührt daher, daß es sich um die Differenzwirkung zweier im Abstand  $dx$  befindlicher Wirbel handelt). Entsprechend ist die Wirkung der bei  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  abgehenden Wirbel an der Stelle  $x$

$$\varrho \cdot \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Psi(\xi, x, -\sigma)}{\partial \xi} \cdot dx \cdot d\xi. \quad (15)$$

Mit  $\Psi(\xi, x, -\sigma)$  soll dabei jene Funktion bezeichnet werden, in welche  $\Psi(x, \xi, \sigma)$  durch Vertauschen von  $x$  und  $\xi$  einerseits und von  $\sigma$  und  $-\sigma$  andererseits übergeht. Außerdem ruft auch das Wirbelstückchen  $\Gamma(x) dx$  an der Stelle  $\xi$  eine axial gerichtete Geschwindigkeit hervor, deren Größe man leicht mittels des



Figur 5.

Biot-Savart'schen Gesetzes aus Fig. 5 ableiten kann. Sie beträgt:

$$-\frac{\Gamma(x)}{r^3} \sin \chi dx = -\frac{\Gamma(x)}{r^3} \xi \sin \sigma dx, \quad (16)$$

wobei  $r = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \sigma}$  der Abstand der Punkte  $x$  und  $\xi$  ist. Die dadurch verursachte Verlustarbeit beträgt (vergl. oben die durch  $w_a$  verursachte Arbeit)

$$\begin{aligned} & -\rho \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \frac{\xi \sin \sigma}{r^3} \cdot \frac{\xi \omega}{c(\xi)} \cdot c(\xi) \cdot dx \cdot d\xi \\ & = -\rho \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \frac{\xi^2 \omega \sin \sigma}{r^3} \cdot dx \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Entsprechend erzeugt das Wirbelstückchen  $\Gamma(\xi)d\xi$  an der Stelle  $x$  die Verlustarbeit

$$-\rho \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot \frac{x^2 \omega \sin(-\sigma)}{r^3} \cdot dx \cdot d\xi. \quad (18)$$

Der gesamte durch das Zusammenwirken der beiden Wirbelstückchen  $\Gamma(x)dx$  und  $\Gamma(\xi)d\xi$  nebst den zugehörigen Schraubenvirbeln verursachte Verlust beträgt

$$\begin{aligned} d^2 W &= \rho \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} \left[ \frac{\partial \Psi(x, \xi, \sigma)}{\partial x} - \frac{\xi^2 \omega}{r^3} \sin \sigma + \frac{\partial \Psi(\xi, x, -\sigma)}{\partial \xi} \right. \\ & \quad \left. - \frac{x^2 \omega}{r^3} \sin(-\sigma) \right] \cdot dx \cdot d\xi \\ &= \rho \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} [\mathfrak{H}(x, \xi, \sigma) + \mathfrak{H}(\xi, x, -\sigma)] \cdot dx \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei ist

$$\mathfrak{H}(x, \xi, \sigma) = \frac{\partial \Psi(x, \xi, \sigma)}{\partial x} - \frac{\xi^2 \omega}{r^3} \sin \sigma$$

der Anteil des Klammerausdruckes, der mit dem Faktor

$$\rho \cdot \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{4\pi} \cdot dx \cdot d\xi$$

zusammen den Teil der Verlustarbeit angibt, welcher an der Stelle  $\xi$  durch die Einwirkung der dort herrschenden Störungsgeschwindigkeit auf die Zirkulation  $\Gamma(\xi)$  entsteht. Entsprechend stellt

$$\mathfrak{A}(\xi, x, -\sigma) = \frac{\partial \Psi(\xi, x, -\sigma)}{\partial \xi} - \frac{x^2 \omega}{r^3} \sin(-\sigma)$$

den für die Stelle  $x$  in Frage kommenden Ausdruck dar.

Die beiden Ausdrücke  $\mathfrak{A}(x, \xi, \sigma)$  und  $\mathfrak{A}(\xi, x, -\sigma)$  gehen ineinander über, wenn man einerseits  $x$  und  $\xi$  und andererseits  $\sigma$  und  $-\sigma$  vertauscht. Wir müssen nun diese Funktion  $\mathfrak{A}$  genauer untersuchen, wobei sich gewisse Symmetrieeigenschaften ergeben, welche für unseren Beweis wesentlich sind.

Nach Gleichung (18) ist

$$\begin{aligned} \Psi(x, \xi, \sigma) = & \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ [x - \xi \sin(\tau + \sigma)] x \xi \omega \right. \\ & \left. + [x \cos(\tau + \sigma) - \xi + x\tau \cos(\tau + \sigma)] \frac{v^2}{\omega} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (20)$$

wobei  $N$  wieder die in Gleichung (12) angegebene Bedeutung hat.

Da sich hieraus  $\frac{\partial N}{\partial x} = 2[x - \xi \cos(\tau + \sigma)]$  ergibt, wird

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi(x, \xi, \sigma)}{\partial x} \\ = & \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2x \xi \omega - \xi^2 \omega \cos(\tau + \sigma) + \frac{v^2}{\omega} [\cos(\tau + \sigma) + \tau \sin(\tau + \sigma)] \right\} d\tau \\ - & 3 \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] x \xi \omega + [x \cos(\tau + \sigma) - \xi + x\tau \sin(\tau + \sigma)] \frac{v^2}{\omega} \right\} [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] d\tau \\ = & \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2x \xi \omega + \frac{v^2}{\omega} [\cos(\tau + \sigma) + \tau \sin(\tau + \sigma)] \right\} d\tau \\ - & \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \xi^2 \omega \cos(\tau + \sigma) d\tau \\ - & 3 \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] [x \cos(\tau + \sigma) - \xi] \frac{v^2}{\omega} - 2(x \xi)^2 \omega \cos(\tau + \sigma) \right\} d\tau \\ - & 3 \int_0^\infty N^{-\frac{1}{2}} \left\{ [x^2 + \xi^2 \cos^2(\tau + \sigma)] x \xi \omega + [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] x \tau \frac{v^2}{\omega} \sin(\tau + \sigma) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Nun kann man das zweite dieser vier Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \omega \cos(\tau + \sigma)}{N^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

partiell integrieren mit  $\cos(\tau + \sigma)$  als integrierbaren Faktor, wobei zu beachten ist, daß

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = 2 \left[ x \xi \sin(\tau + \sigma) + \frac{v^2}{\omega^2} \tau \right]$$

und daß für die Grenze  $\tau = 0$   $N = r^2$  wird.

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \omega \cos(\tau + \sigma)}{N^{\frac{3}{2}}} d\tau \\ = & \frac{\xi^2 \omega}{r^2} \sin \sigma - 3 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \omega \sin(\tau + \sigma)}{N^{\frac{3}{2}}} \left[ x \xi \sin(\tau + \sigma) + \frac{v^2}{\omega^2} \tau \right] d\tau. \quad (22) \end{aligned}$$

Der Integralausdruck rechts in der letzten Gleichung ergibt mit dem letzten Gliede der Gleichung (21) zusammengenommen

$$\begin{aligned} & - 3 \int_0^{\infty} N^{-\frac{3}{2}} \left\{ [x^2 + \xi^2 \cos^2(\tau + \sigma) + \xi^2 \sin^2(\tau + \sigma)] x \xi \omega \right. \\ & \quad \left. + [x^2 - x \xi \cos(\tau + \sigma) + \xi^2] \frac{v^2}{\omega} \tau \sin(\tau + \sigma) \right\} d\tau \\ = & - 3 \int_0^{\infty} N^{-\frac{3}{2}} \left\{ [x^2 + \xi^2] \left[ x \xi \omega + \frac{v^2}{\omega} \tau \sin(\tau + \sigma) \right] \right. \\ & \quad \left. - x \xi \frac{v^2}{\omega} \tau \sin(\tau + \sigma) \cos(\tau + \sigma) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun die vollständige Funktion  $\mathfrak{E}(x, \xi, \sigma)$  an, so kommt zu den eben umgeformten Gliedern des Ausdruckes für  $\frac{\partial \Psi(x, \xi, \sigma)}{\partial x}$  noch das Glied  $-\frac{\xi^2 \omega}{r^2} \sin \sigma$  aus Gl. (16) hinzu. Dieses hebt sich aber mit dem bei der partiellen Integration Gleichung (22) entstandenen Gliede  $+\frac{\xi^2 \omega}{r^2} \sin \sigma$  gerade weg. Wir erhalten deshalb für  $\mathfrak{E}$  den Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}(x, \xi, \sigma) \\ = & \int_0^{\infty} N^{-\frac{3}{2}} \left\{ 2 x \xi \omega + \frac{v^2}{\omega} [\cos(\tau + \sigma) + \tau \sin(\tau + \sigma)] \right\} d\tau \\ & - 3 \int_0^{\infty} N^{-\frac{3}{2}} \left\{ [x - \xi \cos(\tau + \sigma)] [x \cos(\tau + \sigma) - \xi] \frac{v^2}{\omega} - 2 (x \xi)^2 \omega \cos(\tau + \sigma) \right. \\ & \quad \left. + [x^2 + \xi^2] \left[ x \xi \omega + \frac{v^2}{\omega} \tau \sin(\tau + \sigma) \right] \right. \\ & \quad \left. - x \xi \frac{v^2}{\omega} \tau \sin(\tau + \sigma) \cos(\tau + \sigma) \right\} d\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung der Funktion  $\mathfrak{E}$  ist zunächst ersichtlich, daß sie in  $x$  und  $\xi$  symmetrisch ist, daß sie also ihren Wert nicht ändert, wenn man  $x$  und  $\xi$  miteinander vertauscht. Die Funktion  $\mathfrak{E}(\xi, x, -\sigma)$  unterscheidet sich demnach von ihr nur noch durch das Vorzeichen von  $\sigma$ , und wenn  $\sigma = 0$  ist, d. h. wenn  $x$  und  $\xi$  auf demselben Radius liegen, so ist  $\mathfrak{E}(x, \xi, 0) = \mathfrak{E}(\xi, x, 0)$ , was wir in folgendem Satz ausdrücken können:

Liegen zwei Elemente eines Schraubenflügels auf einem und demselben Radius in der Entfernung  $x$  und  $\xi$  von der Schraubenachse, so ist die Verlustarbeit, welche an der Stelle  $\xi$  durch die von der Zirkulation an der Stelle  $x$  herrührende Störungsgeschwindigkeit verursacht wird, gleich der Verlustarbeit, welche an der Stelle  $x$  durch die von der Zirkulation an der Stelle  $\xi$  herrührende Geschwindigkeit erzeugt wird.

Weiter ist aus Gleichung (23) zu erkennen, daß die Funktion  $\mathfrak{E}(x, \xi, \sigma)$  und entsprechend auch  $\mathfrak{E}(\xi, x, -\sigma)$  ihren Wert nicht ändert, wenn man gleichzeitig die Vorzeichen von  $\tau$  und  $\sigma$  vertauscht, da immer nur die Verbindungen  $\cos(\tau + \sigma)$ ,  $\tau \cdot \sin(\tau + \sigma)$  und  $\tau^2$  vorkommen. Es ist demnach, wenn wir noch die eben erwähnte Vertauschbarkeit von  $x$  und  $\xi$  mit benutzen und die Ausdrücke unter dem Integralzeichen mit  $\mathfrak{E}'$  bezeichnen:

$$\mathfrak{E}(x, \xi, \sigma) = \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau + \sigma) d\tau = \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(\xi, x, -\tau - \sigma) d\tau.$$

Da aber

$$\int_a^b f(-\tau) d\tau = \int_{-b}^{-a} f(\tau) d\tau,$$

so erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau + \sigma) d\tau = \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau. \quad (24)$$

Mit Worten heißt dies:

Die Verlustarbeit, welche durch die von der Zirkulation an der Stelle  $x$  herrührende Störungsgeschwindigkeit an der Stelle  $\xi$  verursacht wird, ist ebenso groß, wie die Verlustarbeit, welche an der Stelle  $x$  entstehen würde, wenn die von  $\xi$  ausgehenden Schraubenwirbel anstatt nach hinten nach

vorn in der Verlängerung der wirklichen Wirbel verlaufen würden.

Die gesamte durch die beiden Zirkulationselemente  $\Gamma(x)dx$  und  $\Gamma(\xi) d\xi$  herrührende Verlustarbeit ergibt sich nun nach Gleichung (19) und (24)

$$\begin{aligned} d^2 W &= \varrho \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \left[ \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau + \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau \right] dx \cdot d\xi \\ &= \varrho \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(\xi)}{4\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau \right] dx \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (25)$$

Dies läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Die gesamte Verlustarbeit, welche durch die gegenseitige Einwirkung zweier Zirkulationselemente an den Stellen  $x$  und  $\xi$  dieser Elemente verursacht wird, ist ebenso groß, wie die Verlustarbeit, welche an der einen Stelle allein entstehen würde, wenn die von der anderen Stelle ausgehenden Schraubenwirbel sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken würden.

Wenn wir Gleichung (25) über jeden Flügel nach  $\xi$  integrieren und die Summe über die  $n$  Flügel bilden, so erhalten wir die Verlustarbeit  $dW$ , welche das Element  $\Gamma(x)dx$  in Verbindung mit sämtlichen Schraubenflügeln verursacht. Bei der Integration und Summation der rechts stehenden Ausdrücke ist zu beachten, daß

$$\frac{1}{c(x)} \cdot \sum_1^n \int_0^R \frac{\Gamma(\xi)}{4\pi} \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau d\xi = w(x)$$

die zur Schraubenfläche senkrechte Störungsgeschwindigkeit im Punkte  $x$  und

$$\frac{1}{c(x)} \cdot \sum_1^n \int_0^R \frac{\Gamma(\xi)}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}'(\xi, x, \tau - \sigma) d\tau d\xi = w'(x)$$

die entsprechende Störungsgeschwindigkeit auf der durch  $x$  gehenden Schraubenlinie in großer Entfernung hinter der Schraube ist, wo die Schraubenwirbel nach beiden Seiten hin sich erstrecken.

Wir erhalten demnach

$$dW = \varrho \cdot \Gamma(x) \cdot w'(x) \cdot c(x) \cdot dx. \quad (26)$$

Der weitere Gang der Untersuchung ist derselbe wie beim ersten Beweis. Wir haben  $w'(x)$  zu bestimmen aus der Bedingung:

$$\text{Verlustarbeit} = W = \rho \sum_1^n \int_0^R \Gamma(x) \cdot w'(x) \cdot c(x) \cdot dx = \text{Minimum} \quad (27)$$

$$\text{Schubarbeit} = S \cdot v = \rho v \sum_1^n \int_0^R \Gamma(x) \cdot x \cdot \omega \cdot dx = \text{Konst.}, \quad (28)$$

was auf die Gleichung führt

$$\Gamma(x) \cdot w'(x) \cdot c(x) = C \cdot v \cdot \Gamma(x) \cdot x \cdot \omega, \quad (29)$$

wobei  $C$  Lagrange'scher Faktor ist. Daraus ergibt sich

$$\frac{w'}{x \omega} = C \cdot \sin \varepsilon, \quad (30)$$

wenn wir wieder  $\frac{v}{c} = \sin \varepsilon$  einführen. Dieser Ausdruck stimmt mit der früher abgeleiteten Formel (3) überein, und  $w'$  bedeutet auch hier wieder die Geschwindigkeit hinter der Schraubenfläche und ist identisch mit der durch Drehen einer starren Schraubenfläche erhaltenen Geschwindigkeit.

Wir haben durch die vorhergehende Untersuchung die Lösung des Minimalproblems der Schraubenpropeller in der Form gewonnen, daß wir angeben können, wie die Geschwindigkeitsverteilung in großer Entfernung hinter der Schraube sein muß. Für die Beurteilung der Vorgänge an den Schraubenflügeln interessiert vielfach die Störungsgeschwindigkeit, welche an der Stelle der Flügel selbst herrscht. Für Schrauben, deren Flügel symmetrisch zueinander liegen<sup>1)</sup>, was ja fast stets zutrifft, läßt sich nun folgender einfache Satz aufstellen:

Bei symmetrischen Schrauben sind die Störungsgeschwindigkeiten am Flügel halb so groß wie an den entsprechenden Stellen der Schraubenfläche weit hinter dem Propeller.

Dieser Satz ist leicht einzusehen: Die von der Zirkulation um die einzelnen Flügel herrührenden Störungsgeschwindigkeiten heben sich am Ort eines Flügels infolge der symmetrischen Lage der in Frage kommenden Stellen zu den übrigen Flügeln gerade auf. Es ist also nur der Einfluß der von den Flügeln abgehenden Wirbelsysteme zu betrachten. Nun ist aber das Wirbelsystem von 0 bis  $+\infty$ , wie es an den Flügeln wirksam ist,

---

1) Dazu gehört, daß die Flügel mit Radien zusammenfallen, welche in ein und derselben Ebene senkrecht zur Achse (Schraubenkreisebene) liegen und gleichen Winkelabstand voneinander haben.

kongruent zu dem System von 0 bis  $-\infty$ , welches die gedachte Fortsetzung des ersteren bildet. Wegen der symmetrischen Lage eines jeden Punktes der Flügel zu den beiden Wirbelsystemen ist auch die von den beiden Systemen verursachte Störung dieselbe. Weit hinter der Schraube, wo ein System von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , also die Summe der beiden einander kongruenten Systeme wirksam ist, wird demnach auch die Störung doppelt so groß wie am Flügel selbst, wo nur das eine System in Wirksamkeit tritt. Formelmäßig können wir diesen Gedanken so ausdrücken: Ein Flügelement an der Stelle  $x$  erzeugt an einer anderen Stelle  $\xi$  eines Flügels eine Störung, welche abgesehen von nebensächlichen Faktoren gegeben ist durch die Funktion

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau + \sigma) d\tau,$$

wenn wieder  $\sigma$  den Winkel bezeichnet, den die durch  $x$  und  $\xi$  gehenden Radien bilden. Wegen der symmetrischen Anordnung ist ein dem Flügelement  $x$  entsprechendes symmetrisch zu  $\xi$  gelegenes Element vorhanden, dessen Einfluß durch den Ausdruck

$$\int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau - \sigma) d\tau$$

gegeben ist. Nehmen wir die von diesen beiden Elementen verursachten Störungen zusammen und berücksichtigen, daß wir  $\tau + \sigma$  wegen des symmetrischen Baues von  $\mathfrak{E}'$  mit  $-\tau - \sigma$  und  $\tau - \sigma$  mit  $-\tau + \sigma$  vertauschen können. (Vergl. S. 17), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau + \sigma) d\tau + \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau - \sigma) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, -\tau - \sigma) d\tau + \int_0^{\infty} \mathfrak{E}'(x, \xi, -\tau + \sigma) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau - \sigma) d\tau + \int_{-\infty}^0 \mathfrak{E}'(x, \xi, \tau + \sigma) d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

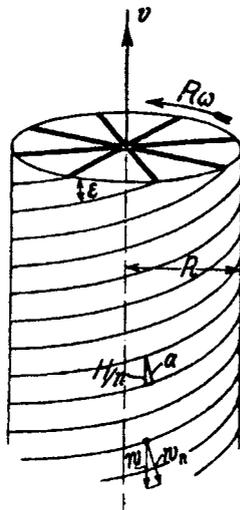
Hieraus ist die Gleichwertigkeit des Wirbelsystemes hinter dem Ausgangspunkt (von 0 bis  $+\infty$ ) mit dem davor liegenden (von  $-\infty$  bis 0) auch formelmäßig ersichtlich.

Zum Schluß möge noch etwas über die Analogie des hier behandelten Schraubenproblems mit dem in der Einleitung erwähnten Tragflügelproblem gesagt werden, das ja den Anstoß zu der ganzen Untersuchung gab: Dem Eindecker würde eine einflügelige Schraube

entsprechen. Der dort auftretenden Funktion  $\frac{1}{x-\xi}$  entspricht hier die Funktion  $\Psi(x, \xi, 0)$ . Dem ungestaffelten Mehrdecker entspricht die Schraube mit symmetrischer Flügelanordnung; dem gestaffelten Mehrdecker die unsymmetrische Schraube. Der Vertikalabstand der einzelnen Decks spielt dort etwa dieselbe Rolle wie hier der Winkel  $\sigma$ .

### Z u s a t z.

Die von Herrn Betz gefundene Vorschrift für die günstigste Kraftverteilung bei Luftschrauben erlaubt in dem Fall, daß es sich um eine vielflügelige Luftschraube handelt, auf ziemlich einfache Weise Näherungsformeln für die Verteilung der Zirkulation — und damit auch der Luftkräfte und der Flügelgestalt — aufzustellen. Entsprechend dem Gedankengang im Abschnitt 7 der II. Mitteilung meiner „Tragflügeltheorie“<sup>1)</sup> wird das System von Schraubenflächen, das durch die Luftschraube bei ihrer Bewegung in die Luft hineingeschnitten wird (Fig. 1), als starres Gebilde betrachtet, und es wird diesem starren Gebilde durch einen Stoß eine Geschwindigkeit  $w$  in der Achsenrichtung erteilt. Die bei diesem Stoß erzeugten Luftgeschwindigkeiten stimmen im Bereich der Theorie der I. Ordnung mit den Geschwindigkeiten überein, die die Schraube hinter sich in der Luft zurückläßt. In der äußeren Randzone treten beim Umströmen der Kanten der Schraubenflächen Radialgeschwindigkeiten auf, die eine besondere Betrachtung erfordern. Diese Radialgeschwindigkeiten klingen aber, wenn die Schraubenflächen hinreichend dicht stehen, nach dem Innern zu sehr rasch ab, so daß es hier ausreicht, die tangentielle Komponente  $w_t$  und die axiale Komponente  $w_a$  der Luftbewegung zu betrachten. Die Bewegung, die bei dem Stoß erzeugt wird, erfolgt im Innern, wie leicht zu sehen, normal zu den Schraubenflächen, mittelst derer der Stoß auf die



Figur 1.

1) Nachrichten der Ges. d. Wiss. 1919, S. 107.

Flüssigkeit ausgeübt wird. Ist  $v$  die Geschwindigkeit, mit der die Luftschraube gegen die Luft fortschreitet,  $\omega$  deren Winkelgeschwindigkeit, dann ist die Steigung der Schraubenflächen  $H = vT$ , wo  $T = 2\pi/\omega$  die Umlaufszeit ist, also

$$H = 2\pi v/\omega.$$

Der Steigungswinkel ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = H/2\pi r = v/r\omega,$$

wo  $r$  der Abstand des Elementes von der Drehachse ist. Der Geschwindigkeit des Schraubenflächensystems nach dem Stoß  $w$  entspricht somit eine normal zu den Schraubenflächen gerichtete Flüssigkeitsbewegung vom Betrage  $w_n = w \cos \varepsilon$ ; dies ergibt die Komponenten:

$$w_t = w \cos \varepsilon \sin \varepsilon = w \frac{vr\omega}{v^2 + r^2\omega^2} \quad (1)$$

$$w_a = w \cos^2 \varepsilon = w \frac{r^2\omega^2}{v^2 + r^2\omega^2}. \quad (2)$$

Die Zirkulation für einen Schraubenflügel im Radius  $r$  ergibt sich bei  $n$  Schraubenflügeln, die gleichmäßig auf den Umfang verteilt sein mögen, zu

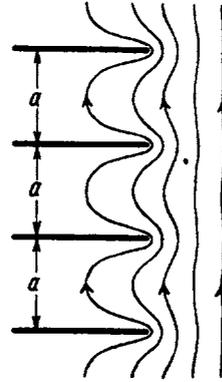
$$\Gamma = \frac{2\pi r w_t}{n} = \frac{2\pi w}{n} \cdot \frac{vr^2\omega}{v^2 + r^2\omega^2} \quad (= \frac{H \cdot w_a}{n}). \quad (3)$$

**Anmerkung:** Die Ergebnisse dieser Betrachtung, die ebenso wie die Betz'sche Theorie nur für den Grenzfall sehr schwach belasteter Schrauben streng gültig sind, lassen sich auf stark belastete Schrauben erweitern, wenn man, wie Herr Betz in einer anderen noch zu veröffentlichenden Untersuchung gezeigt hat, in den obigen Formeln für  $v$  und  $r\omega$  die genauen Werte der Strömungsgeschwindigkeiten relativ zu den Flügelprofilen  $v + w_a/2$  und  $r\omega - w_t/2$  setzt, wobei unter  $v$  die Zuflußgeschwindigkeit im Unendlichen vor der Schraube und unter  $w_a$  und  $w_t$  die zusätzlichen Geschwindigkeitskomponenten weit hinter der Schraube verstanden werden. Eine brauchbare Näherung für mäßig belastete Schrauben erhält man übrigens schon dadurch, daß in den obigen Formeln  $v$  durch  $v + w/2$  ersetzt wird, wobei die einfache Vorstellung von in die Luft geschnittenen Schraubenflächen, die sonst hinfällig wird, beibehalten werden kann. Von dieser letzteren Näherung ist in Formel (8) Gebrauch gemacht.

Für die Randzone gilt die folgende Sonderbetrachtung. Es sei  $a$  der senkrechte Abstand von zwei benachbarten Randkurven der Schraubenflächen, also gemäß Figur 1 :

$$a = \frac{H}{n} \cdot \cos \varepsilon = \frac{2\pi v R}{n \sqrt{v^2 + R^2 \omega^2}}. \quad (4)$$

An die Stelle der Umströmung der Ränder der Schraubenflächen mag nun die Umströmung der Ränder eines äquidistanten Ebenensystems vom Abstand  $a$ , gemäß Fig. 2, gesetzt werden, um den Abfall der Zirkulation an den Flügelspitzen zu studieren. Nach den Darlegungen von Nr. 6 der II. Mitteilung ist die Zirkulation gleich dem Potentialsprung der in der Flüssigkeit zurückgelassenen Strömung zu setzen. Es ist also das Strömungspotential für die in Fig. 2 angedeutete Strömung zu berechnen. Die nach Fig. 2 zerschnittene Ebene ( $z$ -Ebene) läßt sich konform auf das Äußere des Einheitskreises ( $t$ -Ebene) abbilden durch



Figur 2.

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right). \quad (5)$$

Die Strömung von Fig. 2 verwandelt sich dabei in zirkulatorisches Umströmen des Einheitskreises, es ist also  $\Phi + i\Psi = F = ic \ln t$ ; hiermit ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \cos \frac{F}{c}. \quad (6)$$

Für reelle Werte von  $F$ , also für die Stromlinien  $\Psi = 0$ , wird

$$x = \frac{a}{\pi} \ln \cos \frac{\Phi}{c} \quad \text{oder} \quad \Phi = \pm c \arccos e^{\pi x/a}$$

für  $x \leq 0$ . Der Potentialsprung wird somit, wenn, mit  $R =$  Außenradius,  $R - r$  für  $-x$  gesetzt wird,

$$[\Phi] = 2c \arccos e^{-\pi(R-r)/a}. \quad (7)$$

Der Abfall der Zirkulation an den Flügelspitzen der Schraube wird nun proportional dem Abfall des Potentialsprunges in Gleichung (7) angenommen. Bei den praktisch üblichen Abmessungen liegen die Funktionswerte von  $\Gamma$  nach Gleichung (3) für die Gegend der Flügelspitzen regelmäßig schon in der Nähe des Asymptotenwertes, sind also dort fast konstant. Es wird deshalb kein großer Fehler gegenüber der wahren Lösung der Minimumsaufgabe entstehen, wenn man an ihrer Stelle denjenigen Verlauf von  $\Gamma$  setzt, der sich ergibt, wenn man die Werte von  $\Gamma$  aus Gleichung (3)

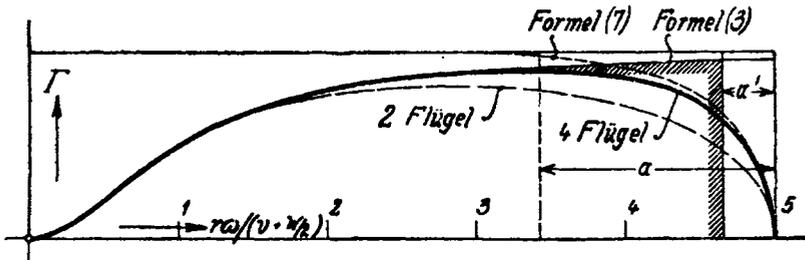
mit dem Ausdruck der Gleichung (7) multipliziert, wobei durch die Wahl  $c = 1/\pi$  der Asymptotenwert dieses Ausdruckes auf 1 normiert wird. Hiermit ergibt sich also als Endformel:

$$\Gamma = \frac{4w}{n} \cdot \frac{(v+w/2)r^3\omega}{(v+w/2)^2+r^2\omega^2} \cdot \text{arc cos } e^{-\pi(R-r)/a} \quad (8)$$

mit  $a$  nach Gleichung (4), in der ebenfalls gemäß der Anmerkung S. 89  $v$  durch  $v+w/2$  ersetzt werden kann. Die Gleichung gilt um so genauer, je mehr Schraubenflügel vorhanden sind, es ist aber zu erwarten, daß sie auch bei wenigen, ja selbst bei zwei Flügeln, immer noch brauchbare Resultate ergibt. Die Fig. 3 zeigt in der stark ausgezogenen Linie den Verlauf von  $\Gamma$  abhängig von  $r$  für vier Flügel und für einen Wert

$$H/2\pi R = (v+w/2)/R\omega = 1:5,$$

was etwa dem bei Flugzeugschrauben Üblichen entspricht. Der Verlauf von  $\Gamma$  bei zwei Flügeln ist zum Vergleich in Fig. 3 gestrichelt beigefügt.



Figur 3.

Bei Vergrößerung der Flügelzahl würde die Größe  $a$  verkleinert, der Abfall an der Flügelspitze also steiler werden; im Grenzfall von unendlich vielen Flügeln wäre dieser Abfall also senkrecht anzusetzen. Der Verlust an Völligkeit in der Verteilung  $\Gamma$  und daher auch in der Schubverteilung, der bei endlicher Flügelzahl gegenüber unendlich vielen Flügeln eintritt, läßt sich dadurch zum Ausdruck bringen, daß man die Verteilung nach Gleichung (7) flächengleich durch ein Rechteck ausgleicht. Dadurch erweist sich irgend eine Schraube als dynamisch gleichwertig mit einer Schraube mit unendlich vielen Flügeln, bei der die Flügel um einen Betrag  $a'$  (Figur 3) kürzer sind als die Flügel der gegebenen Schraube. Der Betrag  $a'$  ergibt sich aus der Forderung, daß

$$\int_0^{c\pi/2} x d\Phi = \frac{c\pi}{2} \cdot a'$$

sein muß, zu

$$a' = \frac{a}{\pi} \ln 2 = 0,2207 a. \quad (9)$$

In dem obigen Beispiel ergibt sich für unendlich viele Flügel (Verteilung in Fig. 3 durch Schraffur angedeutet) eine äquivalente Schraubenkreisfläche, die um 13 0/0 kleiner ist als die gegebene Schraubenkreisfläche der vierflügeligen Schraube.

Die Flügelkräfte und die erforderliche Formgebung der Flügel können, sobald  $\Gamma$  bekannt ist, nach den in der „Tragflügeltheorie“ I 13 angegebenen Grundsätzen, die sich ohne weiteres auf den Fall der Schraube übertragen lassen, ermittelt werden. Ein näheres Eingehen hierauf kann deshalb an dieser Stelle unterbleiben.

L. Prandtl.

---

## Anhang.

Hier mögen einige kurze Hinweise auf die Arbeiten Platz finden, die inzwischen im Zusammenhang mit den vorstehenden Abhandlungen entstanden sind oder sonst in enger Beziehung zu ihnen stehen. Bibliographische Vollständigkeit ist dabei nicht angestrebt worden. Die in den Abhandlungen bereits zitierten Arbeiten sind nicht noch einmal erwähnt.

### I.

Die Fragen der **Flüssigkeit mit kleiner Reibung** sind zunächst in drei Göttinger Dissertationen weiter verfolgt worden:

H. Blasius, Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, 1907, abgedruckt in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56 (1908), S. 1.

E. Boltze, Grenzsichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Göttingen 1908.

K. Hiemenz, Die Grenzsicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszyylinder, 1911, abgedruckt in Dinglers Polytechn. Journal, Bd. 326 (1911), S. 321.

Die erste dieser Arbeiten behandelt den zweidimensionalen Fall eines symmetrischen Hindernisses, sowohl bei stationärer Strömung als auch bei Beginn aus der Ruhe heraus. Die im Heidelberger Vortrag auf Grund einer vorläufigen Abschätzung zu 1,1 . . . angegebene Zahl für den Widerstand einer Platte wird zu 1,327 berechnet. Die zweite Arbeit behandelt in analoger Weise den Rotationskörper; die dritte führt für eine experimentell ermittelte Druckverteilung am Kreiszyylinder die numerischen Rechnungen genauer durch und vergleicht die berechnete Ablösungsstelle mit der beobachteten, wobei sich sehr befriedigende Übereinstimmung ergibt.

Später hat Th. v. Kármán mit seinen Schülern die Fragen der Flüssigkeit mit kleiner Reibung aufgegriffen und eine praktische Näherungsmethode entwickelt, welche die Schwierigkeiten der numerischen Durchführung der exakten Rechnung geschickt vermeidet, vgl.:

Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM<sup>1)</sup> 1921, S. 233 (s. auch Innsbrucker Vorträge, S. 146); ferner:

K. Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht (Auszug aus der Göttinger handschriftlichen Dissertation<sup>2)</sup>). ZAMM 1921, S. 252.

In der letzteren Arbeit wird die Kármánsche Methode für das Beispiel von Hiemenz numerisch durchgeführt. Erwähnt sei noch die handschriftliche Dissertation von

W. Tollmien, Zeitliche Entwicklung der laminaren Grenzschichten am rotierenden Zylinder, 1924<sup>2)</sup>.

Eine Weiterführung dieser Arbeit ist in Aussicht genommen.

Von experimentellen Untersuchungen über das Verhalten der Grenzschichten sind hier vor allem die Arbeiten von Professor J. M. Burgers und seinem Schüler B. J. van der Hegge Zynen über die Strömung in unmittelbarer Nähe von glatten ebenen, längsbeströmten Platten zu erwähnen, vgl.:

Burgers und v. d. Hegge Zynen, Verhandl. d. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 1. sect. Deel XIII No. 3, 1924;

Burgers, Proc. of the I. Internat. Congr. f. applied mechanics, Delft 1924, S. 113;

v. d. Hegge Zynen, Thesis, Delft 1924.

Bezüglich der experimentellen Feststellungen über die Beeinflussung der Grenzschichten durch Mitbewegung der Wand mit der Strömung (rotierende Zylinder) und durch Absaugung von Flüssigkeit nach dem Körperinnern entsprechend Abb. 11 und 12 der hier beigefügten Tafel sei auf folgende neuere Arbeiten verwiesen:

J. Ackeret, Neuere Untersuchungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt. ZFM 1925, S. 44.

1) Abkürzungen:

T.B. = Technische Berichte, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen, Charlottenburg.

ZFM = Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt.

ZAMM = Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.

Z.d.V.D.I. = Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

„Ergebnisse“ = Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt, herausgegeben von L. Prandtl, München, bei Oldenbourg.

„Innsbrucker Vorträge“ = Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922, herausgegeben von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita, Berlin 1924, bei Springer.

2) Von der Göttinger Universitäts-Bibliothek und der Staatsbibliothek zu Berlin leihbar.

- A. Betz, Der Magnuseffekt, die Grundlage der Flettnerwalze. Z.d.V.D.I. 1925, S. 9.  
 J. Ackeret. Grenzschichtabsaugung. Z.d.V.D.I. 1926, S. 1153.  
 O. Schrenk, Versuche an einer Kugel mit Grenzschichtabsaugung. ZFM 1926, S. 366.

## II.

Was die **Tragflügeltheorie** betrifft, so sind zunächst in Ergänzung der in den Abhandlungen selbst angegebenen Literatur noch einige Arbeiten zu erwähnen, die im Kriege von der Flugzeugmeisterei als geheim erklärt worden sind. Hierher gehören die S. 34 der I. Mitteilung erwähnten Arbeiten von Betz und Munk, die in den Technischen Berichten, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei (T.B.), abgedruckt sind. Es sind dies:

- A. Betz, Einfluß der Spannweite und Flächenbelastung auf die Luftkräfte von Tragflächen. T.B. I, S. 98.  
 M. Munk, Spannweite und Luftwiderstand. T.B. I, S. 199.  
 M. Munk, Modellmessung an drei Tragflächen verschiedener Spannweite. T.B. I, S. 203.

Die erste bringt die Umrechnungsformeln für Eindecker, die zweite erläutert die Bedeutung der Umrechnungsformeln, die dritte bringt den experimentellen Beweis dazu.

Auf die Theorie der Doppeldecker beziehen sich die Arbeiten:

- A. Betz, Berechnung der Luftkräfte auf eine Doppeldeckerzelle aus den entsprechenden Werten für Eindeckertragflächen. T.B. I, S. 103. (Zusammenstellung der Formeln auf Grund des „Hufeisenwirbels“.)  
 M. Munk, Beitrag zur Aerodynamik der Flugzeugtragorgane. T.B. II, S. 187. (Vergleich mit Versuchsergebnissen.)  
 L. Prandtl, Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern. T.B. III S. 309, abgedruckt in „Ergebnisse“ II. Lief., S. 9. (Formeln auf Grund der elliptischen Auftriebsverteilung.)

Eine Zusammenfassung der damaligen Kenntnisse stellt der Vortrag auf der Hamburger Versammlung der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (April 1918) dar:

- L. Prandtl, Tragflächenantrieb und -widerstand in der Theorie, abgedruckt im Jahrbuch VI der Wiss. Ges. f. Luftfahrt, Berlin 1920, bei Springer.

Hier mag auch erwähnt werden, daß, wie uns erst 1926 bekannt wurde, von Lanchester in England während des Krieges ein Fortschritt, der parallel mit dem unsrigen ging, erzielt wurde. In seinem Buche:

The Flying Machine. Two Papers: The Aeröfoil and the Screw Propeller, London 1915 (Sonderdruck aus den Proceedings of the institution of automobile engineers Bd. IX), findet er für den induzierten Widerstand des Eindeckers eine mit Gl. (25), S. 32 identische Beziehung; unsere Umrechnungsformeln finden sich aber nicht bei ihm.

Die Weiterführung der Tragflügeltheorie über den Stand der hier wiedergegebenen beiden Abhandlungen hinaus betraf zunächst die in Nr. 13 der I. Mitteilung erwähnte „Zweite Aufgabe“ (Berechnung der Auftriebsverteilung für gegebene Gestalt des Flügels). Mit ihr befaßt sich die Göttinger Dissertation von

A. Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie, mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels, München 1919 (Auszug in Beiheft 2 der ZFM 1920, S. 1); ferner die Abhandlungen von

R. Fuchs, Beiträge zur Prandtlschen Tragflügeltheorie. ZAMM 1921, S. 106;

E. Trefftz, Zur Prandtlschen Tragflügeltheorie. Math. Ann. 82 (1921), Heft 3/4.

Vgl. auch die zusammenfassenden Darstellungen von E. Trefftz in der ZAMM 1921, S. 206, und in den „Innsbrucker Vorträgen“, S. 34. Mit den Verhältnissen im Kurvenflug befaßt sich die Dissertation von

C. Wieselsberger, Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn, 1922<sup>1)</sup> (Auszug in der ZAMM 1922, S. 325).

Der Eindecker mit Scheiben an den Flügelenden ist von F. Nagel berechnet, vgl. „Ergebnisse“ III. Lieferung, S. 17; Experimente dazu ebenda S. 95.

Die Ausführungen über Berichtigung von Versuchsergebnissen wegen des endlichen Luftstromquerschnitts (Nr. 10 u. 11 der II. Mitt.) sind durch Berechnung der Verhältnisse im rechteckigen Kanal ergänzt von

H. Glauert: The Interference of Wind Channel Walls on the Aerodynamic Characteristics of an Aerofoil. Reports and Memoranda of The Aeronautical Research Committee, Nr. 867, London 1923.

Bezüglich der weiteren experimentellen Prüfung der Theorie sei verwiesen auf:

„Ergebnisse“, I. Lief. (1920), S. 50, und II. Lief. (1923), S. 17, 35 u. 41 (Sämtliche Beiträge von C. Wieselsberger);

1) Vgl. Fußnote 2, S. 94.

- „Innsbrucker Vorträge 1922“, S. 47 (C. Wieselsberger);  
 H. Glauert, Experimental tests of the vortex theory of aerofoils. Technical Report of the Aeronautical Research Committee 1923/24, Vol. 1, S. 169 (Reports u. Memoranda, Nr. 889);  
 A. Fage u. H. L. Nixon, The prediction on the Prandtl theory of the lift and drag for infinite span from measurements on aerofoils of finite span. Ebenda S. 183 (Reports u. Memoranda, Nr. 903).

Die am Schluß der II. Mitteilung angekündigte Verfeinerung der Theorie durch Übergang von der tragenden Linie zur tragenden Fläche ist in der Zwischenzeit ebenfalls im wesentlichen durchgeführt; es sei hier auf folgende Arbeiten verwiesen:

- W. Birnbaum †, Das ebene Problem des schlagenden Flügels. Handschriftl. Diss. 1922<sup>1)</sup>, Auszug in zwei Aufsätzen in der ZAMM 1923, S. 290 und 1924, S. 277;  
 H. Blenck, Der Eindecker als tragende Wirbelfläche. Handschriftl. Diss. 1923<sup>1)</sup>, Auszug in der ZAMM 1925, S. 36;  
 N. K. Bose, Über das Doppeldeckerproblem. Handschriftl. Diss. 1923<sup>1)</sup>, Auszug in der ZAMM 1927, S. 1.

Die Birnbauumsche Arbeit enthält zunächst eine Formulierung für die Auftriebsverteilungen, denen in erster Näherung Profilformen mit einer Funktion 1., 2. und 3. Grades als Gleichung entsprechen (gerade Platte, flach gewölbte und flach S-förmige Platte), durch deren Superposition beliebige Profile angenähert werden können, und macht davon Anwendung auf langsam mit kleiner Amplitude schlagende unendlich lange Flügel; Blenck berechnet neben dem geraden Eindecker den mit Pfeilform und den seitlich schiebenden Eindecker; Bose behandelt vor allem die Wölbungseinflüsse bei der gegenseitigen Einwirkung der beiden Flügel eines Doppeldeckers; bezüglich des ersteren Aufgabenkreises sei noch auf den Vortrag von Prandtl: Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, „Innsbrucker Vorträge“, S. 18, verwiesen, bezüglich der experimentellen Prüfung der letzteren Arbeit auf „Ergebnisse“ III. Lief., S. 9.

Als weitere Arbeit auf diesem Gebiet muß noch die folgende unabhängig von den soeben genannten Göttinger Arbeiten entstandene Dissertation der Technischen Hochschule Berlin erwähnt werden:

- H. Wagner, Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs

1) Vgl. Fußnote 2, S. 94.

von Tragflügeln, 1924 (Auszug in der ZAMM 1925, S. 17),

in der die nichtstationären Vorgänge beim Bewegungsbeginn aus der Ruhe heraus behandelt werden.

Das Doppeldeckerproblem wird in einer anderen Art behandelt von

B. Eck, Neuartige Berechnung der aerodynamischen Eigenschaften eines Doppeldeckers. ZFM 1925, S. 183.

### III.

Im Zusammenhang mit der hier abgedruckten Doppelabhandlung über **Schraubenpropeller** seien zunächst zwei Arbeiten angeführt, deren Entstehung zwar zeitlich früher liegt (wenn auch die zweite davon erst später veröffentlicht wurde), die aber sehr ähnliche Probleme wie die hier wiedergegebenen behandeln:

H. Föttinger, Neue Grundlagen für die theoretische und experimentelle Behandlung des Propellerproblem. Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 19 (1918), S. 385;

A. Betz, Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie. ZFM 1920, S. 105.

Föttinger untersucht das Strömungsfeld in der Umgebung eines Propellers. Er nimmt dabei die Zirkulation längs der Propellerflügel als konstant an, so daß von den Flügelspitzen und von der Nabe konzentrierte Wirbel ausgehen. Betz behandelt in seiner Arbeit den Propeller mit unendlich dicht stehenden Flügeln bei vernachlässigbar kleiner Kontraktion.

Im übrigen ist der Inhalt der hier abgedruckten Arbeit in der Zwischenzeit nach verschiedenen Richtungen hin erweitert worden. Einerseits wurde der Hauptgedanke, welcher zu einer Aussage über die Strömung im Schraubenstrahl führt, auch auf Propeller mit endlicher Belastung (merklicher Kontraktion) ausgedehnt. Eine Darstellung in dieser allgemeineren Form ist in dem Artikel von

A. Betz, Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handbuch der Physik Bd. VII, S. 257 u. f.

gegeben. Andererseits wurden von verschiedenen Verfassern die Vorgänge beim Propeller teils von etwas anderem Standpunkte aus behandelt, teils die Ergebnisse in eine für die praktische Verwendung bequemere Form gebracht und teils durch Einbeziehung der Verluste am Flügelblatt (Profilwiderstand) ergänzt. Es sind dies hauptsächlich folgende Arbeiten:

H. B. Helmbold, Zur Aerodynamik der Treibschraube. ZFM 1924, S. 150;

- H. B. Helmbold, Die Betz-Prandtl'sche Wirbeltheorie der Treibschraube und ihre Ausgestaltung zum technischen Berechnungsverfahren. Werft, Reederei, Hafen 1926, S. 565 u. 588;
- H. B. Helmbold, Eine Näherungslösung des Problems der wirtschaftlichen Luftschraube. ZFM 1927, S. 13;
- E. Moeller, Im offenen Flüssigkeitsstrom arbeitende Flügelräder. Z.d.V.D.I. 1924, S. 675;
- E. Pistolesi, Neue Ansätze und Ausführungen zur Theorie der Luftschrauben. „Innsbrucker Vorträge“, S. 67;
- Th. Bienen und Th. v. Kármán, Zur Theorie der Luftschrauben. Z.d.V.D.I. 1924, S. 1237;
- Th. Bienen, Die günstigste Schubverteilung für die Luftschraube bei Berücksichtigung des Profilwiderstandes. ZFM 1925, S. 209 u. 221 und 1926, S. 4;
- Th. Bienen, Die rechnerische Ermittlung der Schubverteilung und des Wirkungsgrades für ausgeführte Luftschrauben bei beliebigen Betriebszuständen. ZFM 1926, S. 485.

Die Arbeiten von Helmbold und von Moeller bringen in der Hauptsache Umformungen der hier wiedergegebenen Ergebnisse für den praktischen Gebrauch. Dabei wird auch der Verlust an den Flügeln (der Profilwiderstand) mit in Rechnung gezogen. In der zweiten Helmbold'schen Arbeit (in Werft, Reederei, Hafen) wird außerdem für stark belastete Schrauben der mit der Strahldrehung verbundene Unterdruck im Strahlinnern berücksichtigt.

Pistolesi berechnet die Änderungen von Schub und Drehmoment unter dem Einfluß der Störungsgeschwindigkeiten und gelangt unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung zu ganz ähnlichen einfachen Formeln, wie sie in der Tragflügeltheorie den Einfluß des Seitenverhältnisses zum Ausdruck bringen. Anstelle des Seitenverhältnisses tritt dabei das Verhältnis von Blattbreite zu Radius.

Bienen und v. Kármán berücksichtigen in ihrer Arbeit näherungsweise sowohl den Einfluß der Drehung wie auch den des Profilwiderstandes. Sie ermitteln eine günstigste Schubverteilung und die dazu erforderliche Flügelform. Die daran anschließenden Arbeiten von Bienen allein befassen sich noch ausführlicher mit der günstigsten Schubverteilung bei Berücksichtigung des Profilwiderstandes.

Über die praktische Anwendung und experimentelle Prüfung der Theorie ist hauptsächlich in dem Vortrag von

F. Horn, Versuche mit Tragflügel-Schiffschrauben. Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 28 (1927), S. 342, Material enthalten.

## IV.

An **zusammenfassenden Darstellungen** mögen noch erwähnt werden:

- L. Prandtl, Applications of modern Hydrodynamics to Aeronautics. Report 116, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington 1921;
- R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik (Bd. II des Handbuchs der Flugzeugbaukunde, herausgeg. von F. Wagenführ), Berlin 1922 bei R. C. Schmidt u. Co.;
- Maurice Roy, Theorie des surfaces portantes. Scientia, Phys. Math. No. 39, Paris 1922;
- R. Glauert, The Elements of Aerofoil and Airscrew theory. Cambridge 1926.

Ferner Beiträge von

- L. Hopf, „Zähe Flüssigkeiten“ (besond. S. 121 u. f.) und
  - A. Betz, „Tragflügel und hydraulische Maschinen“
- in Bd. VII des Handbuchs der Physik, herausgeg. von Geiger und Scheel, Berlin 1927 bei Springer.

Auf die folgenden mehr oder weniger **populären Darstellungen** mag ebenfalls hingewiesen werden:

- A. Betz, Einführung in die Theorie der Flugzeugtragflügel. Die Naturwissenschaften 1918, S. 557;
- L. Prandtl, Die neueren Fortschritte der flugtechnischen Strömungslehre. Z.d.V.D.I. 1921, S. 959;
- A. Betz, Die Vorgänge beim Schraubenpropeller. Die Naturwissenschaften 1921, S. 309;
- L. Prandtl, Magnuseffekt und Windkraftschiff. Die Naturwissenschaften 1925, S. 93;
- J. Ackeret, Das Rotorschiff und seine physikalischen Grundlagen. Göttingen 1925, bei Vandenhoeck und Ruprecht;
- J. Ackeret, Grenzschichtabsaugung. Z.d.V.D.I. 1926, S. 1153;
- A. Betz, Wirbelschichten und ihre Bedeutung für die Strömungsvorgänge. Die Naturwissenschaften 1926, S. 1228;
- L. Prandtl, Beitrag „Strömende Bewegung der Flüssigkeiten und Gase“ in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, Bd. I, 11. Aufl. (in Vorbereitung).

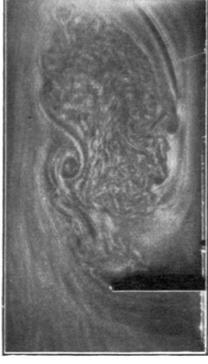
L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.



1.



2.



3.



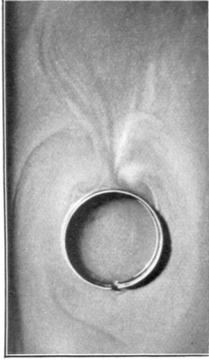
4.



5.



6.



7.



8.



9.



10.



11.



12.

Mit der Berufung Ludwig Prandtls als Professor für Angewandte Mechanik wurde die kleine Universitätsstadt Göttingen im Jahr 1904 zur Wiege der modernen Strömungsmechanik und Aerodynamik. Prandtl begründete hier nicht nur mit der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA) und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung zwei Forschungseinrichtungen von Weltrang, sondern auch mit der so genannten „Göttinger Schule“ eine außergewöhnlich fruchtbare wissenschaftliche Denkweise, die sich durch eine eigentümliche Balance von physikalischer Intuition und mathematischer Exaktheit auszeichnet. Die wissenschaftliche Methode Prandtls und seiner Schüler hat ihren Niederschlag in zahlreichen Dissertationen, Monographien und Lehrbüchern gefunden, die mittlerweile als klassisch gelten und damit zum Grundbestand der Strömungslehre gehören. Doch viele dieser Publikationen sind seit langer Zeit nicht mehr verfügbar. Die Reihe „Göttinger Klassiker der Strömungsmechanik“ stellt deshalb ausgewählte Publikationen, die der Göttinger Schule um Ludwig Prandtl zuzurechnen sind oder in einem gewissen historischen Bezug dazu stehen, wieder zur Verfügung.

Die 1927 im Eigenverlag des Göttinger Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung herausgegebenen „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“ sind eine Sammlung von Pionierarbeiten von Ludwig Prandtl zur Grenzschichttheorie und zur Tragflügeltheorie sowie von Albert Betz zur Propellertheorie, die gewissermaßen als Startpunkt für alle nachfolgenden Entwicklungen auf dem jeweiligen Gebiet angesehen werden können. Neben ihrer fundamentalen wissenschaftshistorischen Bedeutung sind sie in ihrer unübertroffenen Prägnanz auch für den heutigen Leser von großem fachlichem Interesse.



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

ISBN: 978-3-941875-75-3  
ISSN: 1863-1088

Universitätsverlag Göttingen