

Periodical volume

Mathematische Annalen - 82

in: Periodical

332 page(s)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Zur Prandtl'schen Tragflächentheorie.

Von

E. Trefftz in Aachen.

Durch die Arbeiten von Prandtl und die anschließenden Untersuchungen von ihm und seinen Mitarbeitern¹⁾ sind die Fragen nach dem Zusammenhang zwischen Auftrieb und Widerstand einer Tragfläche der Rechnung zugänglich gemacht worden. Wenn ich im folgenden eine Darstellung der Theorie gebe, so tue ich es nicht, weil ich glaube, der physikalischen Erkenntnis wesentlich Neues hinzufügen zu können, sondern nur, weil es mir gelungen ist, die mathematische Seite der Probleme zu vereinfachen. Ich hoffe damit einerseits dem praktischen Rechner die numerische Durchführung zu erleichtern und andererseits für den, der von der mathematischen Seite her an diese Fragen herantritt, die Eleganz und Einfachheit der Prandtl'schen Ansätze in das rechte Licht zu setzen.

§ 1.

Die Grundlagen der Theorie²⁾.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet der zweidimensionale Fall einer Tragfläche von überall gleichem Profil, die sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt. Für eine solche erhält man einen Auftrieb, wenn man in die Fläche einen Wirbelfaden legt, der eine Zirkulation

¹⁾ Siehe Prandtl, Tragflügeltheorie I u. II. Nachr. v. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse 1918 u. 1919; Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, ebenda 1919; Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie, Diss. Göttingen 1919; Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Diss. Göttingen 1919.

²⁾ Die Grundlagen der Theorie (§ 1, § 2 1. Abschnitt und § 3) sind im engen Anschluß an Prandtl und Betz dargestellt. Neu ist in der folgenden Arbeit die Zurückführung der Auftriebs- und Widerstandsberechnung auf die Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

um den Flügel hervorruft — oder mathematisch gesprochen, wenn man eine Mehrdeutigkeit des Potentials in dem die Tragfläche umgebenden zweifach zusammenhängenden Raume zuläßt. Ist Γ die Zirkulationsstärke dieses Wirbelfadens — gemessen durch das um die Tragfläche zu nehmende Integral $\int v_s ds$ —, ferner V die Geschwindigkeit der Luft relativ zur Tragfläche und ϱ die Luftdichte, so erfährt ein Flächenstreifen von der Breite dx einen Auftrieb:

$$(1) \quad dA = \varrho \Gamma \cdot V \cdot dx.$$

Die Wirbelstärke Γ bestimmt sich nach der Kutta-Joukowskischen Theorie aus der Bedingung, daß an der (scharfen) Hinterkante die Geschwindigkeit endlich bleiben muß (glattes Abströmen) zu:

$$(2) \quad \Gamma = \pi V t \sin \alpha^* \sim \pi V t \alpha^*.$$

Dabei ist α^* der sogenannte wirksame Anstellwinkel, d. h. die Verdrehung der Tragfläche aus derjenigen Lage, für die der Auftrieb verschwindet; t ist für ebene Platten gleich der Tiefe, für gewölbte Flügel eine für das Profil charakteristische, der Flügeltiefe proportionale Länge, die für normale Profile nur wenig von der Flügeltiefe abweicht. — Die Formeln (1) und (2) bilden die Grundlage der Auftriebs- und Widerstandsrechnung auch in dem allgemeinen Falle einer Tragfläche von endlicher Spannweite, dem wir uns jetzt zuwenden wollen.

Wir legen ein mit der Fläche mitbewegtes Koordinatensystem so, daß die x -Achse in die Hinterkante der Tragfläche fällt, die z -Achse in die Richtung der Luftgeschwindigkeit und die y -Achse senkrecht dazu nach oben, d. h. positiv in der Richtung positiven Auftriebs. Schneiden wir jetzt die unendlich breite Tragfläche an den Stellen $x = -l/2$ und $x = +l/2$ ab, so können wir den in der Tragfläche liegenden Wirbelfaden nicht mit abschneiden, da nur geschlossenen oder beiderseits ins Unendliche laufenden Wirbelfäden eine physikalische Bedeutung zukommt. — Die nächstliegende Vorstellung wäre nun die, daß dieser Wirbelfaden an den Enden der Tragfläche nach hinten abgebogen würde. Das entspricht aber noch nicht ganz den Tatsachen. In Wirklichkeit gehen nicht nur von den Enden, sondern von jedem Punkte der Hinterkante Wirbelfäden nach rückwärts ab. Infolgedessen haben wir nicht mehr eine über die ganze Spannweite konstante Zirkulation um den Flügel, sondern die Zirkulation (und damit der Auftrieb pro Flächeneinheit) ist in der Mitte am größten,

³⁾ Vgl. Jahrbuch der Wissensch. Ges. f. Luftfahrt 5 (1920), S. 37 u. f.; Prandtl, Tragflächenauftrieb und Widerstand in der Theorie.

nimmt — geschwächt durch das ablaufende Wirbelband — nach den Seiten zu ab und fällt an den Enden auf Null.

Die exakte Berechnung von Auftrieb und Widerstand einer Tragfläche würde zur Voraussetzung haben, daß die Lage bzw. die Bewegung dieses von der Hinterkante ausgehenden Wirbelbandes nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen bestimmt würde. Zur eindeutigen Festlegung der Zirkulationsverteilung würden wir dabei wie im ebenen Problem die Bedingung glatten Abströmens an der Hinterkante den übrigen Daten hinzufügen. Die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes wäre darauf eine gewöhnliche Randwertaufgabe der Potentialtheorie, deren Lösung die direkte Berechnung von Auftrieb und Widerstand durch eine Integration ermöglichen würde.

Um den mathematischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe durch Zuhilfenahme einer erfahrungsmäßig gewonnenen Hilshypothese zu begegnen, geht Prandtl von der Tatsache aus, daß wir es bei den Tragflächen zunächst mit den Fällen schwacher Belastung zu tun haben, d. h. mit solchen Strömungsvorgängen, wo die von der Tragfläche hervorgerufenen Störungsgeschwindigkeiten relativ klein sind gegen die Geschwindigkeit V der „Grundströmung“. Der Grundgedanke der Lösung besteht demgemäß darin, daß von der Eigenbewegung der von der Fläche sich loslösenden Wirbelfäden abgesehen wird. Es wird angenommen, daß die Wirbelelemente von der geradlinigen Grundströmung einfach geradlinig nach rückwärts fortgetragen werden. Damit ist die Lage der Wirbelfäden bekannt, und man kann bei gegebener Wirbelverteilung das Geschwindigkeitsfeld nach bekannten Methoden ermitteln. — Für die weitere Aufgabe der Ermittlung der Wirbelverteilung wird ferner angenommen, daß Tiefe und Dicke der Tragfläche klein sind gegen die Spannweite; dann kann in jedem Querschnitt $x = \text{const}$ die Strömung in der Umgebung der Tragfläche soweit als eben angesehen werden, daß die für die ebene Bewegung geltenden Formeln

$$(1) \quad dA = \rho \Gamma V dx \quad \text{für den Auftrieb und}$$

$$(2) \quad \Gamma = \pi V t \cdot \alpha^* \quad \text{für die Wirbelstärke}$$

angewendet werden können.

Auf Grund unserer Annahmen können wir uns ein Bild der Strömungsvorgänge machen. In genügender Entfernung vor der Tragfläche haben wir nur die Grundströmung V . In der Nähe der Tragfläche und hinter ihr überlagert sich über die Grundströmung die von dem Wirbelbande erzeugte Strömung. Da nach der ersten Annahme die Wirbelfäden geradlinig nach hinten (also in der z -Richtung) verlaufen, so ist im Unendlichen hinter der Tragfläche die von dem Wirbelbande erzeugte Strömung einfach eine

ebene Potentialbewegung in den Ebenen ($z = \text{const}$) senkrecht zur Grundströmung⁴⁾.

Betrachten wir noch die Ebene $z = 0$, d. h. die Strömung in der Nähe der Tragfläche, so finden wir, daß die Geschwindigkeitskomponenten in dieser Ebene gerade halb so groß sind, wie die Geschwindigkeiten der ebenen Potentialströmung im Unendlichen. Fügen wir nämlich zu der Strömung des Wirbelbandes die Strömung seines Spiegelbildes an der Ebene $z = 0$, so verdoppeln sich die Komponenten der Geschwindigkeit in dieser Ebene. Andererseits erhalten wir nach der Spiegelung durch die von $-\infty$ bis $+\infty$ laufenden Wirbelfäden im ganzen Raum die ebene Potentialströmung, die vorher nur im Unendlichen hinter der Tragfläche herrschte, woraus das Behauptete folgt⁵⁾. Diese letzte Bemerkung wird uns gestatten, die Bestimmung des Auftriebs und Widerstands einer Tragfläche auf eine Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie zurückzuführen.

§ 2.

Die Berechnung der Auftriebsverteilung bei gegebener Tragfläche.

Die Bestimmung der Verteilung der Wirbelstärke über das Wirbelband, d. h. die Bestimmung von Γ als Funktion von x ist die Grundaufgabe, der wir uns jetzt zuwenden. Ist diese gelöst, so ist nach (1) die Auftriebsverteilung über die Tragfläche, und wie wir unten sehen werden, auch die

⁴⁾ Bezeichnet r die Entfernung des Punktes xyz von einem Punkte $\xi\eta\zeta$ des Wirbelbandes, so ist das vom Wirbelbande im Punkte xyz erzeugte Potential

$$\varphi(xyz) = \int_{\zeta=0}^{\infty} \int_{\sigma=0}^l \Gamma(\sigma) \frac{\partial 1/r}{\partial \nu} d\sigma d\zeta,$$

wo $d\sigma$ das Bogenelement des Schnittes $\zeta = \text{const}$ mit dem Wirbelband und ν die Normale an das Wirbelband ist. Setzen wir $\zeta - z = \zeta^*$, so wird

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(xyz) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^l \Gamma(\sigma) \frac{\partial 1/r}{\partial \nu} d\sigma d\zeta^* \quad (r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^{*2}})$$

unabhängig von z , also das Potential einer ebenen Bewegung in den Ebenen $z = \text{const}$.

⁵⁾ Für $z = 0$ wird

$$\begin{aligned} \varphi(xy0) &= \int_0^{\infty} \int_0^l \Gamma(\sigma) \frac{\partial 1/r}{\partial \nu} d\zeta d\sigma \quad (r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^l \Gamma(\sigma) \frac{\partial 1/r}{\partial \nu} d\zeta d\sigma, \end{aligned}$$

also

$$\varphi(xy0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(xyz) \quad \text{q. e. d.}$$

Widerstandsverteilung gegeben. Zur Ermittlung der Wirbelverteilung dient Gleichung (2), die wir für kleine Winkel α^*

$$(2) \quad \Gamma = \pi V t \alpha^*$$

schreiben.

Hier ist α^* der „wirksame Anstellwinkel“, d. h. der Winkel, unter dem das Flächenelement vom Luftstrom getroffen wird, gerechnet von derjenigen Anblaserichtung, für die der Auftrieb verschwindet. Dieser ist nun nicht genau gleich dem Winkel α , um den das Flächenelement gegen die Horizontale geneigt ist, denn das Wirbelband erzeugt in der Umgebung der Tragfläche eine Abwärtsbewegung der Luft, die sich zu der Geschwindigkeit V der Grundströmung geometrisch addiert (siehe Fig. 1). Infolgedessen wird das Flächenelement nicht horizontal angeblasen, sondern unter einem

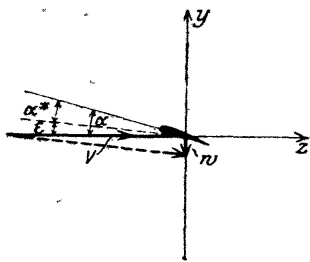


Fig. 1.

Winkel ε , der sich aus der von dem Wirbelband hervorgerufenen Vertikalgeschwindigkeit w und aus V zu

$$(3) \quad \varepsilon = w/V$$

berechnet. Um diesen Winkel wird also der Anstellwinkel verkleinert, d. h. wir haben

$$(4) \quad \alpha^* = \alpha - \varepsilon = \alpha - w/V,$$

und wenn wir dies in (2) einsetzen

$$(5) \quad \Gamma = \pi V t \{\alpha - w/V\}.$$

Drückt man hier w durch ein über das Wirbelband zu nehmendes Integral mittels Γ aus, so erhält man die Integralgleichung, von der Betz in seiner Göttinger Dissertation ausgegangen ist.

Eine einfachere Formulierung des Problems erhält man, wenn man Γ und w durch die Potentialfunktion $\varphi(xy)$ und ihre Ableitungen ausdrückt, welche im Unendlichen hinter der Tragfläche die ebene Potentialbewegung des Wirbelbandes beschreibt⁶⁾. Zeichnen wir uns eine Ebene $z = \text{const}$ für $z = +\infty$, so schneidet das Wirbelband das Stück $L-R$ der x -Achse von $x = -l/2$ bis $x = +l/2$ aus dieser Ebene aus. Dieser Schnitt ist im Sinne der Potentialtheorie als Begrenzung der xy -Ebene aufzufassen,

⁶⁾ Die konsequente Verwendung dieser Potentialfunktion $\varphi(xy)$ enthält den wesentlichen Gedanken dieser Arbeit und damit die in der Einleitung erwähnte Vereinfachung in der mathematischen Behandlung der Auftriebs- und Widerstandsberechnung.

da die vom Wirbelband erzeugte Bewegung im Unendlichen der xy -Ebene regulär ist.

Nach der oben gemachten Bemerkung ist nun die Abwärtsgeschwindigkeit an der Tragfläche gleich der Hälfte der Abwärtsgeschwindigkeit längs des Schnittes $L - R$, d. h. es ist

$$(6) \quad w = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}.$$

Der Strich über φ deutet dabei an, daß die Randwerte am Schnitte $L - R$ zu nehmen sind.

Um auch Γ durch φ auszudrücken, integrieren wir

$$\Gamma(x) = \oint v_s ds,$$

indem wir das Integral von L aus beginnend (siehe Figur 2) an der Oberseite des Wirbelbandes bis zur Stelle x führen, dann an der Unterseite des Bandes nach L zurückgehen. Da

$$\int_L^x v_s ds = \varphi(x) - \varphi(L)$$

ist, so erhalten wir

$$\Gamma(x) = \int_L^x v_{s_o} ds - \int_L^x v_{s_u} ds = \bar{\varphi}_o(x) - \bar{\varphi}_u(x),$$

wo die Indizes o und u die Oberseite und Unterseite des Wirbelbandes andeuten. Es ist also

$$(7) \quad \Gamma(x) = \bar{\varphi}_o(x) - \bar{\varphi}_u(x),$$

d. h. es ist Γ gleich dem Sprung, den das Potential erleidet, wenn man längs des Schnittes $L - R$ von der Unterseite zur Oberseite des Wirbelbandes übergeht. Setzen wir (6) und (7) in (5) ein, so erhalten wir die Bedingung

$$(8) \quad \bar{\varphi}_o - \bar{\varphi}_u = \pi V t \left(\alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right).$$

Das ist eine gemischte Randwertaufgabe der Theorie des logarithmischen Potentials.

Da (7) auch dann noch gilt, wenn das Wirbelband nicht eben ist — etwa bei V -förmig stehenden Flügeln, so gilt die Gleichung (8) allgemein. In dem speziellen Falle des ebenen Wirbelbandes vereinfacht sie sich dadurch, daß hier aus Symmetriegründen $\varphi_o = -\varphi_u$ wird, womit:

$$(9) \quad 2\bar{\varphi}_o = \pi V t \left(\alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right)$$

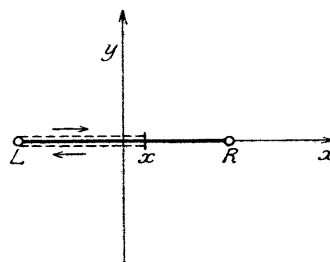


Fig. 2.

wird. Die Behandlung dieser Aufgabe werden wir unten noch an einem Beispiel erläutern. Wir wenden uns zunächst der Widerstandsberechnung zu.

§ 3.

Die Berechnung des Widerstandes.

Zur Erklärung des Widerstandes verfolgen wir zunächst den von Prandtl eingeschlagenen Weg. Wir sahen oben, daß in der Nähe der Tragfläche der horizontale Luftstrom durch die vom Wirbelband erzeugte Abwärtsgeschwindigkeit w um den Winkel $\varepsilon = w/V$ geneigt wird. Da nun die Kraft, die der Luftstrom auf ein Flächenelement ausübt, auf der Anblaserichtung senkrecht steht, so wird der beim Fehlen des Wirbelbandes vertikale Auftrieb $dA = \rho \Gamma dx$ ebenfalls um den Winkel ε nach rückwärts geneigt, wodurch eine Widerstandskomponente

$$dW = \varepsilon dA$$

oder, bei Berücksichtigung von (1) und (3)

$$(10) \quad dW = \rho \Gamma w dx$$

entsteht, und für den Gesamtwiderstand:

$$(11) \quad W = \rho \int_L^R \Gamma w dx.$$

Diese letzte Formel wollen wir noch auf eine andere Weise ableiten, die sich später als nützlich erweisen wird. Wir knüpfen an den folgenden Gedankengang von Betz an (Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, S. 6), der den Energiesatz heranzieht: „Die gesamte verloren gehende Energie ist hinter der Tragfläche in Form von kinetischer Energie vorhanden, welche in dem von dem Wirbelbande herrührenden Strömungsfeld steckt. Wir können deshalb die sekundliche Verlustarbeit anstatt an der Stelle, wo sie entsteht (an den zirkulationführenden Flügelteilen), auch weit hinter der Tragfläche dadurch bestimmen, daß wir die kinetische Energie der vom Wirbelband erzeugten Strömung zwischen zwei im Abstand V voneinander befindlichen Ebenen senkrecht zum Wirbelband ermitteln. Da das Wirbelband infolge der Fortbewegung der Tragfläche in jeder Sekunde um den Betrag V länger wird, wird die Energie in jeder Sekunde um den zwischen den beiden erwähnten Ebenen befindlichen Betrag größer.“ In Ausführung dieses fast wörtlich aus Betz zitierten Gedankenganges gelangen wir ebenfalls zur Formel (11). Betrachten wir für $z = \infty$ zwei Ebenen $z = c$ und $z = c + V$ („Betzsche

Kontrollebenen“), so ist der Energiebetrag der Wirbelströmung zwischen diesen beiden Ebenen

$$E = \frac{\rho V}{2} \int \text{grad}^2 \varphi \, dx \, dy.$$

Diese ist als sekundliche Verlustenergie gleich der gegen den Widerstand W geleisteten Arbeit $W \cdot V$. Es wird also

$$(12) \quad W = \frac{\rho}{2} \int \text{grad}^2 \varphi \, dx \, dy.$$

Da das Potential φ der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügt, können wir mit Hilfe der Formel:

$$\text{div}(\varphi \, \text{grad} \, \varphi) = \varphi \, \Delta \varphi + \text{grad}^2 \varphi$$

das Flächenintegral in ein Integral über die Berandung verwandeln. Bezeichnet n die äußere Normale, so wird

$$\int \text{grad}^2 \varphi \, dx \, dy = \int \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds.$$

Das Randintegral der rechten Seite ist um den Schnitt $L-R$ des Wirbelbandes mit der Kontrollebene zu erstrecken. An der Oberseite des Schnittes ist nun $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = 2w$, $ds = dx$, an der Unterseite $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_u$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = -2w$, $ds = -dx$.

Es wird also:

$$\frac{1}{2} \int \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, ds = \int_L^R \bar{\varphi}_0 w \, dx + \int_R^L \bar{\varphi}_u w \, dx = \int_L^R (\varphi_0 - \varphi_u) w \, dx.$$

Das letzte Integral ist nur noch einfach von L bis R über den Schnitt zu rechnen. Setzen wir es in (12) ein und berücksichtigen (7) $\bar{\varphi}_0 - \bar{\varphi}_u = \Gamma$, so erhalten wir wieder

$$(11) \quad W = \rho \int_L^R \Gamma w \, dx.$$

§ 4.

Ein Beispiel: Der einseitig begrenzte unendlich lange Streifen.

Als Beispiel und zur näheren Erläuterung der entwickelten Methode wollen wir einen Fall durchrechnen, der den von Betz benutzten Methoden der Reihenentwicklung nicht zugänglich ist, nämlich den einseitig begrenzten unendlich langen Streifen von überall gleichem Profil und gleichem Anstellwinkel. Dieser Fall hat deswegen eine besondere Bedeutung, weil die Verhältnisse an dem freien Ende charakteristisch sind auch für die Enden von Tragflächen endlicher Spannweite, deren Tiefe

klein ist gegen die Spannweite. Wir legen hier natürlich den Koordinatenanfang in das freie Ende des Flügels, der sich in Richtung der positiven x -Achse ins Unendliche erstreckt.

Für das Potential der Wirbelbewegung im Unendlichen haben wir jetzt längs der x -Achse die Randbedingung

$$(8) \quad \bar{\varphi}_0 - \bar{\varphi}_u = \pi V t \left(\alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right).$$

Die xy -Ebene ist längs der positiven x -Achse aufgeschnitten. Da wieder aus Symmetriegründen $\varphi_0 = -\varphi_u$ ist, so erhalten wir die Randbedingungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \text{am oberen Rande: } y = +0, 0 \leq x \leq \infty & 2\bar{\varphi}_0 = \pi V t \left\{ \alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\}, \\ \text{„ unteren „ } y = -0, 0 \leq x \leq \infty & -2\bar{\varphi}_u = \pi V t \left\{ \alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\}, \end{cases}$$

deren zweite wir auch durch $\bar{\varphi}_0 = -\bar{\varphi}_u$ ersetzen können, da $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}$ stetig ist.

Zur Vereinfachung der Randwertaufgabe führen wir zunächst die Funktion

$$(13) \quad \varphi^* = \varphi / t \cdot V \cdot \alpha$$

an Stelle von φ und

$$(14) \quad z^* = 4z/\pi t \quad \begin{pmatrix} z = x + iy \\ z^* = x^* + iy^* \end{pmatrix}$$

ein.

Dadurch vereinfachen sich die Randbedingungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \text{am oberen Rande: } (y = +0) & \bar{\varphi}_0^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial y^*} \\ \text{„ unteren „ } (y = -0) & \bar{\varphi}_u^* = -\bar{\varphi}_0^*. \end{cases}$$

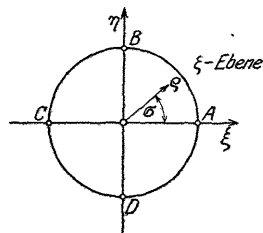


Fig. 3.

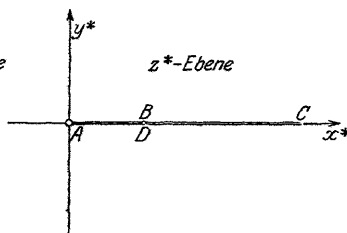


Fig. 4.

Um diese Randwertaufgabe zu lösen, bilden wir zunächst die z^* -Ebene durch die Transformation:

$$(16) \quad \zeta = \frac{i - \sqrt{z^*}}{i + \sqrt{z^*}} \quad \text{oder umgekehrt} \quad z^* = -\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2$$

auf den Einheitskreis der ζ -Ebene ab. (Siehe Fig. 3 u. 4.)

Dabei geht der Punkt $z^* = 0$ über in den Punkt $\zeta = 1$,
 „ „ $z^* = 1 + 0i$ „ „ „ „ $\zeta = i$,
 „ „ $z^* = 1 - 0i$ „ „ „ „ $\zeta = -i$,
 „ „ $z^* = \infty$ „ „ „ „ $\zeta = -1$.

Führen wir in der ζ -Ebene Polarkoordinaten ein $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$, so wird die Zuordnung der Ränder gegeben durch $x^* = \operatorname{tg}^2 \sigma/2$. Auf die neuen Koordinaten umgerechnet ergeben die Randbedingungen (15)

$$(15') \quad \begin{cases} \text{am oberen Halbkreis } |\zeta| = 1 & \varphi_0^* = \frac{\pi}{2} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varrho} \frac{\cos^3 \sigma/2}{\sin \sigma/2}, \\ \text{„ unteren „} & \varphi_u^* = -\varphi_0^*. \end{cases}$$

An diesen Gleichungen erkennen wir, daß für $\zeta = -1$ die Funktion φ^* vom Werte $+\pi/2$ in der oberen Halbebene auf den Wert $-\pi/2$ in der unteren Halbebene springt. Um diese Singularität zu beseitigen, setzen wir

$$(17) \quad \varphi^* = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi + 1} + \psi.$$

Die Funktion $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \eta/(\xi + 1)$ hat die verlangte Singularität und die Randbedingung für ψ wird

$$(18) \quad \begin{cases} \text{am oberen Halbkreis:} & \bar{\psi} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varrho} \frac{\cos^3 \sigma/2}{\sin \sigma/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\sigma}{2}, \\ \text{„ unteren „} & \bar{\psi}_u = -\bar{\psi}_0. \end{cases}$$

Diese Randwertaufgabe, für die die Existenz der Lösung feststeht⁷⁾, habe ich einfach in der Weise gelöst, daß ich für ψ die Entwicklung

$$(19) \quad \psi = a_1 \varrho \sin \sigma + a_2 \varrho^2 \sin 2\sigma + \dots + a_5 \varrho^5 \sin 5\sigma$$

angesetzt habe. Die Koeffizienten a_1 bis a_5 wurden in der Weise bestimmt, daß die Randbedingung (18), die eigentlich für alle Punkte gelten sollte, für die Werte $\sigma = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ erfüllt ist. Damit erhält man 5 lineare Gleichungen, deren Auflösung

$a_1 = 0,3770$, $a_2 = -0,0232$, $a_3 = 0,0130$, $a_4 = 0,0001$, $a_5 = 0,0003$ ergab. Mit der für den vorliegenden Fall ausreichenden Genauigkeit wird danach:

$$(20) \quad \varphi^* = \sigma/2 + 0,377 \varrho \sin \sigma - 0,023 \varrho^2 \sin 2\sigma + 0,013 \varrho^3 \sin 3\sigma.$$

Der Gesamtauftrieb und der Gesamtwiderstand werden in dem vorliegenden Falle unendlich. Es hat deshalb nur einen Sinn, die Auftriebsdichte

$$\frac{dA}{dx} = \varrho \Gamma V = \pi \varrho V^2 t \alpha \frac{F}{F_\infty} \text{ s)}$$

⁷⁾ Siehe *Enz. d. Math. Wissensch.* II C, 3, 29. Artikel Lichtenstein, Potentialtheorie, S. 282.

⁸⁾ $\Gamma_\infty = \pi V t \alpha$ ist die Zirkulation für eine nach beiden Seiten unbegrenzte Tragfläche.

und die Widerstandsichte

$$\frac{dW}{dx} = \rho \Gamma w = \pi \rho V^2 t \alpha^2 \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right) \quad (\Gamma = 2\bar{\varphi}_0)$$

pro Längeneinheit des Flügels zu betrachten. In Figur 5 sind deshalb $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$ und $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right)$ als Funktion von $\frac{x}{t}$ aufgetragen. Die Figuren zeigen quantitativ das, was qualitativ zu erwarten war. Die Auftriebs-

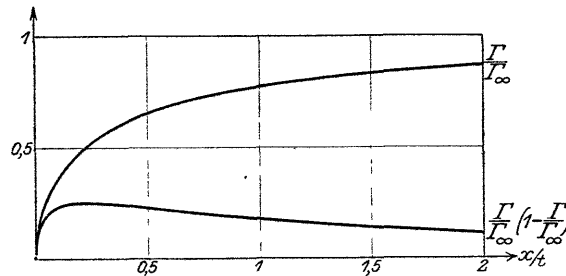


Fig. 5.

ichte ist Null am Ende des Flügels, steigt aber dann rasch an und nähert sich dem Werte, der dem nach beiden Seiten unbegrenzten Flügel entspricht. Die Widerstandsichte ist ebenfalls Null am Ende des Flügels, erhebt sich zu einem Maximalwert etwa bei $\frac{x}{t} = 0,2$, d. h. in einer Entfernung vom Flügelende, die etwa $\frac{1}{5}$ der Tiefe beträgt, und sinkt dann zu Null ab und zwar von der Ordnung $1/x$.

§ 5.

Tragflächen von kleinstem Widerstand.

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung solcher Tragflächen, die bei gegebenem Auftrieb einen möglichst kleinen Widerstand haben. Mathematisch handelt es sich auch hier lediglich um die Bestimmung der Zirkulationsverteilung über das Wirbelband. Ist diese und damit auch $w = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ längs des Wirbelbandes bekannt, so kann die Gleichung

$$(5) \quad \Gamma = \pi V t \left(\alpha + \frac{1}{2V} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

noch entweder bei gegebener Flügeltiefe $t(x)$ durch geeignete Verfügung über den Anstellwinkel α der einzelnen Flächenelemente oder, wenn umgekehrt dieser gegeben ist, durch geeignete Bestimmung der Tiefe erfüllt werden.

Da in diesem Falle die Beschränkung auf einen Flügel mit geradliniger Hinterkante und somit ebenem Wirbelband keine Vereinfachung bewirkt, wollen wir gleich den allgemeineren Fall ins Auge fassen. Es

sei wieder $L-R$ der Schnitt des Wirbelbandes mit einer Ebene $z=c$ im Unendlichen hinter der Tragfläche (d. h. also die Projektion der Hinterkante auf diese Ebene). φ sei wieder das Potential der vom Wirbelband im Unendlichen erzeugten ebenen Potentialströmung. Damit ist Γ genau wie oben der Potentialsprung beim Übergang über den Schnitt $L-R$. Den Auftrieb erhalten wir wieder zu

$$(1) \quad A = \varrho V \int \Gamma dx = \varrho V \int \Gamma x' ds,$$

wenn wir den sekundlichen Impulsgewinn der Flüssigkeit betrachten. Ebenso liefert nach § 3 die sekundliche Verlustenergie den Widerstand:

$$(12) \quad W = \frac{1}{2} \varrho \int \text{grad}^2 \varphi dx dy,$$

wo das Flächenintegral über die ganze von dem Schnitt $L-R$ begrenzte xy -Ebene zu nehmen ist.

Wir betrachten nun neben der Potentialfunktion φ , die die Lösung des Minimalproblems sei, eine variierte Potentialfunktion: $\varphi + \delta\varphi$. Die Variation des Widerstandes W ist dann

$$\delta W = \varrho \int \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \delta\varphi dx dy.$$

Dieses Integral können wir umformen. Es ist

$$\text{div} \delta\varphi \text{ grad} \varphi = \delta\varphi \text{ div grad} \varphi + \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \delta\varphi.$$

Da $\text{div grad} \varphi = 0$ ist, so folgt in unserem Falle

$$\int \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \delta\varphi dx dy = \int \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds,$$

also:

$$\delta W = \varrho \int \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds.$$

Das Integral der rechten Seite ist über die Begrenzung der xy -Ebene zu nehmen, d. h. um den Schnitt $L-R$. ν ist die äußere Normale an die Begrenzung, also am oberen Rande nach unten, am unteren Rande nach oben gerichtet. In das Integral geht jedes Element der Schnittkurve $L-R$ zweimal ein; einmal als Teil des oberen, dann als Teil des unteren Schnittrandes. Bezeichnen wir nun mit n die Normalenrichtung am oberen Schnittrande, also die Normale, die von oben nach unten durch das Wirbelband führt, so ist am oberen Rande $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, am unteren Rande $\frac{\partial \varphi_u}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ wegen der Stetigkeit der Normalkomponenten der Geschwindigkeit am Wirbelband. Fassen wir jetzt für jedes Linien-element die von der Oberseite und der Unterseite herrührenden Beträge zusammen, so ergibt sich:

$$\delta W = \varrho \int_L^R (\delta \varphi_0 - \delta \varphi_u) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

oder da $\Gamma = \varphi_0 - \varphi_u$, mithin $\delta \Gamma = \delta \varphi_0 - \delta \varphi_u$ ist

$$(21) \quad \delta W = \varrho \int_L^R \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Die Variation des Auftriebs wird

$$(22) \quad \delta A = \varrho V \int \delta \Gamma x' ds.$$

Bezeichnet λ einen Lagrangeschen Faktor, so wird die Bedingung für ein Minimum von W bei gegebenem A :

$$(23) \quad \delta E - \lambda \delta A = 0,$$

woraus in bekannter Weise die Bedingung

$$(24) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \lambda \frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$$

folgt. Dies ist genau die von Munk angegebene Minimalbedingung⁹⁾.

Die Bestimmung von φ aus (24) ist eine einfache Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Sie vereinfacht sich, wenn man statt φ das zu φ konjugierte Potential ψ bestimmt. Für dieses lautet die Randbedingung

$$(25) \quad \bar{\psi} = \lambda \bar{x}$$

(überstrichene Größen bedeuten Randwerte).

In dem Spezialfalle des ebenen Wirbelbandes können wir die Lösung sofort hinschreiben. Wir haben die Potentialfunktion zu suchen, die längs der x -Achse von $x = -l/2$ bis $x = +l/2$ die Werte $\bar{\psi} = \lambda \bar{x}$ annimmt und dort einen Sprung der Normalableitung hat, im übrigen regulär ist. Die Lösung

$$(26) \quad \varphi + i\psi = i\lambda [z - \sqrt{z^2 - l^2/4}]^{10)}$$

kann man in der üblichen Weise durch Abbilden des Schlitzes auf den Einheitskreis gewinnen, sie ist so einfach, daß sie ohne weiteres verifiziert werden kann. In der Tat ist für reelles z : $-l/2 < x < +l/2$ die Wurzel rein imaginär, so daß

$$\bar{\psi} = \lambda \bar{x}$$

ist. Für φ erhält man die Randwerte

$$(27) \quad \bar{\varphi} = \lambda \sqrt{l^2/4 - x^2},$$

⁹⁾ In der gleichen einfachen Weise läßt sich die Betzsche Minimalbedingung für den Propeller mit geringstem Energieverbrauch aufstellen.

¹⁰⁾ Es ist hier wieder $z = x + iy$; z ist also nicht die dritte Raumkoordinate.

d. h.

$$\Gamma = 2\bar{\varphi} = 2\lambda\sqrt{l^2/4 - x^2}.$$

Damit wird der Auftrieb

$$(28) \quad A = \varrho V \int_{-l/2}^{+l/2} \Gamma dx = 2\varrho V \lambda \int_{-l/2}^{+l/2} \sqrt{l^2/4 - x^2} dx = \frac{\pi\varrho V l^2}{4} \lambda$$

und der Widerstand

$$(29) \quad W = -\varrho \int \Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} dx = +\varrho \lambda \int_{-l/2}^{+l/2} \Gamma dx = \frac{\pi\varrho l^2}{4} \lambda^2.$$

Durch Elimination von λ ergibt sich

$$(30) \quad W = \frac{4A^2}{\pi\varrho V^2 l^2}.$$

(Eingegangen am 20. 5. 1920.)