

## Article

Ein Satz über Riemannsche Integrale

Landau, E.,

in: Mathematische Zeitschrift | Mathematische Zeitschrift - 2 |

Periodical issue

2 Page(s) (350 - 351)



## Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

## Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

## Kontakt / Contact

[DigiZeitschriften e.V.](#)

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## Ein Satz über Riemannsche Integrale.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Bekanntlich gilt der Satz:

Wenn die  $f_n(x)$  eine in  $a \leq x \leq b$  gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen sind, für welche der  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  existiert, und wenn sowohl die  $f_n(x)$  als auch  $f(x)$  von  $a$  bis  $b$  im Riemannschen Sinne integrabel sind, so gilt  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ .

Herr Bieberbach hat auf S. 155—157 dieses Bandes (vgl. auch die Berichtigungen auf S. 474) einen neuen Beweis des Osgoodschen Spezialfalles gegeben, in dem die  $f_n(x)$  und  $f(x)$  stetig vorausgesetzt werden. Er stützt sich dabei auf den in Fußnote 2 (S. 157) genannten bekannten Hilfssatz über Intervallmengen, von dem er im Text eine von der Maßtheorie freie Beweisanordnung gibt<sup>1)</sup>.

Ich füge die Bemerkung hinzu, daß sich aus diesem Hilfssatz nicht nur der Osgoodsche, sondern auch der obige Satz sofort ergibt; die folgende Begründung ist sogar kürzer als die Bieberbachsche beim Spezialfall.

Man darf  $0 \leq f_n(x) \leq M$  und  $f(x) = 0$  annehmen (da sonst nur  $|f_n(x) - f(x)|$  und 0 statt  $f_n(x)$  und  $f(x)$  zu betrachten wäre).

<sup>1)</sup> Während Herr F. Riesz in der Abhandlung, an die Herr Bieberbach anknüpft, ausdrücklich die Arzelàsche Arbeit *Sulle serie di funzioni (parte seconda)* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. V, Bd. VIII (1899—1900), S. 701—744] unter Hervorhebung der Seitenzahlen 723—724 zitiert, übersieht Herr Bieberbach, daß jener Hilfssatz dort als „lemma fondamentale“ auftritt und — selbstverständlich ohne moderne Maßtheorie — von demselben Verfasser, wie auf S. 134 jenes Bandes erwähnt, schon 1885 bewiesen wurde, in der Arbeit *Un teorema intorno alle serie di funzioni* [Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Ser. IV, Bd. I, S. 262—267].

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  und unendlich viele  $n$ , so daß  $\int_a^b f_n(x) dx > 2\varepsilon(b-a)$  wäre. Zu jedem dieser  $n$  gibt es also eine Einteilung des Intervalls in endlich viele Teile, so daß  $\sum e\lambda > 2\varepsilon(b-a)$  ist, wo  $e$  die Länge einer Teilstrecke,  $\lambda$  die untere Grenze von  $f_n(x)$  daselbst ist. Bezeichnet  $j$  die Gesamtlänge derjenigen Teilstrecken, für die  $\lambda \geq \varepsilon$ , d. h.  $f_n(x) \geq \varepsilon$  ist, so ist  $2\varepsilon(b-a) < \sum_{\lambda \geq \varepsilon} e\lambda + \sum_{\lambda < \varepsilon} e\lambda \leq Mj + \varepsilon(b-a)$ ,  $j > \frac{\varepsilon(b-a)}{M}$ . Nach dem Hilfssatz gibt es also einen Punkt  $x$ , so daß unendlich oft  $f_n(x) \geq \varepsilon$  ist, gegen die Voraussetzung.

Berlin, den 22. September 1918.

(Eingegangen am 22. September 1918.)