Ein Satz über Riemannsche Integrale.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Bekanntlich gilt der Satz:

Wenn die $f_n(x)$ eine in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen sind, für welche der $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert, und wenn sowohl die $f_n(x)$ als auch $f(x)$ von a bis b im Riemannschen Sinne integrabel sind, so gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$.

Herr Bieberbach hat auf S. 155—157 dieses Bandes (vgl. auch die Berichtigungen auf S. 474) einen neuen Beweis des Osgoodschen Spezialfalles gegeben, in dem die $f_n(x)$ und $f(x)$ stetig vorausgesetzt werden. Er stützt sich dabei auf den in Fußnote 2 (S. 157) genannten bekannten Hilfssatz über Intervallmengen, von dem er im Text eine von der Maßtheorie freie Beweisanordnung gibt [1]).

Ich füge die Bemerkung hinzu, daß sich aus diesem Hilfssatz nicht nur der Osgoodsche, sondern auch der obige Satz sofort ergibt; die folgende Begründung ist sogar kürzer als die Bieberbachsche beim Spezialfall.

Man darf $0 \leqq f_n(x) \leqq M$ und $f(x) = 0$ annehmen (da sonst nur $|f_n(x) - f(x)|$ und 0 statt $f_n(x)$ und $f(x)$ zu betrachten wäre).

---

[1]) Während Herr F. Riesz in der Abhandlung, an die Herr Bieberbach anknüpft, ausdrücklich die Arzelàsche Arbeit *Sulle serie di funzioni (parte seconda)* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, Ser. V, Bd. VIII (1899—1900), S. 701—744] unter Hervorhebung der Seitenzahlen 723—724 zitiert, übersieht Herr Bieberbach, daß jener Hilfssatz dort als „lemma fondamentale" auftritt und — selbstverständlich ohne moderne Maßtheorie — von demselben Verfasser, wie auf S. 134 jenes Bandes erwähnt, schon 1885 bewiesen wurde, in der Arbeit *Un teorema intorno alle serie di funzioni* [Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Ser. IV, Bd. I, S. 262—267].

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele n, so daß $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx > 2\,\varepsilon(b-a)$ wäre. Zu jedem dieser n gibt es also eine Einteilung des Intervalls in endlich viele Teile, so daß $\Sigma e\lambda > 2\,\varepsilon(b-a)$ ist, wo e die Länge einer Teilstrecke, λ die untere Grenze von $f_n(x)$ daselbst ist. Bezeichnet j die Gesamtlänge derjenigen Teilstrecken, für die $\lambda \geqq \varepsilon$, d. h. $f_n(x) \geqq \varepsilon$ ist, so ist $2\,\varepsilon(b-a) < \sum\limits_{\lambda \geqq \varepsilon} e\lambda + \sum\limits_{\lambda < \varepsilon} e\lambda \leqq Mj + \varepsilon(b-a)$, $j > \frac{\varepsilon(b-a)}{M}$. Nach dem Hilfssatz gibt es also einen Punkt x, so daß unendlich oft $f_n(x) \geqq \varepsilon$ ist, gegen die Voraussetzung.

Berlin, den 22. September 1918.

(Eingegangen am 22. September 1918.)