Über einen Satz von Laguerre.
Pólya, G.
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
Volume 38 / 1929 / Article

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

daß die imaginären Nullstellen nicht reell werden können, wenn ν variiert, außer wenn sie gegen Null konvergieren. Also hat $J_{-\nu}(z)$ wenigstens $2[\nu]-2$ imaginäre Nullstellen, wenn ν nicht ganzzahlig ist. Da $\varphi_{-\nu}(z)$ eine gerade Funktion ist, so wird die Anzahl der imaginären Nullstellen, welche keine rein imaginären sind, ein Vielfaches von vier sein. Demzufolge ergibt sich aus dem Satz I sofort, daß die Anzahl der imaginären Nullstellen der Funktion $J_{-\nu}(z)$, ($\nu>0$ und nicht ganzzahlig), gleich $2[\nu]$ ist. Auf diese Weise ist das Theorem von Hurwitz bewiesen.

(Eingegangen am 22. 5. 1928.)

Über einen Satz von Laguerre.

Von G. Pólya in Zürich.

In der vorstehenden Arbeit[1]) gibt Herr Obreschkoff einen neuen Beweis für das wohlbekannte Resultat von Hurwitz[2]), betreffend die Besselsche Funktion $J_{-\nu}(z)$, daß die ganze Funktion

$$(1)\qquad (\sqrt{z})^{\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\,\frac{1}{\Gamma(n+1-\nu)}$$

genau $[\nu]$ nichtpositive Nullstellen besitzt, falls $\nu \geqq 0$. (Ich wähle diese Fassung, weil sie auch für ganzzahliges ν gültig bleibt.) In der ersten Hälfte seines Beweises gibt Herr Obreschkoff eine obere Abschätzung der Anzahl der fraglichen Nullstellen, indem er sich auf die Reihendarstellung (1) stützt und an einen algebraischen Satz von Laguerre[3]) anknüpft; in der zweiten Hälfte benützt er auch die Differentialgleichung von $J_{-\nu}(z)$ und knüpft an die Kontinuitätsbetrachtungen an, die Herr Hilb zum Beweis desselben Hurwitzschen Satzes verwendet hat.[2])

Ich bemerke, daß der ganze Beweis auf Grund der Reihendarstellung mit Hilfe des Laguerreschen Ansatzes geführt werden kann. Ich werde nämlich aus diesem Ansatz den in Nr. 1 formulierten Satz I herleiten, der geeignet ist, die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen von gewissen rationalen oder transzendenten ganzen Funktionen nicht bloß abzuschätzen, sondern genau zu bestimmen. Satz I ergibt durch unmittelbare Spezialisierung einerseits das genannte Hurwitzsche

1) Siehe S. 156—161.

2) A. Hurwitz, Math. Annalen 33 (1889) 246—266. Vgl. auch E. Hilb, Math. Zeitschrift 15 (1922) 274—279.

3) E. Laguerre, Œuvres (Paris 1898) Bd. I, S. 200—202.

Resultat, andererseits einige kuriose Sätze über Polynome mit nur negativen Nullstellen (vgl. unter Nr. 4), die ich schon vor einiger Zeit angekündigt habe.[4])

1. Ich bezeichne im folgenden eine ganze Funktion als *reell gerichtet* bzw. als *positiv gerichtet*, wenn sie als Grenzwert einer reellkoeffizientigen Polynomfolge mit nur reellen bzw. mit nur positiven Nullstellen dargestellt werden kann. Wie bekannt[5]), ist diese Definition mit der folgenden äquivalent: Die ganze Funktion $G(z)$ heißt reell gerichtet, wenn

$$G(z) = e^{-\gamma z^2} H(z)$$

ist, wobei γ reell und nichtnegativ ist und $H(z)$ eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion vom Geschlechte Null oder Eins bedeutet, die für reelles z reelle Werte annimmt und nur reelle Nullstellen hat. Die ganze Funktion $g(z)$ heißt positiv gerichtet, wenn $g(z^2)$ reell gerichtet ist. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen behaupte ich den Satz:

I. *Es sei*

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{2}$$

entweder ein Polynom m-ten Grades mit lauter positiven Nullstellen oder eine positiv gerichtete ganze transzendente Funktion ohne verschwindende Nullstellen; mit $\mathfrak{J}$ bezeichne man im ersten, algebraischen Fall das abgeschlossene Intervall $[0, m]$, *im zweiten, transzendenten Fall das von links abgeschlossene Intervall* $[0, +\infty)$.[6]) *Es sei $G(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion, die im Intervalle $\mathfrak{J}$ genau s Nullstellen besitzt, und zwar seien diese s Nullstellen einfach, und der Abstand zwischen zwei konsekutiven sei nicht kleiner als* 1. *Im ersten Fall besitzt*

$$a_0 G(0) + a_1 G(1) z + a_2 G(2) z^2 + a_3 G(3) z^3 + \cdots \tag{3}$$

genau $m - s$ positive, im zweiten genau s nichtpositive Nullstellen.

Im algebraischen Fall läßt sich die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen nicht genau angeben, da $G(m) = 0$ sein kann, im transzendenten Fall ist die Anzahl der positiven Nullstellen im allgemeinen $= \infty$. Der transzendente Fall wird aus dem algebraischen hergeleitet, vgl. unter Nr. 3.

---

4) Comptes Rendus 183 (1926) 413—414 und 467—468, insbesondere S. 468. Von der an jener Stelle angekündigten und zu jener Zeit abgeschlossenen Untersuchung ist das hier Mitgeteilte nur ein Ausschnitt.

5) a) G. Pólya und I. Schur, Journal f. d. reine u. angew. Math. 144 (1914) 89—113. b) G. Pólya, daselbst 145 (1915) 224—249.

6) In der Hervorhebung des abgeschlossenen Intervallendes mittels [bzw.] und des offenen mittels (bzw.) schließe ich mich an F. Hausdorff an.

Setzt man $g(z) = e^{-z} = \lim\limits_{m \to \infty} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$,

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z - \nu + 1)} \qquad (\nu \geqq 0),$$

so sind die Bedingungen des Satzes I (des zweiten, transzendenten Falles) offenbar erfüllt, $s = [\nu]$, die Reihe (3) spezialisiert sich zu (1), und so folgt der volle Hurwitzsche Satz auf einen Schlag aus Satz I.

2. Es sei angenommen, daß $g(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist.

Zwei Koeffizienten a_k und $a_l (k < l)$ eines Polynoms von der Form (2) bilden einen Zeichenwechsel, wenn $a_k a_l < 0$ und $a_{k+1} = \cdots = a_{l-1} = 0$ ist. (Die letztere Bedingung betrifft die zwischen a_k und a_l liegenden Koeffizienten und tritt nur auf, wenn es solche gibt, das heißt, wenn $l - k > 1$ ist.)

Wir versetzen uns nun in die Voraussetzungen des algebraischen Falles des Satzes I. Die im Intervalle $[0, m]$ gelegenen Nullstellen von $G(z)$ seien mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ bezeichnet:

$$(4) \qquad 0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s \leqq m,$$

$$(5) \qquad \alpha_{k+1} \geqq \alpha_k + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s-1),$$

und es sei

$$(6) \qquad G(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_s) G^*(z) \qquad \text{gesetzt.}$$

Ich bezeichne generell mit α eine im Intervall $[0, m]$ gelegene, mit β eine außerhalb davon gelegene reelle Zahl. Es sind also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ spezielle α, und die Nullstellen, die $G^*(z)$ eventuell besitzt, sind β.

a) Die Koeffizienten von (2) zeigen, nach Voraussetzung und gemäß der Descartesschen Zeichenregel, m Zeichenwechsel, sie sind abwechselnden Vorzeichens. Dasselbe gilt von den Koeffizienten des Polynoms

$$(7) \qquad g^*(z) = a_0 G^*(0) + a_1 G^*(1) z + \cdots + a_m G^*(m) z^m,$$

da doch $G^*(z)$ im Intervalle $[0, m]$ nicht verschwindet und folglich auch das Zeichen nicht wechselt.

Nun zeigen die Koeffizienten des Polynoms

$$(8) \qquad a_0(0 - \alpha) G^*(0) + a_1(1 - \alpha) G^*(1) z + \cdots + a_m(m - \alpha) G^*(m) z^m$$

genau einen Zeichenwechsel weniger als (7); um sich hiervon zu überzeugen, geht man alle Fälle durch: Es kann α Endpunkt oder innerer Punkt von $[0, m]$ und als innerer Punkt ganzzahlig oder nichtganzzahlig sein.

Geht man von (7) zu (3) in s Schritten über, indem man, gemäß (6), bei jedem Schritt einen neuen Linearfaktor $z - \alpha$ heranzieht (es stellt (8) mit $\alpha = \alpha_1$ den ersten solchen Schritt dar), so wird mit jedem Schritt ein Zeichenwechsel zerstört, wie man sich auf Grund von (5) überzeugt; diese Bedingung sichert nämlich, daß der durch α_k zerstörte Zeichenwechsel durch α_{k+1} nicht wieder hergestellt wird.

Somit hat (3) genau $m - s$ Zeichenwechsel und folglich, auf Grund der Descartesschen Regel, höchstens $m - s$ positive Nullstellen.

b) Man bilde mit dem Polynom unter (2) die für positive x reellwertige und analytische Funktion $x^{-\beta} g(x)$. Diese hat, nach Voraussetzung, m Nullstellen im offenen Intervalle $(0, +\infty)$ und strebt gegen 0, wenn x gegen einen der beiden Endpunkte dieses Intervalles konvergiert; es kommt der linke oder der rechte Endpunkt in Betracht, je nachdem $\beta < 0$ oder $\beta > m$ ist. Man schließt aus einer geeigneten Fassung des Rolleschen Satzes[7]), daß

$$(9) \quad x^{\beta+1} \frac{d\, x^{-\beta} g(x)}{d\, x} = x g'(x) - \beta g(x)$$

$$= a_0(0 - \beta) + a_1(1 - \beta) x + a_2(2 - \beta) x^2 + \cdots + a_m(m - \beta) x^m$$

mindestens m, also genau m positive Nullstellen besitzt. Hieraus folgt durch Iteration und Grenzübergang, daß das Polynom (7) genau m positive Nullstellen hat. Es ist zuerst zu beachten, daß $G^*(z)$ als Grenzwert von Polynomen darstellbar ist, die nur reelle, außerhalb $[0, m]$ gelegene Nullstellen wie β besitzen, und ferner, daß die Zahlen $a_0, a_m, G^*(0), G^*(m)$ von Null verschieden sind; letzterer Umstand sichert nämlich, daß die m, bei jeder Annäherung von $G^*(z)$ durch die besagten Polynome im offenen Intervall $(0, +\infty)$ vorhandenen Nullstellen bei dem Grenzübergang nicht in die Endpunkte entweichen.

Von $x^{-\alpha} g^*(x)$ kann man, im Gegensatz zu $x^{-\beta} g(x)$, nicht behaupten, daß sie gegen Null strebt, wenn x gegen einen Endpunkt von $(0, +\infty)$ konvergiert, da α in $[0, m]$ gelegen ist. Daher kann man jetzt, im Gegensatz zu (9), nur so viel aus dem Rolleschen Satz schließen, daß das Polynom

$$(10) \qquad x^{\alpha+1} \frac{d\, x^{-\alpha} g^*(x)}{d\, x} = x \frac{d g^*(x)}{d\, x} - \alpha g^*(x),$$

das mit dem unter (8) angeschriebenen identisch ist, mindestens $m - 1$ positive Nullstellen hat. Wenn wir, wie unter a), von (7) zu (3) in s Schritten übergehen, von denen (10) und (8) mit $\alpha = \alpha_1$ den ersten

7) Vgl. z. B. G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925) Bd. II, Nr. V 16, S. 39 u. 223.

darstellen, mit jedem Schritt einen neuen Linearfaktor $z - \alpha$ heranziehend, so finden wir, daß (3) mindestens $m - s$ positive Nullstellen hat.

Unter a) und b) haben wir den algebraischen Fall von Satz I bewiesen, nämlich daß das Polynom (3) $m - s$ positive Nullstellen besitzt, also daß es, vgl. unter a), *genau so viel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel besitzt.*

3. Durch Grenzübergang aus dem algebraischen Fall des Satzes I kann in bezug auf den transzendenten Fall davon unmittelbar geschlossen werden, daß die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen $\leqq s$ ist, aber auch nicht mehr. Daß es $= s$ ist, erhält man mit Hilfe des folgenden Satzes, den ich bei anderer Gelegenheit[8]) im Anschluß an Jensen[9]) bewiesen habe.

II. *Die unendliche Potenzreihe*

$$c_0 + \frac{c_1 z}{1!} + \frac{c_2 z^2}{2!} + \cdots = f(z)$$

sei nicht stets divergent, ihre Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ seien reell, das mit diesen Koeffizienten gebildete Polynom

$$c_0 + \binom{m}{1} c_1 z + \binom{m}{2} c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

soll t_m nichtpositive Nullstellen haben. Dann ist $t_1 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq \cdots$. Die Funktion $f(z)$ ist dann und nur dann das Produkt einer positiv gerichteten ganzen Funktion mit einem reellkoeffizientigen Polynom, wenn

$$\lim_{m \to \infty} t_m = t$$

endlich ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat $f(z)$ genau t nichtpositive Nullstellen.

Man kann zeigen, daß die Reihe (3) unter den Voraussetzungen des Satzes I (wir sind jetzt im transzendenten Falle) stets konvergiert.[10]) Ich will mit diesem Nachweis den Text nicht belasten und den Beweis unter der Annahme führen, daß (3) nicht stets divergiert; dies ist für die Anwendungsbeispiele [wie für (1)] gewöhnlich leicht direkt nachzuprüfen.

---

8) a. a. O. 5 b), S. 245, Satz III.

9) J. L. W. V. Jensen, Acta Math. 36 (1913) 181—195, vgl. S. 187.

10) Es ist nämlich $G(n) = O(a^n)$ mit passendem, von n unabhängigem positiven a, wie man entweder durch direkte Diskussion der Produktdarstellung von $G(z)$ findet oder aus dem Umstande, daß, wenn p eine, die größte positive Nullstelle von $G(z)$ übersteigende ganze Zahl ist, $G(p)$, $G(p+1)$, $G(p+2)$, ... in der Terminologie a. a. O. 5a) eine Faktorenfolge erster Art bilden.

Wir schließen zuerst, uns auf die Voraussetzung des transzendenten Falles von Satz I stützend, mittels Satz II von der Reihe (2) auf das Polynom

$$a_0 + \binom{m}{1} 1!\, a_1 z + \binom{m}{2} 2!\, a_2 z^2 + \cdots + m!\, a_m z^m.$$

Dieses hat nur positive Nullstellen. Es sei m größer als die größte der s nichtnegativen Nullstellen von $G(z)$; dann ist das Polynom

$$a_0 G(0) + \binom{m}{1} 1!\, a_1 G(1) z + \cdots + m!\, a_m G(m) z^m \tag{11}$$

genau vom Grade m und hat m Nullstellen, von welchen, wie wir mittels des schon bewiesenen algebraischen Falles von Satz I weiterschließen, genau s nichtpositiv sind. Endlich schließen wir mittels Satz II von den Polynomen (11) auf die Reihe (3): Dieses hat genau s nichtpositive Nullstellen. Somit ist auch der transzendente Fall von Satz I bewiesen.

4. Beide nachfolgenden Beispiele erläutern den algebraischen Fall des Satzes I.

a) Man schreibe das unter (2) betrachtete Polynom mit nur positiven Wurzeln in der Form

$$g(z) = b_0 - b_1 z + b_2 z^2 - + \cdots \tag{12}$$

Die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sind alle von Null verschieden und desselben Zeichens, sagen wir positiv. Es seien k, l ganze Zahlen $0 \leqq k < l$. Dann sind die Bedingungen von Satz I durch

$$G(z) = \frac{(-1)^k \sin \pi (z-k)}{l \sin \frac{\pi (z-k)}{l}} = (-1)^{l-1} G(z+l) \tag{13}$$

sämtlich erfüllt. Satz I ergibt, daß das aus (12) und (13) konstruierte Polynom

$$b_0 G(0) - b_1 G(1) z + b_2 G(2) z^2 - + \cdots$$
$$= b_k z^k - b_{k+l} z^{k+l} + b_{k+2l} z^{k+2l} - + \cdots$$

ebensoviel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel besitzt; vgl. den Schluß von Nr. 2. Aber je zwei konsekutive stehengebliebene Koeffizienten weisen einen Zeichenwechsel auf; so kommen wir zu dem Satz:

Wenn das Polynom

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m$$

nur negative Nullstellen hat, so hat das Polynom

$$b_k + b_{k+l} z + b_{k+2l} z^2 + \cdots + b_{k+ql} z^q,$$

wobei $\quad 0 \leqq k < l, \quad k + ql \leqq m < k + (q + 1)l,$

ebenfalls nur negative Nullstellen.

b) Wir schreiben jetzt das Polynom (2) mit lauter positiven Wurzeln so:

$$(14) \qquad g(z) = b_0 - \frac{b_1 z}{1!} + \frac{b_2 z^2}{2!} - \frac{b_3 z^3}{3!} + - \cdots$$

und wählen, die Bedeutung von k und l beibehalten,

$$(15) \qquad G(z) = \frac{\Gamma\left(-\frac{z-k}{l}\right)}{l\,\Gamma(-z)} = \frac{(-1)^k \sin \pi (z-k)}{l \sin \frac{\pi (z-k)}{l}} \cdot \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma\left(1+\frac{z-k}{l}\right)}.$$

Die Funktion (15) ist ganz; denn es sind die Pole des Zählers des ersten Bruches

$$z = k, \quad k + l, \quad k + 2l, \ldots$$

unter denen des Nenners

$$z = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

enthalten. Hieraus sieht man ferner, daß (15) nur nichtnegative ganzzahlige Nullstellen hat. Endlich ist die Funktion (15), wie $1/\Gamma(z)$ vom Geschlecht Eins. Somit sind alle Bedingungen des Satzes I erfüllt, und folglich hat das aus (14) und (15) konstruierte Polynom

$$b_0 G(0) - \frac{b_1}{1!} G(1) z + \frac{b_2}{2!} G(2) z^2 - + \cdots$$
$$= b_k z^k - \frac{b_{k+l}}{1!} z^{k+l} + \frac{b_{k+2l}}{2!} z^{k+2l} - + \cdots$$

ebensoviel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel. Wir gelangen so zu dem Satz (q ist wie in Beispiel a) bestimmt):

Wenn das Polynom

$$b_0 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{b_m}{m!} z^m$$

nur negative Nullstellen hat, so hat das Polynom

$$b_k + \frac{b_{k+l}}{1!} z + \frac{b_{k+2l}}{2!} z^2 + \cdots + \frac{b_{k+ql}}{(k+ql)!} z^q$$

ebenfalls nur negative Nullstellen.

Die unter a) und b) gefundenen Sätze erweitert man ohne Schwierigkeit (mit oder ohne Gebrauch des Satzes II) auf negativ gerichtete ganze Funktionen, das heißt auf solche, die Grenzwerte von Polynomen mit nur negativen Nullstellen sind. ($g(z)$ ist negativ gerichtet, wenn $g(-z)$ positiv gerichtet ist.) An Stelle einer allgemeinen Formulierung