durch je einen Wirbel über die freien Enden des Zylinders hinaus fortgesetzt werde (Fig. 8). Diese Vorstellung wurde auf Grund der Vorgänge in der Grenzschicht von Prandtl[1]) berichtigt (Fig. 9), welcher zeigte, daß durch das Wirbelsystem der Auftrieb etwas vermindert wird. Diese Rechnungen sind noch nicht völlig abgeschlossen, doch ist zu hoffen, daß auch hier der formale Anschluß der Wirbelung an die Zirkulation bald gelingt.

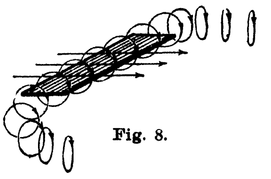

Fig. 8.

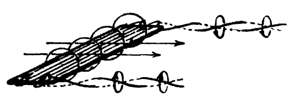

Fig. 9.

Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten.

Von GEORG HAMEL in Aachen.

Einleitung.

Die Gleichungen für die ebene Bewegung zäher und volumbeständiger Flüssigkeiten ziehen sich nach Elimination des Drucks und bei Einführung der Stromfunktion ψ, durch welche sich die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ausdrücken, zu der einen Gleichung zusammen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sigma \Delta \Delta \psi,$$

wobei σ das Verhältnis des Zähigkeitskoeffizienten zur spezifischen Masse μ angibt und Δ den Laplaceschen Operator bedeutet.

Dieser Gleichung genügen alle Potentialbewegungen

$$\Delta \psi = 0,$$

aber diese Tatsache ist von geringer Bedeutung, da zähe Flüssigkeiten an festen Wänden haften und es aus bekannten funktionentheoretischen Gründen keine Potentialbewegung geben kann, die das tut. Sonst ist wohl eigentlich nur die Poiseuillesche Laminarbewegung als exakte Lösung von (I) bekannt, und die zeigt nicht einmal die Bedeutung der quadratischen Glieder, weil diese bei ihr identisch verschwinden.

Unter diesen Umständen erscheint es vielleicht nützlich, von (I) noch einige *exakte* Lösungen zu kennen, für welche die quadratischen

1) L. Prandtl, Handw. d. Naturw. Bd. 4 S. 112 u. S. 133.

Glieder nicht verschwinden, und solche sollen im folgenden nach zwei Methoden angegeben werden.

Es handelt sich in beiden Fällen um Bewegungen in spiralförmigen Stromlinien, die ja häufig beobachtet werden.

Drittens werden wir noch die Nachbarlösungen zur reinen Radialströmung untersuchen.

Erster Teil.

Wir fragen:

Gibt es Lösungen von (I), *die keine Potentialbewegungen sind, bei denen aber die Strombahnen die gleichen sind wie bei einer Potentialbewegung, während die Geschwindigkeitsverterteilung eine andere sein soll?*

Wir werden solche Lösungen angeben können, und zwar alle: die Stromlinien sind logarithmische Spiralen (einschließlich konzentrischer Kreise und reiner Radialströmung); für die Geschwindigkeitsverteilung stoßen wir auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, die bei reiner Radialströmung auf elliptische Funktionen führt. Bei der Diskussion zeigt sich der Einfluß der quadratischen Glieder in einem wesentlichen Unterschied zwischen Einströmen und Ausströmen (siehe §§ 7, 8, 9).

Wir fragen also nach Lösungen ψ von (I), für welche

$$\psi = f(\varphi)$$

ist und $\Delta\varphi = 0$, aber nicht $\Delta\psi = 0$ ist. Das letztere schließt

$$f''(\varphi) = 0$$

aus. Wir beschränken uns auf *stationäre Bewegungen:* $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$.

§ 1.

Die Rechnung wird durchsichtiger, wenn wir zunächst die Hilfsaufgabe lösen:

Gleichung (I) *auf isometrische Koordinaten zu transformieren*, d. h. solche krummlinige Koordinaten φ, χ, daß

$$\varphi + i\chi = w(x + iy) = w(z)$$

ist.

Es sei also:

$$\psi = \psi(\varphi, \chi); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

Bezeichnen wir $\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\chi^2}$ mit $\Delta'\psi$, so ergibt sich zunächst mit der Abkürzung

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = Q,$$

$$\Delta\psi = Q \cdot \Delta'\psi.$$

Nun ist, das Doppelintegral über ein beliebiges Gebiet erstreckt,

$$\iint\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \varDelta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx\,dy=\iint d\varDelta\cdot d\psi$$

$$=\iint\left(\frac{\partial(Q\varDelta')}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial(Q\varDelta')}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)d\varphi\cdot d\chi$$

$$=\iint\left(\frac{\partial(Q\cdot\varDelta')}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial(Q\varDelta')}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Da aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial x}=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=Q$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \varDelta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=Q^2\left\{\left(\frac{\partial \varDelta'}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial \varDelta'}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)+\varDelta'\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}=2\frac{\partial}{\partial \varphi}R\ln\frac{dw}{dz}=2R\frac{d}{dw}\ln\frac{dw}{dz}=2R\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}$$

und

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}=2\frac{\partial}{\partial \chi}R\ln\frac{dw}{dz}=-2\frac{\partial}{\partial \varphi}J\ln\frac{dw}{dz}=-2J\frac{d}{dw}\ln\frac{dw}{dz}=-2J\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}.$$

Setzen wir die analytische Funktion von z

$$2\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2}=a+bi,$$

so wird

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \varDelta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\left|\frac{dw}{dz}\right|^4\left\{\left(\frac{\partial \varDelta'}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial \varDelta'}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)+\varDelta'\left(a\frac{\partial \psi}{\partial \chi}+b\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$

Endlich ergibt sich

$$\varDelta\varDelta\psi=Q\varDelta'(Q\varDelta'\psi)=Q^2\varDelta'\varDelta'\psi+Q\varDelta'Q\varDelta'\psi+2Q\left(\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \varphi}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}+\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \chi}\frac{\partial Q}{\partial \chi}\right)$$

$$=Q^2\left\{\varDelta'\varDelta'\psi+\varDelta'\psi\frac{\varDelta'Q}{Q}+2\left(\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \varphi}a-\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \chi}b\right)\right\}.$$

Nun ist $\ln Q=\ln\left|\frac{dw}{dz}\right|^2$ eine harmonische Funktion, also

$$\varDelta'\ln Q=0$$

mithin

$$\frac{\varDelta' Q}{Q}=\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\right)^2=a^2+b^2.$$

Und somit erhalten wir als *Ergebnis der Umrechnung* von (I) auf isometrische Koordinaten φ, χ, bei stationärer Bewegung:

$$\text{(II)}\quad \frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}-\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}+\varDelta'\psi\left(a\frac{\partial \psi}{\partial \chi}+b\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right)=\sigma\left\{\varDelta'\varDelta'\psi+\varDelta'\psi(a^2+b^2)\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \varphi}a-\frac{\partial \varDelta'\psi}{\partial \chi}b\right)\right\},$$

dabei ist $a + bi$ die analytische Funktion

$$2 \frac{\frac{d^2 w}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2} \qquad (w = \varphi + i\chi,\ z = x + iy),$$

und Δ' bedeutet den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}.$$

§ 2.

Kehren wir zu unserer Fragestellung auf Seite 35 zurück, so muß ψ eine bloße Funktion von φ sein

$$\psi = f(\varphi);$$

und bezeichnen wir Ableitungen nach φ mit Strichen, so wird aus (II)

$$\text{(III)} \qquad f''f'b = \sigma\{f^{\mathrm{IV}} + f''(a^2 + b^2) + 2f'''a\}.$$

f darf nur von φ, nicht von χ abhängen.

Das ist nun sicher möglich, wenn a und b nicht von χ abhängen, also, weil $a + bi$ eine analytische Funktion von $\varphi + \chi i$ ist, auch nicht von φ abhängen, wenn also

$$a + bi = 2 \frac{\frac{d^2 w}{dz^2}}{\left(\frac{dw}{dz}\right)^2} = C,$$

d. h. konstant ist. Wir werden später (§ 3) sehen, daß das auch die einzige Möglichkeit ist.

Aus der Konstanz von a und b folgt

$$w = -\frac{2}{a + bi} \ln (z - z_0) + w_0$$

also nach Einführung der Polarkoordinaten

$$z - z_0 = re^{\vartheta i}$$

$$\varphi = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \ln r + b\vartheta) + \varphi_0.$$

Mithin sind die Stromlinien $\varphi =$ const *identisch mit den logarithmischen Spiralen*

$$a \ln r + b\vartheta = \text{const}$$

$a = 0$ bedeutet reine Radialströmung, $b = 0$ Strömen in konzentrischen Kreisen. Die *Geschwindigkeitsverteilung* aber ist durch (III) gegeben, und zwar ist die *radiale Komponente*

$$\frac{\partial \psi}{r \partial \vartheta} = f' \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = -\frac{2b}{a^2 + b^2} f' \frac{1}{r},$$

die *zirkulare Komponente*

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} = -f' \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2a}{a^2+b^2} f' \frac{1}{r},$$

mithin $\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} f' \frac{1}{r}$ die *Größe der Geschwindigkeit. An festen Wänden muß also f' verschwinden.*

Wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit *linksgewundene* Spiralen voraussetzen, so daß r mit ϑ wächst, mithin a und b verschiedene Zeichen haben, ferner, da $-(\varphi + i\chi)$ ebensogut eine analytische Funktion ist, wie $\varphi + i\chi$ und (III) tatsächlich invariant ist gegen einen gleichzeitigen Zeitenwechsel von φ, a, b, so mag

$$a \geqq 0$$
$$b \leqq 0$$

vorausgesetzt werden.

Dann bedeuten positive Geschwindigkeitskomponenten $\frac{\partial \psi}{r\,\partial \vartheta}$ und $-\frac{\partial \psi}{\partial r}$ also

$$f' > 0 \qquad \textit{Ausströmen}$$

dagegen

$$f' < 0 \qquad \textit{Einströmen.}$$

Da man φ durch $c\varphi$ ersetzen darf, kann man noch den Konstanten a und b eine Bedingung auferlegen.

§ 3.

Wir wollen jetzt noch den Nachweis führen, daß auf Grund unserer Forderung a und b konstant sein müssen, daß also die Strömungen in logarithmischen Spiralen die einzigen sind, deren Strombild einer Potentialbewegung entspricht, ohne selbst eine solche zu sein.

Wären a und b nicht konstant, so würde die analytische Funktion $a + bi$ eine konforme Abbildung der $\varphi + i\chi$-Ebene vermitteln, bei der vermöge (III), das wir mit den Abkürzungen

$$A = -\frac{f'''}{f''}, \quad B = \frac{1}{2\sigma} f', \quad C = \frac{f^{\mathrm{IV}}}{f''}$$

($f'' = 0$ ist ausgeschlossen) auch schreiben können

(III′) $$a^2 + b^2 - 2A(\varphi)a - 2B(\varphi)b + C(\varphi) = 0$$

den Graden $\varphi = \text{const}$ die Kreise (III′) entsprächen. Diese Kreise müßten also eine isometrische Kurvenschar bilden.

Wenn aber die Kurvenschar

III′) $$g(a, b, \varphi) = 0$$

eine isometrische sein soll, so daß $\Delta\varphi = 0$ ist, so muß die Funktion g der Gleichung genügen

$$\text{(IV)} \qquad \Delta g \cdot g_\varphi^2 - 2 g_\varphi (g_{\varphi,a} g_a + g_{\varphi,b} g_b) + g_{\varphi,\varphi}(g_a^2 + g_b^2) = 0$$
$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\right);$$

und diese Gleichung muß entweder identisch erfüllt oder eine Folgerung von (III′) sein.

Nun ist

$$g_a = 2(a - A), \quad g_b = 2(b - B), \quad \Delta g = 4, \quad g_{\varphi a} = -2A', \quad g_{\varphi b} = -2B'$$
$$g_\varphi = -2A'a - 2B'b + C', \quad g_{\varphi\varphi} = -2A''a - 2B''b + C''$$
$$g_a^2 + g_b^2 = 4(a - A)^2 + 4(b - B)^2 = 4(A^2 + B^2 - C).$$

Also ist (IV) quadratisch in a und b, eine leichte Rechnung ergibt daß die quadratischen Glieder von selbst wegfallen. Also müssen die Koeffizienten der niederen Glieder null sein, woraus drei Bedingungen folgen

$$0 = \frac{A''}{A'} - \frac{C' - 2AA' - 2BB'}{C - A^2 - B^2} = \frac{B''}{B'} - \frac{C' - 2AA' - 2BB'}{C - A^2 - B^2}$$
$$= \frac{C''}{C'} - \frac{C' - 2AA' - 2BB'}{C - A^2 - B^2}.$$

Daraus folgt weiter, daß A', B', C' einander proportional und noch

$$\frac{B'}{C - A^2 - B^2}$$

konstant sein muß.

Ersteres ergibt

$$C = \alpha_1 B + \beta, \qquad A = \gamma_1 B - \delta$$

oder mit

$$\frac{\alpha_1}{2\sigma} = \alpha, \quad \frac{\gamma_1}{2\sigma} = -\gamma$$
$$f^{\text{IV}} = \alpha f' f'' + \beta f'' \quad \text{und} \quad f''' = \gamma f' f'' + \delta f'',$$

was integriert

$$f''' = \tfrac{1}{2}\alpha f'^2 + \beta f' + \varepsilon \quad \text{und} \quad f'' = \tfrac{1}{2}\gamma f'^2 + \delta f' + \eta$$

liefert. Vergleich der beiden Werte für f''' ergibt

$$f'' = \frac{\frac{1}{2}\alpha f'^2 + \beta f' + \varepsilon}{\gamma f' + \delta},$$

was identisch mit dem vorhergehenden Werte von f'' sein muß. Der Vergleich fordert

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \delta^2, \quad \varepsilon = \delta\eta$$

also $C = A^2 = \delta^2$ konstant und $f'' = \delta f' + \eta$.

Die zweite Bedingung

$$\frac{B}{A^2+B^2-C}=\frac{B'}{B^2}=\text{const}$$

aber ergäbe $\frac{f''}{f'^2}=\text{const}$ und dies zusammen mit $f''=\delta f'+\eta$ den Widerspruch

$$f'=\text{const}$$

womit der Beweis erbracht ist.

§ 4.

Wenden wir uns nun zur Bestimmung der Geschwindigkeit nach Differentialgleichung (III), die einmal integriert werden kann und nach Einführung der der Geschwindigkeit in der Entfernung 1 proportionalen Größe

$$u=f'(\varphi)$$

die Form annimmt

$$u''+2au'+u(a^2+b^2)-\frac{b}{2\sigma}u^2+C=0.$$

Diese Gleichung ist nun identisch mit derjenigen einer gedämpften Schwingung, die unter Einwirkung des Potentials

$$-\frac{b}{6\sigma}u^3+\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)u^2+Cu$$

erfolgt.

Beginnen wir mit den *Grenzfällen*:

1. Die Bahnen sind konzentrische *Kreise*: $b=0$.

Dann ist

$$u=-\frac{C}{a^2}+e^{-a\varphi}(A+B\varphi)$$

und wegen

$$\varphi=-\frac{2}{a}\ln r$$

$$u=\text{const}+r^2(A+B_1\ln r),$$

womit die Geschwindigkeitsverteilung

$$v=\frac{2}{a}\frac{u}{r}$$

gegeben ist. Die exakte Lösung des Couetteschen Falles ist darin mitenthalten: die drei Konstanten bestimmen sich hier aus den beiden Grenzwerten der Geschwindigkeit und daraus, daß der Druck bei einem vollen Umlauf um den Kreisring zu seinem alten Werte zurückkehren muß. Eine leichte Rechnung ergibt $B_1=0$ und also

$$v=\frac{c}{r}(r^2-r_1^2).$$

(Weiteres über die Bestimmung des Druckes siehe in § 10!)

2. Die Strömung ist rein *radial*: $a = 0$.

Die Differentialgleichung lautet

$$u'' + b^2 u - \frac{b}{2\sigma} u^2 + C = 0$$

und führt auf elliptische Funktionen

$$u' = \sqrt{-\frac{b}{3\sigma}} \cdot \sqrt{-u^3 + 3\sigma b u^2 + \mathrm{const} \cdot u + \mathrm{const}}$$
$$= \sqrt{-\frac{b}{3\sigma}} \cdot \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)},$$

wo die drei e nur an die eine Bedingung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 3\sigma b$$

gebunden sind, sonst aber noch zur Verfügung stehen.

Da man nach der Bemerkung auf Seite 38 noch eine Beziehung zwischen a, b frei hat, wird man zweckmäßig

$$b = -2$$

setzen, damit nach Seite 37

$$\varphi = \vartheta$$

wird. Dann lautet die Bedingungsgleichung für die e

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma,$$

und es ist

$$u' = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}} \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)},$$

also

$$u = -2\sigma + \wp\left(\frac{i}{\sqrt{6\sigma}}(\vartheta - \vartheta_0);\ g_2, g_3\right),$$

wobei ϑ_0, g_2, g_3 die drei Integrationskonstanten sind. Für den Druck (siehe § 10) ergibt sich die Gleichung $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2} v^2\right) = \frac{1}{r^2} f' f'' + \frac{2\sigma}{r^2} f'' = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2} f'^2 + 2\sigma f'\right)$, und seine Eindeutigkeit ist von vornherein sichergestellt, bestimmt also hier keine der Konstanten.

§ 5.

Diskussion der Radialströmung.

Die Bedingung

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma \tag{1}$$

verlangt, daß mindestens ein e einen negativ reellen Teil habe, sei

$$R(e_1) \geqq R(e_2) \geqq R(e_3),$$

so ist

$$R(e_3) \leqq -2\sigma,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn alle drei e denselben reellen Teil haben.

Ferner muß der Realität wegen

a) bei drei reellen e entweder

$$-\infty < u \leqq e_3 \leqq -2\sigma$$

oder

$$e_2 \leqq u \leqq e_1$$

sein,

b) bei einem reellen e

$$-\infty \leqq u \leqq e$$

sein, wobei dieses e aber positiv sein darf.

Nun sind ferner zwei mögliche Strömungsarten zu unterscheiden:

1. entweder haben wir keine festen Wände, also eine Quelle oder Senke in einer *unbegrenzten* Flüssigkeit. Dann muß u eine periodische Funktion von φ sein, mit einer Periode, die ein ganzzahliger Teil von 2π ist. $u = -\infty$ ist ausgeschlossen, $u = 0$ braucht nicht vorzukommen. Mithin kann dieser Fall nur bei drei reellen e vorkommen, und zwar muß

$$e_2 \leqq u \leqq e_1$$

sein;

2. oder aber wir haben *zwei feste Wände*, etwa für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = \vartheta_1$ (was auch gleich 2π sein kann); dann muß an diesen Wänden $u = 0$ sein

a) im Falle von drei reellen e muß dann noch

$$e_2 \leqq 0, \quad e_1 \geqq 0$$

sein und entweder

α) $$e_2 \leqq u \leqq 0$$

oder aber

β) $$0 \leqq u \leqq e_1.$$

b) Im Falle eines reellen e muß dieses positiv sein und

$$0 \leqq u \leqq e.$$

Erinnern wir uns noch, daß nach Seite 38 § 2 $u > 0$ Ausströmen, $u < 0$ aber Einströmen bedeutet, so daß wir im Falle 2, a), α) Einströmen, in den Fällen 2, a), β) und b) aber Ausströmen haben. Im Falle 1 kann beides der Fall sein.

§ 6.

Erster Fall: Die freie Strömung.

Wir können $\vartheta = 0$ für $u = e_2$ annehmen und haben also

$$\vartheta = \sqrt{\frac{3\sigma}{2}} \int_{e_2} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}}.$$

Mithin muß

(2) $$\int_{e_2}^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}} = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}}\,\frac{\pi}{n}$$

sein, wo n eine ganze Zahl ist.

Durch die bekannte Substitution

$$u = e_2 + (e_1 - e_2)\sin^2\psi, \quad \varkappa^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}$$

wird daraus

$$\frac{2}{\sqrt{e_2 - e_3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2 \sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}}\,\frac{\pi}{n}.$$

Führen wir nun die *mittlere Geschwindigkeit*[1])

$$u_m = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

und die *Geschwindigkeitsschwankung*[1])

$$\delta = e_1 - e_2$$

ein, so wird wegen (1)

(3) $$e_2 - e_3 = 6\sigma + 3u_m - \tfrac{1}{2}\delta > 0$$

also

$$\varkappa^2 = \frac{\delta}{6\sigma + 3u_m - \frac{1}{2}\delta}$$

und

(2′) $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{n}\,\frac{\sqrt{6\sigma + 2u_m - \frac{1}{2}\delta}}{\sqrt{6\sigma}}.$$

Daraus lassen sich einige interessante Folgerungen ziehen.

Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2\sin^2\psi}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2\cos^2\psi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varkappa^2(1 - \cos 2\psi)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varkappa^2(1 + \cos 2\psi)}}\right) > 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varkappa^2}},$$

also

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varkappa^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon\varkappa^2}},$$

wo

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

1) In der Entfernung $r = 1$.

Also lautet unsere Beziehung (2′) zwischen u_m, δ, n, σ wegen der Bedeutung von $\varkappa^2$

$$\frac{1}{\sqrt{6\sigma + 3u_m - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\delta}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{6\sigma}$$

oder

$$(2'') \qquad 6\sigma + 3u_m - \tfrac{1}{2}\eta^2\delta = 6\sigma\frac{n^2}{4},$$

wobei η ein echter Bruch ist.

Da noch

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varkappa\, d\psi}{\sqrt{1+\varkappa^2\sin^2\psi}} > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varkappa\, d\psi}{\sqrt{1+\varkappa^2\psi^2}} = \operatorname{ar}\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}$$

also beliebig groß wird mit wachsendem $\varkappa$, so ist $\lim\limits_{\varkappa=\infty} \varepsilon = 0$, also

$$\lim_{\varkappa=\infty} \eta = 1.$$

Aus (2″) folgt

$$u_m > -2\sigma\left(1 - \frac{n^2}{4}\right),$$

was mit $u = 1$ als Mindestwert gibt

$$u_m > -\tfrac{3}{2}\sigma.$$

Die mittlere Einströmungsgeschwindigkeit ist also nach oben erheblich eingeschränkt, um so mehr, je leichter beweglich die Flüssigkeit ist.

Das ist aber auch die einzige Einschränkung: *Wenn u_m und die ganze Zahl n so gewählt sind, daß*

$$6\sigma + 3u_m > 6\sigma\frac{n^2}{4}$$

ist, so gibt es dazu sicher ein δ.

Denn wenn $\frac{1}{2}\delta$ von Null bis zum Werte $6\sigma + 3u_m$ wächst, so bewegt sich $\frac{1}{2}\eta^2\delta$ zwischen Null und $6\sigma + 3u_m$ (weil für den zweiten Wert $\varkappa^2$ unendlich und daher $\eta^2 = 1$ wird), so daß also sicher einmal $\frac{1}{2}\eta^2\delta$ dem als positiv vorausgesetzten $6\sigma + 3u_m - 6\sigma\frac{n^2}{4}$ gleich wird.

Man sieht noch, daß *bei gegebener Periodenzahl n die Schwankung δ mit der mittleren Geschwindigkeit u_m, und daß bei gegebener Schwankung δ die Periodenzahl n mit der mittleren Geschwindigkeit u_m ins Unendliche wachsen muß.*

§ 7.

Zweiter Fall: Ausströmen zwischen festen Wänden.

Es sind die Fälle 2, α), β) und 2, b), die wir so zusammenfassen können:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{3\sigma}{2}} \int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(e-u)(u^2 + 2\alpha u + \beta)}}$$

$e > 0$ ist die maximale Geschwindigkeit (in der Entfernung $r = 1$); wegen

$$2\alpha = -e_2 - e_3 = 6\sigma + e$$

und $\beta = e_2 e_3 > 0$, sonst aber beliebig, kann bei gegebenem e

$$u^2 + 2\alpha u + \beta$$

alle Werte von $u^2 + 2\alpha u$ bis ∞ annehmen, so daß

$$\vartheta_1 = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_0^e \frac{du}{\sqrt{(e-u)(u^2+2\alpha u+\beta)}}$$

nach unten gar nicht, dagegen nach oben durch

$$\vartheta_{1,\max} = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_0^e \frac{du}{\sqrt{(e-u)u(u+e+6\sigma)}}$$

eingeschränkt erscheint.

Da

$$\int\limits_0^e \frac{dn}{\sqrt{(e-u)u}} = \pi$$

ist, so ist

$$\vartheta_{1,\max} = 2\pi\sqrt{\frac{3\sigma}{2e(1+\varepsilon)+12\sigma}}, \tag{4}$$

wobei ε einen positiv echten Bruch bedeutet.

Beim Ausströmen erscheint also die Weite der Wandöffnung gemäß der vorstehenden Gleichung durch den Maximalwert e der Geschwindigkeit beschränkt. Bei kleiner Geschwindigkeit und großer Zähigkeit liegt das Maximum nahe bei π, sonst aber tiefer und sinkt mit wachsendem e unter alle Grenzen.

Ist also die Winkelöffnung kleiner als π gegeben, so gestattet sie nur bis zu einem gewissen Maximalwert ein Ausströmen. Es wird also in Wirklichkeit bei größerer vorgeschriebener Ausflußmenge wahrscheinlich ein Ablösen des Strahls von den Wänden stattfinden.

Auch ist natürlich bei jedem gegebenen Winkel ϑ_1 eine Strömung möglich, bei der teilweise Einströmen und teilweise Ausströmen stattfindet.

§ 8.

Dritter Fall: Einströmen zwischen festen Wänden.

Es bleibt der Fall 2, *a*), *α*):

$$e_2 \leq u \leq 0,$$

alle drei Wurzeln e reell, e_3, e_2 negativ, e_1 positiv.

Hier ist

$$\vartheta_1 = 2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}\int\limits_{e_2}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u-e_2)(u-e_3)(e_1-u)}} = \sqrt{6\sigma}\int\limits_{e_2}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u-e_2)(-u^2-2\alpha u-\beta)}}$$

wobei

$$2\alpha = -(e_1+e_3) = 6\sigma + e_2$$

$$\beta = e_1 e_3 < 0$$

sonst aber beliebig ist. Mithin kann bei gegebenem e_2 der Winkel ϑ_1 so klein gemacht werden, als man will. Andererseits kann er aber auch so groß gemacht werden, als man will, indem man bei gegebenem e_2 den negativen Wert e_3 hinreichend dicht an e_2 nimmt, sofern dem nicht $e_1 \nless 0$ widerspricht. Die einzige Beziehung zwischen den e

$$e_1 + e_2 + e_3 = -6\sigma$$

ergibt aber mit

$$e_1 > 0, \quad -e_2 - e_3 > 6\sigma.$$

Ist nun $-e_2 \geqq 3\sigma$, so kann tatsächlich e_3 beliebig dicht an e_2 genommen werden:

Wenn die maximale Einströmungsgeschwindigkeit größer als 3σ ist, so ist jeder Winkel ϑ_1 zwischen den festen Wänden möglich.

Wenn aber $-e_2 < 3\sigma$, sagen wir $\varepsilon 3\sigma$ ist, wo ε ein positiver echter Bruch, so ist nur

$$-e_3 = e_1 + (6 - 3\varepsilon)\sigma = -e_2 + e_1 + 6(1-\varepsilon)\sigma$$

möglich und

$$\vartheta_1 = \sqrt{6\sigma}\int\limits_{e_2}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u-e_2)(u+(6-3\varepsilon)\sigma+e_1)(e_1-u)}}$$

erreicht seinen größten Wert für $e_1 = 0$

$$\vartheta_{1,\max} = \sqrt{6\sigma}\int\limits_{-3\varepsilon\sigma}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u+3\varepsilon\sigma)(u+(6-3\varepsilon)\sigma)(-u)}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{6\sigma}}{\sqrt{(6-3\varepsilon(2+\eta))\sigma}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon(1+\eta)}} = \frac{\pi}{\delta},$$

wobei η und δ positive echte Brüche sind. Also ist das Maximum von ϑ_1 größer als π.

Auch wenn die maximale Einströmungsgeschwindigkeit kleiner als 3σ ist, kann die Winkelöffnung der festen Wände jede Größe bis π erreichen.

§ 9.

Strömung in Spiralen.

Wegen der Dämpfung $2au'$ (siehe § 4, Seite 40) ist eine periodische Lösung außer $u = \text{const}$ nicht möglich:

Eine freie Bewegung in logarithmischen Spiralen ist immer eine Potentialbewegung. Dagegen gibt es noch Strömungen auf logarithmischen Spiralen *zwischen festen Wänden.*

Damit bei $r = \text{const}$ die Variable φ mit dem Winkel ϑ übereinstimmt, kann man über die Konstanten a, b noch so verfügen, daß

$$-\frac{2b}{a^2+b^2} = 1$$

wird, also

$$b = -1 \pm \sqrt{1-a^2}$$

a muß ein echter Bruch sein, sonst bleibt es beliebig,

Gleichung III lautet dann, einmal integriert (siehe Seite 40)

$$u'' + 2au' + \beta^2 u + \frac{\beta^2}{4\sigma} u^2 + C = 0,$$

wobei $\beta^2 = -2b = 2 \mp 2\sqrt{1-a^2} < 4$, aber $> a^2$ ist.

Die Geschwindigkeit in der Entfernung 1 ist

$$\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\, u = \sqrt{\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-a^2}}}\, u;$$

u ist also die Geschwindigkeit in der Entfernung

$$r = \sqrt{\frac{2}{1 \mp \sqrt{1-a^2}}} = \frac{2}{\beta}.$$

Läßt man zunächst die Dämpfung weg, so hat man genau den Fall von früher, nur daß

$$\sqrt{\frac{\beta^2}{6\sigma}} \quad \text{statt} \quad \sqrt{\frac{2}{3\sigma}}$$

vor der Quadratwurzel steht (siehe Seite 41). Die Relation für die e verbleibt die alte. Da $\beta^2 < 4$, so wird durch diesen Einfluß ϑ_1, die Winkelöffnung vergrößert.

Im selben Sinne wirkt aber die Dämpfung. Trotzdem bleibt das Hauptresultat richtig:

Beim Ausströmen wird die zulässige Winkelöffnung ϑ_1 durch die maximale Strömungsgeschwindigkeit der Art beschränkt, daß sie gegen Null geht, wenn diese über alle Grenzen wächst.

Setzen wir

$$u = ve^{-a\varphi},$$

so wird aus unserer Differentialgleichung

$$v'' + (\beta^2 - a^2)\,v + \frac{\beta^2}{4\sigma}\,v^2 e^{-a\varphi} + Ce^{a\varphi} = 0.$$

Sei $\varphi = 0$ die Stelle des Maximums v_0 für v, so ergibt Multiplikation mit $2v'$ und Integration

$$v'^2 + (\beta^2 - a^2)(v^2 - v_0^2) + \frac{\beta^2}{2\sigma}\int\limits_{v_0}^{v} v^2 e^{-a\varphi} dv + 2C\int\limits_{v_0}^{v} e^{a\varphi} dv = 0.$$

Aus der entsprechenden Gleichung für u

$$u'^2 + 4a\int\limits_{u_0}^{u} u'du + \beta^2(u^2 - u_0^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(u^3 - u_0^3) + 2C(u - u_0) = 0$$

erkennt man, daß bei gleichem u_0 die u-Kurve um so steiler, ϑ_1 also um so kleiner wird, je größer C ist. Für Werte nahe bei u_0 ist das aus der Differentialgleichung ohne weiteres klar, denn bei $u' = 0$ ist u'' um so kleiner, je größer C ist, also $|u'|$ um so größer: aus der vorstehenden Gleichung aber sieht man, daß für größeres C

$$u'^2 + 4a\int\limits_{u_0}^{u} u'du = u'^2 - 4a\int\limits_{u}^{u_0} u'du$$

den größeren Wert hat. Daraus folgt sofort für den aufsteigenden Ast ($u' > 0$), daß immer $|u'|$ den größeren Wert hat, wenn C das größere ist. Denn holte für die anfangs flachere Kurve (C kleiner) u' den Wert der steileren Kurve einmal ein, so müßte dann für erstere $\int\limits_{u_0}^{u} u'du$ den kleineren, also $\int\limits_{u}^{u_0} u'du$ den größeren Wert haben, was bei $u' > 0$ sofort zum Widerspruch führt, da bis dahin, d. h. zwischen u und u_0, u' das kleinere war. Ist aber $u' < 0$, so ist bei einer Änderung des C um ΔC

$$\Delta\frac{u'^2}{u_0 - u} + 4a\,\frac{1}{u_0 - u}\int\limits_{u}^{u_0} \Delta|u'|\,du = 2\Delta C$$

oder da

$$\Delta u'^2 = \Delta|u'|\cdot(2|u'| + \Delta|u'|)$$

$$\frac{\Delta|u'|(2|u'| + \Delta|u'|)}{u_0 - u} + \frac{4a}{u_0 - u}\int\limits_{u}^{u_0} \Delta|u'|\,dn + 2\Delta C.$$

Würde nun an einer Stelle $\varDelta|u'|=0$ sein, so würde an dieser Stelle bei festem $\varDelta C$ das erste Glied mit abnehmendem u kleiner werden, nämlich von positiven zu negativen Werten übergehen, das zweite Glied aber auch abnehmen, da der mit abnehmendem u hinzutretende Teil des Integrals $\int\limits_u^{u_0}\varDelta|u'|\,du$ negativ wäre. Das ist aber unmöglich, da die Summe beider Glieder konstant $2\varDelta C$ sein soll.

Damit ist allgemein bewiesen, daß mit wachsendem C die Winkelöffnung ϑ_1 *abnimmt* (bei festgehaltenem u_0), *und da wir das größtmögliche* ϑ_1 *suchen, können wir für C den kleinstzulässigen Wert annehmen.*

Dieser Wert bestimmt sich aber aus $v'^2>0$:

$$2C\int\limits_v^{v_0}e^{a\varphi}dv\geqq-(\beta^2-a^2)(v_0^2-v^2)-\frac{\beta^2}{2\sigma}\int\limits_v^{v_0}v^2e^{-a\varphi}dv,$$

woraus man sieht, daß der kleinstzulässige Wert von C null oder negativ ist.[1])

Die vorstehende Ungleichheit muß für alle v zwischen v_0 und null und für die erreichten positiven und negativen φ gelten. Man kann sie schreiben:

$$2C\geqq-(\beta^2-a^2)(v_0+v)e^{-a\varphi_0}-\frac{\beta^2}{6\sigma}(v_0^2+v_0v+v^2)e^{-a(\varphi_2+\varphi_0)},$$

wo φ_0, φ_2 gewisse Mittelwerte sind. Beachten wir noch, daß für $v=v_0$ $|\varphi_0|$ und $|\varphi_2|$ null sein müssen, während diese für $v=0$ maximale Werte haben. Die schärfste Einschränkung erfolgt aus dem absolut kleinsten Wert der rechten Seite, also ist das kleinstzulässige C gegeben durch

$$2C=-(\beta^2-a^2)v_0e^{-a\varphi_0'}-\frac{\beta^2}{6\sigma}v_0^2e^{-a(\varphi_2'+\varphi_0')},$$

und zwar sind φ_0', φ_2' positiv und die Maxima von φ_0 und φ_2, welche für $v=0$ eintreten.

Infolgedessen ist für das größtmögliche ϑ_1

$$\begin{aligned}v'^2&=(\beta^2-a^2)\left[(v_0^2-v^2)-v_0e^{-a\varphi_0'}\int\limits_v^{v_0}e^{a\varphi}dv\right]\\&\quad+\frac{\beta^2}{2\sigma}\left[\int\limits_v^{v_0}v^2e^{-a\varphi}dv-\tfrac{1}{3}v_0^2e^{-a(\varphi_2'+\varphi_0')}\int\limits_v^{v_0}e^{a\varphi}dv\right]\\&=(\beta^2-a^2)[(v_0^2-v^2)-v_0(v_0-v)e^{-a(\varphi_0'-\varphi_0)}]\\&\quad+\frac{\beta^2}{2\sigma}[\tfrac{1}{3}(v_0^3-v^3)e^{-a\varphi_2}-\tfrac{1}{3}v_0^2(v_0-v)e^{-a\varphi_2'-a(\varphi_0'-\varphi_0)}].\end{aligned}$$

---

1) Nach Seite 47 ist $\beta^2-a^2>0$.

Da $\varphi_0' > \varphi_0$ und $\varphi_2' > \varphi_2$, so ist

$$v'^2 > (v_0 - v)v\left[(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(v + v_0)e^{-\alpha\varphi_2'}\right]$$

und da $\varphi_2' < \vartheta_1$

$$v'^2 > (v_0 - v)v\left[(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}(v + v_0)e^{-\alpha\vartheta_1}\right]$$

woraus

$$\vartheta_1 < \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{\beta^2}{6\sigma}v_0(1+\varepsilon)e^{-\alpha\vartheta_1}}}$$

folgt. (Vgl. Formel (4) Seite 45.)

Daraus folgt, daß ϑ_1 mit wachsendem v_0, also auch mit wachsendem u_0 unter alle Grenzen sinken muß: *eine gewisse Weite der Spirale läßt nur eine begrenzte Ausströmungsgeschwindigkeit zu.*

Zweiter Teil.

§ 10.

Da die einzige wandfrei mögliche Spiralbewegung der bisherigen Art eine Potentialbewegung sein mußte, wollen wir exakte stationäre und nichtstationäre ebene Bewegungen in freien Spiralen nach einem anderen Verfahren suchen

In *Polarkoordinaten* lautet die Differentialgleichung (I)

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \sigma\Delta\Delta\psi,$$

wobei

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Offensichtlich gestattet diese Gleichung Lösungen, welche in φ linear sind

$$\psi = u + \varphi\cdot\varkappa,$$

damit die Geschwindigkeit, welche die Komponenten

$$v_r = \frac{\varkappa}{r} \quad \text{und} \quad v_\varphi = -\frac{\partial u}{\partial r} - \varphi\frac{\partial\varkappa}{\partial r}$$

ist, eindeutig sei und also eine freie Bewegung möglich, muß $\varkappa$ konstant sein. Aus der Differentialgleichung wird durch diesen Ansatz

$$\frac{\partial\Delta u}{\partial t} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial\Delta u}{\partial r} = \sigma\Delta\Delta u$$

mit

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Hier ist es nun auch notwendig, den *Druck* zu untersuchen, damit nicht etwa bei einem Umlauf um die singuläre Stelle $r = 0$ eine Vieldeutigkeit des Druckes zutage trete.

Nun kann man die *Bewegungsgleichungen ohne Elimination des Druckes* in folgender Form schreiben

$$d\left(\frac{p}{\mu} + \tfrac{1}{2}v^2\right) = \varDelta\psi \cdot d\psi + \left(\frac{\partial\left(\sigma\varDelta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi}{\partial y} dx - \frac{\partial\left(\sigma\varDelta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi}{\partial x} dy\right)$$

oder wegen der invarianten Bedeutung des letzten Gliedes

$$= \varDelta\psi \cdot d\psi + \frac{\partial\left(\sigma\varDelta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi}{r\partial\varphi} dr - \frac{\partial\left(\sigma\varDelta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi}{\partial r} r d\varphi.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p}{\mu} + \tfrac{1}{2}v^2\right) = \varDelta\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma\varDelta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \varkappa\varDelta u - \sigma r\frac{\partial\varDelta u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}.$$

Die rechte Seite ist nun vermöge der Differentialgleichung für u konstant; damit also der Druck bei einem Umlauf um $r = 0$ zu seinem alten Werte zurückkehre, muß sie null sein, so daß wir bekommen

$$r\frac{\partial\varDelta u}{\partial r} - \frac{r}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial t} - \frac{\varkappa}{\sigma}\varDelta u = 0,$$

was durch Einführen von $r\frac{\partial u}{\partial r} = v$ die Form annimmt

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \left(1 + \frac{\varkappa}{\sigma}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

§ 11.

Stationäre Bewegungen.

Die von t unabhängige Lösung ist

$$u = c_1 r^{\frac{\varkappa}{\sigma}+2} + c_2 \ln r + c_3,$$

wenn $\frac{\varkappa}{\sigma} \gtrless -2$, sonst, wenn $\frac{\varkappa}{\sigma} = -2$

$$u = c_1(\ln r)^2 + c_2 \ln r + c_3.$$

Sehen wir von dem trivialen Fall der Potentialbewegung ab, so gibt es dann eine spiralförmige Strömung, deren Geschwindigkeit im Unendlichen verschwindet, wenn

$$\frac{\varkappa}{\sigma} + 1 < 0,$$

d. h. $\varkappa < -\sigma$ ist, also ein hinreichend starkes Einströmen stattfindet.

Die Spiralen haben dann die Form

$$\varphi = -\frac{1}{\varkappa} u = C_1 r^{\frac{\varkappa}{\sigma}+2} + C_2 \ln r + C_3 .$$

Ist $\frac{\varkappa}{\sigma} + 2 < 0$, so nähern sie sich im Unendlichen den logarithmischen Spiralen, in der Nähe der Senke dagegen konvergieren sie erheblich weniger stark gegen den Senkpunkt, und die Strudelgeschwindigkeit ist erheblich stärker als bei der Potentialströmung in logarithmischen Spiralen.

§ 12.

Nichtstationäre Bewegungen.

Setzen wir an

$$v = e^{nt} \chi_n(r),$$

so erhalten wir aus (V)

$$\chi_n'' - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varkappa}{\sigma}\right) \chi_n' - \frac{n}{\sigma} \chi_n = 0$$

also mit der Abkürzung $\lambda = 1 + \frac{\varkappa}{2\sigma}$

$$\chi_n = r^\lambda J_{\pm\lambda}\left(\sqrt{-\frac{n}{\sigma}}\, r\right),$$

wo die J die Besselschen Funktionen sind:

$$J_\lambda\left(\sqrt{-\frac{n}{\sigma}}\, r\right) = \text{const} \cdot r^\lambda \left(1 + \frac{n}{\sigma} \frac{r^2}{4} \frac{1}{1(1+\lambda)} + \frac{n^2}{\sigma^2}\left(\frac{r}{2}\right)^4 \frac{1}{2!\,(1+\lambda)(2+\lambda)} + \cdots\right).$$

Wenn nicht gerade λ eine ganze Zahl ist, können $r^\lambda J_\lambda$ und $r^\lambda J_{-\lambda}$ als unabhängige Lösungen angesprochen werden.

§ 13.

Ähnlich wie bei der Wärmeleitungsgleichung gibt es von (V) *auch Integrale, die für* $r = 0$ *und* $t = 0$ *eine Unbestimmtheitsstelle aufweisen.*

Da die Differentialgleichung (V) ungeändert bleibt, wenn man v mit einem beliebigen Faktor, r mit einem ebensolchen, t mit dem Quadrat desselben multipliziert, so muß es Lösungen der Form geben

$$v = r^\alpha t^\beta w\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) = r^\alpha t^\beta w(z).$$

Setzt man ein, so bekommt man für w die Differentialgleichung

$$\text{(VI)} \qquad w'' + w'\left[\frac{\alpha + 1 - \lambda}{z}\right] + w\left[\frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha}{4z^2} + \frac{\beta}{z}\right] = 0.$$

Wann gestattet diese Gleichung eine Lösung der Form

$$w = e^{\mu z} \quad ?$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\mu = -1$$

und dann entweder

$$\alpha = 0, \quad \beta = \lambda - 1$$

oder

$$\alpha = 2\lambda, \quad \beta = -\lambda - 1.$$

Wir haben also zwei einfache Integrale der gesuchten Art

$$v = t^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{4\sigma}\frac{r^2}{t}}$$

und

$$v = r^{2\lambda} t^{-1-\lambda} e^{-\frac{1}{4\sigma}\frac{r^2}{t}},$$

beide gehen für $\lambda = 0$ in das bekannte Integral der Wärmeleitungsgleichung über.

Diskutieren wir die Differentialgleichung (VI) *weiter.*

Die singuläre Stelle $z = 0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit. Die determinierende Gleichung lautet

$$\varrho^2 + \varrho(\alpha - \lambda) + \frac{\alpha^2 - 2\lambda\alpha}{4} = 0$$

und hat die Wurzeln

$$\varrho_1 = \lambda - \frac{\alpha}{2}, \quad \varrho_2 = -\frac{\alpha}{2},$$

so daß es im allgemeinen Entwicklungen der Form gibt

$$w_1 = z^{\lambda - \frac{\alpha}{2}}(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)$$

und

$$w_2 = z^{-\frac{\alpha}{2}}(1 + c_1' z + c_2' z^2 + \cdots)$$

also

$$v_1 = r^{2\lambda} t^{\beta - \lambda + \frac{\alpha}{2}} \left(1 + c_1 \frac{r^2}{4\sigma t} + c_2 \frac{r^4}{(4\sigma t)^2} + \cdots\right)$$

und

$$v_2 = t^{\beta + \frac{\alpha}{2}} \left(1 + c_1' \frac{r^2}{4\sigma t} + c_2' \frac{r^4}{(4\sigma t)^2} + \cdots\right),$$

wobei, weil $z = 0$ die einzige endliche singuläre Stelle der Differentialgleichung ist, die Potenzreihen ständig konvergieren.

Nimmt man $\beta = 0$, d. h. sucht man von (V) *Lösungen der Form*

$$r^\alpha w\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right),$$

so ist eine Integration durch bestimmte Integrale möglich.

Die Differentialgleichung (VI) lautet nach Einführung der Wurzeln ϱ_1, ϱ_2

$$\text{(VI')} \qquad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz}(1 - \varrho_1 - \varrho_2 + z) + w \varrho_1 \varrho_2 = 0.$$

Der Zusammenhang mit der Gaußschen Gleichung für die hypergeometrische Funkiıon ist leicht zu erkennen. Macht man die Eulersche Transformation

$$w = \int e^{-s} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^n y(s)\, ds,$$

das Integral auf einem geeigneten geschlossenen Weg erstreckt, so findet man für y eine Differentialgleichung, die für

$$n = -\varrho_1 \quad \text{durch} \quad y = s^{-1+\varrho_2}$$

und für

$$n = -\varrho_2 \quad \text{durch} \quad y = s^{-1+\varrho_1}$$

erfüllt werden kann. Mithin sind

$$w = \int e^{-s} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2} ds$$

und

$$w = \int e^{-s} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_2} s^{-1+\varrho_1} ds$$

Integrale von (VI'). Die Integrale erstreckt man am besten auf einem Wege, der von $R(s) = +\infty$ um die Punkte $s = 0$ und $s = z$ herum zu $R(s) = +\infty$ zurückführt.

Da

$$\int e^{-s} (z - s)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2} d\, s$$

in der Umgebung von $z = 0$ analytisch regulär ist, so ist

$$w_1 = C_1 \int e^{-s} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_1} s^{-1+\varrho_2} ds$$

und

$$w_2 = C_2 \int e^{-s} \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{-\varrho_2} s^{-1+\varrho_1} ds.$$

Man kann zeigen, daß

$$v = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} r^\alpha \left(C_1 w_1 \left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) + C_2 w_2 \left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) \right)$$

die allgemeinen Lösungen von (V) sind und sich ebenfalls durch bestimmte Integrale geschlossen darstellen. Darauf und auf den Zusammenhang mit der Darstellung und Entwicklung nach Besselschen Funktionen komme ich vielleicht an anderer Stelle zurück.

Dritter Teil.

§ 14.

Nachbarlösungen zur Radialströmung.

Wir wollen zunächst *stationäre Nachbarlösungen* zu unserer Radialströmung (S. 41 f.) suchen, indem wir setzen

$$\psi = f(\varphi) + \varrho(\varphi, r),$$

wo ϱ eine *kleine* Größe sei, deren Quadrat wir vernachlässigen.

Wir erhalten dann für f die alte Gleichung

$$f^{(\mathrm{IV})} + 4f'' + \frac{2}{\sigma} f' f'' = 0$$

mit oder $f' = u$ und einmal integriert

$$u'' + 4u + \frac{1}{\sigma} u^2 + C = 0.$$

Für ϱ bekommen wir

$$\frac{\partial \varDelta \varrho}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial \varDelta \varrho}{\partial r} - \frac{2u'}{r^4} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} - \frac{u''}{r^3} \frac{\partial \varrho}{\partial r} = \sigma \varDelta \varDelta \varrho,$$

wo

$$\varDelta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ist.

Da die Differentialgleichung im stationären Falle ungeändert bleibt, wenn man r und ϱ mit je einem beliebigen Faktor multipliziert, so muß es Lösungen der Form geben:

$$\varrho = r^\lambda w(\varphi).$$

Man erhält für w die Differentialgleichung

$$\text{(VII)} \qquad w^{\mathrm{IV}} + w''\left(2\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{2}{\sigma} u - \frac{\lambda}{\sigma} u\right) + \frac{2}{\sigma} u' w'$$
$$+ w\left(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{2\lambda^2 - \lambda^3}{\sigma} u + \frac{\lambda}{\sigma} u''\right) = 0.$$

Uns interessieren besonders freie Strömungen und daher periodische Lösungen in φ.

Was die *Eindeutigkeit des Druckes* angeht (siehe § 10, Seite 51), so erhält man durch eine leichte Rechnung die Bedingung

$$\lambda^2 \int_0^{2\pi} w\,(u - (\lambda - 2)\,\sigma)\, d\varphi = 0.$$

Andererseits folgt aus der vorstehenden Differentialgleichung selbst durch Integration über das Intervall von 0 bis 2π unter Annahme der Periodizität

$$\lambda^2(\lambda - 2) \int_0^{2\pi} w\,(u - (\lambda - 2)\,\sigma)\, d\varphi = 0,$$

so daß im allgemeinen die Eindeutigkeit des Druckes aus der Periodizität folgt, nur dann nicht, wenn $\lambda = 2$ ist.

u ist nun bei freier Strömung selber eine periodische Funktion von φ, und zwar ist die Periode ein ganzer Teil von 2π. Es ist aber nicht notwendig, daß w dieselbe Periode wie u habe, diese Periode muß nur auch ein ganzer Teil von 2π sein.

Da wir

$$u'' = -C - 4u - \frac{1}{\sigma} u^2$$

aber auch

$$u'^2 = -2Cu - 4u^2 - \frac{2}{3\sigma} u^3 + D = \frac{2}{3\sigma}(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)$$

durch u rational ausdrücken können, wird es nützlich sein, *u statt φ als unabhängige Variabele in* (VII) *einzuführen.* Wegen

$$w' = \frac{dw}{du} u'$$

$$w'' = \frac{d^2 w}{du^2} u'^2 + \frac{dw}{du} u''$$

$$w''' = \frac{d^3 w}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2 w}{du^2} u' u'' + \frac{dw}{du} u'''$$

$$w^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4 w}{du^4} u'^4 + 6 \frac{d^3 w}{du^3} u'^2 u'' + 3 \frac{d^2 w}{du^2} u''^2 + 4 \frac{d^2 w}{du^2} u' u''' + \frac{dw}{du} u^{\mathrm{IV}}$$

und weil

$$u^{\mathrm{IV}} = \left(-4 - \frac{2}{\sigma} u\right) u'' - \frac{2}{\sigma} u'^2, \quad u' u''' = \left(-4 - \frac{2}{\sigma} u\right) u'^2,$$

werden alle Koeffizienten der neuen Gleichung ganz und rational in u; wir schreiben sie, den Grad andeutend

$$\text{(VII')} \qquad R_6 \frac{d^4 w}{du^4} + R_5 \frac{d^3 w}{du^3} + R_4 \frac{d^2 w}{du^2} + R_3 \frac{dw}{du} + R_2 w = 0,$$

wobei

$$R_6 = u'^4 = \frac{4}{9\sigma^2}(e_1 - u)^2 (u - e_2)^2 (u - e_3)^2$$

ist.

Aus der Form (VII) erkennt man, daß w nur da Singularitäten besitzt, wo u solche hat, also jedenfalls nicht in dem in Betracht kommenden reellen Teil von φ; aus (VII') erkennt man, daß als Funktion von u unser w nur an den Verzweigungsstellen e_1, e_2, e_3 singulär wird.

Da $R_5 = 6u'^2 u''$ durch $(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)$ teilbar ist, sind die Stellen e_1, e_2, e_3 solche der Bestimmtheit, und da der Grad der Koeffizienten mit der Ordnung der Ableitungen ständig um 1 abnimmt, ist auch $u = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit: unsere Differentialgleichung (VII') gehört zur *Fuchsschen Klasse.*

Eine bekannte Rechnung ergibt als die vier Wurzeln der determinierenden Gleichung für die Stellen e die Werte

$$\varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = 1,\ \varrho_3 = \tfrac{1}{2},\ \varrho_4 = \tfrac{3}{2}.$$

Trotzdem also hier zwei Wurzeldifferenzen ganzzahlig sind, treten in den Entwicklungen keine Logarithmen auf. Denn aus der Form (VII) folgt, daß an den Stellen φ, für die $u = e$ wird, also u und u' reguläre Funktionen von φ sind, auch w eine solche sein muß, während $\ln(u-e)$ diesen regulären Charakter nicht besitzt. Also haben die *Lösungen von* (VII′) *an jeder Stelle e die Form*

$$u = \mathfrak{P}_1(u-e) + \sqrt{u-e}\,\mathfrak{P}_2(u-e);$$

andere Singularitäten existieren im Endlichen nicht.

Für $u = \infty$ ergibt sich die determinierende Gleichung

$$(2\mu^2 + \mu - 3)(\mu^2 + \tfrac{5}{2}\mu + \tfrac{3}{2}\lambda) = 0,$$

welche die von λ unabhängigen Wurzeln

$$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = -\tfrac{3}{2}$$

und die von λ abhängigen Wurzeln

$$\left.\begin{matrix}\mu_3\\ \mu_4\end{matrix}\right\} = -\tfrac{5}{4} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{25 - 24\lambda}$$

hat.

§ 15.

Fortsetzung.

Lösungen mit der reellen Periode 2π (diese muß mindestens bei freier Strömung vorhanden sein) wird es nur für gewisse λ geben. In Analogie mit dem Hermiteschen Verfahren bei der Laméschen Differentialgleichung kann man so vorgehen:

Sind w_1, w_2, w_3, w_4 ein Fundamentalsystem von (VII), so drücken sich die $w(\varphi + 2\pi)$ homogen linear durch die w aus

$$w_\nu(\varphi + 2\pi) = \sum_{\mu=1}^{4} a_{\nu,\mu}\, w_\mu(\varphi) \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Es gibt nun sicher periodische Funktionen zweiter Art, d. h. es gibt Lösungen w, für welche

$$w(\varphi + 2\pi) = \alpha w(\varphi).$$

Dieses α ist Wurzel der Gleichung vierten Grades

$$D(\alpha;\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\alpha & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Soll nun eine periodische Lösung existieren, so muß $\alpha = 1$ eine Wurzel sein, und wir erhalten für λ die Gleichung

$$D(1, \lambda) = 0.$$

Die berechneten charakteristischen Exponenten legen nun die Versuche nahe,

$$w = u + \text{const}, \quad w = \sqrt{u - e} \text{ und } w = \sqrt{(e_\alpha - u)(u - e_\beta)}$$

zu setzen. Elementare Rechnung ergibt folgende *Partikularlösungen*:

1. die triviale Möglichkeit $w = u$ für $\lambda = 0$.

2. $w = u$ für $\lambda = 2$ d. h.

$$\varrho = \alpha r^2 u$$
$$\psi = f(\varphi) + \alpha r^2 f'(\varphi),$$

wobei α klein sein muß und daher mit gleicher Annäherung

$$\psi = f(\varphi + \alpha r^2),$$

so daß die Stromlinien angenähert die Spiralen

$$\varphi = \varphi_0 - \alpha r^2$$

sind. f' bleibt dieselbe elliptische Funktion, die wir früher bei der Radialströmung diskutierten. Allerdings kann nun diese Strömung *nicht frei* existieren, denn es liegt ja gerade der Ausnahmefall $\lambda = 2$ vor (siehe Seite 56), und die Bedingung für die Eindeutigkeit des Druckes kann für $w = u$ sicher nicht erfüllt werden.

3. $w = u + 3\sigma$, wenn $\lambda = 1$ und $C = 3\sigma$, woraus bei $e_1 - e_2 < \sigma\sqrt{3}$ kein Widerspruch erfolgt.

4. $w = \sqrt{u - e_2}$ bei $\lambda = -1$ und $e_2 = 0$. Diese Lösung hat die doppelte Periode wie u; ebenso $w = \sqrt{e_1 - u}$ bei $\lambda = -1$ und $e_1 = 0$.

5. $w = \sqrt{(e_1 - u)(u - e_3)}$ oder $w = \sqrt{(u - e_2)(u - e_3)}$, wenn $\lambda = 1$ und $e_2 = 0$ oder $e_1 = 0$. Auch diese Lösung hat die doppelte Periode wie u.

Die *großen* λ lassen sich leicht angenähert aus (VII) berechnen. Für solche ist in erster Annäherung

$$w^{\mathrm{IV}} + 2\lambda^2 w'' + \lambda^4 w = 0$$

d. h. $w = e^{\pm \lambda i \varphi}$ (wir beschränken uns auf die periodischen Lösungen), so daß $\frac{2\pi}{\lambda}$ die Periode ist. *Die großen ausgezeichneten λ Werte sind also angenähert ganze Zahlen.*

Endlich läßt sich noch ein Fall ganz elementar berechnen, der nämlich, daß u konstant, *die Grundströmung also eine ringsum gleichmäßig verteilte ist.*

Dieser Fall hat auch Bedeutung für den allgemeineren, als man nach einem bekannten Satze von Cauchy und Boltzmann[1]) die Periode von w in erster Annäherung bekommt, wenn man für das periodische u den konstanten Mittelwert setzt, vorausgesetzt, daß die größte Schwankung $e_1 - e_2$ klein genug ist.

Für konstante u folgt aus (VII), Seite 55

$$w^{IV} + w''\left(2\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{2-\lambda}{\sigma} u\right) + w\left(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^2 \frac{2-\lambda}{\sigma} u\right) = 0$$

also mit dem Ansatz

$$w = e^{\mu i \varphi}$$

$$\mu^4 - \mu^2\left(2\lambda^2 - 2\lambda + 4 + \frac{2-\lambda}{\sigma} u\right) + \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda^2 \frac{2-\lambda}{\sigma} u = 0.$$

Diese Gleichung hat vier Wurzeln

$$\mu = \pm \lambda,\ \mu^2 = (\lambda - 2)^2 - \frac{2-\lambda}{\sigma} u,$$

so daß alle positiven und negativen ganzen λ möglich sind (Potentialbewegungen) wie auch alle λ, die sich aus

$$\lambda = 2 + \frac{u}{4\sigma} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{4\sigma}\right)^2 + \mu^2}$$

mit ganzen μ berechnen.

Zu dem Falle $u = \text{const}$, d. h.

§ 16.

zu der ringsum gleichmäßigen Radialströmung, lassen sich auch die nichtstationären Nachbarlösungen angeben.

Die Differentialgleichung lautet jetzt (siehe Seite 55)

$$\frac{\partial \Delta \varrho}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial r} = \sigma \Delta \Delta \varrho.$$

Man kann sie entweder mittels des Ansatzes

$$\Delta \varrho = e^{\lambda t + n i \varphi} w(r)$$

(n ganzzahlig) integrieren und kommt so auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1 - \frac{u}{\sigma}}{r} \frac{dw}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda}{\sigma}\right) w = 0.$$

welche durch Besselsche Funktionen gelöst werden kann, oder aber durch den Ansatz (vgl. Seite 53)

$$\Delta \varrho = e^{n i \varphi} r^m w\left(\frac{r^2}{4\sigma t}\right) = e^{n i \varphi} r^m w(z),$$

1) Boltzmann, Ges. Abh. Bd. 1. S. 43.

wodurch man für $w(z)$ die Differentialgleichung

$$z^2 w'' + zw'\left[m + 1 - \frac{u}{2\sigma} + z\right] + w\left[\frac{m^2 - n^2}{4} - \frac{mu}{4\sigma}\right] = 0$$

erhält. Für $z = 0$ hat diese Gleichung eine Stelle der Bestimmtheit, die determinierende Gleichung hat die reellen Wurzeln

$$\varrho = \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\frac{u}{\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + \frac{1}{4}\frac{u^2}{\sigma^2}}.$$

Durch Einführung der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$z^2 w'' + zw'[1 - \varrho_1 - \varrho_2 + z] + \varrho_1\varrho_2 w = 0.$$

Das ist aber *genau die Differentialgleichung* (VI′) *von Seite 54,* so daß alles dort weiter Mitgeteilte auch hier gilt.

Über ein Prinzip der Befreiung bei Lagrange.

Von GEORG HAMEL in Aachen.

Man kann in der Entwicklung der Mechanik hauptsächlich vier Wege der Begründung unterscheiden, die man, um Namen zu haben, den natürlichen oder physikalischen, den stereomechanischen, den Weg über die Punktmechanik und den analytischen nennen mag.

Auf dem ersten Weg, den von den neueren Autoren hauptsächlich Jaumann geht, den aber auch ich in meinem Lehrbuche vor allem verfolgt habe (in den Teilen I und III), faßt man die mechanische Welt als ein beliebig bewegliches Kontinuum auf, das durch innere Spannungen zusammengehalten wird und dessen Teile auch noch durch Fernkräfte aufeinander wirken können. Druck, Zug und Schubkraft sind also hier die ersten und wichtigsten Begriffe und Vorstellungen der Mechanik sowie als Objekt ihres Wirkens das Volumelement. Grundsätze gibt es hauptsächlich zwei: das Newtonsche Grundgesetz mit Einschluß des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte und das Gesetz der Symmetrie der Spannungsdyade (von mir das Boltzmannsche genannt). Die verschiedenen mechanischen Systeme unterscheiden sich dann durch die Art der Abhängigkeit der Spannungsdyade von ihren Ursachen, insbesondere den Deformationen. Reaktionskräfte gibt es an sich nicht, sie entstehen erst als Grenzfälle durch Einführung von Idealsystemen, d. h. Annahme von gewissen, in Wahrheit nie exakt erfüllten Bewegungsein-