Über einen Satz des Herrn Kakeya.

VON

A. HURWITZ in Zürich, Schweiz.

Im Verlaufe einer Korrespondenz mit Herrn *E. Landau*, die sich auf seine schönen neueren Untersuchungen über Potenzreihen[1] bezog, wurde ich auf den gleichen Satz geführt, den Herr *S. Kakeya* im diesem Journal, Vol. 2, No. 3 veröffentlicht hat. Einer freundlichen Aufforderung des Herausgebers dieses Journals, Herrn *T. Hayashi*, folgend, erlaube ich mir den Weg, auf welchem ich zu Herrn *Kakeya*'s Satz gelangte, hier darzulegen und einige Bemerkungen daran anzuknüpfen.

1. *Es mögen die Coefficienten der Funktion*

$$f(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)(1-x) \tag{1}$$

reell und positiv sein. Befriedigen nun diese Coefficienten die Bedingungen

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n, \tag{2}$$

so hat die Gleichung $f(x)=0$ keine Wurzel, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist.

Bezeichnet nämlich x einen beliebigen ~~complexen Wert~~ vom absoluten Betrage $|x|=\rho<1$, so folgt aus der identischen Gleichung:

$$f(x)(1-x)=a_0-(a_0-a_1)x-(a_1-a_2)x^2-\ldots-(a_{n-1}-a_n)x^n-a_nx^{n+1}, \tag{3}$$

dass

$$|f(x)(1-x)| \geqq a_0-(a_0-a_1)\rho-(a_1-a_2)\rho^2-\ldots-(a_{n-1}-a_n)\rho^n-a_n\rho^{n+1},$$

d. i.

$$|f(x)(1-x)| \geqq f(\rho)(1-\rho)>0$$

ist. Folglich ist $f(x)$ notwendig von Null verschieden, w. z. b. w. Macht man nur die Voraussetzung, dass $f(x)$ reelle positive Coefficienten hat und bezeichnet man mit r den kleinsten, mit s den grössten unter den Quotienten

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \ldots\ \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

([1]) Vgl. Archiv der Mathematik und Physik, III Reihe, Bd. 21.

so kann man den vorstehenden Satz auf jede der beiden Funktionen

$$f(rx)=a_0+ra_1x+r^2a_2x^2+\ldots\ldots+r^na_nx^n,$$

$$x^nf\left(\tfrac{s}{x}\right)=s^na_n+s^{n-1}a_{n-1}x+s^{n-2}a_{n-2}x^2+\ldots\ldots+a_0x^n$$

anwenden. Dadurch erhält man den Satz von *Kakeya:*

Sind die Coefficienten der Gleichung

(4) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n=0$$

reell und positiv, so gilt für jede Wurzel x dieser Gleichung die Beziehung

(5) $$r\leqq|x|\leqq s,$$

wobei r den kleinsten und s den grössten unter den Quotienten

(6) $$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \ldots\ldots\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

bezeichnet.

2. Es bietet sich hier die Frage dar, unter welchen Bedingungen in der Beziehung (5) ein Gleichheitszeichen stattfindet. Offenbar genügt es, die folgende speciellere Frage zu erledigen:

„*Wann besitzt die Gleichung* (4) *unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen* (2) *erfüllt sind, eine Wurzel vom absoluten Betrage* 1?"

Bezeichne x eine solche Wurzel. Dann ist nach (3):

(7) $$a_0=(a_0-a_1)x+(a_1-a_2)x^2+\ldots\ldots+(a_{n-1}-a_n)x^n+a_nx^{n+1}.$$

Nun gilt aber der folgende, leicht zu beweisende Satz:

„Sind $c_1, c_2,\ldots\ldots,c_k$ irgend welche complexe Zahlen, so ist

$$|c_1+c_2+\ldots\ldots+c_k|=|c_1|+|c_2|+\ldots\ldots+|c_k|$$

dann und nur dann, wenn die Zahlen $c_1, c_2\ldots\ldots c_k$ auf die Form

$$c_1=\lambda p_1,\ c_2=\lambda p_2,\ldots\ldots,\ c_k=\lambda p_k$$

gebracht werden können, unter λ eine von Null verschiedene reelle oder complexe Zahl, unter $p_1, p_2,\ldots\ldots p_k$ nicht negative reelle Zahlen verstanden."

Nach (7) ist nun

$$|(a_0-a_1)x+(a_1-a_2)x^2+\ldots\ldots+a_nx^{n+1}|=a_0$$

und andererseits, da x den absoluten Betrag 1 hat, auch

$$|(a_0-a_1)x|+|(a_1-a_2)x^2|+\ldots+|a_nx^{n+1}|=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\ldots+a_n=a_0.$$

Daher muss also

(8) $$(a_0-a_1)x=\lambda p_1,(a_1-a_2)x^2=\lambda p_2,\ldots\ldots(a_{n-1}-a_n)x^n=\lambda p_n,\ a_nx^{n+1}=\lambda p_{n+1}$$

sein. Die Combination dieser Gleichungen mit (7) ergiebt

$$a_0=\lambda(p_1+p_2+\dots+p_{n+1}),$$

woraus folgt, dass λ eine reelle positive Zahl ist.

Die Gleichung

$$a_n x^{n+1}=\lambda p_{n+1}$$

zeigt nun weiter, dass auch x^{n+1} eine reelle positive Zahl und folglich, da x vom absoluten Betrage 1 ist, $x^{n+1}=1$ sein muss.

Die niedrigste Potenz von x, welche den Wert 1 besitzt, sei nun x^m; dann sind offenbar

$$x^m,\ x^{2m},\ x^{3m},\dots$$

sämmtliche Potenzen von dieser Eigenschaft. Daher ist $n+1$ ein Vielfaches von m, also etwa

$$n+1=m(m'+1).$$

Ferner ist jedenfalls $m>1$, weil $x=1$ sicher nicht Wurzel der Gleichung (4) ist. Die Gleichung

$$(a_{k-1}-a_k)x^k=\lambda p_k$$

zeigt jetzt, dass

$$a_{k-1}=a_k$$

sein muss, wenn k kein Vielfaches von m ist, weil andernfalls x^k eine positive reelle Zahl, also gleich 1, wäre. Somit ergiebt sich:

$$(9)\quad a_0=a_1=a_2=\dots=a_{m-1};\ a_m=a_{m+1}=\dots=a_{2m-1};\dots;\ a_{mm'}=a_{mm'+1}=\dots=a_n.$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen (9) erfüllt, so besitzt auch die Gleichung (4) eine Wurzel vom absoluten Betrage 1. Denn die linke Seite $f(x)$ dieser Gleichung lässt sich dann in der Form

$$f(x)=(a_0+a_m x^m+\dots+a_{mm'}x^{mm'})(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})$$

schreiben und verschwindet also für jede von 1 verschiedene m^{te} Einheitswurzel. Die Antwort auf die oben aufgeworfene Frage lautet demnach:

Die Gleichung

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=0$$

mit reellen positiven Coefficienten, welche den Bedingungen

$$a_0\geqq a_1\geqq a_2\geqq\dots\geqq a_n$$

genügen, besitzt stets und nur dann eine Wurzel vom absoluten Betrage 1, wenn die Coefficienten sich in Gruppen von je $m>1$ aufeinanderfolgenden und unter einander gleichen einteilen lassen, so dass also

$$a_0=a_1=\ldots\ldots=a_{m-1}>a_m=a_{m+1}=\ldots\ldots=a_{2m-1}>a_{2m}=a_{2m}=a_{2m+1}=\ldots\ldots$$

ist.(1)

3. Herr *Hayashi* hat in diesem Journal, Vol. 2, No. 4, den folgenden Satz aufgestellt:

Die absoluten Beträge aller complexen Wurzeln der Gleichung

$$a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots\ldots+a_{n-1} x^{n-1}-a_n x^n=0, \tag{10}$$

in welcher $a_0, a_1, \ldots\ldots a_{n-1}$ *und* a_n *reelle positive Werte haben, sind kleiner als der grösste der Quotienten*

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots\ldots\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}. \tag{11}$$

Dieser Satz lässt sich aus dem Satze von *Kakeya* auf folgende Weise ableiten und dabei noch ein wenig erweitern.

Die Gleichung (10) besitzt eine einzige reelle positive Wurzel, welche mit $\frac{1}{p}$ bezeichnet werde, so dass die linke Seite der Gleichung den Faktor $(1-px)$ hat. Nach Beseitigung dieses Faktors geht die Gleichung über in

$$\begin{aligned} a_0+(a_0 p+a_1)\,x+(a_0 p^2+a_1 p+a_2)\,x^2+\ldots\ldots \\ +(a_0 p^{n-1}+a_1 p^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1})\,x^{n-1}=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dem Satze von *Kakeya* zufolge sind daher die absoluten Beträge der übrigen $(n-1)$ Wurzeln der Gleichung (10) nicht grösser als der grösste der Quotienten

$$\frac{a_0}{a_0 p+a_1}, \frac{a_0 p+a_1}{a_0 p^2+a_1 p+a_2}, \frac{a_0 p^2+a_1 p+a_2}{a_0 p^3+a_1 p^2+a_2 p+a_3}, \ldots\ldots. \tag{13}$$

Bedeutet aber S den grössten unter den Quotienten (11), so ist

$$\begin{aligned} s-\frac{a_0 p^{k-1}+a_1 p^{k-2}+\ldots\ldots+a_{k-1}}{a_0 p^k+a_1 p^{k-1}+\ldots\ldots+a_k} \\ =\frac{sa_0 p^k+(sa_1-a_0)\,p^{k-1}+\ldots\ldots+(sa_k-a_{k-1})}{a_0 p^k+a_1 p^{k-1}+\ldots\ldots+a_k}>0. \end{aligned}$$

Die Quotienten (13) sind also sämmtlich kleiner als s und daher

---

(1) Hiernach ist der Ausspruch des ersten Theorems in Herrn *Kakeya*'s Note: "In the zero points of a power series with positive coefficients" (dieses Journal, Vol. 3, No. 1) zu modificiren. Desgleichen der Satz in Herrn *Hayashi*'s Note: On the roots of an algebraic equation" (dieses Journal, Vol. 3, No. 2-3, p. 112.)

auch die absoluten Beträge aller, von der positiven reellen verschiedenen Wurzeln der Gleichung (10).

4. Der Satz von *Kakeya* giebt eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \tag{14}$$

sämmtlich ausserhalb des Kreises

$$|x| = r \tag{15}$$

liegen. Es ist aber, auf Grund der Resultate meiner Arbeit [1] "Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt," leicht, die *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen hierfür aufzustellen.

Das Äussere des Kreises (15) wird nämlich durch die Substitution

$$x = r.\frac{1-z}{1+z}$$

auf die Halbebene der Variabeln z abgebildet, in welcher der reelle Teil von z negativ ist. Daher sind die Gleichung (14) dann und nur dann ausschliesslich Wurzeln ausserhalb des Kreises $|x| = r$ besitzen, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$a_0(1+z)^n + ra_1(1+z)^{n-1}(1-z) + r^2 a_2 (1+z)^{n-2}(1-z)^2 + \ldots \\ + r^n a_k (1-z)^n = 0 \tag{16}$$

sämmtlich negative reelle Teile haben. Es genügt daher, die in der erwähnten Arbeit aufgestellten Sätze auf die Gleichung (16) anzuwenden, um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu erhalten, dass die absouluten Beträge der Wurzeln der Gleichung (14) sämmtlich grösser als r sind.

Zürich, 31. Juli 1913.

---

(1) Mathematische Annalen, Bd. 46, S. 273. Siehe auch einer Hilfsatz von *L. Orlando*, ebenda Bd. 71, S. 233.