

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 40.

### 1. *Grundlagen einer Theorie der Materie;* *von Gustav Mie.*

(Dritte Mitteilung<sup>1)</sup>, Schluß.)

#### Drittes Kapitel.

#### Kraft und träge Masse.

Berechnung der auf ein Massenteilchen wirkenden Kraft,

25. Zur Berechnung der Kraft benutzen wir die in I p. 525 hingeschriebene Weltmatrix (16). Wir wollen dabei über die in die Weltfunktion eintretenden Invarianten keinerlei einschränkende Voraussetzungen machen, sondern ganz allgemein annehmen, daß alle vier in I. p. 531 aufgezählten Variablen (24) in  $H$  vorkommen. Eine leichte Rechnung ergibt, daß der p. 533 zunächst unter einer beschränkenden Voraussetzung aufgestellte Satz ganz allgemein gilt:

*Die Weltmatrix ist symmetrisch zur Diagonale.*

Wenn man nämlich die Multiplikationsregel:

$$[[a \cdot b] \ c] = (a \cdot c) \cdot b - (b \cdot c) \cdot a$$

und die sich daraus ergebende Formel:

$$[[a \cdot b] \cdot c] + [[b \cdot c] \cdot a] + [[c \cdot a] \cdot b] = 0$$

anwendet, so findet man aus den allgemeinen Formeln (25) in I. p. 531 leicht die folgenden beiden Gleichungen:

$$(54) \quad [e \cdot b] + [g \cdot b] + [f \cdot b] = 0,$$

$$(55) \quad [e \cdot h] + [b \cdot b] + (\rho \cdot f - \varphi \cdot b) = 0,$$

1) Fortsetzung der beiden Artikel: Ann. d. Phys. 37. p. 511, zitiert als I.; Ann. d. Phys. 39. p. 1, zitiert als II.

also wenn man die Komponenten dieser Ausdrücke einzeln hinschreibt:

$$e_x \cdot d_y + h_x \cdot h_y + f_x \cdot v_y = d_x \cdot e_y + b_x \cdot h_y + v_x \cdot f_y \quad \text{usw.},$$

$$d_y \cdot b_z - d_z \cdot b_y - \varrho \cdot f_x = e_y \cdot h_z - e_z \cdot h_y - \varphi \cdot v_x \quad \text{usw.}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

26. Wir wollen uns nun ein materielles Teilchen, also entweder eine elektrische Knotenstelle oder ein aus ähnlichen Singularitätsstellen zusammengesetztes komplizierteres Gebilde vorstellen, das sich in einem weit ausgedehnten elektromagnetischen Felde bewegt. An irgend einer Stelle sei der Energiestrom, der mit der Vorwärtsbewegung der Ätherzustände verbunden ist, durch  $\mathfrak{s}$  bezeichnet, wie in I. (5) p. 522. Wir haben dann:

$$(56) \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_x = e_y \cdot h_z - e_z \cdot h_y - \varphi \cdot v_x = d_y \cdot b_z - d_z \cdot b_y - \varrho \cdot f_x, \\ \mathfrak{s}_y = e_z \cdot h_x - e_x \cdot h_z - \varphi \cdot v_y = d_z \cdot b_x - d_x \cdot b_z - \varrho \cdot f_y, \\ \mathfrak{s}_z = e_x \cdot h_y - e_y \cdot h_x - \varphi \cdot v_z = d_x \cdot b_y - d_y \cdot b_x - \varrho \cdot f_z. \end{cases}$$

Weiter wollen wir drei dreidimensionale Vektoren  $p_1, p_2, p_3$  durch die folgenden Gleichungen definieren:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi - b \cdot h + e_x \cdot d_x + h_x \cdot b_x + f_x \cdot v_x = p_{1x}, \\ \quad e_y \cdot d_x + h_y \cdot b_x + f_y \cdot v_x = p_{1y}, \\ \quad e_z \cdot d_x + h_z \cdot b_x + f_z \cdot v_x = p_{1z}, \\ \\ \Phi - b \cdot h + e_y \cdot d_y + h_y \cdot b_y + f_y \cdot v_y = p_{2y}, \\ \quad e_x \cdot d_y + h_x \cdot b_y + f_x \cdot v_y = p_{2x}, \\ \quad e_z \cdot d_y + h_z \cdot b_y + f_z \cdot v_y = p_{2z}, \\ \\ \Phi - b \cdot h + e_z \cdot d_z + h_z \cdot b_z + f_z \cdot v_z = p_{3z}, \\ \quad e_x \cdot d_z + h_x \cdot b_z + f_x \cdot v_z = p_{3x}, \\ \quad e_y \cdot d_z + h_y \cdot b_z + f_y \cdot v_z = p_{3y}, \\ \Phi - b \cdot h + e_x \cdot d_x + h_x \cdot b_x + f_x \cdot v_x = p_{3x}. \end{array} \right.$$

Wie wir in I. auf p. 526 Gl. (17) gesehen haben, liefern die ersten drei Reihen der Weltmatrix drei Differentialgleichungen, die mit Rücksicht auf (56) und (57) folgendermaßen zu schreiben sind:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial t} = \frac{\partial p_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3x}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial t} = \frac{\partial p_{1y}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3y}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial t} = \frac{\partial p_{1z}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2z}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3z}}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Wir wollen uns nun die Energie als ein Fluidum vorstellen, das mit einer gewissen Geschwindigkeit  $q$  strömt. Ist  $W$  die Dichte der Energie, so ist  $q$  durch die Definition bestimmt:

$$(59) \quad \mathfrak{s} = W \cdot q.$$

Bezeichnen wir ferner die Energiemenge, die momentan das Volumenelement  $dx \cdot dy \cdot dz = dV$  erfüllt, mit  $dM$ , so ist  $dM = W \cdot dV$  und wir können die Gleichungen (58) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (dM \cdot q_x) &= \left( \frac{\partial p_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2x}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3x}}{\partial z} \right) \cdot dV, \\ \frac{\partial}{\partial t} (dM \cdot q_y) &= \left( \frac{\partial p_{1y}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2y}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3y}}{\partial z} \right) \cdot dV, \\ \frac{\partial}{\partial t} (dM \cdot q_z) &= \left( \frac{\partial p_{1z}}{\partial x} + \frac{\partial p_{2z}}{\partial y} + \frac{\partial p_{3z}}{\partial z} \right) \cdot dV. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Gleichungen über ein Volumen  $V$  integrieren. Es sei

$$M = \int_V dM$$

die gesamte im betrachteten Moment in  $V$  enthaltene Energie,  $\bar{q}$  sei die Geschwindigkeit des „Massenmittelpunktes“ in  $V$ , die durch die Gleichung:

$$(60) \quad M \cdot \bar{q} = \int_V q \cdot dM$$

definiert ist, ferner sei die das Volumen  $V$  umschließende Oberfläche mit  $S$  bezeichnet und  $N$  sei die nach außen gerichtete Normale in einem Punkte von  $S$ , endlich sei  $p_N$  ein dreidimensionaler Vektor, der durch die Gleichung:

$$(61) \quad p_N = p_1 \cdot \cos(N, x) + p_2 \cdot \cos(N, y) + p_3 \cdot \cos(N, z) \dots$$

definiert wird. Die Komponenten von  $p_N$  berechnen sich also folgendermaßen:

$$p_{Nx} = p_{1x} \cdot \cos(N, x) + p_{2x} \cdot \cos(N, y) + p_{3x} \cdot \cos(N, z) \quad \text{usw.}$$

Die Integration über  $V$  gibt dann das folgende Resultat:

$$(62) \quad \frac{\partial (M \cdot \bar{q})}{\partial t} = \int_S p_N \cdot dS.$$

Das Volumen  $V$  werde nun so gewählt, daß es in dem weit ausgedehnten Feld, in welchem sich das materielle Teilchen bewegt, unendlich klein, im Vergleich zu dem Teilchen, das es in sich einschließt, aber unendlich groß ist. Die zweite Bedingung soll ausdrücken, daß erstens die Energie der Singularitäten, aus denen das materielle Teilchen besteht, so gut wie vollständig in dem Volumen enthalten ist, also außerhalb der Fläche  $S$  nur ein ganz verschwindend kleiner Bruchteil der gesamten Teilchenenergie sitzt, und daß zweitens auf der Fläche  $S$  die Gesetze des Vakuums schon so gut wie genau gelten, also  $\rho$  und  $\mathfrak{v}$  als Null und  $\mathfrak{e} = \mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$  gerechnet werden können. Bei dieser Wahl des Volumens  $V$  ist  $M \cdot \bar{q}$  die Bewegungsgröße des Teilchens, seine träge Masse ist dabei identisch mit seiner Energie  $M$ , die rechte Seite der Gleichung (62) liefert die auf das Teilchen wirkende bewegende Kraft. Da zufolge der zweiten Bedingung  $\mathfrak{p}_N$  bis auf verschwindend kleine Korrektionsglieder identisch ist mit der Komponente des Maxwellschen Spannungstensors auf dem betreffenden Element der Oberfläche  $S$ , so ergibt sich für die bewegende Kraft ein Wert, der unabhängig von der Wahl des Volumens  $V$  ist, vorausgesetzt, daß die beiden oben genannten Bedingungen erfüllt sind, und zwar ein Wert, der vollkommen identisch ist mit demjenigen, den auch die Elektronentheorie für ein materielles Partikelchen liefern würde, das um sich herum genau das elektrische und magnetische Feld hätte, wie das betrachtete Partikelchen. Die bewegende Kraft hängt also ganz wie in der Elektronentheorie nicht von der speziellen Anordnung der elektrischen Ladungen und der elektrischen oder magnetischen Dipole im Innern des materiellen Partikelchens ab, solange das dem Partikelchen eigene äußere Feld dasselbe ist, außerdem aber hängt sie auch nicht ab von den Gesetzen, nach denen die das Teilchen zusammenhaltenden Kohäsionskräfte wirken, und auch nicht von den Gesetzen, die im Innern des Teilchens für das elektromagnetische Feld an die Stelle der Maxwellschen Gleichungen eintreten. Genau derselbe Satz, den wir hier zunächst für die fortschreitende Bewegung  $\bar{q}$  des Teilchens kennen gelernt haben, läßt sich ohne weiteres auch für seine Rotationsbewegungen nachweisen. Die Trägheitsmomente berechnen sich dabei ganz wie in der

gewöhnlichen Mechanik, indem man an Stelle der trägen Masse immer die Energie setzt. Wesentlich ist beim Beweis, daß nach (54)  $p_{1y} = p_{2x}$ ,  $p_{1z} = p_{3x}$ ,  $p_{2z} = p_{3y}$ .

Die ponderomotorischen Kräfte, die ein materielles Teilchen als ganzes in fortschreitende oder in rotierende Bewegung bringen, berechnen sich aus dem elektrischen und magnetischen Feld, in dem sich das Teilchen befindet, nach genau denselben Regeln, wie in der gewöhnlichen Elektrizitätslehre. Die Existenz eines besonderen Vierervektors  $(v, i\rho)$  im Innern des Teilchens und die Abweichung der Gesetze des elektromagnetischen Feldes von den Maxwell'schen Gleichungen im Innern des Teilchens haben auf die äußeren ponderomotorischen Kräfte keinen bemerkbaren Einfluß.

Auf ein Elektron von der Gesamtladung  $e$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $q$  in einem elektromagnetischen Feld bewegt, wirkt beispielsweise nach unserer Theorie die Kraft:

$$(63) \quad \mathfrak{P} = e \cdot (e + [q \cdot b]).$$

Dieser Ausdruck stimmt genau mit dem überein, welcher der Elektronentheorie zugrunde gelegt wird.

Dagegen sind die Kraftwirkungen im Innern der Elementarteilchen der Materie, die etwa feine Strukturveränderungen in diesen Teilchen selbst hervorbringen, etwas ganz anderes, als die ponderomotorischen Kräfte der gewöhnlichen Elektrizitätslehre. Sie lassen sich aber ohne Kenntnis der Weltfunktion nicht berechnen.

Zu den äußeren Kräften, die an den materiellen Teilchen angreifen, gehört auch die Gravitation. Aus dem eben bewiesenen Satz geht hervor, daß die Grundgleichungen der Ätherdynamik I. (1) bis (4), die wir der Theorie bisher zugrunde gelegt haben, nicht zu einer Erklärung der Gravitation ausreichen. Die Erwartung, die ich zu Beginn meiner Arbeit (I. p. 513 oben) ausgesprochen habe, ist also nicht erfüllt. Wir werden in einem späteren Kapitel untersuchen, wie die Grundgleichungen erweitert werden müssen, um auch die Gravitation mit einzubegreifen.

Die träge Masse eines materiellen Teilchens.

27. Unter einem materiellen Teilchen verstehen wir ganz allgemein einen kleinen Bereich im Äther, wo die Zustands-

größen enorm große Werte annehmen. Wir werden im folgenden häufig Integrale irgend welcher Zustandsgrößen über das ganze Volumen des Teilchens auszuführen haben. Darunter ist ein Volumen zu verstehen, dessen äußere Begrenzung soweit von dem Zentrum des Teilchens entfernt ist, daß auf ihr die Zustandsgrößen unendlich klein gesetzt werden können. Wenn man also die äußere Begrenzung des Volumens ganz beliebig wählt, nur so, daß nach dieser Definition das Teilchen „ganz“ davon eingeschlossen ist, so darf diese Wahl keinen bemerkbaren Einfluß mehr auf den Wert des Integrals haben.

Wenn wir sagen, daß ein Teilchen in Ruhe und unveränderlich ist, so wollen wir darunter verstehen, daß entweder alle Zustandsgrößen in dem von dem Teilchen erfüllten Volumen konstant sind, oder daß der Durchschnittswert jeder Zustandsgröße in jedem Punkt des Volumens über eine Zeit, die für das Experiment unendlich klein ist, konstant ist.

Es sei z. B.  $\bar{K}$  der Wert einer Zustandsgröße in einem Punkt  $(x, y, z)$  des Teilchens. Es sei ferner  $\tau$  eine Zeit, die für das Experiment noch unendlich klein ist. Dann ist der Durchschnittswert, von dem die Rede ist:

$$\bar{K} = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} K \cdot dt.$$

Bekanntlich gelten nun die Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{K}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial x}, \quad \text{usw.}$$

Die Bedingungen dafür, daß das Teilchen unveränderlich und in Ruhe ist, sind also:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{usw.}$$

Nun folgen aus den Grundgleichungen I (1) bis (4) die beiden Beziehungen:

$$\begin{aligned} e \cdot b - q \cdot \varrho &= -\operatorname{div}(\varphi \cdot b) - b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ b \cdot h - f \cdot v &= -\operatorname{div}[h \cdot f] - f \cdot \frac{\partial b}{\partial t}. \end{aligned}$$

---

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern p. 13.

In einem ruhenden Teilchen ist also:

$$\overline{e \cdot d} - \overline{\varphi \cdot \varrho} = - \operatorname{div} (\overline{\varphi \cdot d}),$$

$$\overline{b \cdot h} - \overline{f \cdot v} = - \operatorname{div} [\overline{h \cdot f}].$$

Integrieren wir nun über ein das Teilchen ganz einschließendes Volumen und beachten dabei, daß auf der Oberfläche des Volumens  $\overline{\varphi \cdot d}$  und  $[\overline{h \cdot f}]$  gleich Null gesetzt werden dürfen, so ergibt sich für ein ruhendes materielles Teilchen:

$$(64) \quad \int \overline{e \cdot d} \cdot dV = \int \overline{\varrho \cdot \varphi} \cdot dV,$$

$$(65) \quad \int \overline{b \cdot h} \cdot dV = \int \overline{f \cdot v} \cdot dV.$$

Nach I (7) und (14) auf p. 523 und p. 525 berechnet sich die Energiedichte zu:

$$W = H + b \cdot h - f \cdot v = \Phi + e \cdot d - \varphi \cdot \varrho.$$

Es ergibt sich also für die Energie  $E_0$  eines ruhenden materiellen Teilchens nach (64) und (65):

$$(66) \quad E_0 = \int \overline{H} \cdot dV = \int \overline{\Phi} \cdot dV.$$

Es sei  $S$  irgend eine unbegrenzte<sup>1)</sup> Fläche, die das Teilchen quer durchschneidet, und  $N$  die Flächennormale in irgend einem Punkt. Da nun zu beiden Seiten dieser Fläche, vorausgesetzt, daß das Teilchen ruht, keine dauernden Energieänderungen eintreten dürfen, so muß sein:

$$(67) \quad \int_S \overline{s}_N \cdot dS = 0,$$

wo  $\overline{s}_N$  der Durchschnittswert der zu  $S$  normalen Komponente des Vektors  $\overline{s}$  ist. Dieser Vektor ist nach (56) gegeben durch:

$$\overline{s} = [e \cdot h] - \varphi \cdot v = [d \cdot b] - \varrho \cdot f.$$

Laue<sup>2)</sup> hat bewiesen, daß, sobald Gleichung (67) gilt — und das ist also für jedes beliebige materielle Teilchen der Fall —, auch folgender Satz besteht:

**Satz von Laue.** *Das Integral jeder einzelnen Komponente der Weltmatrix über das Volumen eines ruhenden materiellen*

1) D. h. entweder geschlossen oder sich ins Unendliche erstreckend.

2) M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 168 ff.

*Teilchens ist Null, ausgenommen nur die Komponente mit dem Index 4,4, welche die Energie des Teilchens liefert.*

Im allgemeinen ist dabei von jeder Komponente ihr Durchschnittswert während einer kleinen Zeit zu nehmen, wie in Gleichung (67).

Wie M. Laue gezeigt hat, kann man diesen Satz benutzen, um die Energie eines bewegten Teilchens zu berechnen. Ich will diese Rechnung für die hier vertretene Theorie durchführen. Es seien die Feldgrößen in einem Punkt  $x_0, y_0, z_0$  des ruhenden Teilchens alle durch den Index 0 charakterisiert. Man findet nach der Relativitätstheorie aus ihnen die Werte in einem Punkte  $x, y, z$  eines bewegten Teilchens, das die Geschwindigkeit  $q$  in der Richtung der  $z$ -Achse hat, wenn dieser Punkt  $(x, y, z)$  zur Zeit  $t$  die durch folgende Gleichungen gegebene Lage hat:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \frac{x - q \cdot t}{\sqrt{1 - q^2}} = z_0$$

nach den folgenden Umrechnungsformeln:

$$b_x = \frac{b_{x0} + q \cdot h_{y0}}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad b_y = \frac{b_{y0} - q \cdot h_{x0}}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad b_z = b_{z0},$$

$$h_x = \frac{h_{x0} - q \cdot b_{y0}}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad h_y = \frac{h_{y0} + q \cdot b_{x0}}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad h_z = h_{z0},$$

$$\varrho = \frac{\varrho_0 + q \cdot v_{z0}}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad v_x = v_{x0}, \quad v_y = v_{y0}, \quad v_z = \frac{v_{z0} + q \cdot \varrho_0}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Genau dieselben Beziehungen wie zwischen  $(b, h)$  und  $(b_0, h_0)$  gelten auch zwischen  $(e, h)$  und  $(e_0, h_0)$ , dieselben wie zwischen  $(\varrho, v)$  und  $(\varrho_0, v_0)$  auch zwischen  $(\varphi, f)$  und  $(\varphi_0, f_0)$ .

Die Anwendung dieser Formeln führt durch einige ganz elementare Rechnungen zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} b \cdot h - f \cdot v &= b_0 \cdot h_0 - f_0 \cdot v_0 + \frac{q^2}{1 - q^2} \cdot (e_0 b_0 - \varphi_0 \cdot \varrho_0) \\ &\quad - \frac{q^2}{1 - q^2} \cdot (e_{z0} \cdot b_{z0} - b_{x0} \cdot h_{x0} - h_{y0} h_{y0} + f_{z0} \cdot v_{z0}) \\ &\quad - \frac{q^2}{1 - q^2} \cdot ([e_0 \cdot h_0]_z - \varphi_0 \cdot v_{z0} + [b_0 \cdot h_0]_z - \varrho_0 \cdot f_{z0}). \end{aligned}$$

Wir bilden nun den zeitlichen Durchschnittswert und integrieren über das von dem materiellen Teilchen erfüllte Volumen. Wenden wir dabei die Gleichungen (64), (65), (67)

an und beachten wir weiter, daß zufolge der Definition des Punktes  $x, y, z$  die Beziehung besteht:

$$dx \cdot dy \cdot dz = \sqrt{1 - q^2} \cdot dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0$$

oder:

$$dV = \sqrt{1 - q^2} \cdot dV_0,$$

so ergibt sich:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int (\bar{b} \cdot \bar{h} - \bar{f} \cdot \bar{v}) \cdot dV = \frac{q^2}{\sqrt{1 - q^2}} \\ & \cdot \int (\bar{b}_0 \cdot \bar{h}_0 - \bar{e}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} - \bar{b}_{z0} \cdot \bar{h}_{z0} - \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir den Wert der Größe  $H$  in dem Punkte  $x_0, y_0, z_0$  des ruhenden Teilchens mit  $H_0$ , so können wir

$$H_0 = F(x_0, y_0, z_0)$$

als Funktion von  $(x_0, y_0, z_0)$  auffassen. Es sei weiter  $(x, y, z)$  der Punkt des bewegten Teilchens, der zur Zeit  $t$  durch die Lorentzsche Transformation aus  $(x_0, y_0, z_0)$  erhalten wird. Da  $H$  eine Invariante für die Lorentzsche Transformation, so ist ihr Wert im Punkte  $(x, y, z)$  des bewegten Teilchens zur Zeit  $t$  zu berechnen als:

$$H = F\left(x, y, \frac{z - q t}{\sqrt{1 - q^2}}\right),$$

wo  $F$  genau dieselbe Funktion bedeutet als oben. Daraus folgt, daß:

$$(69) \quad \int H \cdot dV = \sqrt{1 - q^2} \cdot \int H_0 \cdot dV_0 = \sqrt{1 - q^2} \cdot E_0.$$

Nunmehr ergibt sich die Energie  $E$  des bewegten Teilchens durch Addition von (68) und (69):

$$\begin{aligned} E &= \int (\bar{H} + \bar{b} \cdot \bar{h} - \bar{f} \cdot \bar{v}) \cdot dV, \\ E &= \sqrt{1 - q^2} \cdot \int \bar{H}_0 \cdot dV_0 + \frac{q^2}{\sqrt{1 - q^2}} \\ &\quad \cdot \int (\bar{b}_0 \cdot \bar{h}_0 - \bar{e}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} - \bar{b}_{z0} \cdot \bar{h}_{z0} - \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV_0. \end{aligned}$$

Dieses Resultat können wir jetzt mit Hilfe des Laueschen Satzes weiter vereinfachen. Wenden wir diesen Satz nämlich

auf das Glied der Weltmatrix (16) mit dem Index 3,3 an, so erhalten wir:

$$\int (\bar{\Phi}_0 - \bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 + \bar{e}_{z0} \cdot \bar{d}_{z0} + \bar{h}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} + \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV_0 = 0.$$

Also da nach (66):

$$\int \bar{\Phi}_0 \cdot dV_0 = \int \bar{H}_0 \cdot dV_0 = E_0.$$

$$\int (\bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 - \bar{e}_{z0} \cdot \bar{d}_{z0} - \bar{h}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} - \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV_0 = \int \bar{\Phi}_0 \cdot dV_0 = E_0.$$

Es ergibt sich daher, was M. Laue schon allgemein nachgewiesen hat (Das Relativitätsprinzip p. 170):

$$(70) \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-q^2}}.$$

28. Aus dem Laueschen Satz läßt sich noch eine weitere sehr interessante Folgerung ziehen. Wendet man ihn auf die drei Glieder der Diagonale der Weltmatrix mit den Indizes 1,1, sowie 2,2 und 3,3 an, so erhält man:

$$\int (\bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 - \bar{b}_{x0} \cdot \bar{b}_{x0} - \bar{e}_{x0} \cdot \bar{d}_{x0} - \bar{f}_{x0} \cdot \bar{v}_{x0}) \cdot dV_0 = E_0,$$

$$\int (\bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 - \bar{b}_{y0} \cdot \bar{b}_{y0} - \bar{e}_{y0} \cdot \bar{d}_{y0} - \bar{f}_{y0} \cdot \bar{v}_{y0}) \cdot dV_0 = E_0,$$

$$\int (\bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 - \bar{b}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} - \bar{e}_{z0} \cdot \bar{d}_{z0} - \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV_0 = E_0.$$

Durch Addition dieser Gleichungen bekommt man:

$$\int (2 \cdot \bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 - \bar{e}_0 \cdot \bar{d}_0 - \bar{f}_0 \cdot \bar{v}_0) \cdot dV_0 = 3 \cdot E_0,$$

oder mit Rücksicht auf (64) und (65):

$$(71) \quad \begin{cases} E_0 = -\frac{1}{3} \cdot \int (\bar{e}_0 \cdot \bar{d}_0 - \bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0) \cdot dV_0, \\ \quad = -\frac{1}{3} \cdot \int (\bar{\varrho}_0 \cdot \bar{\varphi}_0 - \bar{f}_0 \cdot \bar{v}_0) \cdot dV_0. \end{cases}$$

Außerdem sieht man aus den drei soeben hingeschriebenen Gleichungen sofort, daß:

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int (\bar{e}_{x0} \cdot \bar{d}_{x0} + \bar{b}_{x0} \cdot \bar{b}_{x0} + \bar{f}_{x0} \cdot \bar{v}_{x0}) \cdot dV_0 \\ & = \int (\bar{e}_{y0} \cdot \bar{d}_{y0} + \bar{b}_{y0} \cdot \bar{b}_{y0} + \bar{f}_{y0} \cdot \bar{v}_{y0}) \cdot dV_0 \\ & = \int (\bar{e}_{z0} \cdot \bar{d}_{z0} + \bar{b}_{z0} \cdot \bar{b}_{z0} + \bar{f}_{z0} \cdot \bar{v}_{z0}) \cdot dV_0 \\ & = \frac{1}{3} \int (\bar{e}_0 \cdot \bar{d}_0 + \bar{b}_0 \cdot \bar{b}_0 + \bar{f}_0 \cdot \bar{v}_0) \cdot dV_0. \end{aligned} \right.$$

Besonders interessant werden diese Gleichungen, wenn  $\mathfrak{h} = 0$ ,  $\mathfrak{v} = 0$ , was der Fall ist beim Elektron.

*Im Felde eines Elektrons ist:*

$$(73) \quad E_0 = -\frac{1}{3} \cdot \int \epsilon_0 \cdot \mathfrak{d}_0 \cdot dV = -\frac{1}{3} \cdot \int \varphi_0 \cdot \varrho_0 \cdot dV_0$$

und außerdem:

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \epsilon_{x0} \cdot \mathfrak{d}_{x0} \cdot dV_0 &= \int \epsilon_{y0} \cdot \mathfrak{d}_{y0} \cdot dV_0 = \int \epsilon_{z0} \cdot \mathfrak{d}_{z0} \cdot dV_0 \\ &= \frac{1}{3} \int \epsilon_0 \cdot \mathfrak{d}_0 \cdot dV_0. \end{aligned} \right.$$

29. Für den Spezialfall, den wir in II. von p. 18 an durchdiskutiert haben, läßt sich die Beziehung (73) leicht direkt als wahr nachweisen. Setzen wir in der Weltfunktion

$$\Phi = -\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{6} a \cdot \chi^6$$

die Größen des statischen Feldes ein:  $\eta = \epsilon_0$ ,  $\chi = \varphi_0$ , so ergibt sich:

$$E_0 = \int \Phi_0 \cdot dV_0 = -\frac{1}{2} \cdot \int \epsilon_0^2 \cdot dV_0 + \frac{1}{6} a \cdot \int \varphi_0^6 \cdot dV_0.$$

Weiter ist aber:

$$\mathfrak{d}_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \epsilon_0} = \epsilon_0, \quad \varrho_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi_0} = a \cdot \varphi_0^5$$

und wir können daher schreiben:

$$E_0 = -\frac{1}{2} \cdot \int \epsilon_0 \cdot \mathfrak{d}_0 \cdot dV + \frac{1}{6} \cdot \int \varphi_0 \cdot \varrho_0 \cdot dV.$$

Wendet man hierauf (64) an, so resultiert (73).

Hätten wir der Weltfunktion die allgemeinere Form gegeben:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{\nu} \cdot a \cdot \chi^\nu,$$

so würde eine ganz analoge Rechnung ergeben:

$$E_0 = -\frac{1}{2} \cdot \int \epsilon_0 \cdot \mathfrak{d}_0 \cdot dV + \frac{1}{\nu} \cdot \int \varphi_0 \cdot \varrho_0 \cdot dV,$$

die Relation (73) könnte also unmöglich erfüllt sein, außer wenn  $\nu = 6$ . Daraus folgt:

*Von allen Weltfunktionen von der Form:*

$$\Phi = -\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{\nu} \cdot a \cdot \chi^\nu$$

kann nur der Fall  $\nu = 6$  zu isolierten Knotenstellen der elektrischen Ladung führen.

Nimmt man irgend einen anderen Wert für  $\nu$ , so müssen alle Integrale der Gleichung (34) in II. p. 15 wesentliche Singularitäten haben, entweder eine Singularität im Nullpunkt oder eine im Unendlichen oder beides. Es gibt dann kein einziges Integral, das ein Elektron darstellen könnte.

Man sieht hieraus, daß man die Gleichung (73) gelegentlich als Kriterium dafür brauchen kann, ob eine bestimmte Form der Weltfunktion mit der Existenz isolierter Knotenstellen (Elektronen) vereinbar ist oder nicht.

**30.** Aus der Formel (73) folgt, daß in dem Beispiel, das wir in II. durchdiskutiert haben, die Energie einer Knotenstelle *negativ* ist. Es überwiegt also in diesem Falle die der Kohäsionswirkung der Ladungen zukommende negative Energie über die positive Energie des elektrischen Feldes. Da in der Hamiltonschen Funktion:

$$\begin{aligned} H(b_0, 0, \varrho_0, 0) &= \Phi_0 + \epsilon_0 b_0 - \varphi_0 \cdot \varrho_0 = W \\ &= \frac{1}{2} b_0^2 - \frac{5}{6} \sqrt{\frac{\varrho_0^6}{a}} \end{aligned}$$

$b_0$  und  $\varrho_0$  ganz getrennt voneinander stehen, kann man die beiden Energiemengen auch getrennt berechnen. Man erhält für die Energie des elektrischen Feldes:

$$\frac{1}{2} \cdot \int b_0^2 \cdot dV_0 = \frac{1}{2} \cdot \int \epsilon_0 \cdot b_0 dV_0,$$

für die Energie der Kohäsionskräfte:

$$-\frac{5}{6} \cdot \int \sqrt{\frac{\varrho_0^6}{a}} \cdot dV_0 = -\frac{5}{6} \cdot \int \varrho_0 \cdot \varphi_0 \cdot dV_0 = -\frac{5}{6} \cdot \int \epsilon_0 \cdot b_0 \cdot dV_0.$$

Ist nun aber die Energie eines Teilchens negativ, so muß dasselbe auch für seine träge Masse gelten. Die Knotenstellen, von denen in II. auf p. 37 die Rede gewesen ist, haben also eine negative träge Masse, sie müssen demnach in Kraftfeldern Beschleunigungen annehmen, die den bewegendenden Kräften gerade entgegengesetzt sind. Daraus erklärt sich ihr auf den ersten Blick so absurd aussehendes Verhalten, auf das uns in II. p. 38 die allgemeinen Überlegungen führten, daß nämlich gleichnamige Knotenstellen sich zusammenzuballen suchen und ungleichnamige

Knotenstellen voneinander wegstreben, obwohl die ponderomotorischen Kräfte der elektrischen Felder gerade in der entgegengesetzten Richtung wirken.

Man kann nun aus (73) noch eine sehr wichtige allgemeine Folgerung ziehen:

*Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die träge Masse eines Elektrons positiv ist, lautet:*

$$\int \epsilon_0 \cdot \mathfrak{b}_0 \cdot dV < 0$$

oder auch:

$$\int \varphi_0 \cdot \varrho_0 \cdot dV < 0.$$

In großer Entfernung vom Elektron ist  $\epsilon = \mathfrak{b}$ , also  $\epsilon_0 \cdot \mathfrak{b}_0$  sicher positiv. Daraus folgt:

*Im Innern des Elektrons müssen die beiden Vektoren  $\epsilon$  und  $\mathfrak{b}$  entgegengesetztes Vorzeichen haben.*

Man sieht hieraus, daß es ganz unmöglich ist, daß im Innern des Elektrons noch die Maxwellschen Gleichungen gelten.

Ebenso hat auch  $\varphi$ , da es gleich dem elektrischen Potential ist, in den äußeren Sphären des Elektrons dasselbe Vorzeichen wie  $\varrho$ . Und zwar erreicht  $\varphi$  an der Stelle, wo  $\epsilon$  durch Null hindurchgeht, um dann im Innern des Elektrons die entgegengesetzte Richtung anzunehmen, sein Maximum. Weiter nach innen muß dann  $\varphi$  so stark abnehmen, daß es schließlich ebenfalls sein Vorzeichen umgekehrt und  $\varphi_0 \cdot \varrho_0$  sehr große negative Werte bekommt, da das Raumintegral von  $\varphi_0 \cdot \varrho_0$  negativ sein muß.

*Im Innersten des Elektrons muß  $\varphi$  das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $\varrho$  bekommen.*

## Viertes Kapitel.

### Das Problem des Wirkungsquantums.

#### Elementardipole.

31. Wenn die beiden Vektoren  $\mathfrak{b}$  und  $\epsilon$  immer dasselbe Vorzeichen hätten, so könnte es nur eine Art von Elementarteilchen der Materie geben, die dadurch gekennzeichnet ist, daß  $\text{div } \mathfrak{b}$  in ihrem Innern beträchtliche Werte annimmt.

Können aber, wie wir nach den letzten Darlegungen voraussetzen dürfen, in sehr starken Feldern  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{c}$  entgegengesetzt laufen, so ist noch eine zweite Art von Elementarteilchen denkbar, in denen  $\text{rot } \mathfrak{b}$  sehr große Werte annimmt, während  $\text{div } \mathfrak{b}$  wenig hervortritt. In diesen Elementarteilchen würde also der Vektor  $\mathfrak{b}$ , da  $\text{div } \mathfrak{b}$  sehr klein ist, fast vollkommen auf geschlossenen Linien verlaufen, ähnlich wie die Linien der magnetischen Induktion bei einem kleinen permanenten Magneten. Wir wollen ein solches Teilchen einen elektrischen Elementardipol nennen. Der Verlauf des Vektors  $\mathfrak{c}$  ist bei Gleichgewicht dadurch charakterisiert, daß  $\text{rot } \mathfrak{c} = 0$ , während  $\text{div } \mathfrak{c} \neq 0$  sein kann. Die Linien des Vektors  $\mathfrak{c}$  verlaufen in dem Dipol also ähnlich wie die Linien der magnetischen Kraft eines permanenten Magnetens, sie sind daher im Innern des Dipols den Linien des Vektors  $\mathfrak{b}$  entgegengesetzt gerichtet. Die Möglichkeit von Elementardipolen ist demnach an die Bedingung geknüpft, daß für sehr große Werte von  $\mathfrak{b}$  der Vektor  $\mathfrak{c}$  sein Vorzeichen umkehrt.

Die genaueren Bedingungen für die Möglichkeit derartiger Elementardipole aufzustellen, ist außerordentlich schwierig und dürfte auch wohl bei unserer gänzlichen Unkenntnis von der Natur der Weltfunktion wenig nützen. Ich will einmal annehmen, daß es Elementardipole gibt, und will einige Konsequenzen aus dieser Annahme ziehen.

**32.** Nach dem in Abschnitt 26. bewiesenen Satz können wir leicht die ponderomotorische Kraft berechnen, die ein Dipol im elektrischen Feld erfährt. Es ist genau dieselbe Kraft, die nach den Vorstellungen der gewöhnlichen Elektrostatik ein elektrischer Doppelpunkt erfahren würde, der dasselbe elektrische Moment hat, wie unser Dipol; das elektrische Moment läßt sich aus dem äußeren Feld berechnen. Daraus ist zu sehen, daß ein elektrisches Feld auf den Dipol hauptsächlich ein Drehmoment ausübt, das ihn in die Richtung des Feldes einzustellen sucht, daß dagegen die Kräfte, die dem Dipol eine translatorische Bewegung geben würden, im allgemeinen sehr klein sind. Demnach werden äußere Kräfte die Dipole schwerlich aus dem Verband der Atome heraustreiben, wie Elektronen, und es ist wohl wenig Aussicht, korpuskulare Strahlungen zu bekommen, die aus Dipolen bestehen.

Dagegen darf man vermuten, daß die Dipole im Gegensatz zu den Elektronen leicht innere Kraftwirkungen erfahren können, ähnlich wie elektrische Doppelpunkte nach der gewöhnlichen Auffassung im elektrischen Felde innere Störungen erleiden, indem die beiden Ladungspunkte auseinandergezerrt werden. Genauer kann man über diese inneren Wirkungen nicht sagen, wie wir auf p. 5 gesehen haben, aber vermutlich sucht das elektrische Feld auch in unseren Dipolen die Struktur aufzulockern. Ich will nun nachweisen, daß eine zu große Auflockerung für den Dipol verderblich werden muß.

Es gibt auch im Vakuum, wo die Maxwell'schen Gleichungen gelten, Dipole ohne elektrische Ladungen, freilich nicht im Gleichgewichtszustand. Solche Dipole sind die elektrischen Kugelwellen. Nach H. Hertz (Ges. Werke 2. p. 150) kann man das Feld in einer Kugelwelle mit Hilfe einer Funktion  $\Pi = f(r-t)/r$  berechnen, wo  $r$  den Radiusvektor vom Zentrum der Welle ab bezeichnet. Es seien  $z, \varrho$  Zylinderkoordinaten,  $z$  die Richtung der Symmetrieachse der Kugelwelle,  $\varrho$  die dazu senkrechte Richtung, dann ist:

$$\mathfrak{d}_\varrho = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho \partial z}, \quad \mathfrak{d}_z = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} \right), \quad \mathfrak{h} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varrho \partial t},$$

das magnetische Feld  $\mathfrak{h}$  verläuft in Kreisen um die  $z$ -Achse. Für die Differentiation ist zu beachten  $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$ . Setzt man in diese Formeln den oben angegebenen Wert für  $\Pi$  ein, und bezeichnet man den Winkel zwischen  $r$  und  $z$  mit  $\vartheta$ , so daß also:  $\cos \vartheta = z/r$ ,  $\sin \vartheta = \varrho/r$ , so findet man folgende Formeln:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{d}_\varrho = - \left( \frac{f''(r-t)}{r} - \frac{3 \cdot f'(r-t)}{r^2} + \frac{3 \cdot f(r-t)}{r^3} \right) \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta, \\ \mathfrak{d}_z = + \left( \frac{f''(r-t)}{r} - \frac{3 \cdot f'(r-t)}{r^2} + \frac{3 \cdot f(r-t)}{r^3} \right) \cdot \sin^2 \vartheta \\ \quad + \left( \frac{2 \cdot f'(r-t)}{r^2} - \frac{2 \cdot f(r-t)}{r^3} \right), \\ \mathfrak{h} = - \left( \frac{f''(r-t)}{r} - \frac{f'(r-t)}{r^2} \right) \cdot \sin \vartheta. \end{array} \right.$$

Wir wollen nun für  $f(r-t)$  eine Funktion wählen, die mitsamt ihren ersten zwei Differentialquotienten in einem Wertebiet zwischen  $a$  und  $b$  stetig verläuft und deren erste

zwei Differentialquotienten in den Grenzpunkten  $a$  und  $b$  gleich Null werden; die Werte, die  $f$  selbst in  $a$  und  $b$  annimmt, seien  $A$  und  $0$ :

$$\begin{aligned} f(a) &= A, & f'(a) &= 0, & f''(a) &= 0, \\ f(b) &= 0, & f'(b) &= 0, & f''(b) &= 0. \end{aligned}$$

Für alle Werte  $r - t > a$  setzen wir  $f$  konstant gleich  $A$ , für alle Werte  $r - t > b$  konstant gleich  $0$ .

Dann sind die Feldgrößen in einem bestimmten Moment  $t$  nach (75) in dem Bereich:

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty > r \geq a + t, \\ d_e = -\frac{3A}{r^3} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta, \\ d_z = +\frac{3A}{r^3} \cdot \sin^2 \vartheta - \frac{2A}{r^3}, \\ h = 0. \end{array} \right.$$

Es ist dies das Feld eines elektrischen Dipols vom Moment  $4\pi \cdot A$ .

In dem Bereich  $a + t \leq r \leq b + t$  befindet sich die Kugelwelle mit in sich zurücklaufenden elektrischen Feldlinien, endlich im Innern der Kugel vom Radius  $b + t$ , also für alle Werte  $r \leq b + t$  ist  $d = h = 0$ . Wir sehen hieraus, daß eine kugelförmige Impulswelle in der Tat einen elektrischen Dipol ohne Ladungen darstellt.

Ein Beispiel für die Funktion  $f$ , an dem man sich leicht Einzelheiten klar machen kann, ist:

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \infty > r - t \geq \frac{\pi}{m}, \quad f(r - t) = 2\pi \cdot a = A, \\ 2. \quad \frac{\pi}{m} \geq r - t \geq -\frac{\pi}{m}, \\ \quad \quad \quad f(r - t) = a(\sin m \cdot (r - t) + m(r - t) + \pi), \\ 3. \quad -\frac{\pi}{m} \geq r - t > -\infty, \quad f(r - t) = 0. \end{array} \right.$$

Der beschriebene Dipol ist nicht im Gleichgewicht, er sucht sich vielmehr, indem sein innerer Hohlraum sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnt, in Nichts aufzulösen. Da nun

zwischen dem von uns angenommenen Elementardipol, wenn er wirklich existiert, ein kontinuierlicher Übergang zu dem Kugelwellendipol möglich sein muß, so folgt, daß es für den Elementardipol eine vielleicht bei starken inneren Pulsationen erreichbare Ausdehnung gibt, bei der labiles Gleichgewicht eintritt, so daß der Dipol, wenn er einmal darüber hinauschießt, gezwungen ist, sich in Form eines Kugelwellendipols völlig in Nichts aufzulösen, während er sich bei schwächeren Ausdehnungen immer wieder zu seiner Gleichgewichtslage zusammenzuziehen sucht. Wenn es also Elementardipole gibt, so müssen sie explosibel sein; bei ihrer Explosion verwandelt sich Materie in einen Lichtpuls. Da nach der Relativitätstheorie alle Vorgänge umkehrbar sind, so muß natürlich ein materieller Elementardipol auch aus einem Lichtpuls neu entstehen können. Um eine in das Zentrum zusammenlaufende Kugelwelle, die sich möglicherweise zu einem Dipol kondensieren kann, mathematisch darzustellen, muß man in den Formeln (75) an Stelle von  $(r - t)$  setzen:  $(r + t)$  und zugleich das Vorzeichen von  $\hbar$  umkehren.

33. Aus diesen Überlegungen folgt, daß man über die Existenz etwaiger Elementardipole eine Kunde nicht von einer neuen korpuskularen Strahlung, sondern von einer Lichtpulsstrahlung zu erwarten hätte. Es wäre z. B. möglich, daß das Licht der Bandenspektren aus explodierenden Dipolen bestünde. Denn das Fehlen eines richtigen Zeemaneffektes an diesem Licht weist darauf hin, daß es nicht von Elektronenschwingungen erregt wird. Die feine Kannellierung der Banden wäre allerdings nur zu verstehen, wenn man annehmen würde, daß jedes strahlende Atom nicht bloß einzelne Pulse, sondern eine Unmenge, vielleicht Tausende von Pulsen in regelmäßigen Intervallen abgibt, durch deren Interferenz die feine Struktur der Banden entstände. Die Aussendung der Pulse müßte mit Eigenschwingungen der Atome zusammenhängen und die komplizierten Gesetze dieser Eigenschwingungen müßten hinzugezogen werden, um die merkwürdigen Gesetze der Banden zu erklären. Es wäre natürlich verfehlt, wenn man diese Theorie an den äußerst verwickelten Verhältnissen der Bandenspektren prüfen wollte. Vielleicht könnte man aber an den einfacheren Resonanzspektren Aufklärungen bekommen, durch die die Möglichkeit

oder die Unmöglichkeit bewiesen würde, diese Spektren aus einer regelmäßigen Folge von Pulsen zu erklären.

34. Zum Schluß sei noch bemerkt, daß es möglicherweise ebenso gut wie elektrische Dipole auch magnetische Dipole geben könnte. Es wären das Elementarpartikelchen, in denen ebenfalls  $\rho$  und  $\mathbf{b}$  sehr klein anzunehmen wären, und in denen deswegen  $\text{rot } \mathbf{h}$  so gut wie Null wäre, während  $\text{div } \mathbf{h} \neq 0$ . Der Vektor  $\mathbf{b}$  hätte dagegen, wie immer, die Bedingung  $\text{div } \mathbf{b} = 0$  genau zu erfüllen. Es wären also in dem magnetischen Elementardipol die Linien des Vektors  $\mathbf{b}$  geschlossene Kurven, die ähnlich wie die Linien der magnetischen Induktion bei einem permanenten Magneten verlaufen. Die Linien des Vektors  $\mathbf{h}$  würden dagegen den Linien der magnetischen Kraft beim permanenten Magneten ähnlich sein und im Innern des Dipols die entgegengesetzte Richtung haben, wie die Linien des Vektors  $\mathbf{b}$ .

#### Das Plancksche Wirkungsquantum.

35. Solange man sich die wärmeübertragenden Verbindungen zwischen Äther und Materie als Resonatoren denkt, wird man niemals dazu gelangen können, eine in sich widerspruchsfreie Auffassung von dem Planckschen Strahlungsgesetz zu gewinnen. Denn man mag sich einen Resonator denken, wie man will, immer muß er nach den Gesetzen der Mechanik schwingen, muß er Energie nach Maxwellschen Gesetzen aufnehmen und ausstrahlen, und das steht von vornherein im Widerspruch mit der Existenz von Wirkungsquanten. Selbstverständlich soll die Existenz elektrischer Resonatoren in den Atomen nicht in Abrede gestellt werden. Die Gesetzmäßigkeiten des Zeemanschen Phänomens, besonders bei dem einfachen Typus, den die Heliumlinien zeigen, weisen deutlich darauf hin, daß die Sinuswellen der Serienlinien von Elektronen ausgestrahlt werden, die im Atom regelrechte Pendelschwingungen ausführen. Und zwar zeigt das Zeemansche Phänomen, daß man die Bewegungen der schwingenden Elektronen ganz nach den Gesetzen der Mechanik durch Kräfte beeinflussen kann, die den gewöhnlichen Regeln der Elektrizitätslehre gehorchen. Daraus folgt aber unumgänglich notwendig, daß die schwingenden Elektronen nach den Gesetzen der

Mechanik und der Elektrizitätslehre kontinuierlich Energie aufnehmen können und daß sie die Energie nach den Maxwellschen Gesetzen kontinuierlich wieder ausstrahlen. Will man nicht die allgemein angenommene Deutung des Zeemanschen Phänomens umstoßen, so muß man also auch zugeben, daß sich die sogenannte Quantentheorie auf die Elektronenschwingungen nicht anwenden läßt. Damit ist für diese gar nichts Absonderliches ausgesagt, denn es gibt sicher noch eine große Menge von Vorgängen, bei denen das Wirkungsquantum gar keine Rolle spielt. Man denke sich, um ein Beispiel zu nehmen, ein Kathodenstrahlenteilchen, das mit großer Geschwindigkeit zwischen den Polen eines Elektromagneten fliegt. Während das Elektron noch in dem Zwischenraum ist, werde in einem geeigneten Augenblick das Magnetfeld erregt, so daß die Bahn des Teilchens die Form eines geschlossenen Kreises annehmen muß. Nun strahlt das Teilchen eine Welle aus, die um so kürzer ist, je stärker das magnetische Feld ist. Dieses strahlende Teilchen kümmert sich natürlich gar nicht um das Wirkungsquantum, und dabei kann man für seine Schwingungszahl keine obere Grenze angeben. Wenigstens lange ultrarote Wellen kann man sich noch ganz gut in dieser Weise erzeugt denken.

Diese Überlegungen widersprechen keineswegs dem Auftreten des Wirkungsquantums beim Wärmeaustausch zwischen Materie und Äther. Sie führen nur dazu, daß wir den Elektronenschwingungen bei diesem Wärmeaustausch eine ziemlich unwesentliche Rolle zuschreiben müssen. Bekanntlich sind Resonatoren an sich, wenn sie nicht mit anderen Mechanismen verkoppelt sind, überhaupt gar nicht imstande, den Wärmeaustausch zwischen Materie und Äther zu vermitteln; denn sie absorbieren die Strahlung nicht, sie zerstreuen sie nur. Man denke sich einen Hohlraum, der mit einer vollkommen spiegelnden Wand umgeben ist, und in dem sehr viele elektrische Resonatoren verteilt sind. Läßt man in diesen Hohlraum irgendeine Strahlung eintreten, so ändern die Resonatoren an der spektralen Zusammensetzung der Strahlung gar nichts, sie führen sie nicht in die Strahlung des schwarzen Körpers über, was ein Stück wirklich absorbierende Materie im Hohlraum sofort tun würde. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß man

für das Verständnis des Wärmeaustausches zwischen Materie und Äther die Resonatoren völlig entbehren kann, daß ihre Mitwirkung bei dem Vorgang nur sekundärer Art ist und theoretisch weiter nichts als eine unnütze Komplikation bedeutet.

Wir haben nun im Abschnitt 32. die Möglichkeit einer Strahlung kennen gelernt, die nicht von Resonatoren ausgeht. Durch die dort beschriebene Explosion von Dipolen wird unmittelbar Energie der Materie in Strahlungsenergie umgewandelt. Denn ein Elementardipol ist genau so, wie ein Elektron als einer der materiellen Bausteine des Atoms aufzufassen. Er nimmt an den inneren Bewegungen im Atom teil und vermag dabei gelegentlich eine ungewöhnlich große Energieanreicherung erfahren, so daß er über seinen labilen Grenzzustand hinauskommt und explodiert. Dabei geht er und die ganze ihm innewohnende Energie in eine Impulswelle über.

Eine derartige Explosion eines Dipols hat ein genaues Analogon in dem Austritt eines Elektrons aus dem Atom. Dieser Austritt erfolgt immer dann, wenn ein Elektron eine so heftige Bewegung erlangt, daß es über eine gewisse labile Grenzlage im Atom hinausgeht. Genau so, wie die Bewegungsenergie des frei gewordenen Elektrons je nach der Heftigkeit der Bewegung, die zu dem Austritt aus dem Atomverband führt, die verschiedensten Werte annehmen kann, so wird auch die Energie der Pulswelle, die aus dem explodierenden Dipol entsteht, außerordentlich verschieden ausfallen können, je nach der Heftigkeit, mit welcher der labile Grenzzustand überschritten wird. Je heftiger der Vorgang ist, um so größer wird die Energie der Pulswelle sein, zugleich wird der Vorgang sich um so rascher abspielen und also die Impulsbreite um so kleiner sein. Setzen wir voraus, daß es nur eine einzige Art von Dipolen gibt, so gehört jedenfalls zu einer bestimmten Heftigkeit des Vorganges, also einer bestimmten Impulsbreite, immer dasselbe Energiequantum und dieses wächst mit abnehmender Impulsbreite.

*Die Strahlung, die aus explodierenden Dipolen besteht, muß quantenhaft sein, vorausgesetzt, daß es nur eine einzige Art von Elementardipolen gibt, und zwar muß das Energiequantum eines*

*Strahlungspulses um so größer sein, je kleiner die Impulsbreite ist.*

Da Elektronenemission und Dipolexplosion sehr verwandte Vorgänge sind, so ist zu erwarten, daß beide miteinander parallel gehen. In der Tat scheinen die Beobachtungen an fluoreszierenden Körpern hierauf hinzuweisen. Da die beiden Vorgänge andererseits nicht direkt kausal miteinander verknüpft sind, so ist zu erwarten, daß ihr gemeinsames Auftreten nicht durch allgemein gültige quantitative Gesetze geregelt wird.

Schwieriger als die Frage der Emission von Strahlung ist auch in der hier vertretenen Theorie die Frage nach der Absorption. Absorption muß natürlich gleichbedeutend sein mit Neubildung materieller Dipole durch Konzentration strahlender Energie. Wahrscheinlich wird man annehmen müssen, daß jedes explodierende Dipol im Atom einen Keim zurückläßt, an dem sich leicht wieder Strahlung kondensieren kann. Man wird indessen gut tun, erst dann ernstlich an die Frage der Absorption heranzutreten, wenn experimentelle Untersuchungen etwas über die Möglichkeit der Theorie der Elementardipole gelehrt, und im bejahenden Fall außerdem Material zu einer genaueren Ausarbeitung der Theorie gegeben haben.

36. Die Frage liegt nahe, was die anschauliche Deutung des Wirkungsquantums in unserer Theorie sein möge. Dazu ist zu bemerken, daß diese Deutung noch von den Details der Theorie abhängen wird, die wir zunächst ganz unbestimmt gelassen haben. Wenn wir also im folgenden unter einer bestimmten Nebenannahme, die wir der Theorie hinzufügen, eine Deutung der Größe  $h$  versuchen, so dürfen wir dabei nicht vergessen, daß eine andere Spezialisierung der Theorie zu einer anderen Deutung führen könnte. Wir machen nun also die folgende

**Nebenannahme:** *Die Impulsquelle des explodierenden Dipols hat für alle Impulsbreiten dieselbe Form.*

Die Funktion, die nach (75) zur Berechnung der Welle führt, soll also die Form haben:

$$f(r - t) = \varphi m(r - t),$$

wo  $\varphi$  eine universelle Funktion ist und  $m$  ein Faktor, der

alle möglichen Werte annehmen kann. Der Faktor  $m$  ist der Impulsbreite umgekehrt proportional.

Unter dieser Annahme kann ich den folgenden Satz beweisen:

*Die Zahl der in sich geschlossenen elektrischen Kraftlinien, die den hohlkugelförmigen Wirbelring der elektrischen Impuls-welle eines explodierenden Dipols bilden, ist eine universelle Konstante, und das Wirkungsquantum  $h$  ist nichts anderes als das Quadrat dieser Konstante, multipliziert mit einem Zahlenfaktor, der nur von der Wahl der Maßeinheiten abhängt.*

Auf der Oberfläche einer sehr großen Kugel vom Radius  $r$  berechnen sich die Feldgrößen nach (75), unter Vernachlässigung der höheren negativen Potenzen von  $r$ , wie folgt:

$$\mathfrak{d} = m^2 \cdot \frac{\varphi'' m(r-t)}{r} \cdot \sin \vartheta,$$

$$\mathfrak{h} = m^2 \cdot \frac{\varphi'' m(r-t)}{r} \cdot \sin \vartheta,$$

$\mathfrak{d}$  verläuft längs der Meridiankreise,  $\mathfrak{h}$  längs der Breitenkreise der Kugel. Durch eine Kugelzone von der Breite  $d\vartheta$ , deren Flächeninhalt  $2\pi r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$  ist, wird während der Zeit  $dt$  die Energiemenge übertragen:

$$dE = \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h} \cdot 2\pi r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt = 2\pi \cdot m^4 \cdot \varphi''^2 \cdot \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta \cdot dt.$$

Wenn nun wie auf p. 16 oben die Grenzwerte von  $r-t$ , zwischen denen die Kugelwelle eingeschlossen ist, mit  $a$  und  $b$  bezeichnet werden, so sind die Werte  $a' = m \cdot a$  und  $b' = m \cdot b$  nach unserer Nebenannahme von  $m$  unabhängig. Wir setzen weiter  $m(r-t) = \omega$ , dann ist die ganze Energie der Impuls-welle:

$$E = 2\pi \cdot m^3 \cdot \int_{b'}^{a'} \varphi''(\omega)^2 \cdot d\omega \cdot \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Setzen wir:

$$(78) \quad \int_{b'}^{a'} \varphi''(\omega)^2 \cdot d\omega = \alpha,$$

so ist  $\alpha$  eine von  $m$  unabhängige Größe und:

$$(79) \quad E = \frac{8\pi}{3} \cdot \alpha \cdot m^3.$$

Wir denken uns nun den Impuls nach dem Fourierschen Satz aus einer kontinuierlichen Folge von Sinuswellen zusammengesetzt. In ganz derselben Weise löst ein Spektroskop ihn in ein kontinuierliches Spektrum auf. Wir dürfen annehmen, daß die Form der Funktion  $\varphi$  derartig ist, daß das Spektrum des Impulses ein ziemlich schmales Band ist, dessen mittlere Wellenlänge  $\lambda$  heißen möge. Die entsprechende mittlere Schwingungszahl pro Sekunde  $\nu$  berechnet sich dann:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

und das Plancksche Strahlungsgesetz ist identisch mit dem Satze, daß:

$$E = h \cdot \nu.$$

Beachten wir nun, daß der Quotient:

$$(80) \quad \frac{m}{\nu} = \beta$$

eine Zahl ist, die nicht von der Impulsbreite abhängt, so bekommen wir aus (79):

$$(81) \quad h = \frac{8\pi}{3} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot m^2.$$

$8\pi \cdot \alpha \cdot \beta / 3$  ist ein von der Impulsbreite unabhängiger Zahlenfaktor.

Wir wollen nun weiter die Zahl der Kraftlinien berechnen, die den Wirbelring des Impulses bilden. Zu dem Zweck betrachten wir den Äquatorkreis ( $\vartheta = \pi/2$ ). Durch ihn tritt während der Zeit  $dt$  eine Zahl  $dn$  von elektrischen Kraftlinien senkrecht hindurch, die sich einfach zu:

$$dn = 2\pi r \cdot b \cdot dt = 2\pi \cdot m^2 \cdot \varphi'' \cdot dt$$

berechnet.

Lassen wir nun das Argument  $\omega$  der Funktion  $\varphi''$  von  $b'$  an, wo sie noch Null ist und eben von Null verschiedene Werte anzunehmen beginnt, wachsen, so müssen wir schließlich zu einem Wert des Argumentes  $c'$  kommen, wo sich das Vorzeichen von  $\varphi''$  umkehrt, um dann an der anderen Grenze in  $a'$  wieder Null zu werden.  $c'$  ist wie  $a'$  und  $b'$  von der Impulsbreite unabhängig, ebenso also auch das Integral:

$$(82) \quad \int_{b'}^{c'} \varphi''(\omega) \cdot d\omega = - \int_{c'}^{a'} \varphi''(\omega) \cdot d\omega = \gamma.$$

Die gesamte Zahl der Linien, die den elektrischen Kraftwirbel bilden, ist:

$$(83) \quad n = 2\pi\gamma \cdot m.$$

Durch Kombination von (81) und (83) ergibt sich schließlich:

$$(84) \quad h = C \cdot n^2, \quad C = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma^2}.$$

$C$  ist ein von der Impulsbreite unabhängiger Zahlenfaktor. Damit ist der Satz bewiesen.

Nach dieser Auffassung ist das Wirkungsquantum oder, genauer gesagt, die Quadratwurzel aus dem Wirkungsquantum eine Größe, die dem Elementarquantum der elektrischen Ladung vollkommen analog ist. So wie das letztere die Zahl der Kraftlinien angibt, die im Elektron in Form einer Knotenstelle endigen, so stellt  $\sqrt{h}$  die Zahl der Kraftlinien dar, die in Form eines Knäuels den Dipol bilden, wenigstens nach seiner Explosion. Es ist vielleicht von Interesse, diese beiden Zahlen miteinander zu vergleichen. Allerdings kommt in (84) noch ein unbekannter Zahlenfaktor  $C$  vor, der für jede Form der Funktion  $\varphi$  anders sein wird. Um wenigstens eine Vorstellung von der Größenordnung der Zahl  $n$  zu haben, wollen wir eine ganz bestimmte Funktion einsetzen, und zwar das schon auf p. 16 erwähnte Beispiel (77), also:

$$\varphi'' = -a \cdot \sin m(r - t).$$

Dann berechnet sich die Konstante  $C$  der Gleichung (84) zu:

$$C = \frac{\pi}{3 \cdot c},$$

wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeuten soll. Dabei ist nun aber die Zahl  $n$  in dem nur in der Theorie gebräuchlichen elektrostatischen Maßsystem gerechnet, aus welchem der bekannte Faktor  $4\pi$  entfernt ist ( $\mathfrak{d} = e$ ,  $\text{div } \mathfrak{d} = \varrho$ ). Rechnen wir die Zahl der Kraftlinien um in die praktische Einheit Coulomb, und bezeichnen wir sie alsdann mit  $N$ , so haben wir zu setzen:

$$N = \frac{10}{c \cdot \sqrt{4\pi}} \cdot n$$

und die Gleichung (84) lautet nun so:

$$h = \frac{4\pi^2 \cdot c}{300} \cdot N^2.$$

Setzen wir den Wert von  $h$  ein:  $h = 65,5 \cdot 10^{-28}$ , so ergibt sich:

$$N = 129 \cdot 10^{-20} \text{ Coulomb.}$$

Das Elementarquantum der elektrischen Ladung ist:

$$e = 15,6 \cdot 10^{-20} \text{ Coulomb.}$$

Bei der speziellen Annahme  $\varphi'' = a \cdot \sin m(r - t)$  ergibt sich also die Zahl der elektrischen Kraftlinien, die das Wirbelknäuel eines Elementardipols bilden, als ziemlich genau das Achtfache des elektrischen Elementarquantums. Jedenfalls liegen die beiden Größen  $N$  und  $e$  ungefähr in demselben Größengebiet, und  $N$  ist größer als  $e$ .

## Fünftes Kapitel.

### Die Gravitation.

#### Die erweiterten Grundgleichungen der Ätherdynamik.

37. Wir haben auf p. 5 gesehen, daß der von uns angenommene Kohäsionsdruck der elektrischen Ladungen zusammen mit dem elektromagnetischen Felde immer noch nicht ausreicht, um alle Kraftwirkungen in der materiellen Welt zu erklären. Es fehlt noch die Gravitation, und wir sind nun gezwungen, das System der fundamentalen Größen, in das wir (I. p. 513) zunächst so wenig Größen als irgend möglich aufgenommen haben, nämlich nur den Sechservektor  $(\mathfrak{h}, -i \cdot \mathfrak{b})$  und den Vierervektor  $(\mathfrak{v}, i \rho)$ , zu erweitern.

Das nächstliegende wäre, die Gravitation aufzufassen als eine der Energie an sich innewohnende Kohäsionswirkung. Wenn wir aber an der Gültigkeit des Relativitätsprinzips festhalten wollen, so können wir die Energie nicht für sich allein in die erweiterten Gleichungen eingehen lassen, denn die Energiedichte ist in der Relativitätstheorie das letzte Glied der Weltmatrix (vgl. I. p. 525, Gleichung (16)), es müßte also schon die ganze Matrix als solche in die Gleichungen eintreten. Versucht man die Matrix mit irgend einer anderen vierdimensionalen Größe durch vierdimensionale Differentialoperatoren zu verknüpfen, um auf diese Weise Gleichungen zu erhalten, die sowohl dem Kausalitätsprinzip (I. p. 514) als auch dem Energieprinzip (I. p. 521) genügen, so stößt man auf unüberwindliche Schwierig-

keiten. Ich habe mich lange mit solchen Versuchen, die immer zu recht umständlichen Gleichungssystemen führen, abgemüht und ich bin überzeugt, daß es auf diese Weise ganz unmöglich ist, eine Theorie der Gravitation zu gewinnen, die sowohl dem Relativitätsprinzip, als auch dem Energieprinzip gehorcht.

Dagegen kommt man außerordentlich leicht und einfach zum Ziel, wenn man nicht der Größe  $W$ , sondern der Größe  $H$ , die in I. auf p. 523 durch Gleichung (7) als  $H = W - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{f}$  definiert ist, das Kohäsionsbestreben zuschreibt. Solange die Geschwindigkeiten der materiellen Elementarpartikelchen gegen die Lichtgeschwindigkeit klein sind, wird es experimentell nicht zu unterscheiden sein, ob  $W$  oder ob  $H$  für die Schwerewirkung maßgebend ist. Nach Gleichungen (69) und (70) ist nämlich für ein bewegtes Massenteilchen:

$$\int H \cdot dV = \sqrt{1 - q^2} \cdot E_0,$$

$$\int W \cdot dV = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \cdot E_0,$$

wo die Integrale über das von dem Teilchen erfüllte Volumen zu erstrecken sind und wo  $E_0$  die Energie des ruhenden Teilchens,  $q$  seine Geschwindigkeit im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Man sieht also, daß sich die beiden Integrale praktisch nicht merklich unterscheiden.

Nun ist die Größe  $H$  aber ein vierdimensionaler Skalar, und auf diesen läßt sich der Differentialoperator nur in einer einzigen Weise anwenden, er liefert einen Vierervektor, den Gradienten des Skalars. Umgekehrt kann man auch den Vierervektor dadurch mit einem Skalar verknüpfen, daß man auf ihn die Operation „Divergenz“ anwendet. Dagegen läßt sich ein Sechservektor durch vierdimensionale Differentialoperationen erster Ordnung nicht mit einem Skalar in Verbindung bringen. Daraus folgt:

*Das Gravitationsfeld muß notwendigerweise durch einen Vierervektor dargestellt werden, nicht durch einen Sechservektor.*

Dieser Satz beruht allerdings auf der Voraussetzung, daß die gravitierende Masse durch einen vierdimensionalen Skalar,

nämlich die Größe  $H$  zu berechnen ist. Anders wäre es, wenn die Dichte der gravitierenden Masse die vierte Komponente eines Vierervektors wäre, wie die Dichte der elektrischen Ladung. Dann würde das Gravitationsfeld ähnlich wie das elektromagnetische Feld einen Sechservektor erfordern. Soviel ich sehe, ist es aber unmöglich, einen Vierervektor zu finden, dessen vierte Komponente angenähert gleich der Energiedichte wäre, und die Theorien der Gravitation, welche, wie die von O. Heaviside<sup>1)</sup>, H. A. Lorentz<sup>2)</sup>, R. Gans<sup>3)</sup>, das Gravitationsfeld ebenso behandeln wie das elektromagnetische, können daher entweder nicht mit dem Relativitätsprinzip zusammenstimmen, oder die schwere Masse kann in ihnen nicht gleich der trägen Masse sein.

Um nun die Gleichungen des Gravitationsfeldes aufzustellen, verfahren wir genau ebenso, wie bei der Aufstellung der elektromagnetischen Grundgleichungen in I, Abschnitt 2. bis 5. Wir nehmen an, daß zur vollständigen Beschreibung der materiellen Welt außer dem Sechservektor  $(\mathfrak{h}, -i \cdot \mathfrak{b})$  und dem Vierervektor  $(\mathfrak{v}, i \rho)$  noch ein zweiter Vierervektor  $(\mathfrak{g}, i u)$  und ein Skalar  $\omega$  notwendig sind. Diesem Größensystem geht ein zweites parallel, das vollständig bestimmt ist, wenn alle Größen des ersten Systems gegeben sind. Wir kennen von dem zweiten System schon den Sechservektor  $(\mathfrak{h}; -i \epsilon)$ , den Vierervektor  $(\mathfrak{f}, i \varphi)$ , die nun allerdings nicht nur von  $(\mathfrak{h}, -i \mathfrak{b})$  und  $(\mathfrak{v}, i \rho)$ , sondern auch noch von  $(\mathfrak{g}, i u)$  und  $\omega$  abhängen. Wir müssen ferner noch hinzufügen einen Vierervektor  $(\mathfrak{f}, i w)$  und einen Skalar  $H$ , die  $(\mathfrak{g}, i u)$  und  $\omega$  entsprechen. Der Skalar  $H$  soll im wesentlichen identisch sein mit der in I. p. 523 definierten Größe. Jedoch hängt er ebenso wie die Energiedichte  $W$  nicht nur von  $(\mathfrak{h}, -i \mathfrak{b})$  und  $(\mathfrak{v}, i \rho)$ , sondern auch noch von den Größen des Gravitationsfeldes, also  $(\mathfrak{g}, i u)$  und  $\omega$  ab, und die Beziehung (7) wird dementsprechend noch eine kleine Änderung erfahren müssen. Wir wenden nun auf  $(\mathfrak{g}, i u)$  und  $\omega$  die eine der beiden möglichen vierdimensionalen Vektoroperationen an und auf  $(\mathfrak{f}, i w)$  und  $H$  die andere. Auf diese Weise erhalten wir die einzig mögliche Form für die Ge-

1) O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* 1. p. 455. 1894.

2) H. A. Lorentz, *Versl. Kon. Ak. Wet. Amsterdam* 8. p. 603. 1900.

3) R. Gans, *Physik. Zeitschr.* 6. p. 803. 1905.

setze der Gravitation, die mit dem Relativitätsprinzip im Einklang ist:

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ g_y = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ g_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \\ u = -\frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{array} \right.$$

$$(86) \quad \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\gamma \cdot H.$$

Hier soll  $\gamma$  eine universelle Konstante bedeuten. Die Gleichungen (85) sind äquivalent mit den folgenden:

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial g_y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial g_z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

$$(88) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -u.$$

Die Gleichungen (86), (87), (88) bilden zusammen ein System von fünf voneinander unabhängigen Gleichungen, deren jede einen ersten Differentialquotienten einer der fünf neuen Zustandsgrößen nach der Zeit enthält. Das Kausalitätsprinzip ist demnach erfüllt.

*Das vollständige System der Grundgleichungen der Ätherphysik mit Einschluß der Gravitationswirkungen wird gebildet durch die Gleichungen: (1), (2), (3), (4), (86), (87), (88).*

In den Symbolen der vierdimensionalen Vektoranalysis kann man die Gleichungen (85) bis (88) auch so schreiben:

$$(g, iu) = \Gamma \rho \alpha \delta \omega,$$

$$\text{Div}(f, iw) = -\gamma \cdot H,$$

$$\text{Rot}(g, iu) = 0.$$

Das Gleichungssystem (85) und (86) würde formell mit dem übereinstimmen, das M. Abraham<sup>1)</sup> seiner Theorie der Gravitation zugrunde legt, wenn man die beiden Vektoren  $(g, iu)$  und  $(f, iw)$  einander gleich setzen wollte. M. Abraham geht in seiner Theorie von der Voraussetzung aus, daß die Dichte der gravitierenden Masse (die er  $\nu$  nennt) ein vierdimensionaler Skalar ist, und da er sich in der zitierten Arbeit noch der Methoden der Relativitätstheorie bediente, so mußte er zu diesem Gleichungssystem kommen, welches das einzige ist, das die Relativitätstheorie liefern kann.

38. Es fragt sich nun vor allem, ob auch nach dem Hinzukommen der Gleichungen (86), (87), (88) das Prinzip der Energie erfüllt ist. Wir werden also die Gleichungen (87) mit den Komponenten eines dreidimensionalen Vektors, sagen wir  $a$ , multiplizieren, ebenso Gleichung (86) mit einem dreidimensionalen Skalar  $s$ , und addieren. Die Glieder, die Differentialquotienten nach den Koordinaten enthalten, sind dann:

$$a_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + s \cdot \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right).$$

Damit dieser Ausdruck eine Divergenz darstellt, muß sein:  $a = f$ ,  $s = u$ . Wir haben somit als letzten Teil der Energiegleichung gefunden:

$$\operatorname{div}(u \cdot f) + f \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial t} - \gamma \cdot H \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0,$$

wobei in dem letzten Summanden für  $u$  nach Gleichung (88) der Wert  $\partial w / \partial t$  eingesetzt ist.

Mit Hinzunahme der Gravitationswirkungen ergibt sich also an Stelle von I. Gleichung (5) auf p. 522 als der *gesamte Energiestrom*:

$$(89) \quad \mathfrak{E} = [e \cdot h] - q \cdot v + u \cdot f$$

weiter als die *gesamte Änderung der Energiedichte*:

$$(90) \quad dW = e \cdot db + h \cdot db - q \cdot dq - v \cdot df + f \cdot dg + u \cdot dw - \gamma \cdot H \cdot d\omega.$$

Die Funktion  $H$  muß nun anstatt durch Gleichung (7) in I. p. 523 durch folgende Gleichung definiert werden:

$$(91) \quad W = H + h \cdot b - v \cdot f + u \cdot w.$$

1) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. p. 1. 1912.

Aus (90) folgt dann:

$$(92) \quad dH = e \cdot d\mathfrak{b} - \mathfrak{b} \cdot d\mathfrak{h} - \varphi \cdot d\rho + \mathfrak{f} \cdot dv + \mathfrak{f} \cdot dg - w \cdot du - \gamma \cdot H \cdot d\omega.$$

Da  $H$  eine Funktion von den folgenden Variablen ist: ( $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\rho$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $u$ ,  $\omega$ ), so haben wir also:

$$(93) \quad \begin{cases} e = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{b}}, & \mathfrak{b} = -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{h}}, & \varphi = -\frac{\partial H}{\partial \rho}, & \mathfrak{f} = \frac{\partial H}{\partial v}, \\ \mathfrak{f} = \frac{\partial H}{\partial g}, & w = -\frac{\partial H}{\partial u}, & \frac{\partial H}{\partial \omega} = -\gamma \cdot H. \end{cases}$$

Aus der letzten der Gleichungen (93) geht hervor, daß:

$$(94) \quad H = e^{-\gamma \omega} \cdot H'(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \rho, v, g, u).$$

Wenn wir nun definieren:

$$(95) \quad \begin{cases} e' = \frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{b}}, & \mathfrak{b}' = -\frac{\partial H'}{\partial \mathfrak{h}}, & \varphi' = -\frac{\partial H'}{\partial \rho}, & \mathfrak{f}' = \frac{\partial H'}{\partial v}, \\ \mathfrak{f}' = \frac{\partial H'}{\partial g}, & w' = -\frac{\partial H'}{\partial u}, \end{cases}$$

wo die gestrichenen Größen alle nur von ( $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\rho$ ,  $v$ ,  $g$ ,  $u$ ), aber nicht von  $\omega$  abhängen, so ist:

$$(96) \quad \begin{cases} e = e^{-\gamma \omega} \cdot e', & \mathfrak{b} = e^{-\gamma \omega} \cdot \mathfrak{b}', & \varphi = e^{-\gamma \omega} \cdot \varphi', \\ \mathfrak{f} = e^{-\gamma \omega} \cdot \mathfrak{f}', & \mathfrak{f} = e^{-\gamma \omega} \cdot \mathfrak{f}', & w = e^{-\gamma \omega} \cdot w'. \end{cases}$$

Wenn die Gleichungen (93) erfüllt sind, so gilt auch für die erweiterten Grundgleichungen das Energieprinzip, und wenn in  $H$  alle Variablen nur in Kombinationen vorkommen, die für die Lorentzsche Transformation invariant sind, so gilt auch das Relativitätsprinzip.

*Es ist somit gelungen, eine Theorie der Gravitation aufzustellen, in der sowohl das Energieprinzip, als auch das Relativitätsprinzip gültig ist.*

Gerade auf das letzte möchte ich besonders Gewicht legen, da in der hier vertretenen Theorie der Materie ein Ansatz, der dem Relativitätsprinzip widerspräche, ohne weiteres zu verwerfen wäre. M. Abraham vertritt in seinen Arbeiten über Gravitation den Standpunkt<sup>1)</sup>, daß Gravitation und Rela-

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 38. p. 1056. 1912.

tivitätstheorie nicht miteinander vereinbar seien. Wäre das der Fall, so müßte man daraus die Folgerung ziehen, daß die Gravitation eine sozusagen rein äußerliche Kraft ist, die an der Existenz der Materie selbst unbeteiligt ist. Denn gehörte sie, wie ich hier annehme, zu den Kräften, die die Form der materiellen Elementarteilchen und den ganzen inneren Bau der Atome wesentlich bestimmen, und würde sie dem Relativitätsprinzip nicht gehorchen, dann wäre es undenkbar, daß die Elementarteilchen der Materie und die Kraftwirkungen, die sie zu Atomen, zu Molekülen, zu greifbaren Körpern verbinden, bei einer Bewegung der Materie durch den Raum ganz allgemein just die Veränderungen erlitten, die zu der durch den Michelsonschen Versuch erwiesenen Kontraktion der Materie führen. Andererseits glaube ich aber auch, daß man auf sehr große Schwierigkeiten stoßen würde, wenn man die Gravitation als eine Wirkung behandeln wollte, die bei den innersten Vorgängen in den Atomen keine bemerkbare Rolle spielte, und ich glaube daher, daß man den Standpunkt M. Abrahams aufgeben muß, sobald man die Theorie der Gravitation nicht losgelöst von der Theorie der Materie behandelt. Es scheint mir deswegen sehr wichtig zu sein, daß man in einer so einfachen Weise Gravitation und Relativitätstheorie miteinander verbinden kann, wie wir es eben getan haben.

Es sei noch bemerkt, daß auch in der durch die Gleichungen (86), (87), (88) erweiterten Ätherdynamik das *Hamiltonsche Prinzip* in der Form, wie wir es in I, Abschnitt 10. kennen gelernt haben, gültig ist. Der Beweis bietet keinerlei Schwierigkeiten.

#### Die Invarianten.

39. Die Zahl der Invarianten wird durch das Hinzutreten der Gravitationsgrößen beträchtlich vermehrt. Es kommen nämlich, abgesehen von dem Gravitationspotential  $\omega$ , noch vier weitere Größen zu den vier in I. auf p. 531 gefundenen Größen (24) hinzu, die Funktion  $H'$  in (94) kann also möglicherweise von *acht* unabhängigen Variablen abhängen. Man kann dazu die folgenden Kombinationen der Zustandsvariablen nehmen:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{h}^2, \\ q = (\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h}), \\ \sigma = \sqrt{\varrho^2 - \mathfrak{v}^2}, \\ s = (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{d}])^2 - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h})^2, \\ \kappa = \sqrt{g^2 - u^2}, \\ \mathfrak{k} = (u \cdot \mathfrak{h} - [g \cdot \mathfrak{d}])^2 - (g \cdot \mathfrak{h})^2, \\ h = (g \cdot \mathfrak{v}) - u \cdot \varrho, \\ \mathfrak{b} = (\varrho \cdot \mathfrak{h} - [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{d}]) \cdot (u \cdot \mathfrak{h} - [g \cdot \mathfrak{d}]) - (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}) \cdot (g \cdot \mathfrak{h}). \end{array} \right.$$

Mit den Methoden der vierdimensionalen Vektoranalysis läßt sich der Beweis führen, daß alle anderen Invarianten sich aus diesen acht Größen berechnen lassen. Ich möchte diesen Beweis aber hier nicht wiedergeben.

Ebenso möchte ich die Formeln, die analog den Formeln (25) in I. p. 531 nun zur Berechnung der Größen  $\epsilon'$ ,  $\mathfrak{b}'$ ,  $\varphi'$ ,  $f'$ ,  $w'$ ,  $\mathfrak{k}'$  aus der Funktion  $H'$  führen, hier nicht herschreiben, da sie sich ganz leicht ergeben.

#### Die Differentialgleichung des Elektrons.

40. Invarianten für die Lorentzsche Transformation sind natürlich auch die folgenden Größen:

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot \mathfrak{d} - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h} &= e^{-\gamma \omega} \cdot (\epsilon' \cdot \mathfrak{d} - \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{h}), \\ \varphi \cdot \varrho - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} &= e^{-\gamma \omega} \cdot (\varphi' \cdot \varrho - \mathfrak{f}' \cdot \mathfrak{v}), \\ \mathfrak{k} \cdot g - w \cdot u &= e^{-\gamma \omega} \cdot (\mathfrak{k}' \cdot g - w' \cdot u). \end{aligned}$$

Es ist für manche Zwecke bequemer, an Stelle der Funktion  $H$  andere Funktionen zu nehmen, die sich von ihr nur durch einen Summanden unterscheiden, der aus den eben hingeschriebenen Größen gebildet wird. Wir wollen nun genau wie I. p. 524 definieren:

$$(98) \quad \Phi = H - (\epsilon \cdot \mathfrak{d} - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h}) + (\varphi \cdot \varrho - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v}).$$

Wir können auch setzen:

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = e^{-\gamma \omega} \cdot \Phi', \\ \Phi' = H' - (\epsilon' \cdot \mathfrak{d} - \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{h}) + (\varphi' \cdot \varrho - \mathfrak{f}' \cdot \mathfrak{v}), \end{array} \right.$$

wo also  $\Phi'$  eine Größe ist, die nur von den Variablen  $\mathfrak{d}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\varrho$ ,  $\mathfrak{v}$ ,  $g$ ,  $u$  abhängt, aber nicht von  $\omega$ . Da sich  $(\epsilon', \mathfrak{b}', \varphi', \mathfrak{f}')$

aus den Variablen ( $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\varrho$ ,  $\mathfrak{v}$ ,  $g$ ,  $u$ ) berechnen lassen, so kann man auch umgekehrt ( $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\varrho$ ,  $\mathfrak{v}$ ) aus ( $\epsilon'$ ,  $\mathfrak{b}'$ ,  $\varphi'$ ,  $\mathfrak{f}'$ ,  $g$ ,  $u$ ) berechnen und man darf daher  $\Phi'$  als eine Funktion dieses neuen Systems von Variablen betrachten:

$$(100) \quad \Phi = e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot \Phi'(\epsilon', \mathfrak{b}', \varphi', \mathfrak{f}', g, u).$$

Nun folgt aus (99) und (95):

$$d\Phi' = -\mathfrak{b} \cdot d\epsilon' + \mathfrak{h} \cdot d\mathfrak{b}' + \varrho \cdot d\varphi' - \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{f}' + \mathfrak{f} \cdot dg - w' \cdot du,$$

also:

$$(101) \quad \begin{cases} \mathfrak{b} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial \epsilon'}, & \mathfrak{h} = \frac{\partial \Phi'}{\partial \mathfrak{b}'}, & \varrho = \frac{\partial \Phi'}{\partial \varphi'}, & \mathfrak{v} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial \mathfrak{f}'}, \\ & \mathfrak{f} = \frac{\partial \Phi'}{\partial g}, & w' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial u}. \end{cases}$$

In dem Falle eines ruhenden Elektrons sind die Größen  $\mathfrak{b}'$ ,  $\mathfrak{f}'$ ,  $u$  konstant gleich Null zu setzen und die übrigen drei hängen nur von der Entfernung  $r$  vom Zentrum ab. Ich setze:

$$(102) \quad \begin{cases} X = \epsilon' = -e + \gamma \omega \cdot \frac{d\varphi}{dr}, \\ Y = \varphi' = e + \gamma \omega \cdot \varphi, \\ Z = g = \frac{d\omega}{dr}. \end{cases}$$

Wir haben also eine Funktion  $\Phi'$  von nur noch drei Variablen:

$$\Phi'(X, Y, Z).$$

Da aber außerdem:

$$X = -\frac{dY}{dr} + \gamma \cdot Y \cdot Z,$$

so haben wir in Wirklichkeit nur noch zwei unbekannte Variablen  $Y$  und  $Z$  und die Ableitung der einen  $dY/dr$  in  $\Phi'$ .

Für diese beiden unbekannten Variablen  $Y$  und  $Z$  haben wir dann die folgenden zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot \mathfrak{b}) &= \varrho, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot \mathfrak{f}) &= -\gamma \cdot H, \end{aligned}$$

oder:

$$(103) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial X} \right) + \frac{\partial \Phi'}{\partial Y} = 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} \right) + \gamma \cdot \left( \Phi' - X \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial X} - Y \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial Y} - Z \cdot \frac{\partial \Phi'}{\partial Z} \right) = 0. \end{cases}$$

Durch diese beiden Gleichungen ist Gleichung (34) in II. p. 15 zu ersetzen, wenn man das Problem des Elektrons mit Berücksichtigung der Gravitation diskutieren will. Übrigens kann man auch nach dem gewöhnlichen Verfahren der Differentialrechnung die unbekannte  $Z$  und ihre Ableitungen aus den beiden Gleichungen eliminieren. Man bekommt alsdann eine Gleichung dritter Ordnung für die Unbekannte  $Y = e^{\gamma \omega} \cdot \varphi$ , während (34) eine Gleichung zweiter Ordnung für  $\varphi$  war.

### Die Weltmatrix.

41. Die im vorigen Abschnitt definierte Weltfunktion  $\Phi$  können wir wie früher (I. p. 525) zur Aufstellung der Weltmatrix benutzen. Nach Gleichung (98) und (91) ist nämlich:

$$(104) \quad W = \Phi + e \cdot d - \varphi \cdot \varrho + u \cdot w.$$

Die Weltmatrix läßt sich nun nach genau demselben Schema aufbauen wie in Gleichung (16), indem wir einfach den Gravitationsvierervektor noch hinzunehmen:

$$(105) \quad \left| \begin{array}{l} \Phi - b \cdot h + e_x d_x + h_x b_x + f_x v_x - g_x f_x, \\ e_x d_y + h_x h_y + f_x v_y - g_x f_y, \quad e_x d_z + h_x b_z + f_x v_z - g_x f_z, \\ \quad - i \cdot (d_y b_z - d_z b_y - f_x \cdot \varrho + g_x \cdot w), \\ e_y d_x + h_y b_x + f_y v_x - g_y f_x, \\ \Phi - b \cdot h + e_y d_y + h_y b_y + f_y v_y - g_y f_y, \\ e_y d_z + h_y b_z + f_y v_z - g_y f_z, \quad - i \cdot (d_z b_x - d_x b_z - f_y \cdot \varrho + g_y \cdot w), \\ e_z d_x + h_z b_x + f_z v_x - g_z f_x, \quad e_z d_y + h_z b_y + f_z v_y - g_z f_y, \\ \Phi - b \cdot h + e_z d_z + h_z b_z + f_z v_z - g_z f_z, \\ \quad - i \cdot (d_x b_y - d_y b_x - f_z \cdot \varrho + g_z \cdot w), \\ \quad - i \cdot (e_y h_z - e_z h_y - v_x \cdot \varphi + f_x \cdot u), \\ \quad - i \cdot (e_z h_x - e_x h_z - v_y \cdot \varphi + f_y \cdot u), \\ \quad - i \cdot (e_x h_y - e_y h_x - v_z \cdot \varphi + f_z \cdot u), \quad \Phi + e \cdot d - \varphi \cdot \varrho + u \cdot w. \end{array} \right|$$

Wendet man auf diese Matrix die Operation  $\Delta \iota v$  an, so liefert die vierte Reihe das Energieprinzip, die drei ersten Reihen werden zu den Bewegungsgleichungen eines materiellen Teilchens führen.

Durch ganz elementare Rechenoperationen, die nur wenig umständlicher sind als die in Abschnitt 25. erwähnten, kann man auch für den allgemeinsten Fall, daß in  $H$  die sämtlichen Variablen (97) vorkommen, die Gleichungen beweisen:

$$(106) \quad [e \cdot b] + [h \cdot b] + [f \cdot v] + [f \cdot g] = 0,$$

$$(107) \quad [e \cdot h] + [b \cdot b] + (\varrho \cdot f - \varphi \cdot v) + (u \cdot f - w \cdot g) = 0,$$

welche die Verallgemeinerung der Gleichungen (54) und (55) sind. Es ist also:

$$e_x \cdot b_y + h_x \cdot b_y + f_x \cdot v_y - g_x \cdot f_y = b_x \cdot e_y + h_x \cdot h_y + v_x \cdot f_y - f_x \cdot g_y \text{ usw.}$$

$$b_y \cdot b_x - b_z \cdot b_y - \varrho \cdot f_x + w \cdot g_x = e_y \cdot h_z - e_z \cdot h_y - \varphi \cdot v_x + u \cdot f_x \text{ usw.}$$

*Die Weltmatrix (105) ist symmetrisch zur Diagonale.*

**Berechnung der auf ein Massenteilchen wirkenden Kraft.**

42. Um die ponderomotorische Kraft für ein Massenteilchen zu berechnen, verfahren wir genau wie in 26. Wir betrachten ein Volumen  $V$ , in welchem das Massenteilchen enthalten ist, und das einerseits so groß ist, daß auf der Oberfläche  $S$  schon das im Vakuum geltende Gesetz der Superposition erfüllt ist, andererseits aber so klein, daß man das weit ausgedehnte Feld, welches die Kraftwirkung verursacht, in seinem Innern in guter Näherung als homogen ansehen darf, wenn man sich das Teilchen wegdenkt.

Für die Gravitationswirkungen sagt das Superpositionsprinzip aus, daß die Differentialgleichungen (86) und (87) in  $g$  und  $u$  linear sind. Es muß demnach die Bedingung erfüllt sein:

*Im Vakuum unterscheiden sich  $(g, i u)$  und  $(f, i w)$  nur durch einen konstanten Faktor.*

Der Proportionalitätsfaktor hängt nur davon ab, wie wir die Einheiten definieren.<sup>1)</sup> Wir wollen festsetzen, daß im Vakuum:

$$(108) \quad g = f.$$

1) Um von dem Faktor  $e^{-\gamma \omega}$  absehen zu dürfen, nehmen wir an, daß das Gravitationspotential  $\omega$  so klein ist, daß man  $e^{-\gamma \omega}$  nicht von 1 unterscheiden kann. Wir werden in 47. erkennen, daß diese Annahme die allgemeine Gültigkeit der Beweise nicht einschränkt.

Die Weltfunktion  $\Phi$  muß demnach auf der Oberfläche  $S$  des betrachteten Volumens  $V$  in der Form:

$$(109) \quad \Phi = \frac{1}{2} \cdot (b^2 - c^2) + \frac{1}{2}(g^2 - u^2) + \Phi_1$$

darzustellen sein, wo  $\Phi_1$  als verschwindend klein weggelassen werden kann, und zwar mit einem um so kleineren Fehler, je größer man  $V$  nimmt.

Es sei  $\mathfrak{s}$  der Energiestrom, dann ist der Wert des in  $V$  enthaltenen Bewegungsimpulses  $\mathfrak{G}$  gegeben durch:

$$\mathfrak{G} = \int_V \mathfrak{s} \cdot dV.$$

Die träge Masse  $M$ , die im Volumen  $V$  enthalten ist, beträgt:

$$M = \int_V W \cdot dV,$$

wo  $W$  die Energiedichte bedeutet. Die Geschwindigkeit  $q$  des betrachteten Teilchens ist also:

$$q = \frac{\mathfrak{G}}{M}.$$

Dann berechnet sich die auf das Teilchen wirkende Kraft  $\mathfrak{P}$  als:

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} \cdot dV + \int_V (q \cdot \nabla) \mathfrak{s} \cdot dV.$$

Hier bedeutet der erste Summand der rechten Seite die zeitliche Änderung des Bewegungsimpulses in dem ruhenden Volumen  $V$ , in welchem sich das Teilchen voranbewegt, also  $\mathfrak{s}$  sich ändert, der zweite Summand die Änderung des Bewegungsimpulses, die man im Volumen  $V$  berechnet, wenn man das Teilchen in Ruhe und  $\mathfrak{s}$  ungeändert sein läßt, aber  $V$  mit der Geschwindigkeit  $q$  verschiebt. Beide zusammen ergeben die zeitliche Änderung von  $\mathfrak{G}$  in einem mit dem Teilchen fest verbundenen und mitbewegten Volumen  $V$ .

Wir setzen nun für  $\partial \mathfrak{s} / \partial t$  die nach Gleichung (58) zu berechnenden Werte ein und bekommen durch eine einmalige Integration (vgl. Gleichung (62)):

$$\mathfrak{P} = \int_S v_N \cdot dS + \int_S \mathfrak{s} \cdot q \cdot dS \cdot (N, q).$$

Da auf  $S$  das Superpositionsprinzip gilt, so sind die Komponenten von  $p_N$  sowohl wie von  $\mathfrak{s}$  Ausdrücke zweiten Grades in den Zustandsgrößen, und zwar setzt sich  $\mathfrak{p}$  additiv zusammen aus einem Ausdruck, der nur die elektromagnetischen Feldgrößen enthält, der Kraft des elektromagnetischen Feldes, und einem Ausdruck, der nur die Gravitationsgrößen  $g$  und  $u$  enthält, der auf das Teilchen wirkenden Gravitationskraft. Da der erste uns bekannt ist, interessiert uns hier nur noch der zweite. Wir rechnen also mit:

$$\begin{aligned} p_{1x} &= -\frac{1}{2}(g_x^2 - g_y^2 - g_z^2) - \frac{1}{2}u^2, \\ p_{1y} &= -g_x \cdot g_y, \\ p_{1z} &= -g_x \cdot g_z, \\ \mathfrak{s}_x &= g_x \cdot u. \end{aligned}$$

Ausdrücken, die sich aus der Matrix (105) ergeben, wenn man  $f = g$ ,  $u = w$  und für  $\Phi$  den Wert (109) nimmt, wenn man ferner alle Glieder mit  $b$  und  $c$  wegläßt.

Wir können uns nun ferner die einzelnen Komponenten der Zustandsgrößen nach dem Superpositionsprinzip additiv zusammengesetzt denken aus je zwei Größen, einer, die dem Eigenfeld des Teilchens entspricht und die wir mit dem Index 0 bezeichnen wollen, und der Größe des weit ausgedehnten Feldes, in welchem sich das Teilchen bewegt, der wir den Index 1 geben wollen:

$$g = g_0 + g_1, \quad u = u_0 + u_1.$$

Wir bekommen für die Tensorkomponenten  $p$  und für die Komponenten von  $\mathfrak{s}$  Summen von je drei Ausdrücken, von denen sich der erste nur aus Größen mit dem Index 0, der zweite aus Größen mit verschiedenen Indizes, der dritte aus Größen mit dem Index 1 zusammensetzt:

$$\begin{aligned} p_{1x} &= -\frac{1}{2} \cdot (g_{x0}^2 - g_{y0}^2 - g_{z0}^2 + u_0^2) \\ &\quad - (g_{x0} \cdot g_{x1} - g_{y0} \cdot g_{y1} - g_{z0} \cdot g_{z1} + u_0 \cdot u_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (g_{x1}^2 - g_{y1}^2 - g_{z1}^2 + u_1^2), \\ p_{1y} &= -g_{x0} \cdot g_{y0} - (g_{x1} \cdot g_{y0} + g_{x0} \cdot g_{y1}) - g_{x1} \cdot g_{y1}, \\ p_{1z} &= -g_{x0} \cdot g_{z0} - (g_{x1} \cdot g_{z0} + g_{x0} \cdot g_{z1}) - g_{x1} \cdot g_{z1}, \\ \mathfrak{s}_x &= u_0 \cdot g_{x0} + (u_1 \cdot g_{x0} + u_0 \cdot g_{x1}) + u_1 \cdot g_{x1}. \end{aligned}$$

Dementsprechend zerfällt auch  $\mathfrak{P}$  in drei Summanden, die man durch  $\mathfrak{P}_{00}$ ,  $\mathfrak{P}_{01}$ ,  $\mathfrak{P}_{11}$  bezeichnen könnte.  $\mathfrak{P}_{00}$  würde man erhalten, wenn man das ausgedehnte Feld, in welchem sich das Teilchen bewegt, gleich Null setzt ( $g_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ). Da nun das eigene Feld des Teilchens mit sich im inneren Gleichgewicht ist, so kann das Teilchen sich in einem Raum ohne Feld ( $g_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ) nur mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, es ist demnach  $\mathfrak{P}_{00} = 0$ . Genau ebenso ergibt sich  $\mathfrak{P}_{11} = 0$ . Es bleiben also zur Berechnung von  $\mathfrak{P}$  nur die Glieder übrig, die wir durch  $\mathfrak{P}_{01}$  charakterisiert haben. Beispielsweise ergibt sich für die  $x$ -Komponente der Kraft:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_x = & -g_{x1} \cdot \int_S (g_{x0} \cdot dS_x + g_{y0} \cdot dS_y + g_{z0} \cdot dS_z) - u_1 \cdot \int_S u_0 \cdot dS_x \\ & + g_{y1} \cdot \int_S (g_{y0} \cdot dS_x - g_{x0} \cdot dS_y) \\ & + g_{z1} \cdot \int_S (g_{z0} \cdot dS_x - g_{x0} \cdot dS_z) \\ & + u_1 \cdot \int_S g_{x0} \cdot (q_x \cdot dS_x + q_y \cdot dS_y + q_z \cdot dS_z) \\ & + g_{x1} \cdot \int_S u_0 \cdot (q_x \cdot dS_x + q_y \cdot dS_y + q_z \cdot dS_z).\end{aligned}$$

Dabei ist von der Annahme Gebrauch gemacht, daß das ausgedehnte Feld  $g_1$ ,  $u_1$  im Innern des Volumens  $\mathcal{V}$  als konstant betrachtet werden darf. Ferner ist zur Abkürzung gesetzt:

$$dS \cdot \cos(N, x) = dS_x, \quad dS \cdot \cos(N, y) = dS_y, \quad dS \cdot \cos(N, z) = dS_z.$$

Aus der Eigenschaft des Vektors  $g$ , daß (nach Gleichung (87)):

$$\text{rot } g = 0,$$

folgt:

$$\begin{aligned}\int_S (g_{y0} \cdot dS_x - g_{x0} \cdot dS_y) &= 0, \\ \int_S (g_{z0} \cdot dS_x - g_{x0} \cdot dS_z) &= 0.\end{aligned}$$

Der dritte und vierte Summand des eben hingeschriebenen Wertes für  $\mathfrak{P}_x$  fallen also weg. Die übrigen Summanden ver-

wandle ich wieder in Raumintegrale, indem ich gleichzeitig mehrmals davon Gebrauch mache, daß auf der Fläche  $S$  gilt  $\mathfrak{f}_0 = g_0$ ,  $w_0 = u_0$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_x = & -g_{x1} \cdot \int \left( \frac{\partial \mathfrak{f}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{z0}}{\partial z} \right) \cdot dV \\ & - u_1 \cdot \int \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot dV \\ & + u_1 \cdot \int \left( \frac{\partial g_{x0}}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial g_{y0}}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial g_{z0}}{\partial z} \cdot q_z \right) \cdot dV \\ & + g_{x1} \cdot \int \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot q_z \right) \cdot dV.\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial g_{x0}}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial g_{y0}}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial g_{z0}}{\partial z} \cdot q_z = \frac{dg_{x0}}{dt} - \frac{\partial g_{x0}}{\partial t} = \frac{dg_{x0}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

und:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot q_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot q_y + \frac{\partial w_0}{\partial z} \cdot q_z = \frac{dw_0}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial t}.$$

Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_x = & -g_{x1} \cdot \int \left( \frac{\partial \mathfrak{f}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{z0}}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \cdot dV \\ & + \int \left( w_1 \cdot \frac{dg_{x0}}{dt} + g_{x1} \cdot \frac{dw_0}{dt} \right) \cdot dV.\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist verschwindend klein gegen den ersten. Denn da im Innern des Volumens  $V$   $w_1$  und  $g_{x1}$  verschwindend klein gegen  $w_0$  und  $g_{x0}$  sind, so fällt er gegen das Glied:

$$\frac{d}{dt} \int w \cdot g_x \cdot dV,$$

das in einer anderen Formel für  $\mathfrak{P}_x$ , nämlich:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{d\mathfrak{G}_x}{dt} = \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{b}_y \cdot \mathfrak{b}_z - \mathfrak{b}_z \cdot \mathfrak{b}_y - \mathfrak{f}_x \cdot \varrho + g_x \cdot w) \cdot dV$$

vorkommt, weg, er muß also verschwindend gegen den Wert von  $\mathfrak{P}_x$  überhaupt sein. Wir haben somit:

$$\mathfrak{P}_x = -g_{x1} \cdot \int \left( \frac{\partial \mathfrak{f}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{z0}}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \cdot dV.$$

Ich lasse nun im folgenden die Indizes wieder weg und setze nach (86):

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{y0}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{z0}}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial t} = -\gamma \cdot H,$$

wo nun also  $H$  die Hamiltonsche Funktion des Eigenfeldes des Teilchens bedeutet, ferner setze ich  $g_1 = g$ , verstehe also unter  $g$  die Feldstärke des ausgedehnten Feldes, in dem sich das Teilchen bewegt. Es ist dann:

$$(110) \quad \mathfrak{P} = \gamma \cdot g \cdot \int_V H \cdot dV.$$

Wir haben die schwere Masse  $m_g$  des Teilchens zu definieren als:

$$(111) \quad m_g = \int_V H \cdot dV$$

und es ist:

$$(112) \quad \mathfrak{P} = \gamma \cdot m_g \cdot g.$$

Wir können demnach folgenden Satz aussprechen:

*Im Gravitationsfeld gibt es nur eine Art von Kraftwirkung, die Schwerewirkung, und nichts, was zu dieser in einer ähnlichen Beziehung stünde, wie die magnetische Kraftwirkung zur elektrischen. Dafür ist aber die schwere Masse eines materiellen Teilchens im Gegensatz zu der konstanten elektrischen Ladung von seinem Bewegungszustand abhängig.*

Denn, wie wir auf p. 26 gesehen haben, ist:

$$(113) \quad \int H \cdot dV = \sqrt{1 - q^2} \cdot E_0, \\ m_g = \sqrt{1 - q^2} \cdot m_0,$$

wenn wir unter  $m_0$  die schwere Masse des ruhenden Teilchens verstehen. Man erkennt übrigens ohne weiteres die Gültigkeit des folgenden Satzes:

*In einem ruhenden Massenteilchen sind die träge Masse und die schwere Masse identisch.*

Beide sind  $m_0 = E_0$ . Wie weit sie sich in einem bewegten Körper unterscheiden, werden wir in einem späteren Abschnitt (45.) sehen.

Ich denke mir nun zwei ruhende oder langsam bewegte Teilchen von den schweren Massen  $m_{g1}$  und  $m_{g2}$ . In dem leeren Raum, der sie umgibt, berechnet sich die Feldstärke der Gravitation, weil  $\text{div } \mathfrak{f} = -\gamma \cdot H$  ist und im Vakuum  $g = \mathfrak{f}$ :

$$g_1 = \gamma \cdot \frac{m_{g1}}{4 \pi r_1^2}, \quad g_2 = \gamma \cdot \frac{m_{g2}}{4 \pi r_2^2},$$

wo  $r_1$  und  $r_2$  die von den Teilchen ausgehenden Radienvektoren bedeuten sollen, und zwar laufen die Feldlinien zu dem das Feld erregenden Teilchen hin. Befinden sich beide voneinander im Abstände  $r = r_1 = r_2$ , so ziehen sie sich demnach mit der an beiden gleich großen Kraft an:

$$(114) \quad \mathfrak{P}_g = \frac{\gamma^2}{4\pi} \cdot \frac{m_{g1} \cdot m_{g2}}{r^2}.$$

*In unserer Gravitationstheorie gilt sowohl das Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, als auch das Newtonsche Attraktionsgesetz.*

Beide Gesetze sind eine notwendige Folge des im Vakuum geltenden Superpositionsprinzips.

Da ferner nach dem Superpositionsprinzip die Gravitationsfelder von sehr vielen Massenteilchen, die nur die Sinkstellen des Vektors  $\mathfrak{f}$  bedeuten, sich einfach zueinander addieren, so folgt, daß die anziehende Wirkung eines Weltkörpers durch das Dazwischentreten eines anderen Körpers in keiner Weise alteriert wird, sondern sich unverändert der Wirkung dieses zweiten Körpers superponiert, m. a. W., daß sich die Gravitation nicht abschirmen läßt.

Die Energiedichte berechnet sich nach der Formel:

$$W = \Phi + e \cdot \mathfrak{d} - q \cdot \varrho + u \cdot w$$

im Vakuum, wo  $e = \mathfrak{d}$ ,  $\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ ,  $\varrho = 0$ ,  $\mathfrak{v} = 0$ ,  $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$ ,  $w = u$ , folgendermaßen:

$$W = \frac{1}{2}(e^2 + \mathfrak{d}^2 + \mathfrak{g}^2 + u^2).$$

*Die Energiedichte des Gravitationsfeldes im Vakuum ist eine positive Größe.*

Diesen Satz, der mit Rücksicht auf die anziehende Wirkung des Gravitationsfeldes beachtenswert ist, hat schon M. Abraham aus seinem Ansatz der Gravitationsgleichungen hergeleitet.

Wir wollen schließlich noch aus dem oben hingeschriebenen Newtonschen Attraktionsgesetz (114) den Wert der universellen Konstanten  $\gamma$  zahlenmäßig berechnen. In Formel (114) sind die beiden schweren Massen  $m_{g1}$  und  $m_{g2}$  in Erg zu rechnen.

Wir wollen sie zunächst in der üblichen Weise in Gramm angeben, indem wir setzen:

$$m_1 = \frac{m_{g1}}{c^2}, \quad m_2 = \frac{m_{g2}}{c^2},$$

wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ( $3 \cdot 10^{10}$ ). Das Attraktionsgesetz lautet dann:

$$(114a) \quad \mathfrak{P}_g = \frac{\gamma^2 \cdot c^4}{4\pi} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Bezeichnen wir die gewöhnlich so genannte *Gravitationskonstante* mit  $\kappa$ , so haben wir demnach:

$$(115) \quad \kappa = \frac{\gamma^2 \cdot c^4}{4\pi}.$$

Es ist also:

$$\gamma = \frac{\sqrt[4]{4\pi\kappa}}{c^2}.$$

Setzen wir hier ein:

$$\kappa = 6,648 \cdot 10^{-8},$$

so erhalten wir:

$$\gamma = 1,016 \cdot 10^{-24}.$$

**Die träge Masse eines materiellen Teilchens.**

43. Wenn  $E_0$  die Energie eines ruhenden Teilchens ist, so ist die Energie desselben Teilchens bei Bewegung mit der Geschwindigkeit  $q$ , wie aus dem Laueschen Satz folgt<sup>1)</sup>:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Nach (91) und (98) ist die Energiedichte:

$$\begin{aligned} W &= H + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{h} - \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} + w \cdot u \\ &= \Phi + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{d} - \varphi \cdot \varrho + w \cdot u, \end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf (64) und (65):

$$(116) \quad E_0 = \int (\overline{H_0} + \overline{w_0 \cdot u_0}) \cdot dV_0 = \int (\overline{\Phi_0} + \overline{w_0 \cdot u_0}) \cdot dV_0.$$

Diese Formeln treten jetzt also an die Stelle der Formeln (66).

---

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 170.

Aus den Gleichungen (85), (86) läßt sich leicht folgende Formel herleiten:

$$\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} - w \cdot u = \operatorname{div}(\mathfrak{f} \cdot \omega) + \frac{\partial (w \cdot \omega)}{\partial t} + \gamma \cdot \omega \cdot H.$$

Daraus ergibt sich für ein *ruhendes* materielles Partikelchen, indem man über das ganze von ihm erfüllte Volumen  $V_0$  integriert:

$$(117) \quad \int_{V_0} \overline{\mathfrak{f}_0 \cdot \mathfrak{g}_0} dV_0 - \int_{V_0} \overline{w_0 \cdot u_0} \cdot dV_0 = \gamma \cdot \int_{V_0} \overline{\omega_0 \cdot H_0} \cdot dV_0.$$

An Stelle der drei Gleichungen auf p. 10 erhalten wir mit Berücksichtigung der Gravitationsglieder aus dem Laueschen Satz die folgenden Gleichungen:

$$\int (\overline{\mathfrak{b}_0 \cdot \mathfrak{h}_0} - \overline{\mathfrak{b}_{x0} \cdot \mathfrak{h}_{x0}} - \overline{\mathfrak{e}_{x0} \cdot \mathfrak{d}_{x0}} - \overline{\mathfrak{f}_{x0} \cdot \mathfrak{v}_{x0}} + \overline{\mathfrak{f}_{x0} \cdot \mathfrak{g}_{x0}} + \overline{w_0 \cdot u_0}) \cdot dV_0 = E_0,$$

$$\int (\overline{\mathfrak{b}_0 \cdot \mathfrak{h}_0} - \overline{\mathfrak{b}_{y0} \cdot \mathfrak{h}_{y0}} - \overline{\mathfrak{e}_{y0} \cdot \mathfrak{d}_{y0}} - \overline{\mathfrak{f}_{y0} \cdot \mathfrak{v}_{y0}} + \overline{\mathfrak{f}_{y0} \cdot \mathfrak{g}_{y0}} + \overline{w_0 \cdot u_0}) \cdot dV_0 = E_0,$$

$$\int (\overline{\mathfrak{b}_0 \cdot \mathfrak{h}_0} - \overline{\mathfrak{b}_{z0} \cdot \mathfrak{h}_{z0}} - \overline{\mathfrak{e}_{z0} \cdot \mathfrak{d}_{z0}} - \overline{\mathfrak{f}_{z0} \cdot \mathfrak{v}_{z0}} + \overline{\mathfrak{f}_{z0} \cdot \mathfrak{g}_{z0}} + \overline{w_0 \cdot u_0}) \cdot dV_0 = E_0.$$

Durch Addition ergibt sich mit Rücksicht auf (65):

$$(118) \quad E_0 = -\frac{1}{3} \cdot \int (\overline{\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} - \overline{\mathfrak{b}_0 \cdot \mathfrak{h}_0} - \overline{\mathfrak{f}_0 \cdot \mathfrak{g}_0}) \cdot dV_0 + \int \overline{w_0 \cdot u_0} \cdot dV_0$$

an Stelle von (71).

Im Felde eines Elektrons ist  $\mathfrak{h}_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ , folglich:

$$(119) \quad E_0 = -\frac{1}{3} \cdot \int \overline{\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} \cdot dV_0 + \frac{1}{3} \cdot \int \overline{\mathfrak{f}_0 \cdot \mathfrak{g}_0} \cdot dV_0,$$

und dabei ist zufolge (64) und (115):

$$(120) \quad \int \overline{\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} \cdot dV_0 = \int \overline{\varphi_0 \cdot \varrho} \cdot dV_0,$$

$$(121) \quad \int \overline{\mathfrak{f}_0 \cdot \mathfrak{g}_0} \cdot dV_0 = \gamma \cdot \int \overline{\omega_0 \cdot H_0} \cdot dV_0.$$

Nach Formel (119) sind die Beweise, die wir auf p. 13 gebracht haben, nicht mehr streng zu führen. Trotzdem ist es wohl ziemlich wahrscheinlich, daß die eigentümlichen Aussagen über das Vorzeichen von  $\epsilon$  und  $\varphi$  im Innern des Elektrons tatsächlich bestehen bleiben.

## Schwerkraft bewegter Massenteilchen.

44. Es sei  $g_x, g_y, g_z, u$  das Schwerfeld eines materiellen Teilchens, dessen schwere Masse im Ruhezustand  $m_0$  sein möge. Nach (85) läßt sich  $g$  stets aus einem Schwerepotential  $\omega$  berechnen:

$$g_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad u = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

und  $\omega$  ist dabei ein vierdimensionaler Skalar, d. h. eine Invariante für die Lorentzsche Transformation. Das Teilchen möge sich mit der Geschwindigkeit  $q$  in der Richtung der positiven  $z$ -Achse bewegen. Wir wollen dann auf Ruhe transformieren, d. h. wir wollen dem Punkt  $x, y, z$  zur Zeit  $t$  einen Punkt  $x_0, y_0, z_0$  nach folgenden Gleichungen zuordnen:

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{z - q \cdot t}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad t_0 = \frac{t - q \cdot z}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Der Mittelpunkt des materiellen Teilchens sei derjenige Punkt, dem  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$  zugeordnet ist, der also die Koordinaten  $x = 0, y = 0, z = q t$  hat. Der Abstand des Punktes  $x, y, z$  vom Mittelpunkt des Massenteilchens ist:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - q t)^2},$$

der Abstand des zugeordneten Punktes  $x_0, y_0, z_0$  von dem Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  des ruhenden Teilchens ist:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Wir können diese Größe auch als Funktion  $x, y, z, t$  berechnen:

$$(122) \quad r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - q t)^2}{1 - q^2}}.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der positiven  $z$ -Achse und dem Radiusvektor  $r$  mit  $\vartheta$ , so ist:

$$z - q t = r \cdot \cos \vartheta$$

und wir haben demnach:

$$r_0 = r \cdot \frac{\sqrt{1 - q^2 \cdot \sin^2 \vartheta}}{\sqrt{1 - q^2}} = r \cdot \sqrt{1 + \frac{q^2}{1 - q^2} \cdot \cos^2 \vartheta}.$$

Wir wollen noch folgende Abkürzung einführen:

$$(123) \quad \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{q^2}{1-q^2} \cdot \cos^2 \vartheta} = p, \\ r_0 = r \cdot p. \end{cases}$$

Nun ist das Gravitationspotential  $\omega$  für ein ruhendes Teilchen leicht zu berechnen, nämlich:

$$\omega = \frac{\gamma m_0}{4 \pi \cdot r_0}.$$

Da  $\omega$  für die Lorentzsche Transformation invariant ist, so folgt, indem man (122) und (123) anwendet, daß das Potential für das bewegte Teilchen sich im Punkt  $(x, y, z)$  nach der Formel berechnet:

$$(124) \quad \omega = \frac{\gamma m_0}{4 \pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - q t)^2}{1 - q^2}}} = \frac{\gamma m_0}{4 \pi \cdot r \cdot p}.$$

Daraus ergibt sich sofort das Schwerfeld des bewegten Teilchens:

$$(125) \quad \begin{cases} g_x = - \frac{\gamma}{4 \pi \cdot p^3} \cdot \frac{m_0}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \\ g_y = - \frac{\gamma}{4 \pi \cdot p^3} \cdot \frac{m_0}{r^2} \cdot \frac{y}{r}, \\ g_z = - \frac{1}{1 - q^2} \cdot \frac{\gamma}{4 \pi \cdot p^3} \cdot \frac{m_0}{r^2} \cdot \frac{z - q t}{r}, \\ u = - \frac{q}{1 - q^2} \cdot \frac{\gamma}{4 \pi \cdot p^3} \cdot \frac{m_0}{r^2} \cdot \frac{z - q t}{r}, \end{cases}$$

oder, wenn wir mit  $g_e$  die Komponente des Feldes senkrecht zur Richtung der Bewegung ( $z$ ) bezeichnen:

$$(126) \quad \begin{cases} g_e = - \frac{\gamma m_0}{4 \pi r^2} \cdot \frac{\sin \vartheta}{p^3}, \\ g_z = - \frac{\gamma m_0}{4 \pi r^2} \cdot \frac{\cos \vartheta}{(1 - q^2) \cdot p^3}, \\ u = - \frac{\gamma m_0 \cdot q}{4 \pi r^2} \cdot \frac{\cos \vartheta}{(1 - q^2) p^3}, \end{cases}$$

wo der Wert von  $p$  aus Formel (123) einzusetzen ist.

Aus den Formeln (126) geht deutlich das folgende hervor:

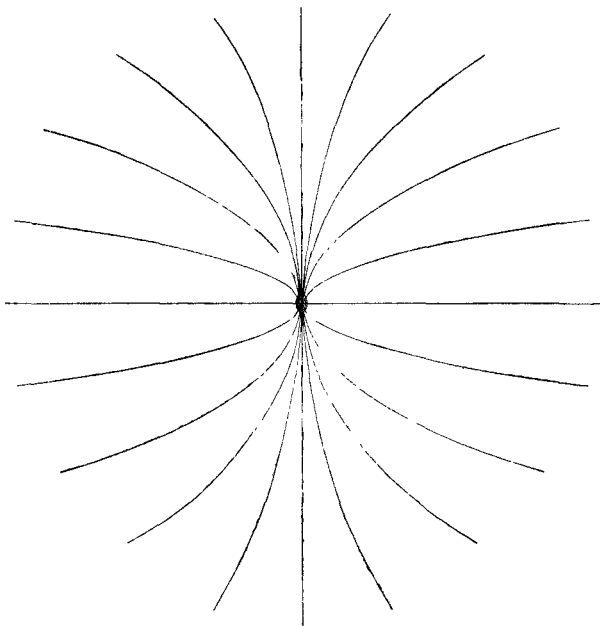
*In der Umgebung eines bewegten materiellen Körpers be-  
kommen die Gravitationslinien, die vom ruhenden gerade in*

radialer Richtung ausgehen, eine gekrümmte Form, außerdem bekommt das Feld im leeren Raum in der Nähe des bewegten Teilchens Quellpunkte und Sinkstellen.

Das letzte ist leicht so zu sehen: Im leeren Raum ist  $\mathbf{g} = \mathbf{f}$  und  $u = w$ , da nun  $u$  und ebenso  $\partial u / \partial t$  von Null verschieden ist, so gilt das auch von  $\text{div } \mathbf{g}$ , denn:

$$\text{div } \mathbf{g} = \text{div } \mathbf{f} = - \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Die Größenordnung von  $\text{div } \mathbf{g}$  ist allerdings, wie man leicht ausrechnen kann, die von  $q^2$ .



Form der Gravitationslinien von einem sehr schnell bewegten Partikelchen.

$$(q = \sqrt{\frac{1}{2}} = 212000 \text{ km/sec}).$$

Fig. 1.

Erst, wenn  $q$  sehr beträchtliche Werte annimmt, wird die sonderbare Verzerrung des Gravitationsfeldes bemerkbar. Die Gleichung einer Kraftlinie ist

$$dz : d\rho = \frac{z - q t}{1 - q^2} : \rho,$$

also:

$$z - q t = a \cdot \varrho^{\frac{1}{1-q^2}},$$

wo  $a$  der zur Kraftlinie gehörende Parameter ist. Man sieht sofort, daß bei kleinen Werten  $q$  die Kraftlinie kaum vom Radiusvektor abweicht,  $a$  ist alsdann gleich  $\cotg \vartheta$ . Ist aber beispielsweise  $q^2 = \frac{1}{2}$ , so sind die Kraftlinien schon zu Parabeln geworden. Das Gravitationsfeld hat dann das in der nebenstehenden Zeichnung (Fig. 1) dargestellte Aussehen. Je mehr sich  $q$  der Lichtgeschwindigkeit (der 1) nähert, um so mehr biegen sich die Kurven auf, so daß das Gravitationsfeld sich immer mehr um die Äquatorialebene konzentriert. Zugleich sinkt die Feldstärke immer mehr und mehr gegen Null, und zwar konvergiert  $g_e$  gegen Null wie  $\sqrt[3]{(1-q^2)^3}$ ,  $g_z$  und  $u$  wie  $\sqrt[3]{(1-q^2)}$ .

45. Wir wollen uns einen Körper denken, dessen Elementarpartikelchen alle relativ zueinander vollkommen in Ruhe seien, wie es vielleicht beim absoluten Nullpunkt der Temperatur sein mag. In diesem Körper ist die träge Masse identisch mit der schweren Masse, wir wollen sie als Ruhmasse mit  $m_0$  bezeichnen.

In dem betrachteten Körper mögen nun die Elementarpartikelchen, etwa durch Temperaturerhöhung, in Schwingungen geraten. Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Partikelchens sei  $q$ , dann ist

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-q^2}} \sim E_0 + \frac{1}{2} E_0 \cdot q^2$$

die durchschnittliche Bewegungsenergie eines Partikelchens, falls  $E_0$  seine Ruhenergie ist. Die schwere Masse des Partikelchens beträgt nach (113):

$$E_0 \cdot \sqrt{1-q^2} \sim E_0 - \frac{1}{2} E_0 q^2.$$

Die schwere Masse des ganzen betrachteten Körpers  $m_g$  nimmt also mit wachsender innerer Bewegung seiner Elementarpartikelchen ab. Und zwar können wir die Änderung der schweren Masse schätzungsweise angeben, wenn wir wissen, wie groß die Energie der inneren Bewegungen ist. Sie betrage  $Q$  Erg, dann ist:

$$m_g \sim m_0 - Q,$$

wenn die Masse in Erg gerechnet wird, oder:

$$m_g \sim m_0 - \frac{Q}{9 \cdot 10^{20}},$$

wenn die Masse in Gramm gerechnet wird. Erteilen wir dem betrachteten Körper eine Bewegung von der Geschwindigkeit  $v$ , so wird die ganze Geschwindigkeit  $q'$  eines Elementarteilchens, das sich *relativ* zum Körper mit einer Geschwindigkeit  $q$  in einer Richtung bewegt, die mit der Richtung von  $v$  den Winkel  $\vartheta$  bildet, nach dem Satz von der Addition der Geschwindigkeiten<sup>1)</sup>:

$$q'^2 = \frac{q^2 + v^2 + 2q \cdot v \cdot \cos \vartheta - q^2 \cdot v^2 \cdot \sin^2 \vartheta}{(1 + q \cdot v \cdot \cos \vartheta)^2}.$$

Die Energie dieses Teilchens berechnet sich zu:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - q'^2}} = \frac{E_0 \cdot (1 + q \cdot v \cdot \cos \vartheta)}{\sqrt{1 - q^2} \cdot \sqrt{1 - v^2}}.$$

Wir nehmen an, daß die Teilchen in dem Körper ganz regellos schwingen, so daß jede Richtung von  $q$  gleich oft vorkommt. Von einer großen Zahl  $N$  von Partikelchen bewegt sich dann in jedem Moment der Bruchteil:

$$dN = N \cdot \frac{2\pi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta}{4\pi} = \frac{1}{2} N \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

so, daß die Richtung der Bewegung  $q$  dieser  $dN$ -Partikelchen mit der Richtung von  $v$  gerade einen Winkel bildet, der zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  liegt. Wir bekommen die Energie aller  $N$ -Teilchen, wenn wir den eben berechneten Wert der Energie eines Teilchens mit der Zahl  $dN$  multiplizieren und über  $\vartheta$  von 0 bis  $\pi$  integrieren. Da nun:

$$\int_0^\pi \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = 0; \quad \int_0^\pi \sin \vartheta \cdot d\vartheta = 2,$$

so erhält man als die gesamte Energie der  $N$ -Teilchen:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - q^2} \cdot \sqrt{1 - v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - q^2}} \cdot (1 + \frac{1}{2} v^2 + \dots).$$

---

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 43.

Die träge Masse  $m$  des Körpers ist also, wie übrigens schon bekannt, auch wenn seine Elementarpartikelchen schwingen, einfach gleich seinem gesamten Energiegehalt

$$m = \frac{E_0}{\sqrt{1-q^2}} \sim E_0 + \frac{1}{2} E_0 \cdot q^2.$$

Nennen wir wiederum die Energie der inneren Bewegungen  $Q$ , so ist:

$$m \sim m_0 + Q \text{ Erg}$$

oder:

$$m \sim m_0 + \frac{Q}{9 \cdot 10^{20}} \text{ Gramm.}$$

*Träge Masse und schwere Masse eines Körpers sind nur dann vollständig identisch, wenn die Elementarteilchen des Körpers keine inneren Bewegungen ausführen. Verborgene Bewegungen der Elementarteilchen bewirken eine Zunahme der trägen Masse und eine Abnahme der schweren Masse.*

Da nun jedenfalls in der Materie immer verborgene Bewegungen vorhanden sind, die mit wachsender Temperatur zunehmen, so folgt weiter:

*Das Verhältnis der schweren Masse zur trägen Masse, also auch die sogenannte Gravitationskonstante, ist für jeden Stoff eine Funktion der Temperatur, die mit wachsender Temperatur abnimmt.*

Für nicht gar zu große Wärmebewegungen können wir die eben berechneten Näherungswerte für  $m_g$  und  $m$  benutzen:

$$\frac{m_g}{m} = \frac{m_0 - Q}{m_0 + Q} = 1 - 2 \frac{Q}{m},$$

wenn  $m$  und  $Q$  beide in Erg gerechnet werden, oder:

$$\frac{m_g}{m} = 1 - 2 \cdot \frac{Q}{9 \cdot 10^{20} \cdot m},$$

wenn  $Q$  in Erg und  $m$  in Gramm gerechnet wird;  $Q:m$  ist der Teil des Wärmegehaltes der Masseneinheit des Körpers, welcher die kinetische Energie der molekularen Bewegung darstellt.

*Die Änderung der Gravitationskonstante mit der Temperatur ist in verschiedenen Stoffen verschieden groß, und zwar ist sie um so größer, je größer der Teil der spezifischen Wärme des Stoffes ist, welcher der kinetischen Energie der molekularen Bewegungen entspricht.*

Im allgemeinen ist die spezifische Wärme der Körper um so größer, je kleiner die Atomgewichte seiner Bestandteile sind. Man könnte daher die Sätze, die aus unserer Gravitationstheorie folgen, in der Weise experimentell nachzuprüfen versuchen, daß man die Schwerebeschleunigung einmal mit einem Pendel bestimmt, dessen Linse aus Lithium besteht, und darauf unter genau gleichen Umständen mit einem Pendel, dessen Linse aus Blei besteht. Das zweite Pendel müßte einen größeren Wert der Schwerebeschleunigung geben als das erste. Um die Möglichkeit des Experiments zu prüfen, wollen wir die Veränderlichkeit des Verhältnisses  $m_g/m$  für den Stoff berechnen, der sie am stärksten zeigen muß, nämlich Wasserstoffgas. Dieses hat eine spezifische Wärme  $c_v$  von 2,5 cal. pro Gramm und pro Grad Celsius, also in Erg umgerechnet:  $1,05 \cdot 10^8$  Erg. Daraus ergibt sich:

$$\frac{m_g}{m} = 1 - \frac{2.1 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{20}} \cdot \Theta = 1 - 2,3 \cdot 10^{-13} \cdot \Theta,$$

wo  $\Theta$  die absolute Temperatur ist, bei der die Messung ausgeführt ist. Das ergibt bei:

$$\Theta = 300^\circ \quad 1 - 7 \cdot 10^{-11},$$

$$\Theta = 6000^\circ \quad 1 - 14 \cdot 10^{-10}.$$

Man müßte also die Schwerebeschleunigung bis auf den Bruchteil  $10^{-11}$  oder  $10^{-12}$  genau bestimmen können, um bei verschiedenem Material der Pendellinse Unterschiede zu finden, wenn man bei Zimmertemperatur beobachtet. Ähnlich genau müßten auch die Messungen sein, wenn man auf astronomischem Wege etwa nach einer Inkonzanz der Gravitationskonstante suchen wollte. Denn wenn hier auch die höheren Temperaturen vieler Himmelskörper eine Rolle spielen könnten, so muß man dafür auch wieder die größeren Atomgewichte der Stoffe beachten, aus denen die Himmelskörper meistens bestehen.

*Praktisch sind schwere Masse und träge Masse nicht zu unterscheiden.*

#### Longitudinalwellen im Äther.

46. Die scheinbar interessanteste Konsequenz aus der hier entwickelten Theorie der Gravitation, auf die übrigens auch

M. Abraham<sup>1)</sup> schon bei der Aufstellung seines Ansatzes hingewiesen hat, ist, daß sie Longitudinalwellen im Äther voraussetzt. Man sieht das sofort aus der Form der Gleichungen (85) und (86). Die Gleichungen (85) sind vollkommen identisch mit den Bewegungsgleichungen einer kompressiblen, vollkommen elastischen Flüssigkeit, die unendlich kleine wirbelfreie Bewegungen macht, wenn man  $\omega$  als das Geschwindigkeitspotential ansieht, und Gleichung (86) ist die sogenannte Kontinuitätsgleichung, wenn man  $H = 0$  setzen kann, was im Vakuum jedenfalls erlaubt ist. Voraussetzung ist allerdings, daß  $(g, iu)$  und  $(h, iw)$  einander proportional sind, was nach dem Superpositionsprinzip im Vakuum der Fall ist. Es ergibt sich dann für  $\omega$  die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0$$

aus der man sieht, daß die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Äther gleich 1, d. h. gleich der Geschwindigkeit der Lichtwellen ist.

Aus der Analogie zu den Longitudinalwellen in einer kompressiblen Flüssigkeit erkennt man, daß im Äther Longitudinalwellen von schwingenden materiellen Teilchen ausstrahlen müssen. Denn wenn ein materielles Teilchen schwingt, so bewegen sich erstens die Sinkstellen des Vektors  $g$  periodisch hin und her, und zweitens variiert auch der Betrag der Sinkstellen periodisch, insofern die gravitierende Masse des Teilchens im Moment der stärksten Bewegung ein Minimum, und im Moment der Ruhe ein Maximum hat. Es entstehen also um ein schwingendes materielles Teilchen herum zwei verschiedenartige longitudinale Kugelwellen, und zwar bemerkt man schon, daß die zweite Art die doppelte Schwingungszahl der ersten hat.

Wir sehen hieraus, daß Lichtwellen, soweit sie durch schwingende Elektronen ausgesandt werden, und Röntgenstrahlen, die bei der plötzlichen Bremsung bewegter Elektronen entstehen, immer von einer Strahlung longitudinaler Wellen begleitet sein müssen. Dagegen läßt sich dasselbe nicht ohne weiteres von solchen Lichtwellen behaupten, die aus explodierten

1) M. Abraham, *Physik. Zeitschr.* 13. p. 1. 1912.

Dipolen (nach Abschnitt 32) bestehen. Wir wollen nun berechnen, wie groß die Intensität der von einem schwingenden materiellen Teilchen ausgesandten Schwerewellen ist.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß in der ganzen Umgebung des Teilchens, wenn es in Ruhe ist, die Vektoren  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{v}$  Null seien, ebenso  $u = 0$ . Dann ist die Energie des ruhenden Teilchens immer:

$$E = \int H \cdot dV.$$

Befindet sich das Teilchen dabei in der Gleichgewichtslage, so ist speziell:

$$E_0 = \int H_0 \cdot dV.$$

In anderen Lagen ist  $E > E_0$ , wir müssen dabei eventuell zur Berechnung von  $E$  die weitere Umgebung des Teilchens mit in Betracht ziehen.

Schwingt das Teilchen durch die Ruhelage hindurch mit der Geschwindigkeit  $q$ , so ist seine Energie:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - q^2}},$$

dagegen ist nach (69):

$$\int H \cdot dV = E_0 \cdot \sqrt{1 - q^2} = E \cdot (1 - q^2).$$

Ist also  $E$  die gesamte Schwingungsenergie, die (abgesehen von der Strahlungsdämpfung) während der Schwingungen konstant bleibt, so ist im Augenblick des größten Anschlages, wenn also  $q = 0$ :

$$\int H \cdot dV = E,$$

im Augenblick, wo das Teilchen durch die Gleichgewichtslage geht, also  $q$  sein Maximum hat:

$$\int H \cdot dV = E \cdot (1 - q^2).$$

Wir wollen nun folgende Abkürzungen brauchen:

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int H \cdot dV = \mu, \\ E = \mu_0. \end{array} \right.$$

Denken wir uns  $\mu$  als das Massenteilchen, so können wir uns den ganzen Schwingungsvorgang so vorstellen, daß sich erstens der Massenmittelpunkt von  $\mu$  mit einer periodischen Geschwindigkeit bewegt, die wir  $q$  nennen wollen, und daß zweitens die Masse des Teilchens  $\mu$  sich dabei periodisch ändert, wir werden mit genügender Genauigkeit rechnen können:

$$(128) \quad \mu = \mu_0 \cdot (1 - q^2),$$

wo  $\mu_0$  der Wert für  $q = 0$  ist. Ob das Teilchen dabei irgend welche Formänderungen erfährt, wird für die Intensität der ausgesandten Wellen unwesentlich sein.

Wir wollen uns im folgenden auf den Fall linearer Schwingungen des Teilchens, bei denen also  $q$  seine Richtung nicht ändert, beschränken. Wir wollen setzen:

$$(129) \quad q = a \cdot \sin 2\pi n t.$$

An Stelle des Schwerevektors  $g$  und  $u$  berechnen wir zunächst etwas anders definierte Größen, die wir  $g'$  und  $u'$  nennen wollen und die folgenden Gleichungen genügen sollen:

$$(130) \quad \begin{cases} g' = \nabla \omega', & u' = -\frac{\partial \omega'}{\partial t}, \\ \operatorname{div} g' + \frac{\partial u'}{\partial t} = -\gamma \cdot H. \end{cases}$$

Im Vakuum, wo  $g$  und  $k$ ,  $u$  und  $w$  miteinander identisch sind, stimmt die Definition von  $g'$  und  $u'$  sowie  $\omega'$  mit der von  $g$ ,  $u$  und  $\omega$  überein, im Innern des materiellen Teilchens aber nicht, weil hier  $k$  und  $g$ ,  $u$  und  $w$  nicht als identisch angesehen werden dürfen. Aus (130) ergibt sich für  $\omega'$  die bekannte Differentialgleichung:

$$(131) \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial z^2} - \frac{v \cdot \omega'}{\partial t^2} = -\gamma \cdot H,$$

die vollständig mit der Differentialgleichung übereinstimmt, der das skalare Potential des elektrischen Feldes um ein bewegtes elektrisches Teilchen herum gehorcht, wenn man  $+\gamma \cdot H$  als die Dichte der elektrischen Ladung annimmt. Diese Gleichung kann man aber nach der von E. Wiechert<sup>1)</sup> angegebenen Methode leicht integrieren, wenn man sich auf

1) E. Wiechert, *Ann. d. Phys.* 4. p. 682. 1901.

Raumgebiete beschränkt, deren Entfernungen vom Massenmittelpunkt des bewegten Teilchens unendlich groß im Vergleich mit den Dimensionen des Teilchens sind. Es ist nämlich:

$$(132) \quad \omega'(x, y, z, t) = \frac{\gamma}{4\pi} \left( \frac{\mu}{r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)} \right)_{x_1, y_1, z_1, t_1},$$

wo:

$$\mu = \int H \cdot dV \quad \text{zur Zeit } t_1.$$

Hier bedeutet  $x_1, y_1, z_1$  denjenigen Punkt auf der Bahn, die der Massenmittelpunkt des Teilchens beschreibt, von dem eine Lichtwelle den betrachteten Raumpunkt  $(x, y, z)$  gerade zur Zeit  $t$  erreichen würde, und  $t_1$  ist der Moment, in welchem der Massenmittelpunkt des Teilchens gerade durch  $(x_1, y_1, z_1)$  geht.  $r$  ist die Verbindungsstrecke von  $(x_1, y_1, z_1)$  nach  $(x, y, z)$ . Da wir die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 gesetzt haben, so ist also:

$$t_1 = t - r.$$

$\vartheta$  soll der Winkel zwischen dem in dem Sinne von  $(x_1, y_1, z_1)$  nach  $(x, y, z)$  gerechneten Radiusvektor  $r$  und der Richtung der Bewegung  $q$  sein.  $q$  ist nach (129) als Funktion von  $t_1$  gegeben:  $q = a \cdot \sin 2\pi n \cdot t_1$  ( $t$  hat jetzt eine andere Bedeutung). Nehmen wir die Richtung der Bewegung des schwingenden Teilchens als Richtung der  $z$ -Achse, so sind  $x_1, y_1$  Konstanten und  $z_1$  ist eine Funktion von  $t_1$ :

$$z_1 = f(t_1), \quad \frac{dz_1}{dt_1} = q = f'(t_1).$$

Nach (129) haben wir zu setzen:

$$z_1 = -\frac{a}{2\pi n} \cdot \cos 2\pi n t_1, \quad \frac{dz_1}{dt_1} = q = a \cdot \sin 2\pi n t_1.$$

Durch die Gleichung:

$$t_1 = t - r = t - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

ist, wenn man für  $x_1$  und  $y_1$  ihre konstanten Werte und  $z_1 = f(t_1)$  einsetzt, die Größe  $t_1$  implizite als Funktion von  $(x, y, z, t)$  definiert und man kann ohne Mühe die Differentialquotienten

$$\frac{\partial t_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial t_1}{\partial t}$$

ausrechnen. Da nun  $q$  und demnach auch  $\mu$  Funktionen von  $t_1$  sind, so kann man sie ebenfalls nach  $x, y, z, t$  differenzieren, wir wollen dabei die Abkürzung gebrauchen:

$$\frac{d q}{d t_1} = \dot{q}, \quad \frac{d \mu}{d t_1} = \dot{\mu}.$$

Endlich kann man auch für  $r$  und  $r \cdot q \cdot \cos \vartheta = (z - z_1) \cdot q$  die Differentiationen ausführen und nun den Vektor  $g'$  und  $u'$  berechnen:

$$g'_x = \frac{\partial \omega'}{\partial x}, \quad g'_y = \frac{\partial \omega'}{\partial y}, \quad g'_z = \frac{\partial \omega'}{\partial z}, \quad u' = - \frac{\partial \omega'}{\partial t}.$$

Die Rechnungen sind von M. Abraham in seiner „Theorie der Elektrizität“ Bd. II im § 13 p. 92ff. genau durchgeführt, ich brauche deswegen nur die Resultate hinzuschreiben. Dabei werde ich, weil alles zur  $z$ -Achse symmetrisch ist, von  $g'$  nur zwei Komponenten, nämlich  $g'_z$  und  $g'_\varrho \perp g'_z$  angeben:

$$(133) \left\{ \begin{aligned} g'_\varrho &= - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot (1 - q^2) \cdot \sin \vartheta \\ &\quad - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot \dot{q} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \\ &\quad - \frac{\gamma}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^2} \cdot \dot{\mu} \cdot \sin \vartheta, \\ g'_z &= - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot (\cos \vartheta - q) \\ &\quad - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot \dot{q} \cdot \cos^2 \vartheta \\ &\quad - \frac{\gamma}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^2} \cdot \dot{\mu} \cdot \cos \vartheta, \\ u' &= - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot q \cdot (\cos \vartheta - q) \\ &\quad - \frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot \dot{q} \cdot \cos \vartheta - \frac{\gamma}{4\pi \cdot r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^2} \cdot \dot{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke zerfallen in zwei Teile, von denen der erste mit  $r^{-2}$ , der zweite mit  $r^{-1}$  proportional ist. Die beiden Summanden des zweiten Teiles enthalten als Faktor entweder:

$$\dot{q} = 2\pi n \cdot a \cdot \cos 2\pi n t = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \cos 2\pi n t$$

oder:

$$\mu = - \mu_0 \cdot q \cdot \dot{q} = - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \mu_0 \cdot a^2 \cdot \sin 2\pi n t \cdot \cos 2\pi n t.$$

Der zweite Teil der Ausdrücke verhält sich zu dem ersten Teil der Größenordnung nach wie  $1/\lambda : 1/r$ , wo  $\lambda$  die der Schwingungszahl  $n$  entsprechende Lichtwellenlänge ist.

Wir wollen uns nun auf solche Schwingungszahlen  $n$  beschränken, deren Lichtwellenlänge  $\lambda$  im Vergleich zu den Dimensionen des schwingenden Teilchens in dem Maße unendlich groß ist, daß es Entfernungen  $r$  vom Teilchen gibt, die gegen  $\lambda$  unendlich klein, gegen die Dimensionen des Teilchens aber noch unendlich groß sind.

Zufolge dieser Annahme gibt es Werte von  $r$ , für welche die Formeln (133) noch gelten, obwohl  $r$  unendlich klein gegen  $\lambda$ . Für diese kleinen Werte von  $r$  können wir mit guter Näherung rechnen:

$$(134) \quad \begin{cases} g'_\varrho = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot (1 - q^2) \cdot \sin \vartheta, \\ g'_z = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot (\cos \vartheta - q), \\ u' = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot q \cdot (\cos \vartheta - q). \end{cases}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Formeln vollständig mit den Formeln (123) übereinstimmen, die das Feld eines mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegten Massenteilchens darstellen.

Um das einzusehen, müssen wir bedenken, daß  $r$  die Entfernung des Punktes  $(x, y, z)$  von dem Ort des Teilchens zur Zeit  $t_1 = t - r$  bedeutet. Bezeichnen wir die Entfernung zwischen  $(x, y, z)$  und dem Ort des Teilchens zur Zeit  $t$  mit  $r'$ , ferner den Winkel zwischen  $r'$  und der  $z$ -Achse mit  $\vartheta'$ , so sieht man aus Fig. 2 sofort, daß:

$$r \cdot \sin \vartheta = r' \cdot \sin \vartheta',$$

$$r \cdot \cos \vartheta = r' \cdot \cos \vartheta' + q \cdot (t - t_1) = r' \cdot \cos \vartheta' + r \cdot q.$$

Eine elementare Rechnung führt zu der Formel:

$$r'^2 \cdot (1 - q^2 \cdot \sin^2 \vartheta') = r^2 \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta)^2$$

oder:

$$r' \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{1 - q^2} \cdot \cos^2 \vartheta'\right)} \cdot \sqrt{1 - q^2} = r \cdot (1 - q \cdot \cos \vartheta).$$

Beachtet man nun noch, daß:

$$\sin \vartheta = \frac{r'}{r} \cdot \sin \vartheta',$$

$$\cos \vartheta - q = \frac{r'}{r} \cdot \cos \vartheta'$$

und setzt man, wie früher (121):

$$\sqrt{1 + \frac{q^2}{1-q^2} \cdot \cos^2 \vartheta'} = p,$$

so ergeben sich aus (134) ohne weiteres die Formeln (125), wobei:

$$m_0 = \frac{\mu}{\sqrt{1-q^2}}$$

in Übereinstimmung mit Formel (113).

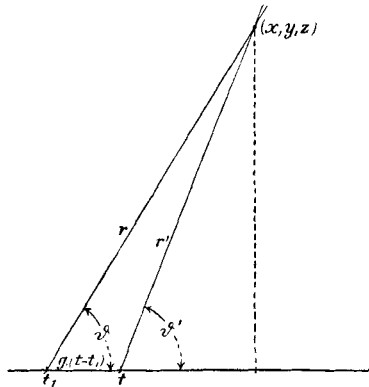


Fig. 2.

*In Entfernungen, die groß gegen die Dimensionen des Teilchens sind, aber doch noch zu seiner näheren Umgebung gehören ( $r$  klein gegen  $\lambda$ ), stimmt der Vektor  $g'$  und  $u'$  vollständig mit dem Schwerevektor  $g$  und  $u$  des sich bewegendes Massenteilchens überein.*

Daraus folgt, daß das für alle Entfernungen gilt, die groß gegen  $\lambda$  sind. Nur im Innern des Teilchens und in der aller-nächsten Nachbarschaft ist  $g'$ ,  $u'$  von  $g$ ,  $u$  zu unterscheiden. Da uns aber diese Gegenden nicht interessieren, werde ich im folgenden die Striche einfach weglassen und setzen:

$$g' = g, \quad u' = u.$$

In großen Entfernungen, wo  $r$  unendlich groß gegen  $\lambda$  ist, haben wir die reinen longitudinalen Kugelwellen, nach denen wir suchen. Wir brauchen da nur den zweiten Teil der Ausdrücke (133) zu berücksichtigen:

$$g_e = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi r} \cdot \left( \frac{\dot{q}}{(1-q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta - \frac{q \cdot \dot{q}}{(1-q \cdot \cos \vartheta)^3} \cdot \frac{\sin \vartheta}{(1-q^2)} \right),$$

indem wir beachten, daß

$$\dot{\mu} = -\mu_0 \cdot q \cdot \dot{q} = -\frac{\mu}{1-q^2} \cdot q \cdot \dot{q}.$$

Eine kleine Umrechnung ergibt:

$$g_e = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi r \cdot (1-q \cdot \cos \vartheta)^3 \cdot (1-q^2)} \cdot (\dot{q} \cdot \cos \vartheta - q \cdot \dot{q}) \sin \vartheta.$$

Rechnen wir ebenso  $g_z$  und  $u$  aus, so bekommen wir schließlich für die Zustandsgrößen in der longitudinalen Welle *in großen Entfernungen vom schwingenden Teilchen* die folgenden Ausdrücke:

$$(135) \quad \begin{cases} g_e = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1-q \cdot \cos \vartheta)^3 \cdot (1-q^2)} \cdot (\dot{q} \cdot \cos \vartheta - q \cdot \dot{q}) \cdot \sin \vartheta, \\ g_z = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1-q \cdot \cos \vartheta)^3 \cdot (1-q^2)} \cdot (\dot{q} \cdot \cos \vartheta - q \cdot \dot{q}) \cdot \cos \vartheta, \\ u = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r \cdot (1-q \cdot \cos \vartheta)^3 \cdot (1-q^2)} \cdot (\dot{q} \cdot \cos \vartheta - q \cdot \dot{q}). \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß  $g$  immer radial zum Teilchen hin gerichtet ist, und daß dem Betrage nach  $g = u$ . Ferner erkennt man deutlich die beiden Wellen, von denen oben die Rede war, das Glied  $\dot{q} \cdot \cos \vartheta$  kommt durch die Hin- und Herbewegung der Sinkstellen des Vektors  $g$  zustande, und das Glied  $q \cdot \dot{q}$  durch die Veränderung der schweren Masse des Teilchens bei seiner Bewegung. Da:

$$q \cdot \dot{q} = a^2 \cdot \sin 2\pi n t \cdot \cos 2\pi n t = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 4\pi n t,$$

so hat die zweite Welle die doppelte Schwingungszahl der ersten. Macht das Teilchen sehr große Ausschläge, so daß  $q$  nicht so sehr weit unter 1 liegt, so bewirkt der Faktor vor der Klammer, daß die ausgesandte Strahlung aus nicht rein sinusförmigen Schwingungen besteht. Es hat wenig Interesse für uns, diese Komplikation hier genauer zu diskutieren, weil bekanntlich Bewegungen materieller Teilchen, deren Geschwindigkeit nicht *weit* unter 1 liegt, äußerst selten sind.

Wir wollen also allein den Fall diskutieren, daß  $q$  sehr klein ist. Dann fällt auch  $q \cdot \dot{q}$  gegen  $\dot{q} \cdot \cos \vartheta$  weg, und wir behalten nur die erste Welle übrig:

$$(136) \quad \begin{cases} g = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r} \cdot \dot{q} \cdot \cos \vartheta, \\ u = -\frac{\gamma \cdot \mu}{4\pi \cdot r} \cdot \dot{q} \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

Hier ist  $\mu$  einfach die *Masse* des Teilchens, da bei kleinen Geschwindigkeiten träge Masse und schwere Masse identisch sind. Setzen wir in (136) ein:

$$\dot{q} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \cos 2\pi n t,$$

so berechnet sich der Energiefluß der Welle in der Richtung  $\vartheta$  zu:

$$g \cdot u = \frac{\gamma^2 \cdot \mu^2}{16\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot a^2 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 2\pi n t;$$

hieraus bekommt man die Intensität, indem man über die Zeiteinheit integriert:

$$(137) \quad J_g = \frac{\gamma^2 \cdot \mu^2}{16\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \cos^2 \vartheta.$$

Wir wollen uns nun eine sehr große Zahl  $N$  schwingender Teilchen denken, die ganz regellos im Raum orientiert sind, aber alle linear schwingen mit der Amplitude  $a$ . Da auf die Kugelzone zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta + d\vartheta$  eine Zahl

$$dN = \frac{N}{2} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

kommt, so erhalten wir die ganze Intensität, indem wir (137) mit diesem Wert von  $dN$  multiplizieren und über  $\vartheta$  integrieren, es ergibt sich in dieser Weise:

$$(138) \quad N \cdot J_g = \frac{1}{6} N \cdot \frac{\gamma^2 \cdot \mu^2}{16\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot a^2.$$

Wir wollen diesen Wert nun mit dem entsprechenden Wert der Intensität des ausgestrahlten Lichtes vergleichen. Wir denken uns ein materielles Teilchen mit der Ladung  $e$ , dessen Schwingungsrichtung mit der Richtung des Strahles den Winkel  $\vartheta$  bildet und das mit der Geschwindigkeit  $q = a \cdot \sin 2\pi n t$

schwingt. Die Intensität des von diesem Teilchen ausgestrahlten Lichtes ist in dem von uns benutzten Maßsystem <sup>1)</sup>:

$$(139) \quad J_e = \frac{\varepsilon^2}{16 \pi^2 \cdot r^2} \cdot \left( \frac{2 \pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin^2 \vartheta$$

und:

$$(140) \quad N \cdot J_e = \frac{1}{3} \cdot N \cdot \frac{\varepsilon^2}{16 \pi^2 \cdot r^2} \cdot \left( \frac{2 \pi}{\lambda} \right)^2 \cdot a^2.$$

Demnach ist das Verhältnis der Intensitäten für die von denselben Teilchen ausgestrahlten elektrischen Wellen und Gravitationswellen:

$$(141) \quad \frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_g} = 2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2 \cdot \mu^2}.$$

In dieser Formel bedeutet  $\varepsilon$  die Elektrizitätsmenge des Teilchens gerechnet in einer Einheit, die der  $\sqrt{4 \pi}$ te Teil der gewöhnlichen elektrostatischen Einheit ist, es ist also:

$$\varepsilon^2 = 4 \pi \cdot \varepsilon_g^2,$$

wenn  $\varepsilon_g$  die Ladung, in der gewöhnlichen elektrostatischen Einheit gerechnet, ist. Weiter bedeutet  $\mu$  die Masse, gerechnet in Erg, also:

$$\mu = c^2 \cdot m,$$

wenn  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $m$  die Masse in Gramm bedeutet. Bezeichnen wir endlich die Ladung, gerechnet in elektromagnetischen Einheiten, als  $e$ , so ist:

$$\frac{\varepsilon_g}{c} = e.$$

Wir bekommen somit:

$$\frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_g} = 2 \cdot \frac{4 \pi}{\gamma^2 \cdot c^2} \cdot \left( \frac{e}{m} \right)^2,$$

oder da nach (113) die gewöhnlich so genannte Gravitationskonstante  $\kappa$  den Wert hat:

$$\kappa = \frac{\gamma^2 \cdot c^4}{4 \pi},$$

so haben wir:

$$(142) \quad \frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_g} = 2 \cdot \frac{c^2}{\kappa} \cdot \left( \frac{e}{m} \right)^2,$$

$$c = 3 \cdot 10^{10}, \quad \kappa = 6,65 \cdot 10^{-8}, \quad e/m = 1,75 \cdot 10^7,$$

---

1) Vgl. E. Wiechert, Ann. d. Phys. 4. p. 688. 1901.

so ergibt sich für die von schwingenden Elektronen ausgesendete Strahlung:

$$\frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_\nu} = 8,3 \cdot 10^{42}.$$

Um diese Zahl richtig zu verstehen, bilden wir einmal die Quadratwurzel  $\sim 3 \cdot 10^{21}$ . Wir sehen dann folgendes: Die Intensität der Schwerstrahlung, die ein leuchtender Punkt aussendet, ist in der Entfernung 1 cm gerade so intensiv als die Lichtstrahlung, die er aussendet, in der Entfernung  $3 \cdot 10^{21}$  cm, das ist eine Länge, die hundert Millionen mal so groß ist als der Durchmesser der Erdbahn, oder ca. 3000 Lichtjahre. Dabei ist dieses Verhältnis für jede Wellenlänge dasselbe.

*Die von schwingenden Elektronen (oder überhaupt von schwingenden Massenteilchen) ausgesendete Schwerstrahlung ist so außerordentlich schwach, daß man nicht daran denken kann, sie jemals auf irgend eine Weise wahrzunehmen.*

Dadurch wird es verständlich, weswegen die Longitudinalstrahlung des Äthers offenbar so gar keine Rolle im Haushalte der Natur spielt. Es wäre wohl sehr unvorsichtig, zu behaupten, daß Longitudinalwellen, die doch jedenfalls an sich in jeder beliebigen Stärke möglich sind, sich nicht bei anderen Vorgängen als den Schwingungsvorgängen materieller Partikelchen in bemerkbarer Intensität entwickeln könnten. Nur so viel können wir mit Sicherheit behaupten, daß diese Vorgänge höchst merkwürdiger Art sein müßten. Würde man also jemals Schwerewellen nachweisen können, so wären wahrscheinlich die Vorgänge, denen sie ihre Entstehung verdanken, noch viel sonderbarer und interessanter, als die Wellen selber.

#### Der Satz von der Relativität des Gravitationspotentials.

47. Die in dieser Arbeit vertretene Theorie unterscheidet sich von der bisher allgemein angenommenen Theorie hauptsächlich dadurch, daß sie den wirklichen Vakuen noch ein ideales Vakuum gegenüberstellen muß, wie die Gastheorie den wirklichen Gasen das ideale Gas. Denn in den wirklichen Vakuen sind infolge der Nähe materieller Körper noch immer Spuren der Zustände  $\rho$ ,  $v$  vorhanden und  $H$  ist nicht absolut Null, es gilt deswegen das Gesetz von der Superposition der

Ätherzustände, durch welches das absolute Vakuum ausgezeichnet ist, immer nur mit großer Annäherung, allerdings wohl mit einer so guten Annäherung, daß man schwerlich hoffen kann, sehr leicht Abweichungen von diesem Gesetz zu konstatieren. Indessen wäre es immerhin möglich, daß man in sehr starken elektrischen Feldern, wo  $e$  und  $\varphi$  sehr große Werte haben<sup>1)</sup>, oder auch in sehr starken magnetischen Feldern Beobachtungen machen könnte, die unseren bisherigen Vorstellungen vom Vakuum widersprechen, und solche Beobachtungen wären als die größte Förderung auf dem von mir eingeschlagenen Wege anzusehen.

Derartige Beobachtungen würden sich also auf ein Vakuum beziehen, das schon ziemlich stark von dem idealen Vakuum abweicht. Nun gibt es indessen doch unter den Zustandsgrößen eine, die selbst in einem Vakuum, das sonst nahezu ideal genannt zu werden verdiente, Einfluß auf die Vorgänge zu haben scheint, das ist das Gravitationspotential  $\omega$ . Wenn die Größen  $v$  und  $\rho$ , sowie  $H$  so klein sind, daß von einem merkbaren Einfluß auf die physikalischen Gesetze nicht mehr die Rede sein kann, wenn aber in diesem guten Vakuum doch noch  $\omega$  einen großen Wert hat, so ist nicht  $e = b$ ,  $b = h$ , sondern, wie aus (93) und (94) hervorgeht:

$$e = e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot b, \quad b = e^{-\gamma \cdot \omega} \cdot h.$$

Man sieht hieraus zunächst, daß in einem Raum, wo das Gravitationspotential  $\omega$  herrscht, die Dielektrizitätskonstante des Vakuums nicht mehr 1 ist, sondern  $K = e^{+\gamma \cdot \omega}$ , ebenso ist die Permeabilität des Vakuums nicht mehr 1, sondern  $M = e^{-\gamma \cdot \omega}$ . Das Produkt beider ist aber wieder  $K \cdot M = 1$ , d. h. *die Lichtgeschwindigkeit ist in dem Raum vom Gravitationspotential  $\omega$  dieselbe, wie in einem Raum vom Gravitationspotential Null.*

Wir können aber noch viel weiter gehen. Es sei der mittlere Wert des Gravitationspotentials in dem betrachteten Raum  $\omega_0$ , ein beliebig großer, aber konstanter Wert. Wir können dann das Gravitationspotential, das infolge des Vor-

---

1) Vgl. II. p. 24.

handenseins von Materie und von Gravitationsfeldern nicht konstant ist, in zwei Summanden zerlegen:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1.$$

Der zweite, variable Summand  $\omega_1$  nimmt höchstens im Innern materieller Körper, die sich in dem Raum befinden, große Werte an, im Vakuum selber ist  $\omega_1$  klein. Definieren wir jetzt:

$$H_1 = e^{+\gamma \cdot \omega_0} \cdot H = e^{-\gamma \cdot \omega_1} \cdot H'(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}, \varrho, \mathfrak{v}, \mathfrak{g}, u),$$

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{b}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{h}}, \quad \varphi_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}, \quad \mathfrak{f}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{v}},$$

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial \mathfrak{g}}, \quad w_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \omega_1} = -\gamma \cdot H_1,$$

so gelten in dem Raum vom Gravitationspotential  $\omega_0$  für die mit dem Index 1 bezeichneten Größen genau dieselben Gleichungen, die im Raume vom Gravitationspotential 0 für die Größen ohne Index gelten. Daraus folgt ohne weiteres:

*Wenn sich zwei leere Räume lediglich dadurch unterscheiden, daß in dem einen das Gravitationspotential einen sehr großen durchschnittlichen Wert  $\omega_0$  hat, in dem anderen dagegen den Durchschnittswert Null, so hat das auf die Größe und Form der Elektronen und der sonstigen materiellen Elementarpartikelchen, auf ihre Ladungen, ihre Schwingungsgesetze und sonstigen Bewegungsgesetze, auf die Lichtgeschwindigkeit, überhaupt auf alle physikalischen Verhältnisse und Vorgänge nicht den mindesten Einfluß.*

Durch diesen Satz, den man das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials nennen könnte, unterscheidet sich die von mir durchgeführte Theorie der Gravitation von vornherein auf das schärfste von den Theorien A. Einsteins und M. Abrahams. Ich teile die Ansicht des letzteren, daß, wenn dieser Satz nicht gültig wäre, überhaupt das Relativitätsprinzip fallen müßte. Andererseits glaube ich gezeigt zu haben, daß die von mir angenommenen Voraussetzungen nirgends zu Widersprüchen mit der Erfahrung führen, daß insbesondere von dem Satz der Proportionalität von schwerer Masse und träger Masse nach meiner Theorie nur unbemerkt kleine Abweichungen vorherzusehen sind.

## Schlußbemerkungen.

48. In dem Vorhergehenden glaube ich die allgemeine Theorie der Materie so weit durchgeführt zu haben, wie es heute möglich ist. Der nächste Fortschritt muß auf experimentellem Wege geschehen, und ich möchte deswegen kurz diskutieren, welche Möglichkeiten sich dem Experiment darbieten.

Die Gravitation, deren experimentelle Erforschung vorzubereiten, das Hauptziel war, das mir bei meiner Arbeit vorschwebte, zeigt sich nach wie vor gleich spröde. Die Theorie der Gravitation hat sich zwar vollständig durchführen lassen in der Weise, daß sie sowohl mit dem Relativitätsprinzip wie auch mit allen bisher von der Gravitation bekannten Erfahrungstatsachen im Einklang ist, sie ergibt auch zwei neue Resultate, die auf den ersten Blick äußerst interessant erscheinen. Aber bei genauerer Betrachtung zeigt sich, daß diese theoretischen Resultate gar keine Aussichten für ein erfolgreiches Experiment geben. Das erste Resultat ist, daß das Verhältnis von schwerer Masse zu träger Masse von der Temperatur abhängt, und daß die Abhängigkeit von der Temperatur bei Körpern von kleinem Atomgewicht sehr viel stärker ist als bei Körpern von großem Atomgewicht. Da die Unterschiede, welche die Theorie für die Schwerebeschleunigung verschiedener Stoffe vorhersehen läßt, von der Größenordnung  $10^{-12}$  bis  $10^{-11}$  sind, läßt sich experimentell nichts damit anfangen. Das zweite Resultat ist, daß es im Äther Longitudinalwellen geben muß, nach denen es sich vielleicht lohnte, zu suchen. Von den uns bekannten Prozessen kommen die Schwingungen der Atome und Elektronen in Betracht, die zugleich mit dem Licht auch die longitudinalen Schwerkwellen liefern müssen. Indessen steht ihre Intensität zu der der Lichtwellen bei Elektronenschwingungen jeder Frequenz ungefähr im Verhältnis  $1:8,3 \cdot 10^{42}$ , und wir müssen es deshalb für ganz ausgeschlossen halten, daß es irgend ein Reagens gibt, das auf sie anspricht. Es läßt sich also kein Weg angeben, auf welchem man nach den an sich jedenfalls höchst interessanten Longitudinalwellen suchen könnte.

Das nächste, worauf die Theorie direkt hinweist, wäre, zu untersuchen, ob in sehr starken elektrischen oder magne-

tischen Feldern oder auch in feldfreien Gebieten von sehr hohem Potential irgend welche Abweichungen von den im idealen Vakuum geltenden Maxwellschen Gesetzen zu finden sind. Es würde sich hier um Präzisionsmessungen handeln, die nach einem theoretisch wohl überlegten Plan auszuführen wären. Natürlich ist es zweifelhaft, ob man damit Erfolg hat; würde man aber zu positiven Ergebnissen kommen, so würden der Theorie dadurch sehr wichtige Fingerzeige gegeben, wie sie weiter zu gehen hätte.

In etwas lockerem Zusammenhang mit der übrigen Theorie steht die von mir in den Abschnitten 31. bis 36. dargelegte Auffassung von den Wirkungsquanten und von dem Licht der Bandenspektren. Diese Auffassung ist sehr vage und hypothesenreich, trotzdem glaube ich, daß man einige Konsequenzen daraus ziehen könnte, die zu neuen spektroskopischen Untersuchungen Anlaß geben müßten.

Greifswald, Physikalisches Institut, 31. Oktober 1912.

## Inhaltsübersicht der Grundlagen einer Theorie der Materie.

|                                             |                                                                                                     |       |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Annalen der Physik 37.                      |                                                                                                     | Seite |
| 1.                                          | Einleitung . . . . .                                                                                | 511   |
| Erstes Kapitel. Die Feldgleichungen.        |                                                                                                     |       |
| 2.—5.                                       | Allgemeine Form der Feldgleichungen . . . . .                                                       | 513   |
| 6.—9.                                       | Die Energie . . . . .                                                                               | 521   |
| 7.                                          | Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .                                                                  | 526   |
| 8.—10.                                      | Die Invarianten . . . . .                                                                           | 530   |
| Annalen der Physik 39.                      |                                                                                                     |       |
| Zweites Kapitel. Das Problem des Elektrons. |                                                                                                     |       |
| 11. 12.                                     | Die Knotenstellen der Felder . . . . .                                                              | 1     |
| 13.—16.                                     | Die Gleichgewichtsbedingungen . . . . .                                                             | 5     |
| 17.                                         | Die Differentialgleichung des elektrostatischen Feldes für den Fall sphärischer Symmetrie . . . . . | 14    |
| 18.—22.                                     | Diskussion eines Beispiels: $\Phi = -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{6}a\cdot\chi^6$ . . . . .         | 18    |
| 23. 24.                                     | Das Problem des Elektrons . . . . .                                                                 | 37    |
| Annalen der Physik. IV. Folge. 49.          |                                                                                                     | 5     |

## Annalen der Physik 40.

**Drittes Kapitel. Kraft und träge Masse.**

|                                                               | Seite |
|---------------------------------------------------------------|-------|
| 25. 26. Berechnung der auf ein Massenteilchen wirkenden Kraft | 1     |
| 27.—30. Die träge Masse eines materiellen Teilchens . . . . . | 5     |

**Viertes Kapitel. Das Problem des Wirkungsquantums.**

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| 31.—34. Elementardipole . . . . .                | 13 |
| 35. 36. Das Plancksche Wirkungsquantum . . . . . | 18 |

**Fünftes Kapitel. Die Gravitation.**

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 37. 38. Die erweiterten Grundgleichungen der Ätherdynamik . . | 25 |
| 39. Die Invarianten . . . . .                                 | 31 |
| 40. Die Differentialgleichung des Elektrons . . . . .         | 32 |
| 41. Die Weltmatrix . . . . .                                  | 34 |
| 42. Berechnung der auf ein Massenteilchen wirkenden Kraft     | 35 |
| 43. Die träge Masse eines materiellen Teilchens . . . . .     | 42 |
| 44. 45. Schwerkraft bewegter Massenteilchen . . . . .         | 44 |
| 46. Longitudinalwellen im Äther . . . . .                     | 50 |
| 47. Der Satz von der Relativität des Gravitationspotentials . | 61 |
| 48. Schlußbemerkungen . . . . .                               | 64 |

(Eingegangen 2. November 1912.)