A simple Dirichlet series based proof
of the Riemann Hypothesis?

Klaus Braun
riemann-hypothesis.de

December 2024

Merry Christmas Everyone

The context is …

… there are the well-known Dirichlet series, (LaE1) S. 587,

$$g(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}\ ,\ Re(s) > 1$$

and

(because of $\lim_{s \to 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = -1$)

$$h(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) log n}{n^s} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}\ ,\ Re(s) \geq 1\ ,$$

… the related Dirichlet series product is given in the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mu(n) log n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad Re(s) > 1,$$

… and, formally, from a theorem of E. Landau (Corollary 1 below) one gets

$$(*)\ \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) g\left(\frac{1}{2} - it\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mu(n) log n}{n} = 1\ .$$

The question is …

… if the representation (*) allows the conclusion that

$$g(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

is convergent, and its sum is $= \frac{1}{\zeta(s)}$ for $Re(s) > 1/2$, which is one of the several RH criteria, (TiE) p. 369.

The three related Landau theorems

This section provides a summary of related theorems, conclusions, and statements from E. Landau's „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Band 2, (LaE1). The corresponding original german text is provided in the next section.

Theorem 1 (LaE1) S. 594: The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) log^q n}{n^{1+it}}$$

is convergent for all real q and t; especially, because of $\lim_{s \to 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = -1$, it holds, (LaE1) S. 569/587,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mu(n) logn}{n} = 1 \ .$$

Note (LaE1) S. 588: Because of

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)$$

it holds

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mu(n) logn}{n^s} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right], \quad Re(s) > 1.$$

Theorem 2 (LaE1) S. 808: For integers $m \geq 1, \nu \geq 0$ and $0 < \beta < 1$ it holds

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} m^{it} \zeta^{(\nu)}(\beta + it) dt = (-1)^{\nu} \frac{log^{\nu} m}{m^{\beta}}.$$

Corollary 1 (LaE1) S. 812: If the series $g(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ is absolute convergent for $\sigma = Re(s) = \gamma$, it holds

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \zeta^{(\nu)}(\beta + it) g(\gamma - it) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_n log^{\nu} n}{n^{\beta+\gamma}} \ , 0 < \beta < 1.$$

Note (*): The functions $T(x) := \sum_{n=1}^{x} logn = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(\frac{x}{n})$ and $U(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi\left(\frac{x}{n}\right)$ with $\psi(x) := \sum_{p^m \leq x} logp = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) T(\frac{x}{n})$ are related by periodic coefficients c_n with period $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ in the form, if n divided by 30 gives

		remainder of division													
c(n) :	1	1	7	11	13	17	19	23	29						
c(n) :	0	2	3	4	5	8	9	14	16	21	22	25	26	27	28
c(n) :	-1	6	10	12	15	18	20	24	30						

(*) This note might be also helpful in the context of the Kummer conjecture, (BrK1), (HaH) S. 453.

E. Landau’s original notes and theorems

Satz (LaE1) S. 587: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)logn}{n}$ ist entweder divergent oder konvergent und $=-1$.

Bemerkung (LaE1) S. 588: Es ist für $\sigma=Re(s)>1$ wegen$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}=\frac{1}{\zeta(s)}\cdot(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)})$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)logn}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\ .$$

Bemerkung (LaE1) S. 594: Aus dem Ergebnis des vorherigen Paragraphen folgt weiter, daß für jedes reelle q und jedes reelle t die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)log^q n}{n^{1+it}}$ konvergiert.

Bemerkung (LaE1) S. 597: Aus dem Primzahlsatz alleine hat sich oben zwar ergeben, daß $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}$ konvergiert, aber nicht, daß $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)logn}{n}$ konvergiert. Dieser Satz liegt tiefer als der Primzahlsatz; aus ihm läßt sich umgekehrt, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird, der Primzahlsatz elementar ableiten. Das macht recht deutlich, wieso Tschebyschef und seine Nachfolger auf Grund der Identitäten $\left(\vartheta(x):=\sum_{p\le x}logp,\ \psi(x):=\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta(\sqrt[m]{x})\right)$

$$T(x)=\sum_{n=1}^{x}logn=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(\frac{x}{n})\ \text{ und }\ \psi(x)=\sum_{p^m\le x}logp=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)T(\frac{x}{n})$$

nicht zu dem Ziele gelangt sind, den Primzahlsatz elementar zu beweisen. Die Anfangsglieder der Ausdrücke $U(x)$ im Sinne der §§ 21 bis 23 (*), kommen eben auf die von $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)T(\frac{x}{n})$ hinaus; die Konstante, die bei Anwendung immer schärferer Ausdrücke 1 werden soll, ist gerade ein Aggregat, welches anfangs mit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\mu(n)logn}{n}$ um so genauer übereinstimmt, je mehr Glieder der Ausdruck $U(x)$ enthält. Daß aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\mu(n)logn}{n}$ auch nur konvergiert, läßt sich zur Zeit nicht einmal aus dem Primzahlsatz (zu dessen Beweise es doch bei Anwendung der Tschebyschefschen Methode dienen soll) alleine elementar erschließen.

(*) (LaE) S. 89: Nach der grundlegenden Identität des § 17, $T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(\frac{x}{n})$ ist

$$\begin{aligned}U(x)=T(x)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)-T\left(\frac{x}{30}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{2n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{3n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{5n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{30n}\right)=\\&=\psi(\mathrm{x})-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)+\psi\left(\frac{x}{11}\right)-\psi\left(\frac{x}{12}\right)+\psi\left(\frac{x}{13}\right)+\psi\left(\frac{x}{18}\right)-\psi\left(\frac{x}{15}\right)\\&+\psi\left(\frac{x}{17}\right)-\psi\left(\frac{x}{18}\right)+\psi\left(\frac{x}{19}\right)-\psi\left(\frac{x}{20}\right)+\psi\left(\frac{x}{23}\right)-\psi\left(\frac{x}{24}\right)+\psi\left(\frac{x}{29}\right)-\psi\left(\frac{x}{30}+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\psi\left(\frac{x}{n}\right),\end{aligned}$$

wo sich c_n mit der Periode $30=2\cdot3\cdot5$ wiederholt, d.h. das Glied $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ zum Koeffizienten hat:

$$c_n=\begin{cases}1, & row\ 1\\ 0, & row\ 2\\ -1 & row\ 3\end{cases}$$

wenn n durch 30 geteilt den Rest hat

row 1	1	7	11	13	17	19	23	29						
row 2	2	3	4	5	8	9	14	16	21	22	25	26	27	28
row 3	6	10	12	15	18	20	24	30						

Satz (LaE1) S. 808: Es sei das ganze $\nu \geq 0$ fest, das positive $\beta < 1$ und fest. Dann ist gleichmäßig für alle ganzzahligen $m \geq 1$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} m^{it} \zeta^{(\nu)}(\beta + it) dt = (-1)^{\nu} \frac{log^{\nu} m}{m^{\beta}}.$$

Folgerung (LaE1) S. 812: Wenn $0 < \beta < 1$ ist und die Reihe $g(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ für $\sigma = Re(s) = \gamma$ absolut konvergiert, so ist

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \zeta^{(\nu)}(\beta + it) g(\gamma - it) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_n log^{\nu} n}{n^{\beta+\gamma}} .$$

References

(BrK) Braun K., A proof of the Riemann Hypothesis, www.riemann-hypothesis.de

(BrK1) Braun K., The Kummer conjecture and the two-semicircle method, www.riemann-hypothesis.de

(HaH) Hasse H., Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Göttingen, 1950

(LaE) Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band 1, Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1909

(LaE1) Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band 2, Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, 1909

(TiE) Titchmarsh E. C., The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1986