Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen.

Von *G. Pólya* in Zürich.

Es werden im folgenden trigonometrische Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt}\, dt$$

betrachtet. Von der für reelle Werte von t definierten Funktion $F(t)$ wird ständig vorausgesetzt, daß sie in jedem endlichen Intervall eigentlich integrabel ist, daß sie in Punkten, die zum Nullpunkt symmetrisch liegen, konjugiert komplexe Werte annimmt,

$$(2) \qquad F(-t) = \overline{F(t)},$$

und schließlich, daß es zwei positive Konstanten A und a gibt, so beschaffen, daß für alle reellen Werte von t

$$(3) \qquad |F(t)| < A e^{-|t|^{2+\alpha}}$$

gilt. Gemäß (3) stellt das Integral (1) eine ganze Funktion von z dar, die gemäß (2) für reelles z reelle Werte annimmt. Unter welchen Bedingungen kann man behaupten, daß die durch (1) dargestellte ganze Funktion nur reelle Nullstellen hat? Zu dieser Frage soll die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern.

Auf den ersten Anblick scheint diese Fragestellung ziemlich willkürlich und künstlich zu sein. Anlaß dazu gab der Umstand, daß *Riemann* die von ihm in die Primzahltheorie eingeführte ξ-Funktion durch ein Integral von der Form (1) dargestellt hat [1]). Die Fragestellung selbst ist in einer Abhandlung von *Jensen* erwähnt [2]); die von ihm in Aussicht gestellten weiteren Publikationen, die nähere Ausführungen hätten enthalten sollen, sind ausgeblieben.

Nach Behandlung einiger Beispiele [3]) ist es mir gelungen, einen Teil der Frage-

---

[1]) *B. Riemann*, Werke (1876), S. 138.

[2]) *J. L. W. V. Jensen*, Acta Mathematica, **36** (1912), 181—195.

[3]) *G. Pólya*, a) Mathematische Zeitschrift, **2** (1918), 352—383. b) The Messenger of Mathematics, **52** (1923), 185—188. c) Acta Mathematica, **48** (1926), 305—317. d) Bolletino dell' Unione Matematica Italiana 5 (1926), 64—68. e) The Journal of The London Mathematical Society, **1** (1926), 98—99. Vgl. ferner *S. Kakeya*, Proc. of The Physico-Math. Society of Japan, (3) **2** (1920), No. 7, und für eine verwandte Frage *F. Bernstein*, Mathematische Annalen, **79** (1919), 265—268.

stellung zu isolieren, der einer abgerundeten Lösung fähig ist. Es handelt sich dabei *um universell anwendbare Faktoren, die die Realität der Nullstellen erhalten.* Genauer wird dieser Begriff durch den folgenden Satz umschrieben:

I. *Die Funktion $\varphi(t)$ sei analytisch für alle reellen Werte von t und von folgender Beschaffenheit: Wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt}\, dt \tag{1}$$

nur reelle Nullstellen hat, so hat (wie auch $F(t)$ sonst beschaffen sei) das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, F(t)\, e^{izt}\, dt$$

ebenfalls nur reelle Nullstellen. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß $C e^{\gamma t^2} \varphi(it)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht 1 sei, die nur reelle Nullstellen besitzt und für reelles t reelle Werte annimmt; C bedeutet eine nichtverschwindende, γ eine reelle, nichtnegative Konstante.

Zur Erläuterung sei beigefügt, daß von der Funktion $\varphi(t)$ ziemlich viel gefordert wird, nämlich nicht bloß, daß sie die Realität der Nullstellen von einem oder einigen Integralen von der Form (1) erhält, sondern von überhaupt allen, die nur reelle Nullstellen haben. Eben weil die Forderung so stark ist, kann die Natur von $\varphi(t)$ so scharf präzisiert werden. Der Begriff: „vom Geschlecht 1" ist so aufzufassen, daß die ganzen Funktionen vom Geschlecht 0, die ganzen rationalen Funktionen und die Konstanten als spezielle Funktionen vom Geschlecht 1 gelten. Die notwendige und hinreichende Bedingung, die für $\varphi(t)$ durch Satz I angegeben wird, besteht eigentlich darin, daß *$\varphi(it)$ ein Polynom mit nur reellen Nullstellen oder ein Grenzwert solcher Polynome sei* [1]).

Die Fragestellung betreffend $\varphi(t)$ ist analog zu einer auf *Laguerre* zurückgehenden Frage; diese betrifft Faktorenfolgen, welche die Realität der Nullstellen von Polynomen erhalten, und wurde von *J. Schur* und dem Verfasser gelöst a. a. O.[1]). In der Tat werden dieselben Hilfsmittel in beiden Fällen herangezogen.

Ich benutze die Gelegenheit, noch einen mit denselben Hilfsmitteln beweisbaren Satz mitzuteilen:

II. *Es sei die Funktion $f(t)$ für positive Werte von t definiert, reellwertig, absolut integrabel und für genügend großes t der Ungleichung*

$$|f(t)| < B e^{-t^{\frac{1}{2}+\beta}} \tag{4}$$

unterworfen (B, β sind positive Konstanten). Ferner sei $f(t)$ in einer Umgebung des Punktes $t = 0$ analytisch. Dann stellt das Integral

$$\int_0^\infty t^{z-1} f(t)\, dt = H(z)$$

---

[1]) *G. Pólya* u. *J. Schur*, dieses Journal, **144** (1914), 89—113.

eine meromorphe Funktion dar. Wenn die Funktion $H(z)$ nur reelle negative Nullstellen besitzt, und q eine positive ganze Zahl ist, so besitzt die durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t^{2q})\, e^{izt}\, dt$$

dargestellte ganze Funktion nur reelle Nullstellen.

Die Ungleichungen (3), (4) hätten durch weniger einschränkende ersetzt werden können, aber ich wollte mich dabei nicht aufhalten. Beide Sätze sind zur Feststellung der Realität der Nullstellen in speziellen Fällen gut brauchbar, was ich durch Beispiele belegen will.

Zusammenstellung von Hilfssätzen über eine Klasse von ganzen Funktionen.

1. Eine ganze Funktion $g(z)$ soll kurz als eine „*reell gerichtete*" Funktion bezeichnet werden, wenn sie das Produkt von $e^{-\gamma z^2}$ und einer ganzen Funktion vom Geschlecht 1 ist, die nur reelle Nullstellen hat und für reelles z reelle Werte annimmt; γ bezeichnet eine reelle nichtnegative Konstante. Es ist also

$$g(z) = A\, z^q e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu z)\, e^{-\delta_\nu z} \tag{5}$$

wo die ganze Zahl $q \geqq 0$ ist, sämtliche Konstanten $A, \gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ reell sind, $\gamma \geqq 0$ ist und $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \cdots$ konvergiert. Hierbei ist der Begriff des Geschlechtes 1 so auszulegen, wie in der Einleitung im Anschluß an Satz I gesagt wurde. Es wird insbesondere zugelassen, daß einige oder auch sämtliche Zahlen $\gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ verschwinden.

Die reell gerichteten Funktionen sind durch die Produktentwicklung (5) definiert worden; man kann sie aber auch durch die Beschaffenheit ihrer Potenzreihenentwicklung charakterisieren, wie der folgende Satz lehrt [1]):

A. *Damit die Potenzreihe*

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} z^n + \cdots \tag{6}$$

eine reell gerichtete ganze Funktion darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß die Polynome

$$P_n(z) = a_0 + a_1 \binom{n}{1} \frac{z}{n} + a_2 \binom{n}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^2 + \cdots + a_n \binom{n}{n} \left(\frac{z}{n}\right)^n \tag{7}$$

nur reelle Nullstellen besitzen $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Aus dem Inhalt des Satzes A. hebe ich besonders hervor, daß die Realität der Nullstellen der Polynome (7) die Konvergenz der Reihe (6) für jedes z nach sich zieht. Steht diese Konvergenz schon fest, so ist leicht zu sehen, daß

$$\lim_{n \to \infty} P_n(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots \tag{8}$$

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 7, Anm. 1], Satz IV, S. 110.

gleichmäßig in jedem endlichen Bereich gilt. Ferner ist leicht zu sehen, daß, wenn die Reihe (6) eine ganze Funktion von der Form (5) darstellt, die Polynome (7) einer Ungleichung von der Form

$$(9) \qquad |P_n(z)| < e^{(|z|^2+1)K}$$

genügen ($n = 1, 2, 3, \ldots; z$ beliebig), wo K eine passende positive Konstante bezeichnet [1]).

Die Gleichung (8) lehrt, daß die reell gerichteten Funktionen gleichmäßig durch Polynome mit nur reellen Nullstellen approximiert werden können. Dies ist, nebenbei bemerkt, die wesentliche Eigenschaft dieser Funktionen. Es folgen daraus mit Leichtigkeit zahlreiche weitere Sätze, insbesondere die folgenden:

B. *Ist*

$$h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_l z^l$$

ein Polynom mit nur reellen Nullstellen und $g(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion, so hat die Funktion

$$(10) \qquad h(D)g(z) = b_0 g(z) + b_1 g'(z) + b_2 g''(z) + \cdots + b_l g^{(l)}(z)$$

nur reelle Nullstellen.

C. *Ist $h(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion, die für positives z nicht verschwindet, und stellt die Potenzreihe* (6) *irgendeine reell gerichtete ganze Funktion dar, so stellt auch die Potenzreihe*

$$a_0 h(0) + \frac{a_1 h(1)}{1!} z + \frac{a_2 h(2)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{a_n h(n)}{n!} z^n + \cdots$$

eine ganze Funktion ohne imaginäre Nullstellen dar.

Auf Grund von A. reduziert sich der Beweis der Sätze B. C. im wesentlichen auf den fast trivialen Fall, worin $g(z)$ ein Polynom und $h(z)$ ein Polynom ersten Grades ist [2]). — Das in (10) auftretende Symbol D ist das Symbol des Differenzierens in bezug auf z.

2. Kraft der Bedingung (3) ist

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{izt} dt\right| &< 2A\int_0^{\infty} e^{|z|t - t^{2+\alpha}} dt \\ &= 2A\left(\int_0^{2|z|^{\frac{1}{\alpha+1}}} + \int_{2|z|^{\frac{1}{\alpha+1}}}^{\infty}\right)\exp(|z|\,t - t^{2+\alpha})\,dt \\ &< 2A\left[|z|^{-1}\exp\left(2|z|^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}\right)\right] + \int_0^{\infty}\exp(-\tfrac{1}{2}t^{2+\alpha})\,dt;\end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. die mit (9) äquivalente Ungleichung a. a. O. [S. 7, Anm. 1], S. 97, Formel (10).

[2]) Satz B. rührt in seiner einfachsten Form von *Hermite* und *Poulain*, Satz C. von *Laguerre* her. Vgl. z. B. *G. Pólya* u. *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, (Berlin 1925), die Nummern V 62—67, 167. Ferner a. a. O. [S. 6, Anm. 2], S. 185, 190 und a. a. O. [S. 7, Anm. 1], S. 112.

wir haben benutzt, daß

$$|z|\,t - t^{2+a} < |z|\,t \qquad \text{für } 0 < t < 2|z|^{\frac{1}{1+a}},$$

$$|z|\,t - t^{2+a} < (\tfrac{1}{2}t)^{1+a}\,t - t^{2+a} < -\tfrac{1}{2}t^{2+a} \qquad \text{für } t > 2|z|^{\frac{1}{1+a}}$$

ist. Somit stellt das Integral (1) eine ganze Funktion dar, deren Ordnung höchstens

$$\frac{2+a}{1+a} < 2$$

und deren Geschlecht folglich höchstens 1 ist.

Das Integral (1) fällt ferner kraft (2) für reelles z reell aus. Wenn es eine ganze Funktion ohne imaginäre Nullstellen darstellt, so ist dieselbe reell gerichtet.

Ein für uns interessanter Grenzfall der Integrale (1) sind die ganzen Funktionen von der Form

$$(11) \qquad c_0 e^{-inz} + c_1 e^{i(2-n)z} + \cdots + c_\nu e^{i(2\nu-n)z} + \cdots + c_n e^{inz};$$

hierin bedeuten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ Konstanten. Die Funktion (11) ist von Ordnung und Geschlecht 1; sie ist, wie leicht zu sehen, eine reell gerichtete Funktion, wenn die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(12) \qquad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = 0$$

alle vom absoluten Betrage 1 sind und die zusätzliche Bedingung

$$(13) \qquad c_n = \bar{c}_0 \neq 0$$

erfüllt ist.

Beweis des Satzes I.

3. Es sei angenommen, daß das Integral (1) eine ganze Funktion mit nur reellen Nullstellen darstellt.

Es stellt dann (1), wie unter 2. überlegt, eine reell gerichtete Funktion dar. Es sei $g(z)$ irgendeine reell gerichtete Funktion, dargestellt durch die Potenzreihe (6). Dann hat, gemäß Satz A., auch $P_n(z)$, und, gemäß Satz B., auch

$$(14) \qquad P_n(D)\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,e^{izt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(it)\,F(t)\,e^{izt}\,dt$$

nur reelle Nullstellen; das Symbol D ist in (14) wie in (10) verwendet. Lassen wir an der rechten Seite von (14) n gegen ∞ streben, so erhalten wir, gemäß (8), (9), (3) die Grenzfunktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(it)\,F(t)\,e^{izt}\,dt\,,$$

die, als gleichmäßiger Grenzwert von ganzen Funktionen mit nur reellen Nullstellen, ebenfalls nur reelle Nullstellen besitzt.

Anders gesagt, ist $g(it)$ ein Faktor, der die Realität der Nullstellen von (1) erhält, falls $g(z)$ eine reell gerichtete ganze Funktion ist, und hiermit ist die eine Hälfte des Satzes I schon bewiesen [1]).

4. Zur Vorbereitung der anderen Hälfte von Satz I dient das folgende

Lemma. *Es sollen sämtliche Wurzeln der Gleichung* (12) *vom Betrage* 1 *sein,* (13) *sei erfüllt, und die Funktion* (1) *soll nur reelle Nullstellen besitzen. Dann hat, falls δ eine reelle Zahl bedeutet und*

$$c_0 F(t - n\delta) + c_1 F(t + (2-n)\delta) + \cdots + c_\nu F(t + (2\nu - n)\delta) + \cdots + c_n F(t + n\delta) = F^*(t)$$

gesetzt wird, auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(t)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen.

Es ist in der Tat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(t)\, e^{izt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu F(t - (n - 2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{iz(u + (n-2\nu)\delta)}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, e^{izu}\, du \cdot \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{iz(n-2\nu)\delta}$$

ein Produkt von zwei Funktionen, die beide nach Voraussetzung nur reelle Nullstellen haben.

5. Es sei nun angenommen, daß $\varphi(t)$ ein universell anwendbarer Faktor ist, der die Realität der Nullstellen der Integrale von der Form (1) erhält. Ferner sei $\varphi(t)$ analytisch für alle reellen Werte von t. Es soll um den Punkt $t = 0$ herum die Reihenentwicklung

$$\varphi(t) = b_0 + \frac{b_1}{1!}\, t + \frac{b_2}{2!}\, t^2 + \cdots \tag{15}$$

gelten. $\varphi(t)$ ist durch die analytische Fortsetzung der Reihe (15) für reelles t eindeutig bestimmt.

Nun hat das spezielle Integral (1), worin

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{für } -a \leqq t \leqq a, \\ 0 & \text{,,} \quad |t| > a \end{cases} \tag{16}$$

ist (a ist eine von t unabhängige positive Zahl), nur reelle Nullstellen, da

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} e^{izt}\, dt = \frac{\sin az}{az}$$

[1]) Es gilt übrigens etwas mehr: Wenn das Integral (1) eine endliche Anzahl $2j$ von nichtreellen Nullstellen hat, so hat (14), und folglich die Grenzfunktion nicht mehr als $2j$ nichtreelle Nullstellen.

ist. Wir finden weiter, indem wir in dem Lemma unter 4.

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = (1 - z)^n (-i)^n$$

setzen, daß auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(t - (n - 2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen hat.

Diese reellen Nullstellen hat aber $\varphi(t)$, nach Voraussetzung, zu erhalten. Somit hat auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(t - (n - 2\nu)\delta)\, e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen; letzterer Ausdruck ist, gemäß (16),

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{1}{2a} \int_{-a+(n-2\nu)\delta}^{+a+(n-2\nu)\delta} \varphi(t)\, e^{izt}\, dt.$$

Läßt man hierin zuerst a und dann, nach Division mit $(2\delta)^n$, δ gegen 0 streben, so erhält man sukzessive, daß die ganzen Funktionen

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varphi((n - 2\nu)\delta)\, e^{iz(n-2\nu)\delta}$$

und

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{(2\delta)^n} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \varphi((n - 2\nu)\delta)\, e^{iz(n-2\nu)\delta} = \left\{ \frac{d^n}{dt^n} [\varphi(t) e^{izt}] \right\}_{t=0}$$

$$= \varphi(0)(iz)^n + \binom{n}{1} \varphi'(0)(iz)^{n-1} + \cdots = b_0 (iz)^n + \binom{n}{1} b_1 (iz)^{n-1} + \cdots + b_n$$

nur reelle Nullstellen haben; vgl. (15). Also haben auch die Polynome

$$b_0 + b_1 \binom{n}{1} \frac{iz}{n} + b_2 \binom{n}{2} \left(\frac{iz}{n}\right)^2 + \cdots + b_n \binom{n}{n} \left(\frac{iz}{n}\right)^n$$

nur reelle Nullstellen, und somit ist, gemäß Satz A., die Potenzreihe

$$b_0 + \frac{b_1}{1!} iz + \frac{b_2}{2!} (iz)^2 + \cdots = \varphi(iz)$$

stets konvergent, und stellt (eventuell abgesehen von einem komplexen konstanten Faktor) eine reell gerichtete Funktion dar. Hiermit ist auch die zweite Hälfte von Satz I bewiesen.

Beispiele zu Satz I.

6. Die vorliegende Nummer ist von den übrigen Teilen der Arbeit unabhängig und erbringt einen neuen Beweis des folgenden Satzes [1]):

---

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c]. Es kann (17) als $\pi i \exp(-\frac{1}{2}\pi z) H_{iz}^{(1)}(i\alpha)$ bezeichnet werden. Vgl. *G. N. Watson*, A treatise on the theory of Bessel functions, (Cambridge 1922), S. 180, Formel (10).

Ist a ein positiver Parameter, so stellt das Integral

$$(17)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}a(e^t + e^{-t}) + izt\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\cosh t} e^{izt}\,dt$$

eine ganze Funktion von z mit nur reellen Nullstellen dar.

Zum Beweis werden die Rollen von a und z vertauscht, es wird z als ein komplexer Parameter und a als eine positive Variable angesehn. Wir wollen das Integral (17) zur Abkürzung mit w bezeichnen und für w als Funktion von a eine Differentialgleichung aufstellen. Einerseits findet man mittels partieller Integration, daß

$$(18)\qquad -z^2 w = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\cosh t} \frac{d^2}{dt^2} e^{izt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} \frac{d^2}{dt^2} e^{-a\cosh t}\,dt$$

ist. Andererseits findet man nach Differentiation unter dem Integralzeichen und Zusammenfassung, daß

$$(19)\qquad a^2\left(\frac{d^2 w}{d a^2} - w\right) + a\frac{dw}{da} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izt} e^{-a\cosh t}(a^2\sinh^2 t - a\cosh t)\,dt.$$

Die rechten Seiten von (18) und (19) sind einander gleich, und wir erhalten so die Differentialgleichung

$$(20)\qquad \frac{d}{da}\left(a\frac{dw}{da}\right) = \left(a - \frac{z^2}{a}\right)w.$$

Wir behandeln (20) mit einer Methode, die wohl zuerst von *A. Hurwitz* verwendet und dann durch *E. Hille* allseitig untersucht und durchgebildet wurde [1]). Wir ersetzen die Differentialgleichung, die von zweiter Ordnung ist, durch zwei Gleichungen erster Ordnung mit zwei Unbekannten, indem wir

$$(21)\qquad \frac{dw}{da} = \frac{W}{a}, \qquad \frac{dW}{da} = \left(a - \frac{z^2}{a}\right)w$$

schreiben. Wir gehen nun in der ersten Gleichung (21) zu den konjugierten Werten über; durch Multiplikation mit W bzw. $\bar{w}$ und Addition erhalten wir

$$(22)\qquad \frac{d}{da}(W\bar{w}) = \frac{1}{a}\left(|W|^2 + (a^2 - z^2)|w|^2\right).$$

Nun bedeutet w das Integral (17) und daher ist offenbar

$$(23)\qquad \lim_{a\to\infty} w = \lim_{a\to\infty} W = 0.$$

Es sei nun angenommen, daß für $a = a_0 > 0$ das Integral (17) verschwindet; wir erhalten dann aus (22) mit Rücksicht auf (23)

$$(24)\qquad 0 = \int_{a_0}^{\infty} a^{-1}\left(|W|^2 + (a^2 - z^2)|w|^2\right)da.$$

---

[1]) Unter mehreren diesbezüglichen Arbeiten von *E. Hille* sei besonders hervorgehoben: Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, **16** (1922), Nr. 17.

Insbesondere muß der Imaginärteil der rechten Seite von (24) verschwinden, d. h. es ist, $z = x + iy$ gesetzt, wo x, y reell sind,

$$0 = -2ixy \int_{a_0}^{\infty} a^{-1} |w|^2 da. \tag{25}$$

Nun ist klar, daß das Integral (17), das heißt $w > 0$ ist, wenn $x = 0$ ist, und so kann es sich beim Verschwinden von w für $a = a_0$ nur um den Fall

$$x \neq 0 \tag{26}$$

handeln. Aus (25), (26) folgt, daß $y = 0$ ist, d. h. es kann (17) nur für reelles z verschwinden. W. z. b. w.

7. Satz I gestattet aus dem Integral (17), dessen Nullstellen eben als reell erkannt worden sind, beliebig viele andere von derselben Eigenschaft abzuleiten. Da für positive A, a

$$2A \cos az = A(e^{iaz} + e^{-iaz})$$

offenbar eine reell gerichtete Funktion ist, hat auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(e^{at} + e^{-at}) e^{-\alpha \cosh t} e^{izt} dt \qquad (A,\ a,\ \alpha > 0) \tag{27}$$

nur reelle Nullstellen. Dies ist insofern von einigem heuristischen Interesse, als die *Riemann*sche ξ-Funktion sich durch ein Integral von der Form (1) darstellen läßt, dessen Integrand für große reelle Werte von t sich wie der Integrand von (27) verhält [1]). Ähnliches gilt übrigens für diejenige Verallgemeinerung der ξ-Funktion, die in analoger Beziehung zu der *Dedekind*schen ζ-Funktion steht, wie die gewöhnliche ξ-Funktion zu der *Riemann*schen ζ-Funktion.

Übrigens hat auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [A(e^{at} + e^{-at}) - B(e^{bt} + e^{-bt})] e^{-\alpha \cosh t} e^{izt} dt \tag{28}$$

nur reelle Nullstellen, falls

$$A > B > 0, \quad a > b > 0, \quad \alpha > 0 \tag{29}$$

ist [2]). Denn sind a und b ganze Zahlen, so ist $Az^a - Bz^b$ ein Polynom, dessen Nullstellen offenbar im Einheitskreise liegen. Hieraus folgt weiter [3]), daß die Nullstellen von

$$Az^a - Bz^b - Bz^{-b} + Az^{-a}$$

den Betrag 1 haben, und schließlich, wie unter 2. besprochen wurde, daß

$$Ae^{iaz} - Be^{ibz} - Be^{-ibz} + Ae^{-iaz} \tag{30}$$

---

1) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c].

2) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3c], die Fußnote S. 317.

3) Mit Hilfe des Argumentenprinzips, vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3a], S. 359—361.

eine reell gerichtete Funktion ist. Wenn dies von (30) mit ganzzahligen a, b gilt, so gilt es auch mit rationalen und mit beliebigen reellen a, b, wie durch Variablenvertauschung und Grenzübergang ersichtlich ist. Somit ergibt (30) nach Vertauschung von z mit it einen Faktor, der dem Integranden des Integrals (17) beigefügt, dasselbe unter Wahrung der Wurzelrealität in (28) verwandelt.

Beweis des Satzes II.

8. Ich benutze zunächst (in bekannter Weise [1])) den Teil der Voraussetzung, daß $f(t)$ in einer Umgebung des Punktes $t = 0$ analytisch ist. Es sei die Reihenentwicklung

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

absolut konvergent für $0 \leqq t \leqq \varrho$, $\varrho > 0$. Dann gilt, falls der Realteil von z als positiv vorausgesetzt wird,

$$H(z) = \int_0^\varrho \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu t^{\nu+z-1}\, dt + \int_\varrho^\infty f(t) t^{z-1}\, dt$$

oder auch

$$H(z) = \varrho^z \sum_{\nu=0}^\infty \frac{c_\nu \varrho^\nu}{z+\nu} + \int_{\log\varrho}^\infty f(e^u) e^{zu}\, du. \tag{31}$$

Die Darstellung (31) ist in der ganzen z-Ebene gültig, ausgenommen gewisse nichtpositive ganze Zahlen, die einfache Pole für (31) sind. Somit ist (31) als eine meromorphe Funktion erkannt; wir wollen noch ihre Größenordnung abschätzen.

Gemäß Bedingung (4) kann man zu jeder, noch so großen positiven Konstanten α eine positive Konstante A finden, so daß

$$|f(e^u)| < B \exp\left(-e^{(\frac{1}{2}+\beta)u}\right) < A \exp\left(-|u|^{2+\alpha}\right)$$

für alle genügend großen Werte von u besteht, und so folgt aus der Rechnung unter 2., daß der zweite Summand rechts in (31) eine ganze Funktion ist, deren Ordnung 1 nicht übersteigt. — Man schneide aus der z-Ebene Kreise vom Radius δ aus, $\delta > 0$, deren Mittelpunkte $z = 0, -1, -2, \ldots$ sind. In der übrigbleibenden durchlöcherten Ebene bleibt der erste Summand rechts in (31) dem Betrage nach kleiner als $K|\varrho^z|$, wo K eine passende Konstante bedeutet.

Es sei q eine positive ganze Zahl. Man bilde die Funktion

$$\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right) H\left(\frac{z+1}{2q}\right)}{\Gamma(z+1)} = h(z). \tag{32}$$

Der Zähler von $h(z)$ hat nur einfache Pole, die in den Punkten

$$-2,\ -4,\ -6, \ldots,\ -2n, \ldots$$
$$-1,\ -(2q+1),\ -(4q+1), \ldots,\ -(2nq+1), \ldots$$

[1]) Vgl. *A. Hurwitz*, Mathematische Annalen, **58** (1900), 220—224.

liegen. Alle diese Pole werden durch die Pole des Nenners, die in allen negativen ganzzahligen Punkten liegen, aufgehoben, und somit ist $h(z)$ eine ganze Funktion. Die Ordnung von $h(z)$ ist, nach der eben besprochenen Abschätzung von (31), höchstens 1. Wenn $H(z)$ nur reelle negative Nullstellen hat, hat $h(z)$ ersichtlicherweise auch nur reelle negative Nullstellen, ist also eine reell gerichtete Funktion, die für positives z nicht verschwindet.

Wir können somit Satz C. auf $h(z)$ und auf die Reihe

$$1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \cdots,$$

deren Summe die reell gerichtete Funktion $\exp(-z^2)$ ist, anwenden. Somit hat die Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h(2n) z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1) H\left(\frac{2n+1}{2q}\right) z^{2n}}{n!\,\Gamma(2n+1)}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} \int_0^{\infty} t^{\frac{2n+1}{2q}-1} f(t)\,dt = 2q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} \int_0^{\infty} u^{2n} f(u^{2q})\,du$$

$$= 2q \int_0^{\infty} f(u^{2q}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (uz)^{2n}}{2n!} \cdot du = q \int_{-\infty}^{+\infty} f(u^{2q})\, e^{iuz}\,du$$

nur reelle negative Nullstellen. W. z. b. w. (Die Vertauschung von Summation und Integration ist wegen (4) ersichtlicherweise erlaubt.)

Beispiele zu Satz II.

9. Die meromorphen Funktionen

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{a-1}\,dt = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)},\ (a > 0), \qquad \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(z)$$

haben bekanntlich außerhalb der reellen negativen Achse keine Nullstellen; folglich haben die trigonometrischen Integrale

$$(33) \qquad \int_{-1}^{+1} (1 - t^{2q})^{a-1} e^{izt}\,dt \qquad (a > 0),$$

$$(34) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^{2q}} e^{izt}\,dt$$

nur reelle Nullstellen [1]). Verschiedene spezielle Fälle sind wohl bekannt. Z. B. stellt (33) für $q = 1$ bis auf einen unwesentlichen Faktor die *Bessel*sche Funktion $J_{a-\frac{1}{2}}(z)$ dar. Für $a < 1$ folgt die Realität der Nullstellen von (33) auch auf andere Weise [2]). Für $q = 1$ hat (34) bekanntlich überhaupt keine Nullstellen. Schließlich

[1]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3b].

[2]) Vgl. a. a. O. [S. 6, Anm. 3a, 3d].

sei bemerkt, daß man (34) auch aus (33) folgern kann, nämlich als Grenzfall für $a \to \infty$.

10. *Wenn $P(z)$ ein Polynom mit nur reellen negativen Nullstellen ist, und l, q positive ganze Zahlen sind, so hat*

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^{2q})^{l-1} P(t^{2q}) e^{izt}\, dt \tag{35}$$

nur reelle negative Nullstellen.

Man setze

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_m t^m \tag{36}$$

und untersuche gemäß Satz II die Funktion

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{l-1} P(t)\, dt \tag{37}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \frac{\Gamma(\mu+z)\Gamma(l)}{\Gamma(l+\mu+z)} = \frac{\Gamma(l)\Gamma(z)}{\Gamma(l+m+z)} Q(z),$$

wobei $Q(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist,

$$Q(z) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{m} c_\mu z(z+1)\cdots(z+\mu-1)(l+\mu+z)(l+\mu+1+z)\cdots(l+m-1+z).$$

Andererseits findet man, daß

$$(1+x)^{l-1} P(-x) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{l-1} (-1)^\mu c_\mu \frac{(l-1)!}{\lambda!\,(l-\lambda-1)!} x^{\mu+\lambda} \tag{38}$$

$$= (l-1)! \sum_{n=0}^{l+m-1} \frac{Q(-n)x^n}{n!\,(l+m-n-1)!}$$

ist. Das Polynom (38) hat, nach Voraussetzung, m positive Nullstellen; folglich muß, gemäß der *Descartes*schen Regel, die Reihe seiner Koeffizienten, also die Zahlenreihe

$$Q(0),\ Q(-1),\ Q(-2), \ldots, Q(-l-m+1)$$

m Zeichenwechsel aufweisen. Somit hat $Q(z)$ m negative Nullstellen, also nur negative Nullstellen, und das Integral (37) erfüllt die Voraussetzungen von Satz II. W. z. b. w.

Man setze in (35)

$$P(t) = (1+t)^{l+k-1}, \qquad l+k-1 \geqq 0.$$

Es folgt, daß das Integral

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^{4q})^{l-1}(1+t^{2q})^k e^{izt}\, dt$$

nur reelle Nullstellen hat; hieraus folgt durch leichten Grenzübergang und durch Hinzufügung des Faktors e^{ct^2} auf Grund des Satzes I dasselbe für das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^{4q}+bt^{2q}+ct^2} e^{izt}\,dt \qquad (a > 0,\ b \text{ reell},\ c \geqq 0). \tag{39}$$

Wir haben im vorhergehenden auf verschiedenen Wegen erkannt, daß die Integrale (17), (27), (28), (33), (34), (39) nur reelle Nullstellen besitzen. Vielleicht verdienen diese Resultate als Beobachtungsmaterial zur Auffindung einer tiefer dringenden Gesetzmäßigkeit etwas Beachtung.