Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie.

by Trefftz, E.

in: Mathematische Annalen, (page(s) 317 - 326)
Berlin, Göttingen, Heidelberg; 1869

Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie[1].

Von

E. Trefftz in Aachen.

1. Problemstellung.

Eines der schönsten Resultate und vielleicht die stärkste Stütze der Einsteinschen Gravitationstheorie ist die Erklärung der Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur durch die Raumkrümmung, die die Masse der Sonne in ihrer Nähe erzeugt. Mathematisch läuft die Sache darauf hinaus, das Gravitationsfeld eines Massenpunktes zu bestimmen, der in einen Euklidischen Raum gewissermaßen eingebettet ist, d. h. es sind die Feldgleichungen der Gravitationstheorie für den speziellen Fall der Kugelsymmetrie zu lösen (der Koordinatenanfang wird in den Massenpunkt gelegt), wobei als Randbedingung ergänzend gefordert wird, daß in großer Entfernung die Koeffizienten des Linienelementes in die gewöhnliche Euklidische Form übergehen. In dieser Fassung der Aufgabe liegt insofern etwas der Relativitätstheorie Fremdes, als diese Forderung für das unendlich Ferne nur dann zu rechtfertigen ist, wenn man annimmt, daß die Euklidische Maßbestimmung in genügender Entfernung von der Sonne eine Wirkung der weit entfernten Fixsternmassen ist. Das Gravitationsfeld wird also gewissermaßen auf ein relativ zu den Fixsternen ruhendes Koordinatensystem bezogen.

Ich stelle mir deshalb im folgenden die Aufgabe, das Gravitationsfeld *zweier* Massenpunkte zu bestimmen. Um die Notwendigkeit zu umgehen,

[1] Ich beziehe mich auf die folgende Literatur: Einstein, Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Physik 49 (1916); Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akademie der Wissensch. 1919; Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, ebenda 1915. — Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissensch. 1916.

besondere Randbedingungen im „räumlich Unendlichen" anzunehmen, wodurch meines Erachtens immer etwas Nichtrelativistisches in die Theorie hineingebracht wird, setze ich von vornherein den Raum als endlich voraus, derart, daß das Gebiet, für das die Feldgleichungen zu integrieren sind, nur durch die Oberflächen der beiden Massen begrenzt wird. Mathematisch drückt sich das darin aus, daß wir solche Koordinaten einführen, die in diesem ganzen Gebiete einen endlichen Bereich von Werten durchlaufen; fordern wir dann, daß die g_{ik} für alle Koordinatenwerte endlich bleiben, so ist darin die Endlichkeit des Raumes enthalten. Es ist das offenbar die einfachste Annahme, die wir über den Zusammenhang des Raumes machen können.

Auf dieser Grundlage gelingt es, unsere Aufgabe auf den kugelsymmetrischen Fall zurückzuführen. Die Rechnung würde sich dann nicht von der Schwarzschildschen unterscheiden, wenn wir ihr die Einsteinschen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt

$$R_{ik} = 0$$

zugrunde legen würden. (R_{ik} = einmal verjüngter Riemannscher Krümmungstensor.) Da wir aber den Raum als endlich vorausgesetzt haben, so können wir nicht erwarten[2]) — und dieser Zweifel wird durch die Rechnung bestätigt —, daß wir mit den Gleichungen in dieser Form zum Ziele kommen. Ich habe deshalb die Rechnung für die letzte Form der Einsteinschen Gleichungen:

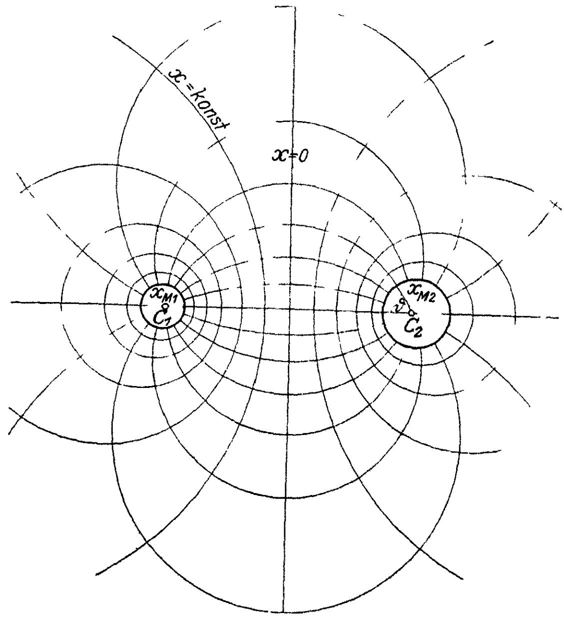
$$R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} = 0 \tag{1}$$

durchgeführt (R = skalare Krümmung).

Wir stellen uns also die Aufgabe, das statische Gravitationsfeld zweier kugelförmiger Massen zu bestimmen, d. h. die Gleichungen (1) zu integrieren. Um dieser Integrationsaufgabe eine bestimmte Gestalt geben zu können, führen wir in folgender Weise passende Koordinaten ein: Wir denken uns in einer Ebene die Kreise gezeichnet, die durch die beiden Punkte C_1 und C_2 gehen und mit der Verbindungslinie $C_1 - C_2$ die Winkel ϑ bilden (siehe Figur); ferner die zu diesen Kreisen orthogonale Kreisschar, deren Kreise wir durch einen Parameter x kennzeichnen. Nun lassen wir die Ebene um $C_1 - C_2$ rotieren und erhalten die dritte Koordinate in dem Winkel φ, den die Ebene bei der Rotation mit einer Nullage einschließt. Bei dieser Rotation beschreiben die Kreise x = konst. Kugeln. Die Kugeln $x = x_{M_1}$ und $x = x_{M_2}$ seien die gegebenen kugelförmigen Massen M_1 und M_2. x, ϑ, φ und der Zeitparameter t seien die Koordi-

[2]) Vgl. die Ausführungen Einsteins in der in Fußnote [1]) an zweiter Stelle genannten Arbeit.

naten, für die wir die Gleichungen (1) integrieren. Aus Symmetriegründen folgt dann die Unabhängigkeit des Feldes von φ. Wir suchen also eine Lösung, die von φ und — weil wir das statische Feld bestimmen wollen — auch von t unabhängig ist; in ϑ soll sie periodisch sein und für $x_{M_1} \leqq x \leqq x_{M_2}$ den üblichen Bedingungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit genügen. Das sind genau die gleichen Bedingungen, die wir im kugelsymmetrischen Falle haben, wenn wir x, ϑ und φ als sphärische Polarkoordinaten auffassen. Demgemäß machen wir für das Linienelement den Ansatz:



$$ds^2 = f_4(x)\,dt^2 - f_1(x)\,dx^2 - f_2(x)\,d\vartheta^2 - f_2(x)\sin^2\vartheta\,d\varphi^2. \tag{2}$$

Die Entstehung dieses Ansatzes können wir uns auch folgendermaßen klar machen: Die Gleichungen (1) sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, oder wie wir auch sagen können, von einer beliebigen Abbildung des Raumes. Nehmen wir also (Euklidisch gedacht) eine Transformation nach reziproken Radien vor, durch die der Punkt C_2 ins Unendliche gebracht wird, so gehen unsere Koordinaten in gewöhnliche sphärische Polarkoordinaten über, die Oberflächen der Massen werden zwei konzentrische Kugeln, und das Problem ist auf den kugelsymmetrischen Fall zurückgeführt.

2. Integration der Gleichungen $R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0$ für den kugelsymmetrischen Fall.

Zur Integration der Gleichungen (1) setzen wir zunächst in der üblichen Weise $x_1 = x$, $x_2 = \vartheta$, $x_3 = \varphi$, $x_4 = t$, womit das Linienelement die Gestalt:

$$ds^2 = f_4(x_1)\,dx_4^2 - f_1(x_1)\,dx_1^2 - f_2(x_1)\,dx_2^2 - f_2(x_1)\sin^2 x_2\,dx_3^2 \tag{2'}$$

erhält, also von den g_{ik}

(3) $g_{11} = -f_1(x_1), \quad g_{22} = -f_2(x_1), \quad g_{33} = -f_2(x_1)\sin^2 x_2, \quad g_{44} = f_4(x_1)$

wird und die g_{ik} mit gemischten Indizes verschwinden.

Die Komponenten des Gravitationsfeldes $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, die bis auf das Vorzeichen mit den Christoffelschen Drei-Indizes-Symbolen $\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\}$ übereinstimmen, werden allgemein bei orthogonalen Koordinaten nur dann von Null verschieden, wenn mindestens zwei der Indizes übereinstimmen, und zwar wird.

$$\Gamma^{\nu}_{\nu\nu} = -\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\nu}, \qquad \Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2g_{\nu\nu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\mu}, \qquad \Gamma^{\mu}_{\nu\nu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x_\mu},$$

also in unserem Falle

$$(4)\quad \begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\frac{f_1'}{f_1}, \quad \Gamma^1_{22} = +\frac{1}{2}\frac{f_2'}{f_1}, \quad \Gamma^1_{33} = +\frac{1}{2}\frac{f_2'}{f_1}\sin^2 x_2, \quad \Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2}\frac{f_4'}{f_1} \\ &\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{2}\frac{f_2'}{f_2}, \qquad\qquad \Gamma^2_{33} = \sin x_2 \cos x_2 \\ &\Gamma^3_{13} = -\frac{1}{2}\frac{f_2'}{f_2}, \quad \Gamma^3_{23} = -\cot x_2 \\ &\Gamma^4_{14} = -\frac{1}{2}\frac{f_4'}{f_4}. \end{aligned}$$

Die übrigen werden Null, die Striche bedeuten Differentiationen nach $x_1 = x$. Die Komponenten R_{ik} des einmal verjüngten Riemannschen Krümmungstensors werden:

$$(5)\quad \begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{f_1'}{f_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{f_1'}{f_1} + 2\frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_4'}{f_4}\right) + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^2 + 2\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 + \left(\frac{f_4'}{f_4}\right)^2\right] \\ &\qquad - \frac{1}{4}\frac{f_1'}{f_1}\left(\frac{f_1'}{f_1} + 2\frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_4'}{f_4}\right), \\ R_{22} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{f_2'}{f_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{f_2'^2}{f_1 f_2} - 1 + \frac{1}{4}\frac{f_2'}{f_1}\left(\frac{f_1'}{f_1} + 2\frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_4'}{f_4}\right), \\ R_{33} &= R_{22}\sin^2 x_2, \\ R_{44} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{f_4'}{f_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{f_4'^2}{f_1 f_4} - \frac{1}{4}\frac{f_4'}{f_1}\left(\frac{f_1'}{f_1} + 2\frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_4'}{f_4}\right), \end{aligned}$$

die R_{ik} mit gemischten Indizes werden Null[3]).

Für die weitere Rechnung können wir uns, da die zu bestimmenden Funktionen f_1, f_2, f_4 nur von x_1 abhängen, von vornherein auf die „Äquatorebene" $x_2 = \pi/2$ beschränken. (Auch ohne diese Vereinfachung würde

---

[3]) Ich verzichte auf die vereinfachende Annahme $|g| = 1$ der ersten Einsteinschen Arbeiten. Damit wird die Einführung der Schwarzschildschen Koordinaten $x_1 = x^3/3$, $x_2 = \cos\vartheta$ überflüssig.

sich x_2 im Laufe der Rechnung von selbst fortheben und das gleiche Ergebnis herauskommen.) Ferner ist es zweckmäßig, die Größen:

$$(6) \qquad q_1 = f_1'/f_1, \quad q_2 = f_2'/f_2, \quad q_4 = f_4'/f_4$$

einzuführen. Dann wird:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{f_2'}{f_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{f_2'^2}{f_1 f_2} = \frac{f_2}{f_1}\left(\frac{1}{2}\frac{dq_2}{dx_1} - \frac{1}{2}q_1 q_2\right),$$

und wir erhalten

$$(7) \qquad \begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx_2}(2q_2 + q_4) + \frac{1}{4}(q_1^2 + 2q_2^2 + q_4^2) - \frac{1}{4}q_1(q_1 + 2q_2 + q_4), \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{f_2}{f_1}\left\{\frac{1}{2}\frac{dq_2}{dx_1} - \frac{1}{2}q_1 q_2 + \frac{1}{4}q_2(q_1 + 2q_2 + q_4)\right\} - 1, \\ R_{44} &= -\frac{f_4}{f_1}\left\{\frac{1}{2}\frac{dq_4}{dx_1} - \frac{1}{2}q_1 q_4 + \frac{1}{4}q_4(q_1 + 2q_2 + q_4)\right\} \end{aligned}$$

Wegen der allgemeinen Kovarianz der Gleichungen (1) können wir statt x_1 (für das wir wieder einfach x schreiben) eine beliebige Funktion von x einführen, d. h. wir können z. B. $f_1(x) = 1$ setzen, womit $q_1 = 0$ wird. Damit vereinfachen sich die R_{ik} zu:

$$(8) \qquad \begin{aligned} R_{11} &= \frac{dq_2}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dq_4}{dx} + \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{4}q_4^2, \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{f_2}{f_1}\left\{\frac{1}{2}\frac{dq_2}{dx} + \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{4}q_2 q_4\right\} - 1, \\ R_{44} &= -\frac{f_4}{f_1}\left\{\frac{1}{2}\frac{dq_4}{dx} + \frac{1}{2}q_2 q_4 + \frac{1}{4}q_4^2\right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in die Feldgleichungen (1) ein (wo R im Falle orthogonaler Koordinaten gleich $\frac{1}{g_{11}}R_{11} + \frac{1}{g_{22}}R_{22} + \frac{1}{g_{33}}R_{33} + \frac{1}{g_{44}}R_{44}$ wird), so erhalten wir:

$$(9) \qquad \begin{aligned} 2q_2' + q_4' + \frac{1}{2}q_2^2 + \frac{1}{2}q_4^2 - q_2 q_4 + 2/f_2 &= 0, \\ -q_4' + \frac{1}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_4^2 \qquad\qquad - 2/f_2 &= 0, \\ 2q_2' - q_4' + \frac{3}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_4^2 - q_2 q_4 - 2/f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen muß eine eine Folge der beiden anderen sein; in der Tat ist die mittlere Gleichung die halbe Differenz aus der ersten und letzten. Addieren wir die ersten beiden Gleichungen und nehmen die zweite dazu, so erhalten wir die beiden unabhängigen Gleichungen

$$(10') \qquad 2q_2' + q_2^2 - q_2 q_4 = 0,$$

$$(10'') \qquad q_4' + \frac{1}{2}q_4^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + 2/f_2 = 0.$$

Für die weitere Integration nehmen wir zunächst den Fall zweier gleichen Massenpunkte vorweg. Aus Gleichung (10′) folgt nämlich, daß q_2 entweder überall oder nirgends Null ist. Ist es nämlich an irgendeiner Stelle Null, so ist $q_2 = 0$ eine Lösung von (10′) und bekanntlich die einzige, denn q_4 bleibt überall endlich, weil f_4 stets positiv ist. Nun ist $q_2 = f_2'/f_2$, es folgt also, daß f_2, wenn es nicht konstant ist, jedenfalls beständig zunehmen oder beständig abnehmen muß. Haben wir nun zwei gleiche Massen und legen den Punkt $x = 0$ in die Mitte, so folgt aus der Symmetrie, daß für $x = 0$ $q_2 = 0$ sein muß. Also ist in diesem Falle $f_2 = F_2 =$ konstant. Setzen wir dies in (10″) ein, so folgt für q_4

$$q_4' + \frac{1}{2} q_4^2 = -2/F_2,$$

woraus wir durch Integration

$$q_4 = \frac{-2}{\sqrt{F_2}} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{F_2}}$$

und

$$f_4 = F_4 \cos^2 \frac{x}{\sqrt{F_2}} \qquad (F_4 = \text{Integrationskonstante})$$

erhalten.

Damit ist das Gravitationsfeld im Falle zweier gleichen Massen bestimmt. Wir bemerken, daß es wesentlich ist, daß wir die Gleichungen $R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0$ benutzt haben. Die ursprünglichen Einsteinschen Gleichungen $R_{ik} = 0$ lassen nämlich eine zu $x = 0$ symmetrische Lösung nicht zu. Wäre nämlich für $x = 0$ $q_4 = 0$, so würde genau wie oben aus $R_{44} = 0$ für alle Werte von x $q_4 = 0$ folgen (siehe dritte Gleichung (8)), dann durch die gleiche Schlußweise $q_2 = 0$ (erste Gleichung (8)), was zusammen der Gleichung $R_{22} = 0$ (zweite Gleichung (8)) widersprechen würde.

Die Integration der Gleichungen (10′), (10″) im allgemeinen Falle verschiedener Massen erhalten wir am einfachsten, wenn wir statt f_2 und f_4 die neuen Unbekannten

$$w_2 = \sqrt{f_2} \quad \text{und} \quad w_4 = \sqrt{f_4} \tag{11}$$

einführen. Es wird dann

$$\begin{aligned}
w_2' &= \frac{1}{2}\frac{f_2'}{\sqrt{f_2}}, & w_4' &= \frac{1}{2}\frac{f_4'}{\sqrt{f_4}},\\
q_2 &= \frac{f_2'}{f_2} = 2\frac{w_2'}{w_2}, & q\ \ & \frac{f_4'}{f_4} = 2\frac{w_4'}{w_4},\\
q_2' &= 2\frac{w_2''}{w_2} - 2\frac{w_2'^2}{w_2^2}, & q_4' &= 2\frac{w_4''}{w_4} - 2\frac{w_4'^2}{w_4},\\
q_2' + \frac{1}{2}q_2^2 &= 2\frac{w_2''}{w_2}, & q_4' + \frac{1}{2}q_4^2 &= 2\frac{w_4''}{w_4}
\end{aligned} \tag{12}$$

Damit wird (10′)

$$4\frac{w_2''}{w_2} - 4\frac{w_2' w_4'}{w_2 w_4} = 0$$

oder integriert

(13) $$w_4 = C_4 w_2' \quad (C_4 = \text{Integrationskonstante}).$$

Die Gleichung (10″) wird dann

$$2\frac{w_4''}{w_4} - 2\left(\frac{w_3}{w_2}\right)^2 + \frac{2}{w_2^2} = 0$$

oder

$$\frac{w_2'''}{w_2} - \left(\frac{w_2'}{w_2}\right)^2 + \frac{1}{w_2^2} = 0$$

Schreiben wir dies

$$w_2^2 w_2''' - w_2'^3 = - w_2',$$

so liefert eine direkte Integration

(14) $$w_2^2 w_2'' - w_2 w_2'^2 = - w_2 + C_1 \quad (C_1 = \text{Integrationskonstante}).$$

Multiplizieren wir (14) mit $\frac{w_2'}{w_2^4}$, so ergibt sich

$$\frac{w_2'}{w_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{w_2'}{w_2}\right) = - \frac{w_2'}{w_2^3} + C_1 \frac{w_2'}{w_2^4}$$

und durch abermalige Integration

(15) $$\frac{1}{2}\left(\frac{w_2'}{w_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{w_2^2} - \frac{C_1}{3\, w_2^3} + C_2 \quad (C_2 = \text{Integrationskonstante}),$$

d. h.

$$w_2'^2 = 1 - \frac{2\, C_1}{3\, w_2} + 2\, C_2 w_2^2.$$

Das Resultat dieser Integration erhalten wir am einfachsten in Parameterform, indem wir w_2, wofür wir einfach w schreiben, als Parameter beibehalten. Es wird dann mit anderer Bezeichnung der Integrationskonstanten:

(16) $$\begin{aligned} x &= \int \frac{dw}{\sqrt{1 + \frac{A}{w} + B w^2}}, \\ f_2 &= w^2, \\ f_4 &= C^2\left(1 + \frac{A}{w} + B w^2\right). \end{aligned}$$

3. Bewegung eines Massenpunktes im statischen Felde der beiden Massen.

Befindet sich außer den beiden Massen M_1 und M_2 noch ein Massenpunkt (Planet) P im Felde, dessen Masse so klein ist, daß sie das Feld nicht beeinflußt, so bewegt sich dieser längs einer geodätischen Linie der vierdimensionalen Welt. Wir integrieren zunächst den Spezialfall $\vartheta = \pi/2$,

d. h. die Bewegung in der „Äquatorebene", und werden dann sehen, daß durch passende Wahl der Koordinaten der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden kann.

Die Gleichungen der geodätischen Linie in der vierdimensionalen Welt

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \tag{17}$$

werden in unserem Falle, mit $\vartheta = \pi/2$, $\frac{d\vartheta}{ds} = 0$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{f_2'}{f_1} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{f_4'}{f_1} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \tag{18'}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = - \frac{f_2'}{f_2} \frac{dx}{ds} \frac{d\varphi}{ds}, \tag{18''}$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = - \frac{f_4'}{f_4} \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds}, \tag{18'''}$$

$$1 = f_4 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - f_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - f_2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \tag{18''''}$$

Die beiden mittleren Gleichungen liefern durch direkte Integration die beiden intermediären Integrale

$$f_2 \frac{d\varphi}{ds} = \omega = \text{konst.}, \qquad f_4 \frac{dt}{ds} = \gamma = \text{konst.} \tag{19}$$

Eliminieren wir dt und ds mit Hilfe von (19) aus (18''''), so erhalten wir die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$1 = \frac{\gamma^2}{f_4} - \frac{\omega^2}{f_2^2} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 - \frac{\omega^2}{f_2} \tag{20}$$

oder

$$\varphi = \omega \int \frac{\sqrt{f_4}\, dx}{\sqrt{f_2 (\gamma^2 f_2 - \omega^2 f_4 - f_2 f_4)}} \tag{21}$$

Auch diese Gleichung lösen wir am besten in Parameterform, indem wir $w = \sqrt{f_2}$ als Parameter nehmen und (13) und (16) berücksichtigen; wir erhalten

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= C_4\, \omega \int \frac{dw}{\sqrt{\gamma^2 w^4 - C_4^2 (\omega^2 + w^2)(w^2 + Aw + Bw^4)}}, \\ x &= \int \frac{dw}{\sqrt{1 + \frac{A}{w} + Bw^3}}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Eine besondere Betrachtung erfordert hier der Fall zweier gleichen Massenpunkte, für den, wie wir sahen, $f_2 = F_2 =$ konstant wird, so daß $\sqrt{f_2}$

nicht als Parameter genommen werden kann. Legen wir den Punkt $x = 0$ wieder in die Mitte zwischen beide Massen, so wird

$$f_2 = F_2 = \text{konst.}, \qquad f_4 = F_4 \cos^2 \frac{x}{\sqrt{F_2}}.$$

Setzen wir dies in (21) ein und integrieren, so ergibt sich

$$\sin \frac{x}{\sqrt{F_2}} = \sqrt{\frac{\gamma^2 F_2 - F_4(\omega^2 + F_2)}{F_4(\omega^2 + F_2)}} \sin\left(\frac{\sqrt{F_2 + \omega^2}}{\omega}(\varphi - \varphi_0)\right) \tag{23}$$

$(\varphi_0 = \text{Integrationskonstante})$.

Die Bahnkurven liegen also vollständig symmetrisch zu den beiden Massen M_1 und M_2. Aus dieser Symmetrie des allgemeinen Integrals folgt, daß die unsymmetrischen Kreisbahnen $x = x_0 = \text{konst.}$, die man erhält, wenn die Integrationskonstanten der Gleichung

$$\gamma^2 F_2 = (\omega^2 + F_2) F_4 \cos^2 \frac{x_0}{\sqrt{F_2}}$$

genügen, instabile Bahnen sind.

4. Diskussion der Resultate.

Das wesentliche Resultat unserer Betrachtung ist eigentlich schon in der *Koordinatenwahl* und dem Ansatze für das Linienelement enthalten. Daß die nachfolgende Rechnung nicht überflüssig war, zeigt der Umstand, daß wir für den Fall gleicher Massen aus den ursprünglichen Einsteinschen Gleichungen keine symmetrische Lösung erhalten konnten. In der Rechnung liegt also erst die Bestätigung des Ansatzes. Als Resultat erhalten wir nun das Folgende: Alle Kurven, für die ϑ und φ konstant sind, also nur x variiert (in der Figur die Kreise durch C_1 und C_2), sind in dem dreidimensionalen Raume kürzeste Linien (wir bezeichnen solche als „geodätische Raumkurven" zum Unterschied von den „geodätischen Weltlinien" des vierdimensionalen Raumes, die die Planetenbahnen sind); sie haben zwischen M_1 und M_2 alle die gleiche Länge. Das können wir auch folgendermaßen aussprechen: ziehen wir von M_1 aus die geodätischen Raumkurven, welche auf der Oberfläche von M_1 senkrecht stehen, so münden sie sämtlich bei gleicher Länge normal auf der Oberfläche von M_2. Ein Beobachter auf der einen der beiden Kugeln würde also die andere Kugel als Himmelskugel über sich erblicken. Im Falle gleicher Massen hätten die beiden Kugeln „Erdkugel" sowohl als „Himmelskugel" gleiche Oberfläche $4\pi F_2$, desgleichen alle dazwischen liegenden konzentrischen Kugeln. Am einfachsten übersieht man alle Verhältnisse, wenn man x, ϑ und φ als sphärische Polarkoordinaten auffaßt, d. h. den Raum auf den Zwischenraum zwischen zwei konzentrischen Kugeln abbildet. So erkennen wir auch, daß wir die Koordinaten stets so legen können, daß die „Äquatorebene“ durch einen vorgegebenen Punkt geht und eine vorgegebene Richtung enthält. Bewegt sich also ein Planet im Felde, so können wir stets voraussetzen, daß seine Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit in die Ebene $\vartheta = \pi/2$ fallen; die Rechnung des vorigen Abschnittes zeigt dann, daß er dauernd in dieser Ebene bleibt. In dieser „Ebene“ liegt stets auch die Masse M_2, weil jede von M_1 ausgehende geodätische Raumkurve M_2 trifft. Es führt also zu keinem neuen Resultat, wenn wir die Bewegungen in verschieden orientierten Ebenen untersuchen, da sie in allen Ebenen die gleichen sind.

Es gibt auch keine Rotation von P um die Verbindungslinie von M_1 und M_2, denn es geht durch jeden Raumpunkt eine kürzeste Verbindung von M_1 und M_2.

Es wird ferner eine Selbstverständlichkeit, wenn wir die Gleichwertigkeit einer Rotation von P relativ zu M_1 und M_2 mit einer Rotation von M_2 und M_1 relativ zu P feststellen, denn die letztere ist nicht anders zu definieren als dadurch, daß hierbei der Punkt P relativ zu dem von M_1 und M_2 mitgeführten metrischen Felde eine gleichförmige Rotation ausführt. Es ist demgemäß auch nur ein Unterschied der Ausdrucksweise, ob wir uns eine Zentrifugalkraft, die die Entfernung von P zu M_1 und M_2 konstant hält, durch Rotation von P um M_1 und M_2 oder durch Rotation von M_1 und M_2 um P entstanden denken. Ausdrücklich bemerken wir noch, daß im Rahmen unserer Untersuchung eine Rotation von M_2 um M_1 und P nicht betrachtet werden kann, d. h. eine solche, bei der der Planet P stets auf der gleichen, von M_1 ausgehenden geodätischen Raumkurve liegt, bei der aber nicht ständig die von M_1 ausgehenden geodätischen Raumkurven in die gleichen materiellen Oberflächenteilchen von M_2 münden würden. Diese Bewegung, die wir auch als eine Rotation von M_2 um sich selbst bei festgehaltenem M_1 und P auffassen können, ist „nicht-statisch“.

(Eingegangen am 15. 9. 1921.)