Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln.

(Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg.)

Poisson hat das Problem, die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln zu finden, in zwei berühmten Arbeiten *) behandelt und *Plana* hat die von *Poisson* dort gegebenen Formeln weiter entwickelt **). Man kann das Problem als aus zwei Theilen bestehend betrachten; in dem ersten ist eine Function zu ermitteln, die *Poisson* durch $f(x)$ bezeichnet, und die das Potential der auf der einen Kugel verbreiteten Elektricität für alle Punkte der Centrallinie angiebt, in dem zweiten ist aus diesem $f(x)$ eine Function zu bilden, die *Poisson* $\varphi(u, x)$ nennt, die das Potential derselben Elektricität für Punkte ausserhalb der Centrallinie darstellt, und aus der mit Leichtigkeit die Dichtigkeit der Elektricität in allen Punkten der Kugel ermittelt werden kann. Zur Berechnung derjenigen Grössen, welche den Physiker zunächst interessiren, genügt aber die Kenntniss jener Function $f(x)$; es ist nämlich, wenn der Radius der Kugel $=1$ gesetzt wird, $f(0)$ die ganze Elektricitätsmenge, welche auf der Kugel sich befindet, es giebt ferner der Ausdruck $\frac{1}{2\pi}\left(f(x)+2x\frac{df(x)}{dx}\right)$, wenn in ihm $x=1$ oder $=-1$ gesetzt wird, die Dichtigkeit der Elektricität in dem einen oder dem anderen der beiden Punkte der Kugel an, welche in der Centrallinie liegen; und auch die Kraft, mit der die beiden Kugeln einander anziehen oder abstossen, lässt sich durch $f(x)$ ausdrücken. Die Betrachtungen, welche im Folgenden auseinandergesetzt werden sollen, beziehen sich nur auf diese Function $f(x)$. *Poisson* hat für dieselbe eine Reihe gefunden, welche immer convergirt, und zwar um so schneller, je grösser der Abstand der beiden Kugeln ist. Dieselbe Reihe habe ich auf einem Wege abgeleitet, der mir den Vorzug vor dem von *Poisson* benutzten zu verdienen scheint. Die Reihe hat Aehnlichkeit mit gewissen Reihen, die in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommen; ich habe

---

*) Mém. de la classe des sc. math. et ph. de l'Institut imperial de France, année 1811, première et seconde partie.

**) Memorie della reale accademia delle scienze di Torino. tomo VII, 1845.

bemerkt, dass einige von $f(x)$ abhängige Grössen sich durch elliptische Functionen in geschlossenen Ausdrücken darstellen lassen. Zu diesen gehört die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der auf der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt, für den Fall, dass das Gesammt-Potential in beiden Kugeln denselben Werth hat. In den Abhandlungen von *Poisson* und von *Plana* finden sich zwei verschiedene Ausdrücke für den Werth, den diese Dichtigkeit annimmt, wenn der Abstand der beiden Kugeln unendlich klein ist und ihre Radien gleich sind. *Poisson* giebt dieselbe als von der Ordnung von δ^4, *Plana* als von der Ordnung von δ^6 an, wo δ eine gewisse negative Grösse bezeichnet, deren Quadrat von der Ordnung des Abstandes der Kugeln ist. Der Ausdruck durch elliptische Functionen zeigt, dass die in Rede stehende Dichtigkeit von der Ordnung von

$$\frac{1}{\delta^4} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}$$

ist.

Die erwähnten Resultate und andere, die sich auf den Fall beziehen, dass die beiden Kugeln einander sehr nahe stehen, sind von *Poisson* und *Plana* aus einer Reihe für $f(x)$ abgeleitet, die nach aufsteigenden Potenzen von δ fortschreitet. Diese Reihe ist aus der ursprünglichen, immer convergirenden, Reihe für $f(x)$ dadurch gebildet, dass die letztere in ein bestimmtes Integral verwandelt und dieses nach aufsteigenden Potenzen von δ entwickelt ist. Es sind indessen nur die ersten Glieder der Reihe berechnet, das allgemeine Glied derselben ist nicht aufgestellt, es konnte daher auch nicht untersucht werden, ob sie convergirt, und welche Bedeutung sie hat, wenn sie nicht convergirt. Bei ihrer Ableitung ist in einem Integral von der Form

$$\int_0^\infty \frac{\sin \delta t \, dt}{(e^{\pi t}-1)(1+\alpha \sin^2 \delta t)}$$

für

$$\frac{1}{1+\alpha \sin^2 \delta t}$$

die Entwickelung dieses Ausdrucks nach aufsteigenden Potenzen von t gesetzt, eine Entwickelung, welche nicht für alle Werthe von t, über welche zu integriren ist, convergirt; es hätte einer besonderen Untersuchung bedurft, in wiefern diese Entwickelung benutzt werden darf; eine solche ist nicht geführt. Ich habe daher auf einem anderen, als dem von *Poisson* eingeschlagenen Wege eine Reihe abzuleiten gesucht, die bei kleinem Abstande der Kugeln den Werth von $f(x)$ angiebt. Ich bin so zu einer Reihe gelangt, die auch nach aufsteigenden Potenzen von ϑ fortschreitet, bei der aber die Coefficienten dieser Potenzen noch von ϑ abhängen; das allgemeine Glied der Reihe lässt sich mit Leichtigkeit angeben; sie ist nur eine semiconvergente, doch erlaubt sie $f(x)$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zu berechnen, wenn man eine gewisse Transformationsgleichung zu Hülfe zieht, die für $f(x)$ gilt; ohne Zuziehung dieser giebt sie in dem Falle, dass der Abstand der Kugeln unendlich klein ist, den Werth von $f(x)$ genau bis auf eine unendlich kleine Grösse.

1.

Es sei a der Radius der ersten, b der der zweiten Kugel, c die Entfernung ihrer Mittelpunkte, die grösser als $a+b$ vorausgesetzt wird, h das Potential aller freien Elektricität in der ersten, g das in der zweiten Kugel. Weiter sei $f(x)$ das Potential der auf der ersten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb dieser Kugel, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der ersten Kugel liegt. Dann ist:

$$f(x)=\int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+x^2-2ax\cos\vartheta}},$$

wo e eine Function von ϑ bedeutet. Das Potential derselben Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb der ersten Kugel, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der ersten, auf der Seite des Mittelpunktes der zweiten Kugel liegt, ist dabei:

$$=\int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+x'^2-2ax'\cos\vartheta}}$$

oder

$$=\frac{a}{x'}\int_0^\pi \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a^2}{x'}\right)^2-2a\frac{a^2}{x'}\cos\vartheta}}$$

oder

$$=\frac{a}{x'}f\left(\frac{a^2}{x'}\right).$$

Ist $F(x)$ das Potential der auf der zweiten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb derselben, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der zweiten Kugel liegt, so findet man ebenso das Potential der

12*

Elektricität der zweiten Kugel in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb dieser, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der zweiten, auf der Seite des Mittelpunktes der ersten Kugel liegt,

$$= \frac{b}{x'}F\left(\frac{b^2}{x'}\right).$$

Für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$ muss daher

$$f(x)+\frac{b}{c-x}F\left(\frac{b^2}{c-x}\right) = h$$

und für alle Werthe von x zwischen $-b$ und $+b$

$$F(x)+\frac{a}{c-x}f\left(\frac{a^2}{c-x}\right) = g$$

sein. Daraus folgt, dass, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ liegt, $f(x)$ der Gleichung genügt:

$$f(x)-\frac{ab}{c^2-b^2-cx}f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right) = h-g\frac{b}{c-x}.$$

Macht man

$$(1.)\quad f(x) = hf_1(x)-gf_2(x),$$

und setzt der Bequemlichkeit wegen

$$a = 1,$$

so hat man hiernach zur Bestimmung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Gleichungen:

$$(2.)\quad f_1(x)-\frac{b}{c^2-b^2-cx}f_1\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = 1$$

und

$$(3.)\quad f_2(x)-\frac{b}{c^2-b^2-cx}f_2\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = \frac{b}{c-x}.$$

Die Gleichung

$$\frac{c-x}{c^2-b^2-cx} = x$$

oder

$$(4.)\quad x^2-\left(c+\frac{1-b^2}{c}\right)x+1 = 0$$

hat zwei reelle positive Wurzeln, von denen die eine zwischen 0 und 1, die andere zwischen 1 und c liegt; die kleinere Wurzel sei ξ, die grössere also $\frac{1}{\xi}$; dann gilt die Gleichung (2.) — um von dieser zuerst zu sprechen — auch für $x=\xi$, und giebt:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{1-\frac{b}{c^2-b^2-c\xi}}.$$

Setzt man:

$$x_1 = \frac{c-x}{c^2-b^2-cx},$$

$$x_2 = \frac{c-x_1}{c^2-b^2-cx_1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n = \frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}},$$

so kann man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (2.) $f_1(x)$ durch $f_1(x_n)$ ausdrücken; es wird sich zeigen lassen, dass, wenn n grösser und grösser gemacht wird, x_n sich dem Werthe ξ und also $f_1(x_n)$ sich dem Werthe $f_1(\xi)$ nähert; daraus wird dann folgen, dass $f_1(x)$ direct durch wiederholte Anwendung der Gleichung (2.) gefunden werden kann.

Um die ausgesprochene Behauptung zu beweisen, setze man

$$z = \frac{1+Ax}{1+Bx},$$

$$z_n = \frac{1+Ax_n}{1+Bx_n},$$

und verfüge über die Constanten A und B so, dass

$$z_n = q^2 z_{n-1}$$

wird, wo q eine dritte zu bestimmende Constante bedeutet. Schreibt man die Gleichung zwischen x_n und x_{n-1}:

$$x_n = \frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+\delta x_{n-1}},$$

so muss dann für jeden Werth von x_{n-1}

$$\frac{\gamma+\delta x_{n-1}+A(\alpha+\beta x_{n-1})}{\gamma+\delta x_{n-1}+B(\alpha+\beta x_{n-1})} = q^2\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}}$$

oder

$$\frac{\gamma+A\alpha+(\delta+A\beta)x_{n-1}}{\gamma+B\alpha+(\delta+B\beta)x_{n-1}} = q^2\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}}$$

sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn A und B gleich den Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\alpha\lambda^2+(\gamma-\beta)\lambda-\delta = 0$$

und

$$q^2 = \frac{\gamma+A\alpha}{\gamma+B\alpha}$$

gesetzt werden. Die quadratische Gleichung ist:

$$\lambda^2+\left(c+\frac{1-b^2}{c}\right)\lambda+1 = 0;$$

vergleicht man sie mit der Gleichung (4.), so sieht man, dass ihre Wurzeln

$$-\xi \text{ und } -\frac{1}{\xi}$$

sind. Man kann daher setzen:

$$(5.)\qquad z = \frac{1-\frac{x}{\xi}}{1-\xi x},$$

woraus sich, bei Rücksicht auf die Gleichung (4.) ergiebt:

$$(6.)\qquad q^4 = \xi^2\frac{c-\frac{1}{\xi}}{c-\xi}.$$

Erwägt man, dass $\xi<1$ und $\frac{1}{\xi}<c$ ist, so folgt hieraus, dass q^4 positiv und <1 ist, und dass daher z_n bei wachsenden n sich der Null nähert; weiter findet man aber:

$$\xi-x_n = \frac{\xi(1-\xi^2)z_n}{1-\xi^2 z_n},$$

und hieraus ergiebt sich, dass x_n bei wachsendem n sich dem Werthe ξ nähert.

Die Variable z, die zunächst eingeführt wurde, um diese Behauptung zu beweisen, soll nun in die Gleichung (3.) eingesetzt werden. Ich mache

$$f_1(x) = (1-\xi^2 z)\varphi_1(z),$$

wo der Factor $1-\xi^2 z$ den Zweck hat, zu bewirken, dass in der zwischen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_1(q^4 z)$ entstehenden Gleichung das Verhältniss der Coefficienten dieser beiden Grössen von z unabhängig wird. Berücksichtigt man, dass nach (6.) und (4.):

$$q^2 = \frac{b}{c^2-b^2-c\xi} = \frac{b\xi}{c-\xi},$$

so findet man aus (2.) diese Gleichung:

$$(7.)\qquad \varphi_1(z)-q^2\varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1-\xi^2 z}.$$

Setzt man entsprechend

$$f_2(x) = (1-\xi^2 z)\varphi_2(z),$$

so ergiebt sich aus (3.) auf ähnliche Weise:

$$(8.)\qquad \varphi_2(z)-q^2\varphi_2(q^4 z) = \frac{q^2}{\xi}\,\frac{1}{1-q^4 z}.$$

Die Gleichungen (7.) und (8.) geben durch wiederholte Anwendung unmittelbar für $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ die convergirenden Reihen:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi^2 z} + \frac{q^2}{1-q^4\xi^2 z} + \frac{q^4}{1-q^8\xi^2 z} + \cdots$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^4 z} + \frac{q^4}{1-q^8 z} + \frac{q^6}{1-q^{12} z} + \cdots\right).$$

Entwickelt man hier die einzelnen Glieder nach Potenzen von z, so erhält man die Reihen:

$$(9.)\qquad \varphi_1(z) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{\xi^2 z}{1-q^6} + \frac{\xi^4 z^2}{1-q^{10}} + \cdots$$

$$(10.)\qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6 z}{1-q^6} + \frac{q^{10} z^2}{1-q^{10}} + \cdots\right),$$

welche indessen nur convergiren, so lange z unterhalb gewisser Grenzen liegt

Diese Gleichungen sind zur Berechnung von $f(x)$ für einen gegebenen Werth von x sehr bequem, falls q nicht nahe an 1 liegt, d. h. falls der Abstand der Kugeln nicht klein ist. Man reducirt dabei $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ mit Hülfe der Gleichungen (7.) und (8.) auf $\varphi_1(q^{4n}z)$ und $\varphi_2(q^{4n}z)$, wo n eine Zahl bedeutet, die um so grösser gewählt wird, je grösser die Genauigkeit ist, die man erreichen will, und je näher der Werth von q der Einheit liegt; man berechnet dann $\varphi_1(q^{4n}z)$ und $\varphi_2(q^{4n}z)$ durch die Reihen (9.) und (10.).

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss von $f(0)$, da dieses die Elektricitätsmenge ausdrückt, welche auf der Kugel sich befindet. Bei der Berechnung dieser hat man zu benutzen, dass für $x = 0$, wie aus (5.) hervorgeht, $z = 1$ ist.

Eine Eigenschaft von $f_2(0)$ möge noch hervorgehoben werden; $f_1(0)$ und $f_2(0)$ sind Functionen von zwei Variabeln, von b und c, oder von ξ und q; in dem Ausdrucke von $f_2(0)$ kommt aber nur eine transcendente Function einer Variabeln vor, da $\xi\varphi_2(1)$ nur von q abhängig ist. Dieses $f_2(0)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung; es ist die Elektricitätsmenge, die auf der Kugel gebunden ist, wenn diese mit der Erde in leitender Verbindung steht, und das Potential in der zweiten Kugel $= -1$ ist, wie aus der Gleichung (1.) hervorgeht.

2.

Die gefundenen Gleichungen sollen jetzt in eine andere Form gebracht werden, welche gewisse Vorzüge vor der angegebenen besitzt.

Man setze

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

wo K und K' die Bedeutung haben, in der *Jacobi* diese Zeichen in seiner Theorie der elliptischen Functionen gebraucht, und

$$(11.)\qquad F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n} e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-q^{2n} e^{-\frac{2u\pi}{K}}}.$$

Diese für jeden Werth von u convergirende Reihe ergiebt:

$$(12.)\qquad \begin{cases} F(u-K') = F(u) + \dfrac{2\pi}{K}\dfrac{e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-e^{-\frac{2u\pi}{K}}}, \\ F(u-iK) = F(u), \end{cases}$$

wo $i = \sqrt{-1}$, und die folgende Reihe, die convergirt, wenn der reelle Theil von $u > -K'$ ist:

$$(13.)\qquad F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} e^{-\frac{2u\pi n}{K}}.$$

Die in dem vorigen Abschnitt gefundenen Functionen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ drücken sich folgendermassen durch diese Function $F(u)$ aus:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}}\frac{K}{4\pi}\Big(F(u) - F\Big(u+i\frac{K}{2}\Big)\Big),$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},$$

und

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}}\frac{K}{4\pi}\Big(F(u) - F\Big(u+i\frac{K}{2}\Big)\Big),$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}.$$

Die Ausdrücke, welche sich hiernach für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ergeben, lassen sich durch die *eine* Gleichung aussprechen:

$$(14.)\qquad f(x) = \Big(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\Big)\frac{K}{4\pi}\Big(F(u) - F\Big(u+i\frac{K}{2}\Big)\Big),$$

welche gilt, wenn man den Zeichen f und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(15.)\qquad u_1 = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},\quad u_2 = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}$$

setzt.

Macht man

$$-\log \mathfrak{t} = \frac{u\pi}{K},$$

bezeichnet die dem u_1 und u_2 entsprechenden Werthe von $\mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, und setzt in demselben Sinne, in dem die Gleichung (14.) gilt:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{s}} - \xi\sqrt{s}\right)G(\mathfrak{t}),$$

so findet man aus (12.), (13.), (14.) und (15.):

$$(16.)\quad \begin{cases} G(\mathfrak{t}) = G(q\mathfrak{t}) + \dfrac{q^2\mathfrak{t}^2}{1-q^4\mathfrak{t}^4}, \\ G(\mathfrak{t}) = \sum\limits_1^\infty \dfrac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\mathfrak{t}^{4n-2}, \\ \mathfrak{t}_1 = \dfrac{\sqrt{\xi}\sqrt[4]{s}}{q}, \quad \mathfrak{t}_2 = \sqrt[4]{s}, \\ s = \dfrac{1-\dfrac{x}{\xi}}{1-\xi x}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den im vorigen Abschnitt entwickelten überein und können, wie jene, zur numerischen Berechnung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ benutzt werden.

Ich will entsprechende Formeln zusammenstellen zur Berechnung der Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der in der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt. Man setze:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) + 2x\frac{df_1(x)}{dx} \\ y_2 &= f_2(x) + 2x\frac{df_2(x)}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ für } x = 1,$$

dann ist die bezeichnete Dichtigkeit:

$$= \frac{1}{2\pi}(hy_1 - gy_2).$$

Bildet man mit Hülfe der Gleichung (14.) die Ausdrücke von y_1 und y_2, und bemerkt, dass zufolge (15.) die Differenz $u_1 - u_2$ von s unabhängig ist, so sieht man, dass auch diese zwei Ausdrücke sich durch *eine* Gleichung aussprechen lassen, nämlich durch die Gleichung:

$$(17.)\quad y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}} i\frac{K^2}{8\pi^2}\left(F'(u) - F'\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

in welcher $F'(u)$ den Differentialquotienten von $F(u)$ nach u bezeichnet, und welche gilt, wenn man den Zeichen y und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(18.)\quad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{K}{2\pi}\log\dfrac{\sqrt{\xi}}{q^2} - i\dfrac{K}{4}, \\ u_2 = \dfrac{K}{2\pi}\log\sqrt{\xi} - i\dfrac{K}{4} \end{cases}$$

setzt *).

Macht man

$$-\log \mathfrak{t} = \frac{u\pi}{K} + i\frac{\pi}{4}$$

und

$$(19.)\quad \begin{cases} y = \dfrac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}H(\mathfrak{t}), \\ \text{so folgt:} \\ H(\mathfrak{t}) = H(q\mathfrak{t}) + \dfrac{q^2\mathfrak{t}^2(1-q^4\mathfrak{t}^4)}{(1+q^4\mathfrak{t}^4)^2}, \\ H(\mathfrak{t}) = \sum_1^{\infty}(-1)^{m+1}(2m-1)\dfrac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}}\mathfrak{t}^{4m-2}, \\ \mathfrak{t}_1 = \dfrac{\sqrt[4]{\xi}}{q}, \quad \mathfrak{t}_2 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\xi}}, \end{cases}$$

wo in der Gleichung für y wieder den Zeichen y und $\mathfrak{t}$ der Index 1 oder der Index 2 zu geben ist.

3.

Die durch die Gleichung (11.) definirte Function F steht in einem Zusammenhange mit der von *Jacobi* durch Z bezeichneten elliptischen Function. Vergleicht man die Entwickelung dieser mit der in (11.) angegebenen Reihe, so findet man:

$$(20.)\quad F(u) - F(-u-K') = 2iZ(2iu+iK');$$

durch Differentiation folgt hieraus, wenn man durch E das ganze elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet:

$$(21.)\quad F'(u) + F'(-u-K') = 4\frac{E}{K} - 4\Delta^2\mathrm{am}(2iu+iK').$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lassen sich für $f_1(1)+f_2(1)$ und y_1-y_2

---

*) Eine ähnliche Gleichung lässt sich aufstellen für die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte, in welchem die Kugel zum zweiten Male von der Centrallinie geschnitten wird.

geschlossene Ausdrücke finden. Für $x=1$ ist nach (18.):

$$u_1 = -u_2-K'-i\frac{K}{2},$$

und daher nach (14.) und (17.):

$$f_1(1)+f_2(1) = -i\frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{4\pi}\left\{F(u_2)-F\left(u_2+i\frac{K}{2}\right)+F\left(-u_2-K'-i\frac{K}{2}\right)-F(-u_2-K')\right\},$$

$$y_1-y_2 = -i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\frac{K^2}{8\pi^2}\left\{F'(u_2)-F'\left(u_2+i\frac{F}{2}\right)-F'\left(-u_2-K'-i\frac{K}{2}\right)+F'(-u_2-K')\right\},$$

also nach (20.) und (21.):

$$f_1(1)+f_2(1) = \frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{2\pi}\{Z(2iu_2+iK')-Z(2iu_2+iK'-K)\},$$

$$(22.)\qquad y_1-y_2 = \tfrac{1}{2}i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\frac{K^2}{\pi^2}\{\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK')-\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK'-K)\};$$

dabei iet

$$u_2 = \frac{K}{2\pi}\log\sqrt{\xi}-i\frac{K}{4}.$$

Man kann hiernach für $f_1(1)+f_2(1)$ und für y_1-y_2 Reihen finden, die um so schneller convergiren, je näher q der 1 kommt. Ich beschränke mich darauf, die Reihe für y_1-y_2 hier anzugeben. Benutzt man, dass

$$\Delta^2\operatorname{am}(iu+K,k) = 1-\Delta^2\operatorname{am}(u+K',k')$$

ist, und setzt

$$q_1 = e^{-\frac{\pi K}{K'}}\quad \text{d. h.}\quad \log q_1 = \frac{\pi^2}{\log q},$$

und

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\frac{\log\xi}{\log q},$$

so findet man:

$$y_1-y_2 = \frac{\pi^2}{(\log q)^2}\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}\sin\alpha+2\frac{\sqrt{q_1^4}}{1+q_1^2}\sin 2\alpha+3\frac{\sqrt{q_1^9}}{1+q_1^3}\sin 3\alpha+\cdots\right\}.$$

Sind die Radien der beiden Kugeln gleich, d. h. ist $b=1$, so ist nach (4.)

$$\xi+\frac{1}{\xi} = c,$$

also nach (6.)

$$\xi = q$$

und daher

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;$$

es wird dann also:

$$(23.)\qquad y_1-y_2 = \frac{\pi^2}{(\log q)^2}\frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}-3\frac{\sqrt{q_1^9}}{1+q_1^3}+\cdots\right\}.$$

13 *

Wendet man auf diesen Fall die Gleichung (22.) unmittelbar an und bemerkt, dass in ihm

$$u_1 = -\frac{K'+iK}{4}$$

wird, so ergiebt sich:

$$y_1 - y_2 = \frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}} kk' \frac{K^2}{\pi^2}.$$

Nimmt man noch an, dass der Abstand der Kugeln ein unendlich kleiner ist, d. h. dass $1-q$ unendlich klein ist, so giebt die Gleichung (23.) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$y_1 - y_2 = -\frac{4\pi^2}{(\log q)^2} e^{\frac{\pi^2}{2\log q}},$$

oder, wenn man, um das von *Poisson* gebrauchte Zeichen δ einzuführen,

$$2\log q = \delta$$

setzt,

$$y_1 - y_2 = -32\pi^2 \frac{1}{\delta^2} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}.$$

Wie in der Einleitung bereits bemerkt ist, ist diese Grösse von *Poisson* als von der Ordnung von δ^4 gefunden worden, *Plana* hat auf ein Versehen aufmerksam gemacht, welches *Poisson* bei der Herleitung dieses Resultats begangen hat, ist selbst aber zu dem eben so wenig richtigen Schlusse gelangt, dass jene Grösse von der Ordnung von δ^6 ist.

4.

Die in (16.) und (19.) für $G(\xi)$ und $H(\xi)$ angegebenen Reihen convergiren sehr langsam, wenn der Abstand der beiden Kugeln sehr klein ist und in Folge dessen ξ und q nahe $=1$ sind. Für diesen Fall sollen für jene Functionen jetzt neue Reihen abgeleitet werden. Um eine Entwickelung der Function $F(u)$, die zu diesen führen wird, zu finden, gehe ich von der Betrachtung des Doppelproductes

$$\prod_1^m \prod_1^N \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)$$

aus, in dem μ und ν ganze Zahlen bedeuten, die alle Werthe von 1 bis m und von 1 bis N erhalten; dabei sollen m und N unendlich gross, doch N von einer unendlich höheren Ordnung als m sein. Ich suche das Verhältniss dieses Doppelproductes zu demjenigen auf, das man aus ihm erhält, wenn man die oberen Grenzen m und N vertauscht gegen M und n, wo M von derselben Ordnung als N und n von derselben Ordnung als m ist.

Der Logarithmus dieses Verhältnisses ist:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right) - \sum_1^n \sum_{n+1}^M \log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Da die unter dem Zeichen log stehende Grösse unendlich wenig von 1 verschieden ist, so hat man für $\log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$ die convergirende Reihe:

$$u\frac{1}{K'\mu+iK\nu} - \tfrac{1}{2}u^2\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2} - \tfrac{1}{3}u^3\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3} - \cdots$$

Diese Reihe denke ich mir unter die Summenzeichen gesetzt und untersuche einzeln die Glieder, die die verschiedenen Potenzen von u enthalten. Ich gebrauche dabei einige Formeln aus der Theorie der Γ-Functionen, die ich der Uebersichtlichkeit wegen vorausschicken will.

Ist a eine endliche Grösse, h eine unendlich grosse Zahl, so ist *):

$$\frac{a+1.a+2\ldots a+h}{1\;.\;2\;\ldots\;h} = \frac{h^a}{\Gamma(1+a)},$$

und dieselbe Gleichung gilt, wenn a unendlich gross, aber h von unendlich höherer Ordnung als a ist. Es folgt hieraus:

$$(24.)\qquad \sum_1^h \log(a+h) - \sum_1^h \log h - a\log h = -\log\Gamma(1+a).$$

Wendet man diese Gleichung nur auf Fälle an, in denen der reelle Theil von a nicht negativ ist, und wählt die Logarithmen auf der linken Seite so, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen, so ist nach *Lipschitz* **) dabei:

$$(25.)\quad \begin{cases} \log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + a\log a - a + \tfrac{1}{2}\log a + \dfrac{B_1}{1.2}\dfrac{1}{a} - \dfrac{B_2}{3.4}\dfrac{1}{a^3} + \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{\lambda-1}\dfrac{B_\lambda}{2\lambda-1.2\lambda}\dfrac{1}{a^{2\lambda-1}} + V_\lambda. \end{cases}$$

Hier sind die Logarithmen auf der rechten Seite wieder so zu wählen, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen, λ bedeutet eine beliebige Zahl, B_1, B_2, ... sind die *Bernoullischen* Zahlen, d. h. es ist:

---

*) *Gauss:* Circa seriem infinitam etc., Commentationes soc. reg. sc. Gottingensis rec. vol. II, 1811—13.

**) Dieses Journal, Bd. 56.

$$\tfrac{1}{2}x\,\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}x = 1-B_1\frac{x^2}{1.2}-B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}-B_3\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\cdots,$$

oder

$$B_1=\tfrac{1}{6},\quad B_2=\tfrac{1}{30},\quad B_3=\tfrac{1}{42},\quad \ldots;$$

weiter ist:

$$(26.)\qquad V_\lambda = \frac{2}{(2\pi)^{2\lambda+2}}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^{2\lambda}}\int_0^\infty \frac{y^{2\lambda}e^{-ay}\,dy}{s^2+\dfrac{y^2}{4\pi^2}}$$

oder

$$(27.)\qquad V_\lambda = \frac{B_{\lambda+1}}{2\lambda+1\,.\,2\lambda+2}\,\frac{1}{\alpha^{2\lambda+1}}(\varepsilon+i\varepsilon'),$$

wo α den reellen Theil von a bedeutet und ε und ε' zwischen -1 und $+1$ liegen.

Die Gleichung (25.) wird zunächst auf Fälle angewendet werden, in denen der reelle oder der imaginäre Theil von a unendlich gross ist. Ist der reelle Theil von a unendlich gross, so zeigt der in (27.) angegebene Werth von V_λ, dass die Gleichung (25.), wenn man in ihr V_λ vernachlässigt, den Werth von $\log\Gamma(1+a)$ genau darstellt bis auf eine Grösse von der Ordnung von $\alpha^{-(2\lambda+1)}$; ist der imaginäre Theil von a unendlich gross, so geben die nicht verschwindenden Glieder der in (25.) aufgestellten Reihe bei Vernachlässigung von V_λ den Werth von $\log\Gamma(1+a)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich mit Hülfe der Gleichung (26.), indem man erwägt, dass die Integrale

$$\int\psi(y)\sin(\beta y)\,dy \quad\text{und}\quad \int\psi(y)\cos(\beta y)\,dy,$$

genommen zwischen irgend zwei von β unabhängigen Grenzen, zwischen denen $\psi(y)$ nicht unendlich wird, sich der Null nähern, wenn β mehr und mehr wächst. Um den Beweis auch auf den Fall auszudehnen, dass der reelle Theil von a verschwindet, hat man dabei noch von der Gleichung:

$$\log\Gamma(1+a) = \log\Gamma(2+a)-\log(1+a)$$

Gebrauch zu machen.

Für die Differentialquotienten von V_λ nach a gelten ähnliche Ausdrücke, als sie für V_λ in (26.) und (27.) angegeben sind; daraus folgt, dass die Reihen, die durch Differentiation aus der in (25.) vorkommenden Reihe entstehen, die Eigenschaften haben, die analog der für diese ausgesprochenen sind.

Sind a und h endlich oder unendlich gross von beliebigen Ordnungen, so hat man:

$$\frac{a+1.a+2\ldots a+h}{1\,.\,2\ldots\ldots h}=\frac{\Gamma(1+h+a)}{\Gamma(1+h)\Gamma(1+a)}$$

und

$$(28.)\quad \sum_1^h\log(a+h)-\sum_1^h\log h=\log\Gamma(1+h+a)-\log\Gamma(1+h)-\log\Gamma(1+a),$$

bei welcher Gleichung die Gleichung (25.) unter denselben Bedingungen gilt, wie bei der Gleichung (24.).

Dieses vorausgeschickt, hat man:

$$\sum_{n+1}^N\frac{1}{K'\mu+iK\nu}=-\frac{i}{K}\sum_1^{N-n}\frac{1}{\nu+n-i\frac{K'}{K}\mu},$$

oder nach (24.), wenn man mit *Gauss*

$$\frac{d\log\Gamma(1+a)}{da}=\psi(a)$$

setzt:

$$\sum_{n+1}^N\frac{1}{K'\mu+iK\nu}=-\frac{i}{K}\log(N-n)+\frac{i}{K}\psi\left(n-i\frac{K'}{K}\mu\right).$$

Benutzt man (25.) und vernachlässigt Glieder, die unendlich klein gegen $\frac{1}{n}$ sind, was erlaubt ist, da diese zu der zu bildenden Doppelsumme nur unendlich wenig beitragen können, so findet man dieselbe Grösse

$$=-\frac{i}{K}\log N+\frac{i}{K}\log\left(n-i\frac{K'}{K}\mu\right)+\frac{i}{2K}\frac{1}{n-i\frac{K'}{K}\mu}.$$

Erwägt man, dass

$$\log\left(n-i\frac{K'}{K}\mu\right)=\log\left(-i\frac{K'}{K}\right)+\log\left(\mu+i\frac{K}{K'}n\right)$$

und

$$\frac{1}{n-i\frac{K'}{K}\mu}=i\frac{K}{K'}\frac{1}{\mu+i\frac{K}{K'}n}$$

ist, so findet man hieraus mit Hülfe von (28.) und (25.):

$$\sum_1^m\sum_{n+1}^N\frac{1}{K'\mu+iK\nu}$$

$$=\frac{i}{K}\left\{-m\log N-(m+\tfrac{1}{2})\log m+m\log\left(-i\frac{K'}{K}\right)+\sum_1^m\log\mu-\tfrac{1}{2}\log 2\pi\right\}$$

$$+\frac{i}{2KK'}\left\{((2m+1)K'+(2n+1)iK)\log\frac{mK'+niK}{K'}-(K'+(2n+1)iK)\log\frac{niK}{K'}\right\},$$

wo alle vorkommenden Logarithmen so zu wählen sind, dass ihre imaginären

Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen. Vertauscht man in dieser Gleichung K mit K', μ mit ν, m mit n, N gegen M, i gegen $-i$ und dividirt sie durch i, so erhält man:

$$\sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{K'\mu+iK\nu}$$

$$= \frac{1}{K'}\left\{n\log M+(n+\tfrac{1}{2})\log n-n\log\left(i\frac{K}{K'}\right)-\sum_1^n\log\nu+\tfrac{1}{2}\log 2\pi\right\}$$

$$+\frac{i}{2KK'}\left\{((2m+1)K'+(2n+1)iK)\log\frac{nK-miK'}{K}-((2m+1)K'+iK)\log\left(-\frac{miK'}{K}\right)\right\}.$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{K'\mu+iK\nu}-\sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{K'\mu+iK\nu}$$

$$= -\frac{i}{K}m\log N+\frac{i}{K}\sum_1^m\log\mu-\frac{i}{K}(m+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'}-\frac{1}{2K'}\log m2\pi$$

$$-\frac{1}{K'}n\log M+\frac{1}{K'}\sum_1^n\log\nu+\frac{1}{K'}(n+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'}-\frac{i}{2K}\log n2\pi.$$

Auf ähnlichem Wege findet man, dass

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2}-\sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2} = \frac{i}{KK'}\log\frac{niK}{mK'}$$

ist, und dass die Ausdrücke:

$$\sum_1^m \sum_{n+1}^N \frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3},\qquad \sum_1^n \sum_{m+1}^M \frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3},$$

so wie diejenigen, die aus diesen entstehen, wenn man für den Exponenten 3 einen höheren setzt, verschwinden.

Hieraus folgt:

$$\frac{iu}{K}\left\{m\log N-\sum_1^m\log\mu+(n+\tfrac{1}{2})\log\frac{iK}{K'}-\frac{iK}{2K'}\log m2\pi\right\}$$

$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log mK'+\log\prod_1^m\prod_1^N\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$$

$$= \frac{u}{K'}\left\{-n\log M+\sum_1^n\log\nu+(n+\tfrac{1}{2})\log\frac{iK}{K'}-\frac{iK'}{2K}\log n2\pi\right\}$$

$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log niK+\log\prod_1^n\prod_1^M\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Addirt man zu dieser Gleichung diejenige, die aus ihr entsteht, wenn man $-i$ für i setzt, dabei aber u ungeändert lässt, so erhält man:

$$
(29.)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u\Big(\frac{1}{K'}\log m 2\pi - \frac{\pi}{K}\big(m+\tfrac{1}{2}\big)\Big) - \frac{u^2\pi}{2KK'} \\
& +\log \prod_1^m \prod_1^N \Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big) \\
= {} & \frac{2u}{K'}\Big(-n\log M + \sum_1^n \log\nu + \big(n+\tfrac{1}{2}\big)\log\frac{K}{K'}\Big) \\
& +\log \prod_1^n \prod_1^M \Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big).
\end{aligned}
\right.
$$

Nun ist aber

$$
\prod_1^N \Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big) = \prod_1^N \frac{\nu - \dfrac{u+K'\mu}{K}i}{\nu - \dfrac{K'\mu}{K}i}
$$

oder nach (24.)

$$
= N^{-\frac{iu}{K}} \frac{\Gamma\Big(1-\dfrac{K'\mu}{K}i\Big)}{\Gamma\Big(1-\dfrac{u+K'\mu}{K}i\Big)}.
$$

Da weiter

$$
(30.)\qquad \Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},
$$

$$
\sin ix = \frac{i}{2}e^x(1-e^{-2x})
$$

und

$$
q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},
$$

so folgt hieraus bei abermaliger Rücksicht auf (24.):

$$
\prod_1^m \prod_1^N \Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big)
$$

$$
= e^{-\frac{u}{K'}\log m + \frac{u}{K}m\pi}\, \Gamma\Big(1+\frac{u}{K'}\Big) \prod_1^m \frac{1-q^{2\mu}e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1-q^{2\mu}}.
$$

Ferner erhält man aus (24.)

$$
\prod_1^n \prod_1^M \Big(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\Big)\Big(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\Big)
$$

$$
= e^{\frac{2u}{K'}n\log M} \prod_1^n \frac{\Gamma\Big(1+\dfrac{\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1-\dfrac{\nu iK}{K'}\Big)}{\Gamma\Big(1+\dfrac{u+\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1+\dfrac{u-\nu iK}{K'}\Big)}.
$$

Setzt man diese Werthe der beiden Doppelproducte in die Gleichung (29.), differentiirt dieselbe nach u und berücksichtigt die Gleichung (11.), so findet man:

$$(31.)\qquad F(u) = \frac{2}{K'}\Big(\sum_1^n \log\nu + n\log\frac{K}{K'}\Big) + \frac{1}{K'}\log\frac{K}{2\pi K'} + \frac{\pi}{2K} + \frac{u\pi}{KK'}$$
$$-\frac{d}{du}\log\Gamma\Big(1+\frac{u}{K}\Big)\prod_1^n\Gamma\Big(1+\frac{u+\nu iK}{K'}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{u-\nu iK}{K'}\Big).$$

Diese Gleichung kann benutzt werden, um mit Hülfe von (25.) $F(u)$ auf eine neue Weise zu entwickeln; und zwar kann man so zwei Entwickelungen für $F(u)$ finden, eine, indem man $\log\Gamma\big(1+\frac{u}{K'}\big)$ in der Rechnung beibehält, und eine zweite, indem man auch diese Grösse entwickelt.

Die Gleichung (25.) setzt voraus, dass der reelle Theil von a nicht negativ ist; demgemäss soll jetzt angenommen werden, dass der reelle Theil von u nicht negativ ist.

Vernachlässigt man vorerst in (25.) den Rest V_λ, bezeichnet mit U eine Function der Veränderlichen ζ und mit Ω die Reihe:

$$(32.)\qquad U - \tfrac{1}{2}\log q\frac{dU}{d\zeta} + \frac{B_1}{1.2}(\log q)^2\frac{d^2U}{d\zeta^2} - \frac{B_2}{1.2.3.4}(\log q)^4\frac{d^4U}{d\zeta^4}$$
$$+\frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}(\log q)^6\frac{d^6U}{d\zeta^6} - \cdots,$$

so findet man bei Rücksicht auf die Gleichung (24.) und die Gleichungen, die durch wiederholte Differentiation aus dieser entstehen:

$$(33.)\qquad \begin{cases} K'F(u) = -\log(-2\log q) - \tfrac{1}{2}\log q + \zeta - \psi\big(\tfrac{u}{K'}\big) + \Omega, \\ \text{wo} \\ U = \log\Gamma\big(1+\tfrac{i\zeta}{\pi}\big)\Gamma\big(1-\tfrac{i\zeta}{\pi}\big), \\ \zeta = \tfrac{u\pi}{K}. \end{cases}$$

Hierbei ist noch zu bestimmen, welcher Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist. Es soll angenommen werden, dass der imaginäre Theil von u zwischen $-iK$ und $+iK$ liegt. Unter dieser Bedingung wird bei der Herleitung der Gleichungen (33.) die Gleichung (24.) nur auf Fälle angewendet, in welchen der reelle Theil von $a > -1$ ist; in solchen Fällen gilt für das dort vorkommende $\log\Gamma(1+a)$ die Gleichung, welche entsteht, wenn man durch die Gleichung (25.) und die Gleichung

$$\log \Gamma(a) = \log \Gamma(1+a) - \log a$$

$\log \Gamma(a)$ ausdrückt und dann $1+a$ für a setzt. Daraus folgt, dass jenes $\log \Gamma(1+a)$ sich stetig mit a ändert und reell ist, wenn a reell ist, und weiter, dass in (33.) derjenige Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist, der sich mit ζ stetig ändert und reell ist, wenn der reelle Theil von ζ verschwindet. Es lässt sich hiernach und zufolge der Gleichung (30.) der Werth von U auch schreiben:

$$U = \log \frac{i\zeta}{\sin i\zeta}$$

oder

$$= \log \frac{2\zeta}{e^{\zeta} - e^{-\zeta}},$$

wo derjenige Werth des Logarithmus zu nehmen ist, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Entwickelt man in (31.) auch $\Gamma\left(1+\frac{u}{K'}\right)$ nach (25.), so findet man:

$$(34.) \quad \begin{cases} K'F(u) = \Omega, \\ \text{wo } \Omega \text{ wieder die Reihe (32.) bedeutet und} \\ U = -\log(1-e^{-2\zeta}), \\ \zeta = \frac{u\pi}{K} \end{cases}$$

ist; auch hier hat man bei der Bildung von U denjenigen Werth des Logarithmus zu nehmen, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Berücksichtigt man bei der Bildung der in (33.) und (34.) für $F(u)$ angegebenen Reihen den Rest V_2 der Reihe (25.), so erhält man mit Hülfe der Gleichung (26.) Ausdrücke für die Reste jener. Benutzt man die Gleichung:

$$\int_0^{\infty} f(y)\{\cos 2y + \cos 4y + \cdots + \cos 2ny\}\, dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} f(y)\,dy + \tfrac{1}{2}\pi\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \cdots\},$$

in welcher n eine unendlich grosse Zahl bedeutet, so stellen sich diese Ausdrücke in einer Form dar, die ähnlich derjenigen ist, in welcher V_2 in (27.) angegeben ist, in einer Form, welche zeigt, dass ihre Werthe beliebig klein gemacht werden können dadurch, dass man den reellen Theil von u mit Hülfe der Gleichung (12.) mehr und mehr vergrössert. Nimmt man mit jenen Restausdrücken nicht die angedeutete Transformation vor und stellt in Beziehung auf sie eine Betrachtung an, wie sie in Beziehung auf den Ausdruck von V_1 in (26.) oben angegeben ist, so sieht man, dass die Reihen für $F(u)$ in (33.) und (34.) noch eine andere Bedeutung haben. Ist nämlich K unendlich gross, so geben diejenigen Glieder der Reihe (33.), welche nicht verschwinden, den Werth von $F(u)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an; ist überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK, so gilt dasselbe von der Reihe (34.). Es ist hiernach, wenn K unendlich gross ist:

$$(35.)\qquad K'F(u) = -\log(-2\log q)-\psi\left(\frac{u}{K'}\right)+\log\frac{2\zeta}{1-e^{-2\zeta}},$$

und, wenn überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK ist:

$$(36.)\qquad K'F(u) = -\log(1-e^{-2\zeta}),$$

wo

$$\zeta = \frac{u\pi}{K}.$$

Mit Hülfe von (33.) und (34.) ist es leicht Gleichungen zu bilden, welche statt der Gleichungen (16.) und (19.) zur Berechnung von $f(x)$ und y dienen können.

Setzt man

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}}-\xi\sqrt{z}\right)\frac{1}{4\log q}\left\{\log(-\log q)+\psi\left(\frac{\log t}{\log q}\right)-J(t)\right\},$$

so findet man

$$J(t) = J(qt)-\log q\left(\frac{4q^2t^2}{1-q^4t^4}+\frac{1}{\log qt}\right)$$

und $J(t)=\Omega$, wo $U=\log\frac{\zeta(1+e^{-2\zeta})}{1-e^{-2\zeta}}$. Für die in (19.) vorkommende Grösse $H(t)$ erhält man:

$$H(t) = -\frac{1}{2\log q}\Omega,\quad \text{wo}\quad U = \frac{e^{-2\zeta}}{1+e^{-4\zeta}}.$$

Hier, wie dort, bedeutet Ω die Reihe (32.) und ist

$$\zeta = -\log t;$$

die Werthe von t sind die in (16.) und (19.) angegebenen.

Für das in der Reihe für $H(t)$ vorkommende U hat man:

$$U = \quad t^2\frac{1}{1+t^4},$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -2t^2\frac{1-t^4}{(1+t^4)^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} = 4t^2\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^3}$$

und allgemein:

$$\frac{d^nU}{d\zeta^n} = (-2)^n t^2\frac{1+A_nt^4+B_nt^8+C_nt^{12}+\cdots}{(1+t^4)^{n+1}},$$

wo

$$A_n = (n+1)-3^n,$$

$$B_n = \frac{(n+1)n}{1\,.\,2}-(n+1)3^n+5^n,$$

$$C_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}3^n+(n+1)5^n-7^n,$$

. . . .

Es soll schliesslich noch der Fall betrachtet werden, dass die beiden Kugeln einander berühren und das Gesammtpotential in ihnen einen gleichen Werth hat.

Setzt man den Abstand der beiden Kugeln als unendlich klein voraus und bezeichnet ihn durch ε, d. h. macht man

$$c = 1+b+\varepsilon,$$

so findet man aus (4.) und (6.)

$$\xi = 1-\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$q = 1-\sqrt{\frac{1+b}{2b}\varepsilon}$$

und aus (5.) und (15.) unter der Annahme, dass $1-x$ unendlich gross gegen $\sqrt{\varepsilon}$ ist:

$$s = 1-\frac{2x}{1-x}\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$\frac{u_1}{K'} = \frac{b}{1+b}\,\frac{1}{1-x}-1,$$

$$\frac{u_2}{K'} = \frac{b}{1+b}\,\frac{x}{1-x}.$$

Nach (1.) hat man:

$$f(x) = h(f_1(x)-f_2(x)),$$

und daher nach (14.), (35.) und (36.):

$$(37.)\qquad f(x) = h\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x}\left\{\psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{x}{1-x}\right)-\psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x}-1\right)\right\}.$$

Diese Gleichung gilt auch für diejenigen Werthe von x, für welche u_1 negativ ist, obwohl bei der Ableitung von (35.) und (36.) vorausgesetzt wurde, dass der reelle Theil von u positiv sei. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht mit Hülfe der Gleichung (12.) und der Gleichung

$$\psi(a-1) = \psi(a) - \frac{1}{a}.$$

Die Gleichung (37.) stimmt mit der Gleichung (115.) in *Planas* Abhandlung überein.

Heidelberg, im Januar 1861.